Вiсник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. i мех. – 2010. – Т.15, вип. 18. – С. 88–101

УДК 517.925.44

Н. В. Шарай
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, БЛИЗКИХ К ЛИНЕЙНЫМ

Шарай Н. В. Асимптотична поведiнка розв'язкiв звичайних диференцiальних рiвнянь третього порядку, якi близькi до лiнiйних. Дослiджується асимптотична поведiнка розв'язкiв одного класу нелiнiйних неавтономних диференцiальних рiвiнянь третього порядку.
Ключовi слова: нелiйнi диференцiальнi рiвняння третього порядку, $P_w(\lambda_0)$-розв'язок, iснування, асимптотика при $t \longrightarrow w$.

Шарай Н. В. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, близких к линейным. Исследуется асимптотическое поведение решений одного класса нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений.
Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения третьего порядка, $P_w(\lambda_0)$-решение, существование, асимптотика при $t \longrightarrow w$.

Sharay N. V. The asymptotic representations for solutions of nonlinear differential equations of the third order. The asymptotic representations for solutions of a class of nonlinear non-autonomous differential equations of the third order, are established.
Key words: nonlinear differential equations of the third order, $P_w(\lambda_0)$-solution, the existence, the asymptotic representations at $t \longrightarrow w$.

1. **Введение.** Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y^{'''} = \alpha_0 p(t) y |\ln |y||^{\sigma}, \tag{1.1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1;1\}, \sigma \in \mathbb{R}$, $p : [a, w) \longrightarrow (0, +\infty)$ непрерывная функция; $\infty < a < w \leq +\infty$.

Уравнение (1.1) при $\sigma = 0$ является линейным. Оно исследуется во многих работах, среди которых особо следует отметить исследования И. Т. Кигурадзе, представленные в монографии И. Т. Кигурадзе, И. Чантурия [1].

Для дифференциального уравнения второго порядка с нелинейностями такого же типа, как в (1.1), асимптотическое поведение решений при $t \longrightarrow w$ изучалось в работах [2], [3].

Решение y уравнения (1.1), заданное на промежутке $[t_y, w) \subset [a, w)$, называется $P_w(\lambda_0)$-решением, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{t \longrightarrow w} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm\infty, \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2) \qquad \lim_{t \longrightarrow w} \frac{[y^{''}(t)]^2}{y^{'''}(t) y^{'}(t)} = \lambda_0 \tag{1.2}$$

Ниже будут получены необходимые и достаточные условия существования у уравнения (1.1) $P_w(\lambda_0)$-решений, для которых $\lambda_0 \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1, \frac{1}{2}\}$, а также асимптотические представления таких решений и их производных первого и второго порядка при $t \longrightarrow w$.

Введем необходимые для дальнейшего обозначения, полагая

$$\pi_w(t) = \begin{cases} t, \text{ если } w = +\infty, \\ t - w, \text{ если } w < +\infty; \end{cases}$$

$$I_A(t) = \int_A^t \pi_w^2(\tau)p(\tau)d\tau; \; J_B(t) = \int_B^t p^{\frac{1}{3}}(\tau)d\tau;$$

где $A, B \in \{w; a\}$ и выбираются таким образом, чтобы соответствующий интеграл стремился либо к нулю, либо к $+\infty$ при $t \longrightarrow w$.

2. **Основные результаты.**

Для доказательства основных теорем нам потребуются два вспомогательные утверждения, вытекающих из работы [4], для системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dz_i}{d\tau} = h_0(\tau)\left[q_i(\tau) + f_i(\tau, z_1, z_2, z_3) + \sum\limits_{j=1}^{3}(a_{ij} + b_{ij}(\tau))z_j + Z_i(\tau, z_1, z_2, z_3)\right], \\ i = 1, 2, \\ \dfrac{dz_3}{d\tau} = h_1(\tau)\left[q_3(\tau) + f_3(\tau, z_1, z_2, z_3) + \sum\limits_{j=1}^{3}(a_{3j} + b_{3j}(\tau))z_j + Z_3(\tau, z_1, z_2, z_3)\right], \end{cases} \tag{2.1}$$

в которой $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = \overline{1,3})$, $h_0, h_1 : [\tau_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ и $q_j, b_{ij} : [\tau_0, +\infty) \longrightarrow \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i, j = \overline{1,3})$ непрерывные функции, $f_i, Z_i : [\tau_0, +\infty) \times \mathbb{R}^3_C \longrightarrow \mathbb{R}$, $(i = \overline{1,3})$ непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{\tau \longrightarrow +\infty} f_i(\tau, z_1, z_2, z_3) = 0 \quad (i = \overline{1,3}) \text{ равномерно по } (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3_C. \tag{2.2}$$

$$\lim_{|z_1|+|z_2|+|z_3| \longrightarrow 0} \frac{Z_i(\tau, z_1, z_2, z_3)}{|z_1| + |z_2| + |z_3|} = 0 \quad (i = \overline{1,3}) \text{ равномерно по } \tau \in [\tau_0, +\infty), \tag{2.3}$$

где $-\infty < \tau_0 < w \leq +\infty$, $\mathbb{R}^3_C = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 : |z_1| + |z_2| + |z_3| \leq C, C > 0\}$

Будем говорить, что выполнено условие S, если наряду с (2.2) и (2.3) соблюдаются условия

$$\int_{\tau_0}^{+\infty} |h_0(\tau)q_i(\tau)|d\tau < +\infty, \; \int_{\tau_0}^{+\infty} |h_0(\tau)b_{ij}(\tau)|d\tau < +\infty, \; i = 1, 2, \; j = \overline{1,3}. \tag{2.4}$$

$$\int_{\tau_0}^{+\infty} |h_1(\tau)q_3(\tau)|d\tau < +\infty, \lim_{\tau \longrightarrow +\infty} \int_{\tau_0}^{\tau} |h_1(s)b_{33}(s)|ds = const. \tag{2.5}$$

Лемма 1. *Пусть $h_0, h_1 : [\tau_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно-дифференцируемые функции, такие что $h_0(\tau)h_1(\tau) \neq 0$ при $\tau \in [\tau_0, +\infty)$, выполнено условие S и*

$$\int_{\tau_0}^{+\infty} h_1(\tau)d\tau = \pm\infty, \quad \int_{\tau_0}^{+\infty} \left|\frac{b_{33}(\tau)}{h_0(\tau)}\right| h_1^2(\tau)d\tau < +\infty. \tag{2.6}$$

$$\lim_{\tau \longrightarrow +\infty} \frac{h_1(\tau)}{h_0(\tau)} = 0, \quad \lim_{\tau \longrightarrow +\infty} h_1^{-1}(\tau)\left(\frac{h_1(\tau)}{h_0(\tau)}\right)' = 0 \tag{2.7}$$

Пусть, кроме того, матрицы $A_3 = (a_{ij})_{i,j=1}^3$ *и* $A_2 = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ *таковы, что* $detA_3 \neq 0$, *а* A_2 *не имеет собственных значений с нулевой действительной частью. Тогда система дифференциальных уравнений (2.1) имеет, по крайней мере, одно решение* $(z_i)_{i=1}^3 : [\tau_1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_C^3 \quad (\tau_1 \in [\tau_0, +\infty))$, *стремящиеся к нулю при* $\tau \longrightarrow +\infty$.

Лемма 2. *Пусть* $h_0, h_1 : [\tau_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *— непрерывные функции, такие что* $h_0(\tau)h_1(\tau) \neq 0$ *при* $\tau \in [\tau_0, +\infty)$,*выполнено условие* S *и*

$$\int_{\tau_0}^{+\infty} h_0(\tau)d\tau = \pm\infty, \lim_{\tau \longrightarrow +\infty} \frac{h_0(\tau)}{h_1(\tau)} = 0. \tag{2.8}$$

Пусть, кроме того, $a_{33} \neq 0$ *и матрица* $\widetilde{A}_2 = (a_{ij} - a_{i3}a_{3j}a_{33}^{-1})_{i,j=1}^2$ *не имеет собственных значений с нулевой действительной частью. Тогда система дифференциальных уравнений (2.1) имеет, по крайней мере, одно решение* $(z_i)_{i=1}^3 : [\tau_1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_C^3 \quad (\tau_1 \in [\tau_0, +\infty))$, *стремящиеся к нулю при* $\tau \longrightarrow +\infty$.

Для уравнения (1.1) имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $\sigma \neq 1$. *Тогда для существования у уравнения (1.1)* $P_w(\lambda_0)$*-решений, где* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0; 1; \frac{1}{2}\}$, *необходимо, а если*

$$\lambda_0 \neq \frac{-(2+\sigma) \pm \sqrt{(2+\sigma)^2 + 8}}{4}, \lambda_0 \neq \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2},$$

$$\lambda_0 \neq \frac{-(2-\sigma) \pm \sqrt{(2-\sigma)^2 + 8}}{4}, \tag{2.9}$$

то и достаточно, чтобы

$$\lim_{t \longrightarrow w} \frac{p(t)\pi_w^3(t)}{|\frac{(1-\sigma)(1-\lambda_0)^2}{\lambda_0} I_A(t)|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}} = \alpha_0 \frac{|\lambda_0||2\lambda_0 - 1|}{|\lambda_0 - 1|^3} \tag{2.10}$$

и выполнено неравенство

$$\alpha_0\lambda_0(2\lambda_0 - 1)(\lambda_0 - 1)\pi_w(t) > 0. \tag{2.11}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \longrightarrow w$ *асимптотические представления:*

$$\begin{aligned} \ln|y(t)| &= \nu|(1-\sigma)\tfrac{(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0} I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}(1 + 0(1)), \\ \frac{y'(t)}{y(t)} &= \frac{(2\lambda_0 - 1)}{(\lambda_0 - 1)\pi_w(t)}(1 + 0(1)), \\ \frac{y''(t)}{y'(t)} &= \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_w(t)}(1 + 0(1)), \end{aligned} \tag{2.12}$$

где

$$\nu = sign(\alpha_0\lambda_0(1-\sigma)I_A(t)). \tag{2.13}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y : [t_y, w) \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $P_w(\lambda_0)$ — решение уравнения (1.1), где $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, \frac{1}{2}\}$. В силу условия (1.2) и тождества

$$\frac{y^{'''}(t)y^{'}(t)}{(y^{'}(t))^2} = \frac{\left(\frac{y^{''}(t)}{y^{'}(t)}\right)^{'}}{\left(\frac{y^{''}(t)}{y^{'}(t)}\right)^2} + 1$$

имеем

$$\frac{\left(\frac{y^{''}(t)}{y^{'}(t)}\right)^{'}}{\left(\frac{y^{''}(t)}{y^{'}(t)}\right)^2} = \frac{1-\lambda_0}{\lambda_0} + 0(1) \text{ при } t \longrightarrow w.$$

Отсюда, учитывая условия (1.2), получаем, что

$$\lim_{t \longrightarrow w} \frac{\pi_w(t)y^{'}(t)}{y(t)} = \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1}; \ \lim_{t \longrightarrow w} \frac{\pi_w(t)y^{''}(t)}{y^{'}(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1};$$

$$\lim_{t \longrightarrow w} \frac{\pi_w(t)y^{'''}(t)}{y^{''}(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}. \tag{2.14}$$

В силу этих соотношений из (1.1) имеем

$$y^{'}(t) = \alpha_0 p(t) \frac{(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} y(t)\pi_w^2(t)|\ln|y(t)||^{\sigma} \text{ при } t \longrightarrow w,$$

иначе

$$\frac{y^{'}(t)}{y(t)|\ln|y(t)||^{\sigma}} = \alpha_0 p(t) \frac{(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} \pi_w^2(t).$$

Интегрируя данное соотношение от t_0 до t ($t_y \le t_0 \le t < w$) с учетом определения $P_w(\lambda_0)$-решения, получим

$$\frac{|\ln|y(t)||^{1-\sigma} sign(\ln|y(t)|)}{1-\sigma} = \alpha_0 \frac{(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} I_A(t)(1 + 0(1)) \text{ при } t \longrightarrow w.$$

Отсюда следует, что $sign(\ln|y(t)|) = \nu$ и

$$\ln|y(t)| = \nu \left[(1-\sigma)\frac{(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} I_A(t)\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} (1 + 0(1)) \text{ при } t \longrightarrow w, \tag{2.15}$$

где ν определяется из (2.13).

Подставляя соотношение (2.15) в (1.1) с учетом тождества

$$\frac{y^{'''}(t)}{y(t)} = \frac{y^{'''}(t)y^{'}(t)}{(y^{''}(t))^2} \frac{(y^{''}(t))^2}{y^{'}(t)y(t)},$$

а также предельных соотношений (2.14), имеем

$$\frac{\lambda_0^2(2\lambda_0 - 1)}{(\lambda_0 - 1)^3 \pi_w^3(t)} = \alpha_0 p(t) \left|(1-\sigma)\frac{(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} I_a(t)\right|^{\frac{\sigma}{\sigma - 1}} (1 + 0(1)) \text{ при } t \longrightarrow w.$$

Из этого асимптотического соотношения непосредственно вытекают условия (2.10) и (2.11). Справедливость асимптотических представлений (2.12) следует из (2.15) и предельных соотношений (2.14).

Достаточность. Предположим, что при некотором $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, \frac{1}{2}\}$, удовлетворяющем условиям (2.9), соблюдаются (2.10) и (2.11). Покажем, что в этом случае уравнение (1.1) имеет решение, представимое асимптотическими соотношениями (2.12).

Уравнение (1.1) с помощью преобразования

$$\begin{array}{r}\ln|y(t)| = \nu\left[(1-\sigma)\frac{(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0}I_A(t)\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}(1+v_1(\tau)),\\ \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{(2\lambda_0-1)}{(\lambda_0-1)\pi_w(t)}(1+v_2(\tau)),\\ \frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_w(t)}(1+v_3(\tau)),\end{array} \tag{2.16}$$

$$\tau = \beta\ln|\pi_w(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1, & \text{при } w = +\infty,\\ -1, & \text{при } w < +\infty;\end{cases}$$

сводится к системе дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{\beta q(\tau)}{1-\sigma}\left[\dfrac{1}{h(\tau)}(1+v_2) - (1+v_1)\right],\\ v_2' = \beta\left((1+v_2) + \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)}(1+v_2)(1+v_3) - \frac{(2\lambda_0-1)}{\lambda_0-1}(1+v_2)^2\right),\\ v_3' = \dfrac{\beta}{\lambda_0-1}\left(h(\tau)\dfrac{(1+v_1)^\sigma}{1+v_2} - \lambda_0(1+v_3)^2 + (\lambda_0-1)(1+v_3)\right),\end{cases} \tag{2.17}$$

в которой

$$q(\tau) = q(\tau(t)) = \frac{\pi_w(t)I_A'(t)}{I_A(t)};$$

$$h(\tau) = h(\tau(t)) = \alpha_0 p(t)\left|\frac{(1-\sigma)(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0}I_A(t)\right|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \cdot \frac{(\lambda_0-1)^3\pi_w^3(t)}{\lambda_0(2\lambda_0-1)}.$$

Выберем произвольным образом $a_0 \in (a, w)$ и рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2.17) на множестве $[\tau_0; +\infty) \times \mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}}$, где

$$\tau_0 = \beta\ln|\pi_w(\alpha_0)|, \quad \mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}} = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : |v_i| \le \frac{1}{2}, i = 1, 2, 3\}.$$

На этом множестве правые части (2.17) непрерывны и имеют непрерывные частные производные по v_1, v_2, v_3. Кроме того, в силу условий (2.10) и вида функций $I_A(t), \tau(t)$

$$\begin{aligned}&\lim_{\tau\longrightarrow+\infty} h(\tau) = \lim_{\tau\longrightarrow w} h(\tau(t)) =\\ &= \lim_{\tau\longrightarrow w}\frac{\alpha_0 p(t)\left|\frac{(1-\sigma)(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0}I_A(t)\right|^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(\lambda_0-1)^3\pi_w^3(t)}{\lambda_0(2\lambda_0-1)} = 1.\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\int_{t_0}^{+\infty}\beta q(\tau)d\tau=\int_{a_0}^{+\infty}\frac{I_A'(t)}{I_A(t)}dt=\ln|I_A(t)|\Big|_{a_0}^{w}=\begin{cases}+\infty, & \text{если } A=a,\\ -\infty, & \text{если } A=w;\end{cases} \tag{2.19}$$

причем q сохраняет знак на промежутке $[\tau_0,+\infty)$.

Выделяя в правых частях (2.17) линейные части, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} v_1'=\dfrac{\beta q(\tau)}{1-\sigma}\left[\dfrac{1}{h(\tau)}-1-v_1+\dfrac{1}{h(\tau)}v_2)\right],\\ v_2'=\dfrac{\beta}{\lambda_0-1}\left((1-2\lambda_0)v_2+\lambda_0v_3+V_2(\tau,v_1,v_2,v_3)\right),\\ \\ v_3'=\dfrac{\beta}{\lambda_0-1}\left((h(\tau)-1)+h(\tau)\sigma v_1-h(\tau)v_2-(\lambda_0+1)v_3+V_3(\tau,v_1,v_2,v_3)\right),\end{cases} \tag{2.20}$$

где

$$\begin{array}{l} V_2=\lambda_0v_2v_3+(1-2\lambda_0)v_2^2;\\ V_3=-\lambda_0v_3^2+h(\tau)((1+v_1)^\sigma-1-\sigma v_1)(1-v_2)+(1+\sigma v_1)\times\\ \times\left(\frac{1}{1+v_2}-1+v_2\right)+((1+v_1)^\sigma-1-\sigma v_1)\left(\frac{1}{1+v_2}-1+v_2\right)-\sigma v_1v_2.\end{array} \tag{2.21}$$

При этом заметим, что

$$q(\tau(t))=\frac{\pi_w(t)I_A'(t)}{I_A(t)}=\frac{\nu(1-\sigma)h(\tau(t))}{\alpha_0\lambda_0(\lambda_0-1)\left|\frac{(1-\sigma)(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0}I_A(t)\right|^{\frac{1}{1-\sigma}}}. \tag{2.22}$$

Поскольку $\lim_{\tau\longrightarrow+\infty}h(\tau)=1$, то с учетом вида $I_A(t),\tau(t)$, имеем

$$\lim_{\tau\longrightarrow+\infty}q(\tau)=\lim_{t\longrightarrow w}q(\tau(t))=\begin{cases}\infty, & \text{если } \lim\limits_{t\longrightarrow w}|I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}=0,\\ 0, & \text{если } \lim\limits_{t\longrightarrow w}|I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}=+\infty.\end{cases}$$

В зависимости от значений предела $q(\tau)$, получаем два возможных случая. Каждый из случаев рассмотрим в отдельности.

1. Пусть $\lim\limits_{t\longrightarrow w}|I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}=0$. Переобозначим переменные в системе (2.20), полагая

$$\begin{cases} z_1=v_2,\\ z_2=v_3,\\ z_3=v_1.\end{cases} \tag{2.23}$$

Тогда получим систему дифференциальных уравнений вида (2.1), в которой $a_{11}=1-2\lambda_0$, $a_{12}=\lambda_0$, $a_{13}=0$, $a_{21}=-1, a_{22}=-(\lambda_0+1)$, $a_{23}=\sigma$, $a_{31}=1, a_{32}=0$, $a_{33}=-1$, $q_i=0, b_{ij}=0, i,j=\overline{1,3}$, функции $f_1(\tau,z_1,z_2,z_3)=0$, $f_2(\tau,z_1,z_2,z_3)=h(\tau)-1+\delta_2(\tau)\sigma z_3-\delta_1(\tau)z_1$, $f_3(\tau,z_1,z_2,z_3)=\frac{1}{h(\tau)}-1+\delta_2(\tau)z_2$, $Z_1(\tau,z_1,z_2,z_3)=V_2(\tau,v_3,v_1,v_2), Z_2(\tau,z_1,z_2,z_3)=V_3(\tau,v_3,v_1,v_2), Z_3(\tau,z_1,z_2,z_3)=0$, $h_0(\tau)=\frac{\beta}{\lambda_0-1}, h_1(\tau)=\frac{\beta q(\tau)}{1-\sigma}$; функции $\delta_i(\tau)$ непрерывны и удовлетворяют условию $\lim\limits_{\tau\longrightarrow+\infty}\delta_i(\tau)=0, i=\overline{1,3}$.

Для полученной системы дифференциальных уравнений выполнены условиям леммы 2. В самом деле, условие S выполняется, так как выполнены (2.2)–(2.5):

$$\lim_{\tau\longrightarrow+\infty} f_1(\tau,z_1,z_2,z_3)=0,\quad \lim_{\tau\longrightarrow+\infty} f_2(\tau,z_1,z_2,z_3)=$$
$$=\lim_{\tau\longrightarrow+\infty}(h(\tau)-1+\delta_2(\tau)\sigma z_3-\delta_1(\tau)z_1)=0,\quad \lim_{\tau\longrightarrow+\infty} f_3(\tau,z_1,z_2,z_3)=$$
$$=\lim_{\tau\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{h(\tau)}-1+\delta_2(\tau)z_2\right)=0\quad \text{равномерно по } (z_1,z_2,z_3);$$

$$\lim_{|z_1|+|z_2|+|z_3|\longrightarrow0}\frac{Z_1(\tau,z_1,z_2,z_3)}{|z_1|+|z_2|+|z_3|}=\lim_{|z_1|+|z_2|+|z_3|\longrightarrow0}\frac{Z_2(\tau,z_1,z_2,z_3)}{|z_1|+|z_2|+|z_3|}=$$
$$=\lim_{|z_1|+|z_2|+|z_3|\longrightarrow0}\frac{Z_3(\tau,z_1,z_2,z_3)}{|z_1|+|z_2|+|z_3|}=0\quad \text{равномерно по } \tau\in[\tau_0,+\infty).$$

Функции $h_0(\tau)$ и $h_1(\tau)$ такие, что

$$h_0(\tau)h_1(\tau)=\frac{\beta q(\tau)}{1-\sigma}\cdot\frac{\beta}{\lambda_0-1}=\frac{\beta^2q(\tau)}{(1-\sigma)(\lambda_0-1)}\neq0,\ \text{при } \lambda_0\neq1;\sigma\neq1,\tau_0\in[\tau,+\infty) \tag{2.24}$$

В рассматриваемом случае

$$\int_{a_0}^{w}h_0(\tau(t))dt=\frac{\beta}{\lambda_0-1}\lim_{A\longrightarrow+\infty}\tau\Big|_{a_0}^{A}=+\infty, \tag{2.25}$$

причем

$$\lim_{\tau\longrightarrow+\infty}\frac{h_0(\tau)}{h_1(\tau)}=\lim_{\tau\longrightarrow+\infty}\frac{1-\sigma}{(\lambda_0-1)q(\tau)}=0, \tag{2.26}$$

при $\sigma\neq1,\lambda_0\neq1$.

Следовательно, выполнены условия (2.7)–(2.8) леммы 2,причем $a_{33}=-1\neq0$ и матрица $\widetilde{A}_2=\begin{pmatrix}1-2\lambda_0 & \lambda_0\\ -1-\sigma & -(\lambda_0+1)\end{pmatrix}$ не имеет собственных значений с нулевой действительной частью, поскольку $\lambda_0\neq0$ и выполнено первое из условий (2.10).

Тогда у полученной системы вида (2.1) согласно лемме 2 существует хотя бы одно решение, стремящиеся к нулю при $\tau\longrightarrow+\infty$. Каждому из них в силу замен переменных (2.16) и (2.23) соответствует решение $y(t)$ дифференцильного уравнения (1.1), удовлетворяющее при $t\longrightarrow w$ асимптотическим соотношениям (2.12).

2. Пусть $\lim\limits_{t\longrightarrow w}|I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}=+\infty$. Учитывая условие (2.2), будем иметь

$$q(\tau(t))=\frac{\pi_w^3(t)p(t)}{\int_A^t\pi_w^2(\tau)p(\tau)d\tau}=$$
$$=\frac{\alpha_0|\lambda_0||2\lambda_0-1|}{|\lambda_0-1|^3}\cdot\frac{\left|(1-\sigma)\frac{(1-\lambda_0)^2}{\lambda_0}I_A(t)\right|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{|I_A(t)|signI_A(t)}(1+0(1)). \tag{2.27}$$

Полагая

$$q_1(\tau(t))=\frac{\alpha_0|\lambda_0||2\lambda-1|}{|\lambda_0-1|^3}\cdot\frac{\left|(1-\sigma)\frac{(1-\lambda_0)^2}{\lambda_0}I_A(t)\right|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{|I_A(t)|signI_A(t)},$$

имеем
$$q(\tau(t)) = q_1(\tau(t))(1+\widetilde{\delta}(\tau)). \tag{2.28}$$

В полученной системе сделаем замену (2.23). С учетом (2.28) получим систему вида (2.1), где $a_{ij}, q_i, b_{ij}, Z_i(\tau, z_1, z_2, z_3), i, j = \overline{1,3}$, $f_1(\tau, z_1, z_2, z_3)$, $f_2(\tau, z_1, z_2, z_3)$, такие же, как в случае 1. Функции $f_3(\tau, z_1, z_2, z_3)$,$h_1(\tau)$ и $h_0(\tau)$ могут быть записаны в виде $f_3(\tau, z_1, z_2, z_3) = (\frac{1}{h(\tau)} - 1 + \delta_2(\tau)z_1)(1+\widetilde{\delta}(\tau)) + z_1\widetilde{\delta}(\tau) - z_3\widetilde{\delta}(\tau)$, $h_1(\tau) = \frac{\beta q_1(\tau)}{1-\sigma}$ и $h_0(\tau) = \frac{\beta}{\lambda_0 - 1}$. При этом для них выполняется условие S:
$$\lim_{\tau \longrightarrow +\infty} \widetilde{\delta}(\tau) = 0, \lim_{\tau \longrightarrow +\infty} f_3(\tau, z_1, z_2, z_3) = 0$$
равномерно по (z_1, z_2, z_3).

Для полученной системы дифференциальных уравнений выполнены условия леммы 1. В самом деле, функции $h_0(\tau)$ и $h_1(\tau)$ такие, что $h_0(\tau)h_1(\tau) \neq 0$ при $\tau \in (a, +\infty]$ и
$$\int_{a_0}^{w} h_1(\tau(t))dt = \int_{\tau}^{+\infty} \frac{\beta q_1(\tau)}{1-\sigma} dt = \begin{cases} +\infty, \text{ если } A = a, \\ -\infty, \text{ если } A = w, \end{cases}$$
$$\lim_{t \longrightarrow w} \frac{h_1(t)}{h_0(t)} = \lim_{t \longrightarrow w} \frac{q_1(\tau)(\lambda_0 - 1)}{1-\sigma} = 0$$
при $\sigma \neq 1$ и $\lambda_0 \neq 1$, причем
$$\int_{a_0}^{w} \left| \frac{b_{33}}{h_0(t)} \right| h_1^2(t)dt = \int_{a_0}^{w} \frac{|\lambda_0 - 1|}{(1-\sigma)^2} q^2(\tau(t))dt < +\infty.$$

Кроме того,в рассматриваемом случае
$$\lim_{\tau \longrightarrow +\infty} h_1^{-1}(\tau) \left(\frac{h_1(\tau)}{h_0(\tau)} \right)' = \lim_{t \longrightarrow w} \frac{\lambda_0 - 1}{\beta} \cdot \frac{(q_1(\tau(t)))'_\tau \frac{dt}{d\tau}}{q_1(\tau(t))} =$$
$$= \lim_{t \longrightarrow w} \frac{\lambda_0 - 1}{\beta} \cdot \left(\frac{\left| (1-\sigma)\frac{(1-\lambda_0)^2}{\lambda_0} I_A(t) \right|^{\frac{1}{\sigma-1}}}{\left| (1-\sigma)\frac{(1-\lambda_0)^2}{\lambda_0} I_A(t) \right|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}} - \frac{\pi_w(t) I_A'(t)}{I_A(t)} \right) = 0.$$

Следовательно, выполнены условия (2.7)–(2.9) леммы 1, причем $det A_3 = -2\lambda_0^2 + \lambda_0(\sigma - 2) + 1 \neq 0$ в силу третьего из условий (2.9), матрица $\widetilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1-2\lambda_0 & \lambda_0 \\ -1-\sigma & -(\lambda_0+1) \end{pmatrix}$ в силу второго из условий (2.9) не имеет собственных значений с нулевой действительной частью. Таким образом, соблюдаются все условия леммы 1.

Тогда у полученной системы вида (2.1) согласно лемме 1 существует хотя бы одно решение, стремящиеся к нулю при $\tau \longrightarrow +\infty$. Каждому из них в силу замен переменных (2.16) и (2.23) соответствует решение $y(t)$ дифференцильного уравнения (1.1), удовлетворяющее при $t \longrightarrow w$ асимптотическим соотношениям (2.12).

Теорема доказана. $\square$

Теорема 2. *Пусть $\sigma \neq 3$. Тогда для существования у уравнения (1.1) $P_w(1)$ решений необходимо, а если $p : [a, w) \longrightarrow (0, +\infty)$ — непрерывно-дифференцируема и такая, что существует конечный или равный $\pm\infty$*

$$\lim_{t \longrightarrow w} \frac{\left(p^{\frac{1}{3}}(t)|I_B(t)|^{\frac{\sigma}{3-\sigma}}\right)'}{p^{\frac{1}{3}}(t)|I_B(t)|^{\frac{3\sigma}{3-\sigma}}}, \tag{2.29}$$

то и достаточно, чтобы

$$\lim_{t \longrightarrow w} \pi_w(t) p^{\frac{1}{3}}(t)|I_B(t)|^{\frac{\sigma}{3-\sigma}} = \infty. \tag{2.30}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \longrightarrow w$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} &\ln|y(t)| = \mu \left|\tfrac{3-\sigma}{3} I_B(t)\right|^{\frac{3-\sigma}{3}} (1 + 0(1)), \\ &\tfrac{y'(t)}{y(t)} = p^{\frac{1}{3}}(t) \left|\tfrac{3-\sigma}{3} I_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{3-\sigma}} (1 + 0(1)), \\ &\tfrac{y''(t)}{y(t)} = p^{\frac{1}{3}}(t) \left|\tfrac{3-\sigma}{3} I_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{3-\sigma}} (1 + 0(1)), \end{aligned} \tag{2.31}$$

где

$$\mu = sign\left(\frac{3-\sigma}{3} I_B(t)\right). \tag{2.32}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y; [t_y, w) \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $P_w(1)$ — решения дифференциального уравнения (1.1). Тогда в силу условий (1.2), где $\lambda_0 = 1$ с учетом тождества $\frac{y'''(t) y'(t)}{(y''(t))^2} = \frac{\left(\frac{y''(t)}{y'(t)}\right)'}{\left(\frac{y''(t)}{y'(t)}\right)^2} + 1$ получим

$$\lim_{t \longrightarrow w} \frac{\pi_w(t) y'(t)}{y(t)} = \infty; \quad \lim_{t \longrightarrow w} \frac{\pi_w(t) y''(t)}{y'(t)} = \infty; \quad \lim_{t \longrightarrow w} \frac{\pi_w(t) y'''(t)}{y''(t)} = \infty; \tag{2.33}$$

Кроме того, из (1.2) следует, что $\lim\limits_{t \longrightarrow w} \dfrac{(y''(t))^2}{y'''(t) y'(t)} = 1$ следует, что $\frac{y'''(t)}{y(t)} \sim \sim \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^3$ при $t \longrightarrow w$ поэтому согласно (1.1)

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^3 = \alpha_0 p(t) |\ln|y(t)||^{\sigma} (1 + 0(1)) \text{ при } t \longrightarrow w.$$

Отсюда вытекает асимптотическое соотношение

$$\frac{y'(t)}{y(t) |\ln|y(t)||^{\frac{\sigma}{3}}} = p^{\frac{1}{3}}(t)(1 + 0(1)) \text{ при } t \longrightarrow w. \tag{2.34}$$

Интегрируя это соотношение от t_0 до t $\quad (t \in [t_y, w))$ и учитывая, что $\sigma \neq 3$ и выполняется одно из условий (1.2), получаем

$$|\ln|y(t)||^{\frac{3-\sigma}{3}} sign(\ln|y(t)|) = \frac{3-\sigma}{3} I_B(t)(1 + 0(1)) \text{ при } t \longrightarrow w.$$

Следовательно, $sign(\ln|y(t)|) = \mu$, где определяется формулой (2.32), и

$$\ln|y(t)| = \mu\left|\frac{3-\sigma}{3}I_B(t)\right|^{\frac{3}{3-\sigma}}(1+0(1)) \text{ при } t \longrightarrow w, \tag{2.35}$$

таким образом, имеет место первое из асимптотических соотношений (2.31). Учитывая его, из (2.35) получаем второе из асимптотических представлений (2.31)

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = p^{\frac{1}{3}}(t)(\ln|y(t)|)^{\frac{\sigma}{3}}(1+0(1)) \text{ при } t \longrightarrow w.$$

В силу первых двух получаем третье из представлений (2.31)

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \mu p^{\frac{1}{3}}(t)\left|\frac{3-\sigma}{3}I_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{3-\sigma}}(1+0(1)) \text{ при } t \longrightarrow w.$$

В силу (2.34) и (2.35) получим соотношение (2.30).

Достаточность. Предположим, что функция $p : [a, w) \longrightarrow (0, +\infty)$ — непрерывно-дифференцируема, существует конечный или равный $\pm\infty$ предел (2.29) и соблюдается условие (2.30). Поскольку $\sigma \neq 3$, то, применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\begin{aligned}
&\ln|y(t)| = \mu\left|\tfrac{3-\sigma}{3}I_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{3-\sigma}}(1+v_1(\tau)),\\
&\frac{y'(t)}{y(t)} = p^{\frac{1}{3}}(t)\left|\frac{3-\sigma}{3}I_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{3-\sigma}}(1+v_2(\tau)),\\
&\frac{y''(t)}{y(t)} = \mu p^{\frac{1}{3}}(t)\left|\frac{3-\sigma}{3}I_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{3-\sigma}}(1+v_3(\tau)),\\
&\tau = \beta\ln|I_B(t)|,\ \beta = \begin{cases} 1, & \text{если } B = a,\\ -1, & \text{если } B = w,\end{cases}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

получим систему диффренциальных уравнений

$$\begin{cases}
v_1' = \dfrac{3\beta}{3-\sigma}(v_2 - v_1),\\
v_2' = \dfrac{3\beta\mu q(\tau)}{3-\sigma}((1+v_2)(1+v_3) - (1+v_2)^2 - h(\tau)(1+v_2)),\\
v_3' = \dfrac{3\beta\mu q(\tau)}{3-\sigma}\left(\dfrac{(1+v_1)}{(1+v_2)} - (1+v_3)^2 - h(\tau)(1+v_3)\right),
\end{cases} \tag{2.37}$$

в которой $q(\tau) = q(\tau(t)) = \left|\frac{3-\sigma}{3}I_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{3-\sigma}}$, $h(\tau) = h(\tau(t)) = \frac{\left(p^{\frac{1}{3}}(t)\left|\frac{3-\sigma}{3}I_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{3-\sigma}}\right)'}{p^{\frac{2}{3}}(t)\left|\frac{3-\sigma}{3}I_B(t)\right|^{\frac{2\sigma}{3-\sigma}}}$.

Выберем произвольным образом $a_0 \in (a, w)$. Так как соблюдается второе из условий (2.30): $\int_{a_0}^{w} p^{\frac{1}{3}}\left|\frac{3-\sigma}{3}I_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{3-\sigma}}dt = +\infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{t\longrightarrow w}\left|\frac{3-\sigma}{3}I_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{3-\sigma}}dt = +\infty.$$

Учитывая вид функции $\tau(t)$, имеем:

$$\lim_{t\longrightarrow +\infty} q(\tau) = \lim_{t\longrightarrow w} q(\tau(t)) = +\infty. \tag{2.38}$$

Покажем, что $\lim\limits_{t \longrightarrow w} h(\tau(t)) = 0$. В силу условий теоремы $\lim\limits_{t \longrightarrow w} h(\tau(t))$ существует (конечный или равный $\pm\infty$).

Допустим, что

$$\lim_{t \longrightarrow w} h(\tau(t)) = \begin{cases} \text{либо } const \neq 0, \\ \text{либо } \pm\infty; \end{cases} \tag{2.39}$$

Интегрируя функцию $h(\tau(t))$ на промежутке от a_0 до $t \quad (t \in [a_0, w))$, получим

$$\int_{a_0}^{t} h(\tau(t))dt = -\frac{1}{p^{\frac{1}{3}}(t)\left|\frac{3-\sigma}{3} I_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{3-\sigma}}} + C, \tag{2.40}$$

где C — постоянная.

Если $w = +\infty$, то $\pi_w(t) = t$. В этом случае в силу второго из условий (2.31), условий (2.39) и (2.30)

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{\int_{a_0}^{t} h(\tau(t))dt}{t} = 0. \tag{2.41}$$

Этого быть не может, так как силу правила Лопиталя и (2.41)

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{\int_{a_0}^{t} h(\tau(t))dt}{t} = \lim_{t \longrightarrow +\infty} h(\tau(t)) \neq 0.$$

Если $w < \infty$, то $\pi_w(t) = t - w$,в силу (2.31)

$$\lim_{t \longrightarrow w} p^{\frac{1}{3}}(t)\left|\frac{3-\sigma}{3} I_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{3-\sigma}} = +\infty.$$

Следовательно, $\lim\limits_{t \longrightarrow w} \displaystyle\int_{a_0}^{t} h(\tau(t))dt = C$, значит, (2.40) может быть переписано в виде

$$\int_{w}^{t} h(\tau(t))dt = -\frac{1}{p^{\frac{1}{3}}(t)\left|\frac{3-\sigma}{3} I_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{3-\sigma}}}.$$

Разделим это соотношение на $\pi_w(t)$ и перейдем к пределу при $t \longrightarrow w$, получим с учетом (2.30), что $\lim\limits_{t \longrightarrow w} \dfrac{\int_{w}^{t} h(\tau(t))dt}{t-w} = 0$.

Такого, однако, быть не может, так как предел, стоящий слева в силу правила Лопиталя и (2.38), является отличным от нуля. Таким образом, предположение о том, что $\lim\limits_{t \longrightarrow w} h(\tau(t)) \neq 0$, было не верным. Следовательно,

$$\lim_{\tau \longrightarrow +\infty} h(\tau) = \lim_{t \longrightarrow w} h(\tau(t)) = 0. \tag{2.42}$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2.37) на множестве $[\tau_0; +\infty) \times \mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}}$, где $\tau_0 = \beta \ln |I_B(a_0)|$; $\mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}} = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : |v_i| \leq \frac{1}{2}, i = \overline{1,3}\}$. На этом множестве правые части системы (2.37) непрерывны и имеют непрерывные частные производные по переменным v_1, v_2, v_3.

Выделяя во втором и третьем уравнении системы линейную часть, получаем систему в виде

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{3\beta}{3-\sigma}(v_2 - v_1), \\ v_2' = \dfrac{3\beta\mu q(\tau)}{3-\sigma}(-h(\tau) - v_2(1+h(\tau)) + V_2(\tau, v_1, v_2, v_3)), \\ v_3' = \dfrac{3\beta\mu q(\tau)}{3-\sigma}(-h(\tau) + \sigma v_1 - v_2 - (2+h(\tau))v_3 + V_3(\tau, v_1, v_2, v_3)), \end{cases} \tag{2.43}$$

где $V_2(\tau, v_1, v_2, v_3) = v_2 v_3 - v_2^2$; $V_3(\tau, v_1, v_2, v_3) = ((1+v_1)^\sigma - 1 - \sigma v_1)(1-v_2) + (1+ +\sigma v_1)(\frac{1}{1+v_2} - 1 + v_2) + ((1+v_1)^\sigma - 1 - \sigma v_1)(\frac{1}{1+v_2} - 1 + v_2) - v_3^2 - \sigma v_1 v_2$. Переобозначая переменные системы (2.43) следующим образом

$$\begin{cases} z_1 = v_2, \\ z_2 = v_3, \\ z_3 = v_1, \end{cases} \tag{2.44}$$

получим систему дифференциальных уравнений вида (2.4), в которой $a_{11} = -1$, $a_{12} = 1, a_{13} = 0, a_{21} = -1, a_{22} = -2$, $a_{23} = \sigma$, $a_{31} = 1, a_{32} = 0$, $a_{33} = -1$, $q_i = = 0, b_{ij} = 0, i, j = \overline{1,3}$,функции $f_1(\tau, z_1, z_2, z_3) = -h(\tau) - h(\tau)z_1$, $f_2(\tau, z_1, z_2, z_3) = = -h(\tau) - h(\tau)z_2$, $f_3(\tau, z_1, z_2, z_3) = 0$, $Z_1(\tau, z_1, z_2, z_3) = V_2(\tau, v_2, v_3, v_1)$, $Z_2(\tau, z_1, z_2, z_3) = V_3(\tau, v_2, v_3, v_1)$, $Z_3(\tau, z_1, z_2, z_3) = 0$ непрерывны.

Проверим для полученной системы выполнение условий леммы 2. Условие S выполнено, так как

$$\lim_{\tau \longrightarrow +\infty} f_1(\tau, z_1, z_2, z_3) = \lim_{\tau \longrightarrow +\infty} (-h(\tau) - h(\tau)z_1) = 0, \quad \lim_{\tau \longrightarrow +\infty} f_3(\tau, z_1, z_2, z_3) = 0,$$

$$\lim_{\tau \longrightarrow +\infty} f_2(\tau, z_1, z_2, z_3) = \lim_{\tau \longrightarrow +\infty} (-h(\tau) - h(\tau)z_2) = 0 \quad \text{равномерно по } (z_1, z_2, z_3),$$

$$\lim_{|z_1|+|z_2|+|z_3| \longrightarrow 0} \frac{Z_1(\tau, z_1, z_2, z_3)}{|z_1| + |z_2| + |z_3|} = \lim_{|z_1|+|z_2|+|z_3| \longrightarrow 0} \frac{Z_2(\tau, z_1, z_2, z_3)}{|z_1| + |z_2| + |z_3|} =$$

$$= \lim_{|z_1|+|z_2|+|z_3| \longrightarrow 0} \frac{Z_3(\tau, z_1, z_2, z_3)}{|z_1| + |z_2| + |z_3|} = 0 \quad \text{равномерно по } \tau \in [\tau_0, +\infty).$$

Функции $h_0(\tau) = \dfrac{3\beta\mu q(\tau)}{3-\sigma}$ и $h_1(\tau) = \dfrac{3\beta}{3-\sigma}$ являются непрерывно-дифференцируемыми; причем

$h_0(\tau)h_1(\tau) = \dfrac{3\beta^2\mu q(\tau)}{(3-\sigma)^2} \neq 0$ при $\sigma \neq 3, \tau \in [a_0, +\infty)$ и $\displaystyle\int_{\tau_0}^{+\infty} h_1(\tau)d\tau =$

$= \dfrac{3\beta}{3-\sigma} \displaystyle\lim_{\tau \longrightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} d\tau = +\infty$, $\displaystyle\lim_{\tau \longrightarrow +\infty} \frac{h_1(\tau)}{h_0(\tau)} = \lim_{\tau \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\mu q(\tau)} = 0$.

Следовательно, выполнены (2.7) и (2.8).

Проверим выполнение условия (2.9). Имеем

$$\lim_{\tau \longrightarrow =\infty} h_3(\tau)^{-1} \left(\frac{h_3(\tau)}{h(\tau)}\right)' = \lim_{\tau \longrightarrow +\infty} \frac{3-\sigma}{3\beta} \left(\frac{1}{\mu q(\tau)}\right)' =$$

$$= \lim_{\tau \longrightarrow +\infty} \frac{(3-\sigma)\mu}{3} \cdot \frac{p^{\frac{1}{3}}(t)}{\left(\frac{3-\sigma}{3} I_B(t)\right)^{\frac{3}{3-\sigma}+1} |I_B(t)|} = 0.$$

Кроме того, матрицы A_3 и A_2 из леммы 2 имеют вид $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & \sigma \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, причем $detA_3 = \sigma - 3 \neq 0$ при $\sigma \neq 3$. Матрица A_2 в силу того, что $\lambda_0 = 1$ не имеет корней с нулевой действительной частью. Таким образом, соблюдаются все условия леммы 2.

Тогда у полученной системы вида (2.1) согласно лемме 2 существует хотя бы одно решение, стремящееся к нулю при $\tau \longrightarrow +\infty$. Каждому из них в силу замен переменных (2.16) и (2.23) соответствует решение $y(t)$ дифференцильного уравнения (1.1), удовлетворяющее при $t \longrightarrow w$ асимптотическим соотношениям (2.12).

Теорема полностью доказана. □

Из этих теорем при $\sigma = 0$ вытекает два следствия для линейных дифференциальных уравнения третьего порядка

$$y^{'''} = \alpha_0 p(t) y, \tag{2.46}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}, p : [a, w) \longrightarrow (0, +\infty)$ — непрерывная функция,
$-\infty < a < w \leq +\infty$.

Следствие 1. *Для существования у уравнения* (2.46) $P_w(\lambda_0)$*-решений,* $\lambda_0 \in \in \mathbb{R}\backslash\{0; 1; \frac{1}{2}\}$ *необходимо, а если* $\lambda_0 \neq \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$, *то и достаточно, чтобы соблюдались условия*

$$\alpha_0 \lambda_0 (2\lambda_0 - 1)(\lambda_0 - 1) I_w(t) > 0, \ \lim_{t \longrightarrow w} p(t)\pi_w^3(t) = \alpha_0 \frac{|\lambda_0||2\lambda_0 - 1|}{|\lambda_0 - 1|^3}.$$

Более того, для каждого такого решения имеет место при $t \longrightarrow w$ *асимптотические представления:*

$$\ln|y(t)| = \nu \frac{(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} I_A(t)(1 + 0(1)); \ \ \frac{y^{'}(t)}{y(t)} = \frac{2\lambda_0 - 1}{(\lambda_0 - 1)\pi_w(t)}(1 + 0(1));$$

$$\frac{y^{''}(t)}{y^{'}(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_w(t)}(1 + 0(1)); \ \ \nu = sign(\alpha_0 \lambda_0 I_A(t)).$$

Следствие 2. *Для существования у уравнения* (2.46) $P_w(1)$ *решений необходимо, а если* $p : [a, w) \longrightarrow (0, +\infty)$ — *непрерывно-дифференцируема и такая, что существует конечный или равный* $\pm\infty$, $\lim\limits_{t \longrightarrow w} p^{'}(t) p^{-\frac{5}{3}}(t)$, *то и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{t \longrightarrow w} p(t)\pi_w^3(t) = +\infty$.

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \longrightarrow w$ *асимптотические представления:*

$$\ln|y(t)| = \pm I_B(t)(1 + 0(1)); \ \ \frac{y^{'}(t)}{y(t)} = \pm p^{\frac{1}{3}}(t)(1 + 0(1));$$

$$\frac{y^{''}(t)}{y(t)} = \pm p^{\frac{1}{3}}(t)(1 + 0(1)).$$

Данные следствия дополняют известные результаты (см.,например, монография [1]) об асимптотических свойствах решений линейных дифференциальных уравнений (2.46).

Заключение. В настоящей работе исследован вопрос о существовании $P_w(\lambda_0)$-решений дифференциальных уравнений (1.1) в случае,когда $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, \frac{1}{2}\}$. При этом получены необходимые и достаточные условия существования у (1.1) решений. Асимптотические формулы при $t \longrightarrow \omega$ согласуются при $\sigma = 0$ с уже известными результатами из монографии И. Т. Кигурадзе и дополняют их.

1. **Кигурадзе И. Т.** Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия. – М.: Наука, 1990. – 430 с.
2. **Evtukhov V. M.** Asymptotic behaviour of solutions of second order nonlinear differential equations clouse to linear equations [text] / V. M. Evtukhov, Mousa Jaber Abu Elshour // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. – 2008. – V. 43. – P. 97–106.
3. **Mousa Jaber Abu Elshour** Asymptotic representations for solutions of a class of second order nonlinear differential equations [text] / Mousa Jaber Abu Elshour, V. M. Evtukhov // Miscolc Mathematical Notes. – 2009. – V. 2. – 119–127.
4. **Евтухов В. М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений [текст] / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Укр. мат. ж. – 2010. – 62, № 1. – С. 52–80.