

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

Дипломна робота

бакалавра

на тему: «F-планарні відображення псевдоріманових просторів»

«F-planar mappings of pseudo-Riemannian manifolds»

Виконала: студентка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика

ХАБАРОВА ЮЛІЯ ВОЛОДИМИРІВНА

Керівник

к.ф. - м.н., доцент, Курбатова І. М.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент

к.ф. - м.н., доцент, Покась С. М.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ р.

Захищено на засіданні ЕК №

протокол № ____ від _____ р.

Оцінка _____ / _____ / _____

(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

Голова ЕК

Євтухов В.М.

(підпис)

(прізвище, ініціали)

(підпис)

(прізвище, ініціали)

Одеса – 2021

ЗМІСТ

1. Вступ	3
2. Основні поняття і визначення	4
3. Голоморфно проєктивне відображення келерових просторів	8
4. Поняття F-планарного відображення просторів афінної зв'язності	11
5. F-планарні відображення симплектичних многовидів	13
6. Нова форма основних рівнянь F-планарного відображення симплектичних многовидів	14
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	17

1. Вступ

В роботі вивчається спеціальний вид дифеоморфізмів різноманіть з афінорною структурою.

В останні десятиліття активно розвивається теорія відображень афінносвязних і риманових просторів, забезпечених афінорними структурами різних типів. Так, докладно досліджувалися голоморфнопроективні відображення келерових просторів зі збереженням комплексної структури. Основні результати в цьому напрямку містяться в роботах Т.Оцукі і Я.Тасіро [13] Я.Тасіро [10], К.Яно [14], С.Ісіхара [7], Й.Мікеша [9], Й.Мікеша і В.Домашева [1]. Самі ж голоморфні проективні відображення є природним узагальненням геодезичних відображень, які увійшли в класику дифеоморфізмів афінносвязних і риманових просторів [5].

Широким узагальненням теорії геодезичних відображень стала розроблена Н.С.Сінюковим теорія майже геодезичних відображень афінносвязних просторів без крутіння [5]. Потім С.Г.Лейко продовжив дослідження в цьому напрямку, ввівши в розгляд 3-геодезичні і r -геодезичні відображення просторів афінної зв'язності [3]. Узагальнення теорії майже геодезичних відображень у випадку афінносвязних просторів з крутом присвячена робота Н.В.Яблонской [6]. Різні спеціальні типи майже геодезичних відображень вивчалися Й.Мікешем [5] і І.М.Курбатовой.

Й.Мікешем і Н.С.Сінюковим введені в розгляд найбільш загальні в порівнянні з вищевказаними відображення афінносвязних просторів без крутіння - так звані F -планарні відображення [6].

У даній роботі досліджуються відображення просторів афінної зв'язності без круту з афінорною структурою, що включають в себе в якості окремого випадку вищевказані відображення або пересічні з ними. Тому тема даної роботи є актуальною.

Метою даної роботи є вивчення F -планарного відображення симплектичних просторів і деяких його властивостей. Дослідження носить теоретичний характер.

2. Основні поняття і визначення

Рімановим простором V_n називається дійсний многовид X_n класу C^r , в якому визначено поле двічі коваріантного симетричного неособливого тензора g_{ij} , называємого метрическим тензором пространства. який називається метричним тензором простору. У кожній локальній системі координат на X_n його компоненти є відомими функціями класу C^{r-1} від координат поточної точки $W \in X_n$, що задовольняють умовам:

$$g_{ij} = g_{ji},$$

$$\det ||g_{ij}|| \neq 0,$$

і при переході до нової системи координат:

$$x'^i = x'^i(x^j), \quad i, j = \overline{1, n}$$

змінюються наступним чином:

$$g'_{ij}(x') = g_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}.$$

На V_n за допомогою метричного тензора формулами

$$\Gamma_{ij}^h = g^{h\alpha} \Gamma_{ij,\alpha}$$

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \right)$$

визначаються **символи Крістофеля другого роду**, що є об'єктами афінної зв'язності Γ на V_n (її називають **рімановою зв'язністю**).

За допомогою об'єкту зв'язності Γ на V_n будується **тензор Рімана** типу $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$R_{ijk}^h = -\frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{k\alpha}^h + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^h$$

що задовольняє умовам:

$$R_{ijk}^h + R_{ikj}^h = 0$$

$$R_{\cdot(ijk)}^h = 0 \tag{2.1}$$

$$R_{\cdot i(jk,l)}^h = 0,$$

де «,» – знак коваріантної похідної за зв'язністю Γ .

Тензор типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$R_{ij} = R_{ij\alpha}^{\alpha}$$

називається **тензором Річчі** простору V_n . Він за необхідністю симетричний:

$$R_{ij} = R_{ji},$$

а його слід:

$$R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$$

називається **скалярною кривиною** простору V_n .

Символами Кронекера δ_i^h називається тензор типу $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, який задовольняє співвідношенню: $\delta_i^h = \begin{cases} 1, & h = i \\ 0, & h \neq i \end{cases}$

Дійсний диференційований многовид X_n класу C^r вважається наділеним **афінорною структурою** [6], якщо на ньому задано поле F тензора типу $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Домовимося операцію згортання з афінором позначати наступним чином:

$$S_{\bar{i}} = S_{\alpha} F_i^{\alpha},$$

$$S^{\bar{i}} = S^{\alpha} F_{\alpha}^i.$$

Кажуть, що X_n наділений **майже комплексною структурою**, якщо в ньому задана афінорная структура F_i^h , що задовольняє умовам

$$F_{\alpha}^h F_i^{\alpha} = -\delta_i^h$$

При цьому X_n називають **майже комплексним різноманіттям**. Майже комплексну структуру, визначену на рімановому просторі (V_n, g_{ij}) , прийнято **узгоджувати з метрикою** g_{ij} у вигляді:

$$g_{\bar{i}\bar{j}} = g_{ij}$$

або, що те ж саме:

$$g_{\bar{i}j} + g_{i\bar{j}} = 0$$

Дійсний n -мірний рімановий простір з метричним тензором g_{ij} , називається **келеровим**, якщо в ньому визначена майже комплексна F_i^h , що задовольняє умовам:

$$\begin{aligned} F_\alpha^h F_i^\alpha &= -\delta_i^h \\ g_{\alpha j} F_i^\alpha + g_{\alpha i} F_j^\alpha &= 0 \\ F_{i,j}^h &= 0 \end{aligned}$$

де « $\cdot$ » - знак коваріантної похідної по зв'язності Γ .

Голоморфна кривина V_n в даному двовимірному напрямку $E_{2\{\lambda^h, F_\alpha^h \lambda^\alpha\}}$ в точці $M(x)$ називається інваріант:

$$K = \frac{R_{\alpha\beta\gamma\delta} \lambda^\alpha F_\sigma^\beta \lambda^\sigma \lambda^\gamma F_\mu^\delta \lambda^\mu}{(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) \lambda^\alpha F_\sigma^\beta \lambda^\sigma \lambda^\gamma F_\mu^\delta \lambda^\mu}$$

Келеровий простір називається **простором сталої голоморфної кривини**, якщо його голоморфна кривина k не залежить ні від точки, ні від напрямку λ^h .

З визначення k випливає, що келеровий простір є простором постійної голоморфної кривизни тоді і тільки тоді, коли його тензор Рімана представляється у вигляді

$$R_{hijk} = \frac{k}{4} (g_{hj} g_{ik} - g_{hk} g_{ij} + F_{hj} F_{ik} - F_{hk} F_{ij} + 2F_{hi} F_{jk})$$

де

$$\frac{k}{4} = \frac{R}{n(n+2)}$$

Зокрема, відмітимо, що простір постійної голоморфної кривизни є простором Ейнштейна, тобто

$$R_{hk} = \frac{R}{n} g_{hk}$$

Кажуть, що рімановий простір наділений **симплектичною структурою**, якщо на ньому задано поле двічі коваріантного невідродженого кососіметричного тензора, для якого:

$$\begin{aligned} F_{(ij,h)} &\equiv F_{ij,h} + F_{jh,i} + F_{hi,j} = 0 \\ |F_{ij}| &\neq 0 \\ F_{ij} &= -F_{ji} \end{aligned}$$

Симплектична структура F_{ij} породжує на V_n афінорну структуру

$$F_i^h = F_{\alpha i} g^{\alpha h}$$

причому, очевидно,

$$F_{\alpha}^{\alpha} = 0$$

Неважко бачити, що клас симплектичних структур включає в себе келерови структури.

3. Голоморфно проєктивне відображення келерових просторів

Крива простору K_n , задана в параметричному вигляді рівняннями

$$x^h = x^h(t) \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

називається **аналітично планарною** [5], якщо для неї виконуються умови

$$\lambda_{,\alpha}^h \lambda^\alpha \equiv \frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta}^h \lambda^\alpha \lambda^\beta = a(t)\lambda^h + b(t)F_\alpha^h \lambda^\alpha, \quad (3.2)$$

де

$$\lambda^h = \frac{dx^h}{dt},$$

a і b — деякі функції параметра t , Γ_{ij}^n — символи Крістофеля другого роду K_n .

Відображення келерова простору K_n з комплексною структурою F_i^h на келеровий простір $\bar{K}_n$, що зберігає комплексну структуру, називається аналітично планарним або **голоморфно проєктивним**, якщо при цьому відображенні аналітично планарні криві K_n переходять в аналітично планарні криві $\bar{K}_n$.

З рівнянь (3.2) легко випливає, що відображення K_n на $\bar{K}_n$, що зберігає комплексну структуру, є аналітично планарним тоді і тільки тоді, коли в загальній по відображенню системі координат між символами Крістофеля другого роду цих просторів (у відповідних точках) має місце залежність

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \psi_{(i} \delta_{j)}^h + \varphi_{(i} F_{j)}^h \quad (3.3)$$

тобто тензор деформації зв'язності матиме вигляд

$$P_{ij}^h = \psi_i \delta_j^h + \psi_j \delta_i^h + \varphi_i F_j^h + \varphi_j F_i^h.$$

Оскільки для структурного афінора F_i^h в K_n та $\bar{K}_n$ повинні мати місце умови виду

$$F_{i,j}^h = 0$$

виявляється, що

$$\varphi_i = \psi_i \quad (3.4)$$

Дійсно, запишемо зв'язок між коваріантними похідними афінора в просторах K_n та $\bar{K}_n$, з урахуванням (3.3):

$$\begin{aligned} F_{i|j}^h &= \frac{\partial F_i^h}{\partial x^j} + F_i^\alpha \bar{\Gamma}_{j\alpha}^h - F_\alpha^h \Gamma_{ji}^\alpha = \\ &= \frac{\partial F_i^h}{\partial x^j} + F_i^\alpha \left(\Gamma_{j\alpha}^h + \psi_{(j} \delta_{\alpha)}^h + \varphi_{(j} F_{\alpha)}^h \right) - F_\alpha^h \left(\Gamma_{ji}^\alpha + \psi_{(j} \delta_{i)}^\alpha + \varphi_{(j} F_{i)}^\alpha \right) = \\ &= F_{i,j}^h + \psi_j F_i^h + \psi_{\bar{i}} \delta_j^h - \varphi_j \delta_i^h - \varphi_{\bar{i}} F_j^h - \psi_j F_i^h + \psi_i F_j^h + \varphi_j \delta_i^h + \varphi_i \delta_j^h = \\ &= F_{i,j}^h + \delta_j^h (\psi_{\bar{i}} + \varphi_i) + F_i^h (\varphi_{\bar{i}} - \psi_j) \end{aligned}$$

Из того что $\bar{F}_{i|j}^h = F_{i,j}^h = 0$ имеем:

$$\delta_j^h (\psi_{\bar{i}} + \varphi_i) + F_i^h (\varphi_{\bar{i}} - \psi_j) = 0.$$

Згортаючи отриману рівність по h і j , знаходимо:

$$n (\psi_{\bar{i}} + \varphi_i) = 0$$

звідки

$$\varphi_i = -\psi_{\bar{i}}$$

або, що те ж саме

$$\psi_i = \varphi_{\bar{i}}$$

Тоді як F_α^α афінору F_i^h комплексної структури дорівнює нулю, згортання (3.3) по h, i показує, що

$$\bar{\Gamma}_{\alpha j}^\alpha = \Gamma_{\alpha j}^\alpha + (n + 2) \psi_j$$

Тому вектор ψ_j повинен бути градієнтним. Випадок, коли $\psi_j = 0$, вважати тривіальним і опускати при подальшому дослідженні.

Основні рівняння можна представити в еквівалентній формі

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_{(i} \bar{g}_{j)k} + \varphi_{(i} \bar{F}_{j)k} \quad (3.5)$$

В [5] показано, що при голоморфно проектному відображенні

$$2(n + 2) \psi_i = \partial_i \ln \ln \left| \frac{\bar{g}}{g} \right| \quad (3.6)$$

Зі співвідношень (3.3) виникає наступна залежність між тензорами Рімана просторів K_n та $\bar{K}_n$:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ijk}^h &= R_{ijk}^h - \delta_j^h \psi_{ik} + \delta_k^h \psi_{ij} + \\ &+ (F_j^h \psi_{\alpha k} - F_k^h \psi_{\alpha j}) F_i^\alpha + F_i^h (\psi_{\alpha k} F_j^\alpha - \psi_{\alpha j} F_k^\alpha) \end{aligned} \quad (3.7)$$

де введено позначення

$$\psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i \psi_j + \psi_\alpha F_i^\alpha \psi_\beta F_j^\beta$$

Так як тензор ψ_{ij} симетричний, згортаючи (3.7) по h, k отримуємо

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + n\psi_{ij} + 2\psi_{\alpha\beta} F_i^\alpha F_j^\beta$$

Тут R_{ij} та $\bar{R}_{ij}$ – тензори Річчі K_n та $\bar{K}_n$. Звідси внаслідок умов

$$R_{\alpha\beta} F_i^\alpha F_j^\beta = R_{ij}$$

і подібних до них умов в $\bar{K}_n$, випливає

$$\psi_{\alpha\beta} F_i^\alpha F_j^\beta = \psi_{ij}$$

Тому залежність між тензорами Річчі просторів K_n и $\bar{K}_n$ набуває вигляду

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n + 2)\psi_{ij}$$

В теорії голоморфні проєктивних відображень келерових просторів доведено, що має місце теорема.

Теорема [5]. Якщо простір K_n допускає голоморфно проєктивне відображення на простір $\bar{K}_n$, постійної голоморфної кривизни, то K_n теж є простором постійної голоморфної кривизни.

4. Поняття F-планарного відображення просторів афінної зв'язності

Розглянемо простір афінної зв'язності без круту A_n , віднесене до системи координат $x^1, x^2, \dots, x^n$, в якому визначена афінорна структура

$$F_i^h(x) \neq a\delta_i^h$$

де δ_i^h - символи Кронекера, a - деякий інваріант.

Криву L , задану рівняннями

$$x^h = x^h(t) \quad (4.1)$$

$$\lambda^h(t) = \frac{dx^h}{dt} (\neq 0) \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

где t — параметр, назовемо **F-планарною**, якщо її дотичний вектор при паралельному перенесенні вздовж неї залишається в майданчику, утвореної дотичним вектором λ^h та вектором $\lambda^\alpha F_\alpha^h$.

Відповідно до цього визначення L є F-планарною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\lambda^h_{,\alpha} \lambda^\alpha = \rho_1(t) \lambda^h + \rho_2(t) \lambda^h F_\alpha^h, \quad (4.2)$$

де ρ_1, ρ_2 - деякі (довільні) функції параметра t , комами позначаються коваріантні похідні по зв'язності A_n . Клас F-планарних кривих простору A_n дуже широкий. Очевидно, через будь-яку точку в кожному напрямку проходить безліч F-планарних кривих, залежних від однієї довільної функції. Клас F-планарних кривих містить в собі:

- 1) геодезичні лінії (если $\rho_2 \equiv 0$)
- 2) планарні криві
- 3) квазігеодезичні криві
- 4) аналітично планарні криві.

Нехай задані два простори афінної зв'язності A_n та $\bar{A}_n$, на яких визначені структурні афінори F_i^h та $\bar{F}_i^h$, відповідно. Відображення A_n на $\bar{A}_n$ назовемо F-планарним, якщо внаслідок його будь-яка F-планарная крива A_n переходить в F-планарную криву $\bar{A}_n$.

Розглянемо простори A_n и $\bar{A}_n$ в загальній по F-планарному відображенню системі координат $x^1, x^2, \dots, x^n$. Мають місце теореми:

Теорема [1]. F-планарні відображення A_n на $\bar{A}_n (n > 3)$ з збереженням структури характеризуються такими умовами:

$$P_{ij}^h = \delta_i^h \psi_j + \delta_j^h \psi_i + F_i^h \varphi_j + F_j^h \varphi_i \quad (4.3)$$

де $\psi_i(x)$ и $\varphi_i(x)$ - некоторые векторы.

Теорема [2]. Будь-яке F-планарне відображення простору афінной зв'язності A_n на $\bar{A}_n (n > 3)$ зберігає структуру, тобто

$$F_i^h(x) = \bar{F}_i^h(x)$$

Не важко бачити, що клас F-планарних відображень просторів афінной зв'язності включає голоморфно проєктивне відображення келерових просторів.

5. F-планарні відображення симплектичних многовидів

Розглянемо пару симплектичних многовидів $S_n(g_{ij}, F_{ij})$ и $\bar{S}_n(\bar{g}_{ij}, \bar{F}_{ij})$, між якими встановлено F-планарне відображення. Тоді в загальній по відображенню системі координат (x^i) основні рівняння розглянутого відображення матимуть вигляд:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x); \quad (5.1)$$

$$|F_i^h| \neq 0; \quad (5.2)$$

$$F_{(ij)} = \bar{F}_{(ij)} = 0; \quad F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i}; \quad \bar{F}_{ij} = \bar{F}_j^\alpha \bar{g}_{\alpha i} \\ \bar{F}_{(ij|k)} = F_{(ij,k)} = 0 \quad (5.3)$$

де ”|” знак коваріантною похідною по зв’язності $\bar{\Gamma}$. Надалі будемо вважати, що є зв’язок між ψ_i та φ_i

$$\psi_i = \varphi_\alpha F_i^\alpha = \varphi_{\bar{i}} \quad (5.4)$$

З огляду на (5.4) з (5.1) згортанням за індексами h, j отримуємо:

$$\frac{1}{n+2} (\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\alpha) = \varphi_{\bar{i}} \quad (5.5)$$

Це означає, що $\psi_i = \varphi_{\bar{i}}$ - градієнтний вектор, тобто існує інваріант $\psi(x)$ такий, що

$$\varphi_i = \psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \quad (5.6)$$

Основні рівняння F-планарного відображення $S_n \rightarrow \bar{S}_n$ з огляду на (5.1) можуть бути представлені у формі:

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_{(i} \bar{g}_{j)k} + \varphi_{(i} \bar{F}_{j)k} \quad (5.7)$$

6. Нова форма основних рівнянь F-планарного відображення симплектичних многовидів

1°. Нехай симплектичний многовид $S_n(g_{ij}, F_{ij})$ допускає нетривіальне F-планарне відображення на симплектичний многовид $\bar{S}_n(\bar{g}_{ij}, \bar{F}_{ij})$, основні рівняння якого в загальній по відображенню системі координат (x^i) мають вигляд (5.7), (5.6), (5.2), (5.3).

Співвідношення (5.7) в S_n являє собою систему нелінійних диференціальних рівнянь в часткових похідних першого порядку щодо компонент тензора $\bar{g}_{ij}$. Для дослідження умов існування і єдиності рішень цієї системи сучасна теорія диференціальних рівнянь не дає регулярних методів.

Використовуючи апарат, розроблений професором Н. С. Сінюковим [5] в теорії геодезичних відображень ріманових просторів, приведемо нашу систему (5.7) до еквівалентної системи, для вирішення якої існують регулярні методи.

Оберемо в S_n тензор

$$a_{ij} = e^{2\psi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}. \quad (6.1)$$

Знайдемо його коваріантну похідну в S_n :

$$a_{ij,k} = e^{2\psi} \left(2\psi_k \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j} + \bar{g}_{,k}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j} \right)$$

З того, що

$$\bar{g}_{ia} \bar{g}^{ah} = \delta_i^h$$

впливає

$$\bar{g}_{i\alpha,k} \bar{g}^{\alpha h} + \bar{g}_{ia} \bar{g}^{\alpha h}_{,k} = 0$$

або

$$\bar{g}_{,k}^{ih} = -\bar{g}_{\alpha\beta,k} \bar{g}^{\alpha i} \bar{g}^{\beta h}$$

Тому, враховуючи (5.7) отримаємо:

$$\begin{aligned} a_{ij,k} &= e^{2\psi} \left(2\psi_k \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j} - \bar{g}_{\gamma\delta,k} \bar{g}^{\alpha\gamma} \bar{g}^{\beta\delta} g_{\alpha i} g_{\beta j} \right) = \\ &= e^{2\psi} \left[2\psi_k \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j} - \left(2\psi_k \bar{g}_{\alpha\beta} + \psi_{(\alpha} \bar{g}_{\beta)k} + \varphi_{(\alpha} \bar{F}_{\beta)k} \right) \bar{g}^{\alpha\gamma} \bar{g}^{\beta\delta} g_{\gamma i} g_{\delta j} \right] = \\ &= e^{2\psi} \left(-\psi_a \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma i} g_{jk} - \psi_a \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma j} g_{ik} - \varphi_a \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma i} F_{jk} - \varphi_a \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma j} F_{ik} \right) = \\ &= -e^{2\psi} \left(\psi_a \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma(i} g_{j)k} + \varphi_a \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma(i} F_{j)k} \right) \end{aligned}$$

тобто

$$a_{ij,k} = -e^{2\psi} (\psi_a \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma(i} g_{j)k} + \varphi_\alpha \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma(i} F_{j)k}) .$$

Позначимо

$$e^{2\psi} \bar{g}^{h\alpha} g_{ai} = A_i^h \quad (6.2)$$

$$\varphi_a A_i^\alpha = \varphi_i^1, \quad (6.3)$$

Тоді з $\psi_i = \varphi_i^1$ та (6.2) випливає:

$$\begin{aligned} e^{2\psi} \psi_a \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma i} &= e^{2\psi} \varphi_{\bar{\alpha}} \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma i} = \\ &= e^{2\psi} \varphi_\alpha \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma i} = \varphi_i^1 \end{aligned}$$

Отже, маємо:

$$a_{ij,k} = -\varphi_i^1 g_{jk} - \varphi_j^1 g_{ik} - \varphi_{(i}^1 F_{j)k} \quad (6.4)$$

где $F_{jk} = F_k^\alpha g_{\alpha j} = -F_{kj}$.

2°. Для тензора a_{ij} зважаючи на (6.2) виконуються умови:

$$a_{j\alpha} F_i^\alpha = -a_{i\alpha} F_j^\alpha \quad (6.5)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} a_{j\alpha} F_i^\alpha &= e^{2\psi} F_i^\alpha g_{\alpha\beta} \bar{g}^{\beta\delta} g_{\delta j} = \\ &= -e^{2\psi} F_\beta^\alpha g_{\alpha i} \bar{g}^{\beta\delta} g_{\delta j} = e^{2\psi} F_\beta^\delta g_{\alpha i} \bar{g}^{\beta\alpha} g_{\delta j} = \\ &= -e^{2\psi} F_j^\delta g_{\alpha i} \bar{g}^{\beta\alpha} g_{\delta\beta} = -a_{i\alpha} F_j^\alpha \end{aligned}$$

Згідно з (6.1) та (6.3) a_{ij} — деякий неспецифічний симетричний тензор типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, φ_i^1 - ковектор.

3°. Згортаючи (6.4) з g^{ij} по i та j , знайдемо

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta,k} g^{\alpha\beta} &= -\varphi_{\bar{\alpha}}^1 g_{\beta k} g^{\alpha\beta} - \varphi_{\bar{\beta}}^1 g_{\alpha k} g^{\alpha\beta} - \varphi_\alpha^1 F_{\beta k} g^{\alpha\beta} - \varphi_{j\beta}^1 F_{\alpha k} g^{\alpha\beta} = \\ &= -\varphi_{\bar{k}}^1 - \varphi_{\bar{k}}^1 - \varphi_\beta^1 F_k^\beta - \varphi_\beta^1 F_k^\beta = -4\varphi_{\bar{k}}^1 \end{aligned}$$

Так як g^{ij} коваріантного сталий, внесемо його під знак похідної та отримаємо:

$$(a_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta})_{,k} = -4\varphi_{\bar{k}}^1,$$

отже, φ_k^1 - градієнтний вектор, причому з (6.3) видно, що $\varphi_k^1 \neq 0$ при $\varphi_k \neq 0$ та навпаки. Таким чином, якщо простір S_n допускає нетривіальне F-планарне відображення, в ньому існує симетричний тензор a_{ij} типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ який задовольняє умовам (6.4) і (6.5) при деякому векторі $\varphi_i^1 \neq 0$. Неважко бачити, що вірно і зворотне твердження. Тим самим має місце теорема:

Теорема 1. Для того, щоб симплектичний простір $S_n(g_{ij}, F_{ij})$ допускав нетривіальне F-планарне відображення, необхідно і достатньо, щоб в ньому існував неспецифічний симетричний тензор a_{ij} типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, який задовольняє рівнянням (6.4), (6.5) при деякому векторі $\varphi_i^1 \neq 0$. Отже, (6.4) являє собою нову форму основних рівнянь теорії F-планарних відображень симплектичних просторів. ці рівняння (6.4) вже допускають ефективне дослідження, на відміну від (6.7).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Домашев В.В., Мікеш Й. До теорії голоморфно-проективних відображень келе-
рових просторів // Мат. замітки, 1978, 28, №2. С.297-303.
2. Курбатова І.М. НР-відображення Н-просторів // Укр.геом.сб., 1984, вип.24. С.75-
82.
3. Лейко С.Г. Спеціальні р-геодезичні відображення просторів афінної зв'язності//
Revue Roumaine de Mathematiques pures et appliquees. Academie la Republique
socialiste de Roumanie. Tome XXVII, №10, p.1003-1026.
4. Мікеш Й., Сінюков Н.С. Про квазіпланарних відображеннях просторів афінної
зв'язності // Изв.вишів, Матем., 1983. - №3. С.55-61.
5. Сінюков Н.С. Геодезичні відображення ріманових просторів // М.: Наука, 1979.
275с.
6. Яблонська Н.В. Майже геодезичні відображення просторів афінної зв'язності з
крутом//Деп. в ВИНІТИ, №2190-79 Деп.
7. Ishihara S. Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex
manifold// Tohoku Math. J., 1957, 9, №3, p.273-294.
8. Jano K. Differential Geometry of Complex and Almost Complex Spaces// Pergamon
Press, 1965.
9. Mikes J., Vanzurova A., Hinterleitner I. Geodesic Mappings and Some
Generalizations// Palacky University, Olomouc, Faculty of Science, Olomouc,
2009.
10. Otsuki T., Tashiro J. On curves in Kahlerian spaces//Math.J.Okayama Univ., 1954, 4,
№1. p.57-78.
11. Prvanovich M. Holomorphically projective transformations in an a locally product
space//Math. Balkan, 1971, №1, p.195-213.

12. Sinha B.B. Pas G. General F-connections and H-projectively related connections in almost product spaces//Riv.mat.Univ.Parma, 1972, №1, p.221-230.
13. Tashiro J. On holomorphically projective correspondences in an almost complex spaces// Math.J.Okayama Univ., 1957, 6, №2. p.142-152.
14. Yano K. Concircular Geometry I-IV//Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1940, 16. P.p.195-200; 354-360; 442-448; 505-511.