Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
(повне найменування вищого навчального закладу)

Інститут математики, економіки і механіки
(повне найменування інституту/факультету)

Диференціальних рівнянь
(повна назва кафедри)

Дипломна робота

бакалавра
(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему: **«Асимптотичне інтегрування систем диференціальних рівнянь з виродженнями»**

« Asymptotic integration of systems of differential equations with degeneracy »

Виконала: студентка денної форми навчання
напряму підготовки 6.040201 Математика

Пілєва Наталія Юріївна
(прізвище, ім'я, по-батькові)

Керівник к.ф.- м.н., доц. Шарай Н.В.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент к.ф.-м.н., доц. Білозерова М.О.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ 8 від 16.05 2017 р.

Захищено на засіданні ЕК № 7
протокол № 5 від 12.06.17 р.
Оцінка добре / C / 84
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри
_______ Євтухов В.М.
(підпис) (прізвище, ініціали)

Голова ЕК
_______ Щоголев С.А.
(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2017

ЗМІСТ

Вступ 2

ГЛАВА 1 12

Побудова формальних рішень однорідної системи з виродженням в разі простих коренів характеристичного рівняння 12

глава 2 23

Про асимптотиці рішень лінійної однорідної системи з виродженням в разі простих коренів характеристичного рівняння 23

глава 3 38

Про приведення лінійної однорідної системи з виродженням до майже діагонального вигляду в разі простих коренів характеристичного рівняння 38

ГЛАВА 4 45

Побудова формальних рішень однорідної системи з виродженням в разі простих коренів характеристичного рівняння 45

Глава 5. 50

Про формальних рішеннях однорідної системи з виродженням в разі простих коренів характеристичного рівняння 50

Література 59

Вступ

Як відомо, численні фізичні процеси описуються за допомогою диференціальних рівнянь, що містять малий параметр. Одними з найбільш ефективних методів наближеного інтегрування таких рівнянь є асимптотичні методи, що грунтуються на ідеї розкладання шуканого рішення в ряд за ступенями малого параметра. Хоча такі статечні ряди в більшості випадків є розбіжними, проте наближене рішення, що отримується шляхом обриву формального ряду на m-му члені, дає хорошу апроксимацію точного рішення. Побудовані таким чином наближені рішення носять асимптотичний характер в тому сенсі, що вони прагнуть до відповідних точним рішеннях не зі збільшенням числа m, а при прагненні до нуля малого параметра і фіксованому m.

Асимптотичні методи для вирішення диференціальних рівнянь є одним із найбільш потужних засобів сучасної прикладної математики. Вони дозволяють отримувати наближені аналітичні уявлення рішень досить складних лінійних і нелінійних крайових задач, як для звичайних диференціальних рівнянь, так і для рівнянь в приватних похідних.

Аналітичні методи зазвичай діляться на евристичні і точні. Поєднуючи в собі простоту евристичних уявлень з точністю аналітичних оцінок, асимптотичні методи не обмежуються роллю «золотої середини». У математиці вони займають особливе місце. Життєвість і перспективність асимптотических методів підтверджується також тим фактом, що активна взаємодія чисельних методів з аналітичними відбувається також через асимптотику.

Серед причин, що ускладнюють пошук точних рішень, можна вказати, наприклад, змінні коефіцієнти і нелінійні граничні умови на відомих або невідомих межах складної форми. Для вирішення подібних завдань ми змушені користуватися різного роду приближениями, комбінуючи чисельні та аналітичні методи. Серед аналітичних методів вельми потужними є методи збурень (асимптотических розкладів) по великих або малим значенням параметра або координати.

В даний час, в епоху швидкого розвитку обчислювальної техніки, асимптотичні методи аж ніяк не втрачають свого значення. Вони служать для з'ясування якісних особливостей завдань, для отримання асимптотик і аналізу особливих точок, для побудови опорних «тестових» рішень, а в ряді випадків є також основою для розробки обчислювальних методів.

Ефективність асимптотических методів визнана усіма в самих різних областях прикладної математики.

Ідея асимптотичного представлення рішень диференціальних рівнянь зародилася ще в роботах Ліувілля. Їм вперше були отримані асимптотичні формули для рішень рівняння другого порядку, а потім і для рівнянь вищих порядків.

Асимптотичні методи знайшли успішне застосування до дослідження як лінійних, так і нелінійних диференціальних рівнянь. За допомогою цих методів були вивчені найважливіші питання якісної теорії диференціальних рівнянь.

У даній роботі досліджується поведінка рішень системи

$$\varepsilon\, B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt}=A(t,\varepsilon)x+f(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-1}\theta(t)), \qquad (0.1)$$

де ε - малий параметр, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0<1$, $t\in[0,T]$, $A(t,\varepsilon),B(t,\varepsilon)-(n\times n)-$ матриці, $f(t,\varepsilon)-n$-мірний вектор, розкладання яких сходяться при $t\in[0,T]$ і $0<\varepsilon\le\varepsilon_0<1$, і мають вигляд:

$$A(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A_s(t), B(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s B_s(t), f(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s f_s(t) \qquad (0.2)$$

при різних припущеннях про властивості матриці $B(t)$.

В роботі розглядається метод побудови рішення системи (0.1), заснований на приведенні пучка матриць до канонічного виду за умови, що коріння характеристичного рівняння

$$\det(A_0(t)-\lambda B_0(t))=0 \qquad (0.3)$$

є простими.

Зупинимося коротко на структурі роботи.

Перша глава присвячена вивченню однорідної системи, що відповідає системі (0.1):

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt}-A(t,\varepsilon)x=0 \tag{0.4}$$

за умови, що $\det B(t)\neq 0$, І що характеристичне рівняння (0.3) має n різних коренів при $t\in[0,T]$.

Система (0.4) є окремим випадком (0.1), коли $B(t,\varepsilon)=B(t)$

Доведено дві теореми про існування n приватних формальних рішень і про існування формальної матриці-рішення для лінійної однорідної системи звичайних диференціальних рівнянь на $[0,T]$. Показано, що якщо виконані наступні умови:

1. $A_s(t), B(t)\in C^{\infty}_{[0,T]}$, $t\in[0,T]$;

2. пучок матриць $A_0(t)-\lambda B(t)$ - регулярний, $t\in[0,T]$;

3. $\det B(t)\neq 0$, $t\in[0,L]$

Тоді система (0.4) при $t\in[0,T]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ має n приватних формальних рішень виду:

$$x_k(t,\varepsilon)=u_k(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_k(\tau)d\tau\right), k=\overline{1,n},$$

де вектор-функції u_k представимо у вигляді:

$$u(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s u_s(t) \quad , \ t\in[0,T]\cdot\varepsilon\in(0,\varepsilon_1],$$

а формальна матриця-рішення знайдена у вигляді:

$$X(t,\varepsilon)=U(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t W(\tau)d\tau\right)$$

де $U(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s U_s(t)$.

На прикладі проілюстровано спосіб знаходження n приватних формальних рішень лінійної однорідної системи звичайних диференціальних рівнянь.

У другому розділі вивчається система звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь виду:

$$\varepsilon\frac{dx}{dt}=S(t,\varepsilon)x, S(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s S_s(t) \qquad (0.5)$$

$t\in[0,T]$ $0<\varepsilon\le\varepsilon_0<1$, В припущенні, що характеристичне рівняння $\det(S_0(t)-\lambda E)=0$ має n ізольованих коренів $\lambda_1(t),\ldots,\lambda_n(t),\lambda_i(t)\neq\lambda_j(t), i\neq j$, $i,j=\overline{1,n}$. при $t\in[0,T]$.

Система (0.5) є окремим випадком (0.1), коли $\varepsilon B(t,\varepsilon)=\varepsilon E$

Показано, що дану систему (0.5) можна перетворити до системи виду:

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=\left(W(t)+\varepsilon H(t,\varepsilon)\right)y \qquad (0.6)$$

де $W(t)=diag\{\lambda_1(t),\ldots,\lambda_n(t)\}$, $H(t,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^{s-1}H_s(t)$.

Доведено теорему про існування формальної матриці-рішення системи (0.6) виду

$$Y(t,\varepsilon)=Q(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t \Lambda(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \qquad (0.7)$$

де $Q(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s Q_s(t), \Lambda(\tau,\varepsilon)=W(t)+\sum_{s=1}^{n-1}\varepsilon^s\Lambda^{(s)}(t)$

$\Lambda^{(s)}(t)=diag\{\lambda_1^{(s)}(t),\ldots,\lambda_n^{(s)}(t)\}$, якщо $W(t),H_s(t)\in C^{\infty}_{[0,T]}$.

Також ця глава присвячена асимптотиці рішень лінійної однорідної системи звичайних диференціальних рівнянь з виродженням в разі простих різних коренів характеристичного рівняння.

Показано перетворення системи (0.4) до системи (0.5) яка в свою чергу бути подана в вигляді (0.6).

Доведено теорему про асимптотичну оцінку раніше отриманого m-го наближення, в якій стверджується, що якщо:

1. $W(t),H_s(t)\in C^{\infty}_{[0,T]}$

2. $\mathrm{Re}\lambda_i(t)\le 0,\ i=\overline{1,n}$ $\left(\left\|\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_\tau^t W(s)ds\right)\right\|\le 1\right), t\in[0,T],\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$;

3. $\mathrm{Re}\lambda_i(t,\varepsilon)\le 0.\ i=\overline{1,n}$ $\left(\left\|\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t \Lambda(\tau,\varepsilon)d\tau\right)\right\|\le M\le 1\right),\ t\in[0,T],\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$;

4. $y_m(0,\varepsilon)=y_0,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, де

$$\Lambda(t,\varepsilon)=diag\left\{\lambda_1(t,\varepsilon),\ldots,\lambda_n(t,\varepsilon)\right\}=W(t)+\sum_{s=1}^{n-1}\varepsilon^s\Lambda^{(s)}(t)$$

$$y_m(t,\varepsilon)=Q_m(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t \Lambda(\tau)d\tau\right)c=$$

$$= \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s Q_s(t) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \Lambda(\tau) d\tau \right) c$$ -m-наближення

Тоді має місце асимптотична оцінка при $t \in [0,T]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$:

$\left\| y(t,\varepsilon) - y_m(t,\varepsilon) \right\| \le \varepsilon^m M$, де M постійна, яка не залежить від ε.

Далі на прикладі була знайдена асимптотика рішення лінійної однорідної системи звичайних диференціальних рівнянь.

У третьому розділі показано приведення лінійної однорідної системи звичайних диференціальних рівнянь з виродженням до майже діагонального вигляду в разі простих різних коренів характеристичного рівняння, і розглянута асимптотична оцінка рішень даної системи.

Була розглянута система (0.4)

$$\varepsilon B(t) \frac{dx}{dt} - A(t,\varepsilon) x = 0,$$

де $A(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(t), t \in [0,T]$., $\det B(t) \ne 0$ при $t \in [0,T]$.

Згідно доведеною в цьому розділі теоремі, якщо $B(t), A_s(t) \in C^m_{[0,T]}$, $m \in \mathrm{N}$ – довільне; пучок матриць $A_0(t) - \lambda B(t)$ регулярний, $t \in [0,T]$, А корені рівняння $\det(A_0(t) - \lambda B(t)) = 0$ різні на $[0,T]$, То існує неособлива матриця $U_m(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s U_s(t)$ така, що заміна

$$x = U_m(t,\varepsilon) y$$

призводить систему (0.3) до вигляду:

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = \left(W(t) + \varepsilon^{m+1} C_m(t,\varepsilon)\right) y \qquad (0.8)$$

де $C_m(t,\varepsilon)$ - безперервна на $[0,T]$ матриця.

У вигляді теореми доведено, що якщо виконані умови попередньої теореми і $\mathrm{Re}\lambda_i(t) \leq 0$, і задані початкові умови $x(0,\varepsilon) = x_0$, То рішення задачі Коші для системи (0.4) з точністю до членів порядку ε^m дається формулою:

$$x(t,\varepsilon) = x_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^m) = U_m(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t W(\tau)d\tau\right)U_m^{-1}(0,\varepsilon)x_0 + O(\varepsilon^m),$$

при $t \in [0,T]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$

Випадок лінійної неоднорідної системи звичайних диференціальних рівнянь з виродженням в разі простих різних коренів характеристичного рівняння розглянуто в четвертому розділі.

При побудові приватного рішення неоднорідної системи (0.1) за умови, що $B(t)$ не залежить від ε визначені два випадки:

1. випадок «резонансу»: функція $k(t) = \dfrac{d\theta}{dt}$ при $t \in [0,T]$ збігається з одним з коренів рівняння (0.3);
2. випадок «нерезонанса»: функція $k(t) = \dfrac{d\theta}{dt}$ при $t \in [0,T]$ не збігається з корінням характеристичного рівняння (0.3).

Приватне рішення системи (0.1) шукається у вигляді

$x(t,\varepsilon) = \varphi(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-1}\theta(t))$, $t \in [0,T]$, де $\varphi(t,\varepsilon) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \varphi_s(t)$ в разі нерезонанса; $\varphi(t,\varepsilon) = \sum\limits_{s=-1}^{\infty} \varepsilon^s \varphi_s(t)$ - в разі резонансу.

Для системи (0.1) сформульована і доведена теорема для знаходження приватного рішення. Відповідно до цієї теореми, якщо $f_s, \theta(t) \in C^{\infty}_{[0,T]}$ і виконані наступні умови:

1. $A_s(t), B(t) \in C^{\infty}_{[0,T]}$, $t \in [0,T]$;

2. пучок матриць $A_0(t) - \lambda B(t)$ *- регулярний,* $t \in [0,T]$;

3. $\det B(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$,

то приватне рішення системи (0.1) має вигляд:

$$x(t,\varepsilon) = \varphi(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-1}\theta(t)), \ t \in [0,T] \tag{0.9}$$

де $\varphi(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \varphi_s(t)$ в разі нерезонанса; $\varphi(t,\varepsilon) = \sum_{s=-1}^{\infty} \varepsilon^s \varphi_s(t)$ - в разі резонансу.

У п'ятому розділі розглядається однорідна система, відповідна системі (0.1):

$$\varepsilon B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} + A(t,\varepsilon)x = 0 \tag{0.10}$$

за умови, що $\det B^{(0)}(t) \neq 0$, І що характеристичне рівняння (0.3) має n різних коренів при $t \in [0,T]$.

Доведено теорему про існування n приватних формальних рішень і про існування формальної матриці-рішення для лінійної однорідної системи звичайних диференціальних рівнянь на $[0,T]$. Показано, що якщо виконані наступні умови:

1. $A_s(t), B_s(t) \in C^{\infty}_{[0,T]}$, $t \in [0,T]$;

2. пучок матриць $A_0(t)-\lambda B^{(0)}(t)$ - регулярний, $t\in[0,T]$;

3. $\det B^{(0)}(t)\neq 0$, $t\in[0,T]$

Тоді система (0.10) при $t\in[0,T]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ має n приватних формальних рішень виду:

$$x_j(t,\varepsilon)=u_j(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_j(\tau)d\tau\right), j=\overline{1,n},$$

де вектор-функції u_j представимо у вигляді:

$$u_j(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s u_j^{(s)}(t) \ , \ t\in[0,T],\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_1],$$

Також розглянуто випадок лінійної неоднорідної системи звичайних диференціальних рівнянь з виродженням (0.1) в разі $B^{(0)}(t)\neq 0$ і простих різних коренів характеристичного рівняння (0.3).

При побудові приватного рішення неоднорідної системи (0.1) визначені два випадки:

3. випадок «резонансу»: функція $k(t)=\dfrac{d\theta}{dt}$ при $t\in[0,T]$ збігається з одним з коренів рівняння (0.3);

4. випадок «нерезонанса»: функція $k(t)=\dfrac{d\theta}{dt}$ при $t\in[0,T]$ не збігається з корінням характеристичного рівняння (0.3).

Приватне рішення системи (0.1) шукається у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=\varphi(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-1}\theta(t)),\ t\in[0,T],$$ де

$\varphi(t,\varepsilon)=\sum\limits_{s=0}^{\infty}\varepsilon^{s}\varphi_{s}(t)$ в разі нерезонанса; $\varphi(t,\varepsilon)=\sum\limits_{s=-1}^{\infty}\varepsilon^{s}\varphi_{s}(t)$ - в разі резонансу.

Для системи (0.1) сформульована і доведена теорема для знаходження приватного рішення. Відповідно до цієї теореми, якщо $f_s,\theta(t)\in C^{\infty}_{[0,T]}$ і виконані наступні умови:

1. $A_s(t),B_s(t)\in C^{\infty}_{[0,T]}$,, $t\in[0,T]$;

2. пучок матриць $A^{(0)}(t)-\lambda B^{(0)}(t)$ - регулярний, $t\in[0,T]$;

3. $\det B^{(0)}(t)\neq 0$, $t\in[0,T]$,

то приватне рішення системи (0.1) має вигляд:

$$x(t,\varepsilon)=\varphi(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-1}\theta(t)),\ t\in[0,T] \tag{0.11}$$

де $\varphi(t,\varepsilon)=\sum\limits_{s=0}^{\infty}\varepsilon^{s}\varphi_{s}(t)$ в разі нерезонанса; $\varphi(t,\varepsilon)=\sum\limits_{s=-1}^{\infty}\varepsilon^{s}\varphi_{s}(t)$ - в разі резонансу.

Теорема доведена.

Література

1. Шкіль М.І., Старун І.І., Яковець В.П. Асимптотичне інтегрування лінійних систем диференціальних рівнянь з виродженням. - К .: Вища школа, 1991. - 207 с.

2. Шкіль М.І., Старун І.І., Яковець В.П. Асимптотичне інтегрування лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь. - К .: Вища школа, 1989. - 287 с.

3. Гантмахер Ф.Р. Теорія матриць. - М .: Наука, 1988. - 552 с.

4. Фещенко С.Ф., Шкіль М.І., Ніколаєнко Л.Д. Асимптотичні методи в теорії лінійних диференціальних рівнянь. - К .: Наук. думка, 1966. - 252 с.

5. Вазов В. Асимптотичні розвинення рішень звичайних диференціальних рівнянь. - М .: Світ, 1968. - 464 с.

6. Бояринцев Ю.Є. Регулярні і сингулярні системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь. - М .: Наука, 1963. - 412 с.

7. Федорюк М.В. Асимптотичні методи для лінійних звичайних диференціальних рівнянь. - М .: Наука, 1983. - 352 с.