Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2010. – Т.15, вип. 18. – С. 38–45

УДК 511.32:517.52

С. П. Варбанец, О. В. Савастру
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

МНОГОМЕРНЫЕ СУММЫ КЛОСТЕРМАНА НАД $\mathbb{Z}[i]$

Варбанець С. П., Савастру О. В. Багатомірні сумы Клостермана над Z$[i]$**.** Досліджуються n-мірні суми Клостермана над кільцем цілих гаусових чисел. Отримані нетривіальні оцінки цих сум та їх використання в задачі розподілу значень функції дільників цілих гаусових чисел в арифметичній прогресії.
Ключові слова: сума Клостермана, гаусові числа.

Варбанец С. П., Савастру О. В. Многомерные суммы Клостермана над Z$[i]$**.** Исследуются n-мерные суммы Клостермана над кольцом целых гауссовых чисел. Получены нетривиальные оценки этих сумм и их применения в задаче распределения значений функции делителей целых гауссовых чисел в арифметической прогрессии.
Ключевые слова: сумма Клостермана, гауссовы числа.

Varbanets S. P., Savastru O. V. Multidimensional Kloosterman sums over Z$[i]$**.** n-dimensional Kloosterman sums over the ring of the Gaussian numbers investigate. Nontrivial estimates of these sums and their applications in the problem of distribution of values of the divisor function of the Gaussian integers in an arithmetic progression were obtained.
Key words: Kloosterman sum, Gaussian numbers.

Введение. Классические суммы Клостермана были введены в 1926 г. в работе [5] для изучения представлений натуральных чисел бинарными квадратичными формами. Сумма Клостермана – это тригонометрическая сумма над приведенной системой вычетов по модулю q:

$$K(a,b;q) := \sum_{\substack{x=1 \\ (x,q)=1}}^{q} e^{2\pi i \frac{ax+bx'}{q}}, \quad a,b \in \mathbb{Z},\ q>1 - \text{натуральное}, \tag{1}$$

здесь x' обозначает мультипликативное обратное к x по $\mod q$, то есть $xx' \equiv 1 \pmod q$.

В последующие годы суммы Клостермана нашли применение в различных задачах асимптотической теории чисел и, прежде всего, в задачах, связанных с распределением значений функции делителей $\tau(n)$ на арифметических прогрессиях.

Наибольшую трудность в построении оценок сумм Клостермана представляет случай $q=p$, p – простое число. В 1948 г. A.Weill [10] доказал гипотезу Римана для алгебраических кривых, что привело к построению наилучшей возможной оценки

$$K(a,b;q) \ll p^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Суммы Клостермана играют существенную роль в разработанной Y. Motohashi спектральной теории дзета-функции Римана (см. [7]).

Новый толчок в решении трудных задач асимптотической теории чисел дали работы Н. В. Кузнецова [6] и R. Bruggeman [1], посвященные оценкам суммы сумм Клостермана. Затем последовали различные обобщения классических сумм Клостермана. Так, У. Жанбырбаева изучала суммы Клостермана над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$ и решила задачу о распределении функции делителей целых гауссовых чисел в арифметической прогрессии. В работе [2] исследовались суммы Клостермана над вполне вещественными числовыми полями, а в 2003 г. R. Bruggeman и Y. Motohashi [3] получили аналог формулы Кузнецова для суммы сумм Клостермана над кольцом целых гауссовых чисел. Геометрия целых гауссовых чисел богаче геометрии целых рациональных чисел. В работе [9] была рассмотрена норменная сумма Клостермана над $\mathbb{Z}[i]$, которая не имеет аналога в рациональном случае.

В настоящей работе мы изучаем n-мерные суммы Клостермана над $\mathbb{Z}[i]$. В рациональном случае эти суммы определяются следующим образом

$$K_n(a_0, a_1, \dots, a_n\,; q) := \sum_{\substack{x_0,\dots,x_n \pmod q \\ x_0\dots x_n \equiv 1 \pmod q}}^{q} e^{2\pi i \frac{a_0x_0+\dots+a_nx_n}{q}}. \tag{3}$$

(Подробнее см. [4], [8].)

Мы будем использовать обозначения:
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$ – целые гауссовые числа;
$\wp$ – простое гауссовое число;
$Sp(\alpha)$ – след α из $\mathbb{Q}(i)$ в $\mathbb{Q}$, то есть $Sp(\alpha) = 2\Re\alpha$;
$N(\alpha) = |\alpha|^2$ – норма α;
$\mathbf{R}(\gamma)$ (соответственно, $\mathbf{R}^*(\gamma)$) — полная (соответственно приведенная) система вычетов по $\bmod\ \gamma$ в $\mathbb{Z}[i]$;
запись $\sum\limits_{S(C)}$ означает, что суммирование ведется под условием C, причем условие C описывается отдельно;
$e_q(z) := e^{2\pi i \frac{z}{q}}$, $\quad \exp(x) := e^x$;
$(a, b, \dots, c)$ – наибольший общий делитель $a, b, \dots, c$ в $\mathbb{Z}$ или в $\mathbb{Z}[i]$ (что, обычно, видно из контекста);
символ Виноградова $''\ll''$ означает то же, что и символ Ландау $''O''$;
φ (соответственно, $\widetilde{\varphi}$) – тотиентная функция Эйлера в $\mathbb{N}$ (или, соответственно, в $\mathbb{Z}[i]$).

Напомним теперь две вспомогательные леммы, которые мы используем:

Лемма 1. *Пусть* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$. *Тогда*

$$\sum_{x\in\mathbf{R}(\gamma)} e^{\pi i Sp(\frac{\alpha x}{\gamma})} = \begin{cases} N(\gamma), & \text{если } \alpha \,\vdots\, \gamma; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лемма 2. *Для* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$, $(\alpha, \gamma) = 1$, *имеем*

$$\sum_{x\in\mathbf{R}^*(\gamma)} e^{\pi i Sp(\frac{\alpha x}{\gamma})} = \mu(\gamma),$$

где μ *– функция Мёбиуса над* $\mathbb{Z}[i]$.

Основные результаты.

Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}[i]$. Мы определяем

$$K_n(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\,; \gamma) = \sum_{S(C)} e^{\pi i Sp\left(\frac{\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_n x_n}{\gamma}\right)}, \tag{4}$$

где

$$S(C) : \{x_i \in \mathbf{R}^*(\gamma),\ i = 0, 1, \ldots, n;\ x_0 x_1 \ldots x_n \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ \gamma)\}\,.$$

Пусть $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k, \quad (\gamma_i, \gamma_j) = 1, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, k$. Тогда легко проверить равенство

$$K_n(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\,; \gamma) = \prod_{l=1}^{k} K_n(\alpha_0, \alpha_1^{(l)}, \ldots, \alpha_n^{(l)}\,; \gamma_l), \tag{5}$$

где $\alpha_i^{(l)},\ i = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, k$, определяются из сравнений

$$\alpha_i \equiv \alpha_i^{(1)}\Gamma_1 + \ldots + \alpha_i^{(k)}\Gamma_k \ \ (\mathrm{mod}\ \gamma), \quad \Gamma_j = \frac{\gamma}{\gamma_j}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Поэтому мы будем изучать только суммы $K_n(\alpha_0, \ldots, \alpha_n\,; \wp^m)$, где $\wp$ – простое гауссовое, $m \geqslant 1$ – натуральное.

Теорема 1. *Пусть $m = 1$. Тогда справедливы соотношения*

a) $K_n(\alpha_0, \ldots, \alpha_n\,; \wp) = (N(\wp) - 1)^n$, *если* $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \wp) = \wp$*;*

b) $K_n(\alpha_0, \ldots, \alpha_n\,; \wp) = (-1)^l (N(\wp) - 1)^{n-l}$, *если* $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \wp) = 1$ *и среди* α_i *имеется точно* l, $1 \leqslant l < n$, *взаимно простых с* $\wp$*;*

c) $|K_n(\alpha_0, \ldots, \alpha_n\,; \wp)| \leqslant (n+1)(N(\wp))^{\frac{n}{2}}$, *если* $(\alpha_i, \wp) = 1,\ i = 0, 1, \ldots, n$.

Доказательство. Рассмотрим три случая:

a) $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \wp) = \wp$. Тогда очевидно что:

$$K_n(\alpha_0, \ldots, \alpha_n\,; \wp) = \sum_{x_1 \in \mathbf{R}^*(\wp)} 1 \ \ldots \sum_{x_n \in \mathbf{R}^*(\wp)} 1 \ \cdot \sum_{\substack{x_0 \in \mathbf{R}^*(\wp) \\ x_0 \equiv (x_1 \ldots x_n)^{-1}\ (\mathrm{mod}\ p)}} 1 =$$

$$= (\widetilde{\varphi}(\wp))^n = (N(\wp) - 1)^n. \tag{6}$$

b) $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \wp) = 1$ и среди α_i имеется точно l, $1 \leqslant l < n$, взаимно простых с $\wp$. Тогда в силу леммы 2

$$K_n(\alpha_0, \ldots, \alpha_n\,; \wp) = \prod_{\substack{i=1 \\ (\alpha_i, \wp) = 1}}^{n} \sum_{x_i \in \mathbf{R}^*(\wp)} e^{\pi i Sp \frac{\alpha_i x_i}{\wp}} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ \alpha_i \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \wp)}}^{n} \sum_{x_i \in \mathbf{R}^*(\wp)} 1 =$$

$$= (-1)^l (N(\wp) - 1)^{n-l}. \tag{7}$$

c) $(\alpha_0, \wp) = (\alpha_1, \wp) = \ldots = (\alpha_n, \wp) = 1$.

Рассмотрим 3 подслучая:

c$_1$) $\wp = p \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$. Тогда имеем

$$K_n(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\,; \wp) = \sum_{S(C)} e^{\pi i Sp\left(\frac{\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_n x_n}{\wp}\right)} =$$

$$= \sum_{S(C)} e^{\pi i \frac{Sp(\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_n x_n)}{\wp}},$$

где

$$S(C) : \{x_i \in \mathbf{R}(\wp),\ i = 0, 1, \ldots, n;\ x_0 x_1 \ldots x_n \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \wp)\}\,.$$

Учтем, что для $p \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ справедливо соотношение

$$(a + bi)^p \equiv a - bi \pmod{p},$$

так что автоморфизм Фробениуса в поле k_{p^2} классов вычетов $\mathbb{Z}[i]$ по модулю p совпадает с операцией комплексного сопряжения.

Поэтому

$$Sp\,(\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_n x_n) = Tr\,(\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_n x_n)\,,$$

(где $Tr\,(y) = y + y^p$ для $\forall y \in k_{p^2}$.)

Следовательно,

$$|K_n(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\,; \wp)| = |\sum_{\substack{x_0 \ldots x_n = 1 \\ x_i \in k_{p^2}}} e^{2\pi i Tr(\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_n x_n)}| \leqslant$$

$$\leqslant (n+1) p^n = (n+1)(N(\wp))^{\frac{n}{2}}.$$

Здесь мы воспользовались оценкой Deligne для суммы Клостермана над конечным полем k_{p^r} для $r = 2$.

c$_2$) $\wp \in \mathbb{Z},\ N(\wp) = p \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$.

В качестве приведенной системы вычетов, которую пробегают x_i в сумме Клостермана, можем взять совокупность чисел
$1, 2, \ldots, p-1$.

Пусть $\wp = a + bi,\ a, b \in \mathbb{Z}, (a, p) = (b, p) = 1$.

Далее, для каждого $\alpha_i \in \mathbf{R}^*(\wp)$ найдется $a_i \in \{1, \ldots p-1\}$ такое, что $\alpha_i \equiv a_i$ $(\mathrm{mod}\ \wp)$. Поэтому

$$Sp\left(\frac{\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_n x_n}{\wp}\right) = \frac{1}{p} Sp\,((a_0 x_0 + \ldots + a_n x_n)(a + bi)) =$$

$$= \frac{1}{p}(b_0 x_0 + \ldots + b_n x_n),$$

где $b_i = a_i a$, причем $(b_i, p) = 1$.

Следовательно,

$$K_n(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\,; \wp) = \sum_{S(C)} e_p(b_0 x_0 + \ldots + b_n x_n),$$

где
$$S(C):\left\{x_i\in\mathbb{Z}_p^*,\ i=0,1,\ldots,n;\ x_0x_1\ldots x_n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)\right\}.$$

Последняя сумма есть рациональная n-мерная сумма Клостермана, которая, в силу оценки Deligne, оценивается величиной
$$(n+1)p^{\frac{n}{2}}=(n+1)N(\wp)^{\frac{n}{2}}. \tag{8}$$

c$_3$) $\wp=1+i$ – четное простое, и тогда утверждение теоремы 1 очевидно.

Доказательство теоремы 1 завершено.

Переходя к случаю $m\geqslant 2$, заметим, что для $(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\wp^m)=\ \wp^{m_0}$, $0\leqslant m_0\leqslant m$, имеем
$$K_n(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\,;\wp^m)=N(\wp^{m_0})^nK_n(\alpha_0',\alpha_1',\ldots,\alpha_n'\,;\wp^{m-m_0}),$$
где
$$\alpha_i'=\frac{\alpha_i}{\wp^{m_0}},\ (\alpha_0',\ldots,\alpha_n',\wp)=1.$$
Теперь уже случаи $m-m_0=0$ или 1 нами рассмотрены. Будем считать, что $m-m_0\geqslant 2$.

Теорема 2. *Пусть* $(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\wp^m)=1$, $m\geqslant 2$. *Тогда*
$$|K_n(\alpha_0,\ldots,\alpha_n;\wp^m)|\leqslant\begin{cases}0, & \text{если}\ \ \alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \wp);\\ nN(\wp^m), & \text{если}\ \ (\alpha_0,\ldots,\alpha_n,\wp)=1\\ & \text{и}\ \wp\neq 1+i,3;\\ 2^{m+1}n, & \text{если}\ \ (\alpha_0,\ldots,\alpha_n,\wp)=1,\ \wp=1+i;\\ 3^{2m+1}n, & \text{если}\ \ (\alpha_0,\ldots,\alpha_n,\wp)=1,\ \wp=3.\end{cases}$$

Доказательство.
Положим
$$\begin{aligned}&n=2k+\varkappa,\ \varkappa=0\ \text{или}\ 1;\\ &x_i=y_i+\wp^{k+\varkappa}z_i;\\ &y_i\in\mathbf{R}^*(\wp^{k+\varkappa}),\ z_i\in\mathbf{R}(\wp^k),\ i=1,2,\ldots,n.\end{aligned}$$

Отсюда
$$\begin{aligned}&x_1\ldots x_n=y_i\ldots y_n+\wp^{k+\varkappa}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}y_iz_j;\\ &x_0=(x_1\ldots x_n)^{-1}\ (\mathrm{mod}\ \wp^m);\\ &x_0=(y_1\ldots y_n)^{-1}-\wp^{k+\varkappa}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(y_i^2y_j^2)^{-1}(y_iz_j+y_jz_i).\end{aligned}$$

Здесь
$$y_iy_j^{-1}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \wp^m).$$

Но тогда

$$K_n(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n\,;\wp^m)=$$

$$=\sum_{\substack{y_i\in\mathbf{R}^*(\wp^{k+\varkappa})\\ i=1,\dots,n}} e^{\pi iSp\left(\frac{\alpha_1y_1+\dots+\alpha_ny_n+\alpha_0(y_1\dots y_n)^{-1}}{\wp^m}\right)}\sum_{\substack{z_i\in\mathbf{R}(\wp^k)\\ i=1,\dots,n}} e^{\pi iSp\left(\frac{z}{\wp^k}\right)}, \tag{9}$$

где

$$z=\sum_{i=1}^n\alpha_iz_i-\alpha_0\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n(y_i^{-1}y_j^{-2}z_j+y_i^{-2}y_j^{-1}z_i).$$

Но мы имеем (в силу леммы 1):

$$\sum_{\substack{z_i\in\mathbf{R}(\wp^k)\\ i=1,\dots,n}} e^{\pi iSp(\frac{z}{\wp^k})}=\begin{cases} N(\wp^k)^n, & \text{если } \alpha_iy_i^2y_j\equiv\alpha_jy_iy_j^2\equiv\alpha_0 \pmod{\wp^k}\\ & \text{для всех } i,j=1,\dots,n;\ i\neq j;\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Отсюда видно, что $K_n(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n\,;\wp^m)=0$, если $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n\,;\wp)=\ 1$, но $\wp\,|\,\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n$ и $m\geqslant 2$.
Поэтому будем считать, что $\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n\not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ \wp)$.

Итак, для $\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ \wp)$ имеем

$$K_n(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n\,;\wp^m)=N(\wp^{2k})\sum\nolimits_0(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n\,;\wp^m), \tag{10}$$

где

$$\sum\nolimits_0(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n\,;\wp^m)=\sum_{S(C)} e^{\pi iSp\left(\frac{\alpha_1y_1+\dots+\alpha_ny_n+\alpha_0(y_1\dots y_n)^{-1}}{\wp^m}\right)}, \tag{11}$$

$$S(C):\quad \alpha_iy_i^2y_j\equiv\alpha_0 \pmod{\wp^k},\ i,j=1,\dots,n;\ i\neq j.$$

Заметим, что замена $\alpha_iy_i=Y_i,\ i=1,\dots,n$, показывает, что

$$\sum\nolimits_0(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n\,;\wp^m)=\sum\nolimits_0(\beta,1,\dots,1\,;\wp^m), \tag{12}$$

где $\beta=\alpha_1\dots\alpha_n$.
Пусть сначала $\varkappa=0$. Тогда

$$\sum\nolimits_0=\sum_{S(C)} e^{\pi iSp\left(\frac{ny_1+\beta(y_1^{-1})^n}{\wp^m}\right)}, \tag{13}$$

$$S(C):\quad y_1=\ldots\equiv y_n \pmod{\wp^k},\ y_1^n\equiv\beta \pmod{\wp^k}.$$

И поскольку сравнение $y_1^n\equiv\beta(\mathrm{mod}\ \wp^k)$ имеет не более n решений по модулю $\wp^k$, то

$$|\sum\nolimits_0(\beta,1,\dots,1\,;\wp^k)|\leqslant n.$$

Если же $\varkappa = 1$ и $y_1^n \equiv \beta_0 (\mathrm{mod}\ \wp^k)$ – одно из решений сравнения $y_1^3 \equiv \beta (\mathrm{mod}\ \wp^k)$, то имеем для $y_1, \ldots, y_n (\mathrm{mod}\ \wp^{k+1})$:

$$\begin{aligned}
&y_i = \beta_0 + \wp^k t_i, \quad t_i \in \mathbf{R}(\wp),\\
&y_i^{-1} = \beta_0^{-1} - \wp^k (\beta_0^{-1})^2 t_i + \wp^{2k} (\beta_0^{-1})^3 t_i^2,\\
&(y_i y_j)^{-1} = \beta_0^{-2} - \wp^k (\beta_0^{-1})^3 (t_i + t_j) + \wp^{2k} (\beta_0^{-1})^4 (t_i^2 + t_j^2 + t_i^2 t_j),\\
&i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j.
\end{aligned}$$

Отсюда легко выводим

$$y_i + y_j + \beta (y_i y_j)^{-1} \equiv n\beta_0 + \wp^{2k} ((t_i + t_j)\delta + \beta_0^{-1} (t_i^2 + t_j^2 + t_i t_j))\ (\mathrm{mod}\ \wp^m).$$

Поэтому

$$\sum\nolimits_0 (\beta, 1, \ldots, 1\,; \wp^m) = \sum_{\beta_0} e^{\pi i Sp \frac{n\beta_0}{\wp^m}} \sum_{\substack{t_i, t_j \in \mathbf{R}(\wp)\\ i,j=1,\ldots,n;\, i \neq j}} e^{\pi i Sp \left(\frac{\beta_0^{-1} (t_i^2 + t_j^2 + t_i t_j) + \delta (t_i + t_j)}{\wp} \right)}. \tag{14}$$

Теперь рассмотрим два случая:

1. $\wp \neq 1 + i$, то есть $(\wp, 2) = 1$. Тогда по модулю $\wp$:

$$\beta_0^{-1} (t_i^2 + t_j^2 + t_i t_j) + \delta (t_i + t_j) \equiv \beta_0^{-1} (t_i + 2^{-1} (t_j + \delta))^2 +$$

$$+ \beta_0^{-1} (1 - (2^{-1})^2)(t_j + \delta_1^2) + \gamma.$$

Следовательно,

$$|\sum\nolimits_0 (\beta, 1, \ldots, 1\,; \wp^k)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\beta_0} \sum_{\substack{i,j=1\\ i \neq j}}^{n} \left| \sum_{t_j \in \mathbf{R}(\wp)} e^{\pi i Sp \left(\frac{\beta_0^{-1} (1 - 4^{-1}) t_j^2}{\wp} \right)} \right| \cdot \left| \sum_{t_i \in \mathbf{R}(\wp)} e^{\pi i Sp \left(\frac{\beta_0^{-1} (t_i + 2^{-1} (t_j + \delta))^2}{\wp} \right)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} nN(\wp), & \text{если } (1 - 4^{-1}, \wp) = 1, \text{ то есть } \wp \neq 3;\\ 3nN(\wp) = 27n, & \text{если } \wp = 3. \end{cases} \tag{15}$$

2. $\wp = 1 + i$. Тогда тривиальная оценка в (14) дает

$$|\sum\nolimits_0 (\beta, 1, \ldots, 1\,; \wp^n)| \leqslant 4n. \tag{16}$$

Таким образом, собирая вместе оценки (15), (16), получим

$$|K_n(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n; \wp^m)| \leqslant \begin{cases} nN(\wp^m), & \text{если } \wp \neq 1 + i, 3;\\ 2^{m+1} n, & \text{если } \wp = 1 + i;\\ 3^{2m+1} n, & \text{если } \wp = 3. \end{cases}$$

Заключение. В качестве применения полученных оценок n-мерных сумм Клостермана над $\mathbb{Z}[i]$ укажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть β и γ — целые гауссовы, $x > 1$ — вещественное. Тогда для функции делителей $\tau_3(\alpha)$ — число представлений α в виде $\alpha = \delta_1\delta_2\delta_3$ — справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{\substack{\alpha\equiv\beta \pmod{\gamma} \\ N(\alpha)\leqslant x}} \tau_3(\alpha) = A_1\frac{x\log x}{N(\gamma)} + A_0\frac{x}{N(\gamma)} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{4}+\epsilon}}{N(\gamma)^{\frac{5}{8}}}\right),$$

здесь A_1, A_0 – вычислимые константы, зависящие от γ, причем $(\log\log N(\gamma))^{-1} \leqslant A_1 < log\log N(\gamma)$, постоянная в символе "$O$" зависит только от ϵ.

Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть производящую функцию

$$F(s) = \sum_{\substack{\beta_1,\beta_2,\beta_3 \pmod{\gamma} \\ \beta_1\beta_2\beta_3\equiv\beta \pmod{\gamma}}} \frac{1}{N(\gamma)^{3s}} Z(s,\frac{\beta_1}{\gamma})Z(s,\frac{\beta_2}{\gamma})Z(s,\frac{\beta_3}{\gamma}),$$

где $Z(s,\delta) := \sum \frac{1}{N(\alpha+\delta)^s}$, $\Re s > 1$, а затем перенести контур интегрирования в формуле Перрона на прямую $\Re s = -\epsilon$, $0 < \epsilon < \frac{1}{8}$, воспользоваться функциональным уравнением для $Z(s,\delta)$ и применить полученную оценку для $K_2(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2;\gamma)$.

1. **Bruggeman R.** Fourier Coefficients of Automorphic Forms [text] / Bruggeman R. – Lecture Notes in Math., Springer Verlag, Berlin, 1981. – 865 p.
2. **Bruggeman R.** Estimates for Kloosterman sums for totally real number fields [text] / R. Bruggeman, R. Miatello, Pacharoni // J. Reine Angew. Math. – 535(2001). – P. 103–164.
3. **Bruggeman R.** Sum formula for Kloostarman sums and fourth moment of the Dedekind zeta-function over the Gaussian number field [text] / R. Bruggeman, Y. Motohashi // Functiones et Approximatio. – XXXI(2003). – P. 23–92.
4. **Heath-Brown D. R.** The divisor function $d_3(n)$ in arithmetic progressions [text] / Heath-Brown D. R. // Acta Arith. – XLVII(1986). – P. 29–56.
5. **Kloosterman H.** On the representatin of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ [text] / Kloosterman H. // Acta Math. – 49(1926). – P. 407–464.
6. **Кузнецов Н. В.** Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. Суммы сумм Клостермана [текст] / Кузнецов Н. В. // Мат. сб. – 111(1980). – С. 334–383.
7. **Motohashi Y.** Spectral Theory of the Riemann zeta-function [text] / Motohashi Y. – Cambridge: Cambridge Univ, 1997.
8. **Smith R. A.** On n-dimensional Kloostermsn sums / Smith R. A. // J. Number Theory. – 11(1979). – P. 324–343.
9. **Varbanets S.** General Kloosterman sum over ring of Gaussian integers [text] / Varbanets S.// Укр. мат. журнал. – 2007. – 59(№9). – С. 1179–1200.
10. **Weill A.** On some exponential sums [text] / Weill A. // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 34(1948). – P. 204–207.