ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И. И. МЕЧНИКОВА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЭКОНОМИКИ И МЕХАНИКИ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

(РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ)

ЧАСТЬ 1

Методические указания для студентов 1 курса

ОДЕССА – 2007

Составители: **д-р ф-м н., проф. Варбанец П.Д.,**
к-т ф-м н., ст. преп. Савастру О.В.

Рецензенты: :   **к-т ф-м н., доц. Белозеров Г.С.,**
к-т ф-м н., доц. Федоровский С.В.

Рекомендовано к печати
Ученым советом ИМЭМ Одесского национального университета им. И. И. Мечникова
протокол № ___ от ___________ г.

Варбанец, Павел Дмитриевич. Линейная алгебра (решение типовых задач). Методические указания для студ. 1 курса / п.д. варбанец, о.в. савастру; ону им. И.и. мечникова, имэм. – одесса: б.и., 2007.

Ч. 1. – 2007. – 58 с. – библиогр.: с.58 (3 назв.).

СОДЕРЖАНИЕ

В этом методическом пособии мы будем иметь дело с внешне различными объектами: комплексные числа, системы линейных уравнений, определители, матрицы. Но именно эти объекты составляют основу классической алгебры, которую студенты успешно изучают всего за один семестр.

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

Задачи этого параграфа условно можно разбить на следующие группы:

1) алгебраическая форма комплексного числа;
2) тригонометрическая форма комплексного числа;
3) геометрическая интерпретация комплексного числа;
4) извлечение корней n - ой степени.

1.1. Алгебраическая форма комплексного числа.

В алгебраической форме комплексное число записывают в виде $a+bi$, где a и b – вещественные числа. Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ равны тогда и только тогда, когда $a=c$, $b=d$. На основании этого определения решим несколько задач.

Задача 1.1. Найти $\sqrt{-15+8i}$.

Решение. Предположим, что $\sqrt{-15+8i}=x+iy$. Тогда $-15+8i=\left(x+iy\right)^2$ или $-15+8i=x^2-y^2+2xyi$. Используя условие равенства двух комплексных чисел, получаем систему уравнений для определения $x,\ y$:

$$\begin{cases} x^2-y^2=-15, \\ 2xy=8. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$x_1=-1;\ x_2=1;$$

$$y_1=-4;\ y_2=4.$$

Откуда $x_1+iy_1=-1-4i;\ \ x_2+iy_2=1+4i.$

Итак, $\sqrt{-15+8i} = \pm(1+4i)$.

Задача 1.2. Найти $x,\ y$ так чтобы

$(2+3i)x+(1-4i)y = 3+10i$.

Имеем $x = 2,\ y = -1$.

По определению произведением комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется число

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i .$$

Заметим, что комплексные числа можно перемножать как два многочлена первой степени с учетом того, что

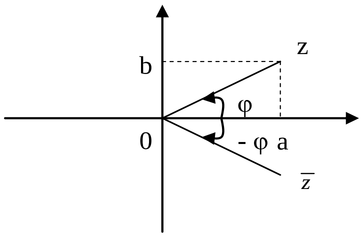
$$i \cdot i = i^2 = -1 .$$

Оперируя с комплексными числами, мы нередко получаем дроби вида $\dfrac{a+bi}{c+di}$, которые желательно упростить. Для этого надо умножить числитель и знаменатель дроби на число, комплексно сопряженное к знаменателю, то есть

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2} .$$

1.2. Тригонометрическая форма комплексного числа.

С каждым комплексным числом $z = a + bi$ на плоскости связывается точка с координатами (a,b). Положение этой точки однозначно определяется расстоянием от начала координат $r = \sqrt{a^2+b^2}$ и углом φ между положительным направлением вещественной оси и лучем, проведенным из начала координат в эту точку. Если угол отсчитывается в положительном направлении, то ему приписывается знак «+», а в противном случае знак «-». Комплексное число 0=0+0i однозначно определяется расстоянием (равным 0) от начала координат, а потому ему значение угла не приписывается. Число $r = \sqrt{a^2+b^2}$ называется **модулем** комплексного числа z, а указанный выше угол φ называется **аргументом** z и обозначается $\varphi = \arg z$. Аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π.



Из рисунка видно, что $a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$. Так что мы имеем следующий вид тригонометрической формы комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

А число, комплексно сопряженное к z, имеет такую тригонометрическую форму $\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$. Теперь, используя формулы для синуса и косинуса суммы (разности) двух углов, получаем

$$z_1 z_2 = \left[r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\right]\left[r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\right] =$$

$$= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2));$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))}{r_2^2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

При возведении комплексного числа в степень с натуральным показателем можно воспользоваться следующей формулой, которая называется формулой Муавра.

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Для представления комплексного числа в тригонометрической форме очень полезно изобразить соответствую-

щую этому числу точку (это избавит вас от ошибки в определении аргумента числа).
При решении задач часто используется следующий результат.

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{ï ðè} \quad n = 4q, \\ i, & \text{ï ðè} \quad n = 4q+1, \\ -1, & \text{ï ðè} \quad n = 4q+2, \\ -i, & \text{ï ðè} \quad n = 4q+3, \end{cases}$$

где $n, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Приведем примеры решения некоторых задач.

Задача 1.3. Вычислить i^{347}.

Решение. $i^{347} = i^{4\cdot 86+3} = -1$.

Задача 1.4. Вычислить $\dfrac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi - i\sin\varphi)}$.

Решение. Обозначим $z_1 = \left(1-i\sqrt{3}\right)$, $z_2 = 2(1-i)$,
$z_3 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z_4 = (\cos\varphi - i\sin\varphi)$.

Представим z_1 и z_2 в тригонометрической форме. Точка, соответствующая z_1 лежит в четвертой четверти, поэтому одно из значений φ_1 находится в пределах $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le 0$. Но мы имеем $tg\,\varphi_1 = \dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$. Поэтому $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{3}$. Кроме того $r_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Получаем, что $z_1 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

Аналогично находим

$$\varphi_2 = -\frac{\pi}{4}, \qquad r_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2},$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Заметим, что z_3 уже записано в тригонометрической форме с $r_3 = 1$ и, кроме того, z_4 является комплексно сопряженным к z_3 ($z_4 = \bar{z}_3$). Поэтому

$$\frac{z_3}{z_4} = \frac{(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))}{(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))} = \cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi).$$

В результате получаем

$$\frac{\left(1 - i\sqrt{3}\right)(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi - i\sin\varphi)} =$$

$$= \frac{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)}{2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{12}\right)\right).$$

Задача 1.5. Доказать, что если $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$, то

$$z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\theta.$$

Решение. Из условия видно, что $z \neq 0$. Представим z в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

Поэтому $\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi = 2\cos\theta$.

Отсюда $\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi = 2\cos\theta$, $\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi = 0$.

Имеем либо $\left(r-\frac{1}{r}\right) = 0$, либо $\sin\varphi = 0$.

Если $\left(r-\frac{1}{r}\right) = 0$, то $r = 1$, т.е. либо $\varphi = \theta$, либо $\varphi = -\theta$ является значением аргумента z. Но тогда либо $z = \cos\theta + i\sin\theta$, либо $z = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$. В обоих случаях $z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\theta$.

Если же $r \neq 1$, то $\sin\varphi = 0$, так что z - вещественное, причем $\left|z+\frac{1}{z}\right| = 2$. А это невозможно, так как z и $\frac{1}{z}$ одного знака и абсолютная величина одного из чисел z, $\frac{1}{z}$ больше 1, а поэтому условие задачи не может выполняться.

Задача 1.6. Выразить $\cos 3\alpha$ и $\sin 3\varphi$ через степени $\cos\alpha, \sin\alpha$.

Решение. С помощью формулы Муавра можно получить выражение косинуса и синуса кратного угла $n\varphi$ через косинус и синус простого угла φ. А именно, необходимо воспользоваться ее частным случаем

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Раскрывая левую часть этого равенства по формуле бинома Ньютона, и приравнивая отдельно действительные и мнимые части обеих частей равенства, можно получить необходимые формулы.

При $n = 3$ получаем

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = \left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^3 = \cos^3\varphi +$$

$$+3\cos^2\varphi\left(i\sin\varphi\right) + 3\cos\varphi\left(i\sin\varphi\right)^2 + \left(i\sin\varphi\right)^3 =$$

$$= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin\varphi^2 + i\left(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin\varphi^3\right).$$

Приходим к формулам

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin\varphi^2;$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin\varphi^3.$$

Известная формула суммы членов геометрической прогрессии позволяет решить задачи на вычисление некоторых сумм.

Задача 1.7. Найти сумму

$$\sum = \sin\alpha - \sin\left(\alpha + \beta\right) + \sin\left(\alpha + 2\beta\right) - \ldots + \\ + \left(-1\right)^{n-1}\sin\left(\alpha + \left(n-1\right)\beta\right).$$

Решение. Рассмотрим геометрическую прогрессию с первым членом a и знаменателем прогрессии $-q$:

$$a - aq + aq^2 - \ldots + \left(-1\right)^{n-1}aq^{n-1}.$$

Сравнивая эту прогрессию с исследуемой суммой и учитывая, что синус «характерен» для мнимой части комплексного числа в тригонометрической форме, получаем, что при $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $q = \cos\beta + i\sin\beta$, исходная сумма совпадает с мнимой частью (точнее коэффициент при мнимой части) геометрической прогрессии. Напомним, что сумма $S_n = \dfrac{a\left(1 - q^n\right)}{1 + q}$. Поэтому при $-q \neq 1$:

$$\sum = \sin\alpha - \sin\left(\alpha + \beta\right) + \sin\left(\alpha + 2\beta\right) - \ldots + \left(-1\right)^{n-1}\sin\left(\alpha + \left(n-1\right)\beta\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)(1 - \left(-1\right)^n\left(\cos\beta n + i\sin\beta n\right))}{1 + \cos\beta + i\sin\beta} =$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\cos\left(\alpha+\dfrac{n-1}{2}\beta\right)\sin\dfrac{n\beta}{2}}{\cos\dfrac{\beta}{2}}, & n-\text{÷åò í î å}, \\[2ex] \dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{n-1}{2}\beta\right)\cos\dfrac{n\beta}{2}}{\cos\dfrac{\beta}{2}}, & n-\text{í å÷åò í î å}.\end{cases}$$

Если же $-q=1$, то $\beta=\pi+2k\pi$, а значит $\sin(\alpha+m\beta)=(-1)^m\sin\alpha$. Поэтому $\sum=n\sin\alpha$.

1.3. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

При решении задач с использованием геометрической интерпретации комплексных чисел следует руководствоваться следующими основными геометрическими иллюстрациями алгебраических соотношений:

$|z-z_0|=r$ - совокупность точек окружности с центром в точке z_0 и радиусом r;

$|z-z_0|\le r$ - совокупность точек круга с центром в точке z_0 и радиусом r;

$\arg z=\varphi$ - множество точек луча, образующего угол φ с положительным направлением вещественной оси;

$\operatorname{Re} z=a$ - точки прямой, уравнение которой $x=a$;

$\operatorname{Re} z\ge a$ -точки плоскости, расположенные на прямой $x=a$ и правее ее;

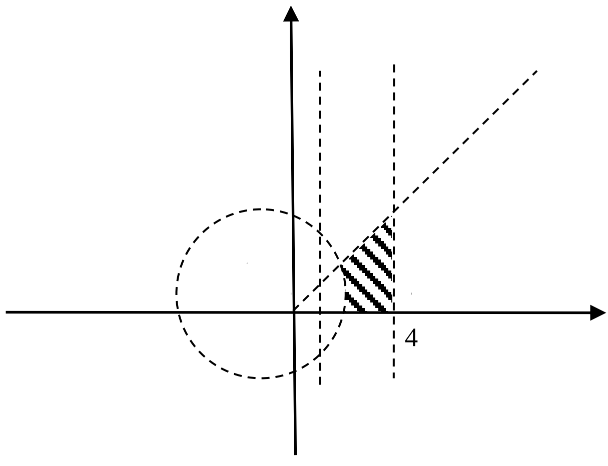
$\operatorname{Im} z=b$ - точки прямой $y=b$;

$\operatorname{Im} z\ge b$ = точки прямой $y=b$ и точки, лежащие выше этой прямой.

Задача 1.8. Найти геометрическое место точек, изображающих числа z, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} |z+1-i| > 3; \\ 1 < \operatorname{Re} z < 4; \\ 0 \le \arg z < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решение. Точки, изображающие z с условием $|z+1-i| > 3$,- это точки, отличные от тех, для которых $|z+1-i| \le 3$, а потому лежат вне круга радиуса 3 и с центром в точке $-1+i$. Далее, точки для которых $1 < \operatorname{Re} z < 4$ лежат левее прямой $x = 4$ и правее прямой $x = 1$. И, наконец, условие $0 \le \arg z < \dfrac{\pi}{4}$ означает, что нас устраивают лишь точки первого квадранта под биссектрисой прямого угла этого квадранта. Интересующее нас место точек изображено на рисунке (заштрихованная область):



1.4. Извлечение корней n - ой степени.

Для каждого натурального n и любого комплексного z всегда найдется комплексное z_1 такое, что $z_1^n = z$, т.е. из любого комплексного z всегда можно извлечь корень n - ой степени. Это важное свойство поля комплексных чисел необходимо хорошо помнить. Оказывается, что существует **ровно n различных значений** корня n - ой степени из комплексного числа z . И все эти значения легко определить, если данное z представлено в тригонометрической форме. А именно, если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то все значения n - ой степени из z содержатся в формуле

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Исключение из этого правила представляет лишь частный случай, когда подкоренное число равно нулю, т.е. $r = 0$. В этом случае все указанные выше значения корня равны нулю.

Для $z = 1$ получаем следующие n корней n - ой степени из 1: $$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Корень ε n -ой степени из 1 называется **первообразным корнем**, если совокупность $\varepsilon^0, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ с точностью до порядка следования совпадает с приведенным выше множеством всех корней n -ой степени из 1. При решении задач используется следующий критерий первообразности корня: корень ε_k n - ой степени из 1 является **первообразным** тогда и только тогда когда $(k, n) = 1$.

Задача 1.9. Решить уравнение

$$z^2 + (4 - 6i)z + (10 - 20i) = 0 .$$

Решение. Прежде всего учитываем, что во множестве комплексных чисел корень n - ой степени из комплексного числа z имеет точно n корней. Поэтому формула для корней квадратного уравнения $az^2 + bz + c = 0$, где a, b, c - комплексные числа ($a \neq 0$) имеет вид $z_{1,2} = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

то есть перед квадратным корнем из дискриминанта уравнения в числителе берем только знак «+» (во множестве действительных чисел были знаки « $\pm$ », так как квадратный корень являлся арифметическим). Решая данное уравнение, получаем

$$D = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(4-6i)^2 - 40 + 80i} = \sqrt{-60 + 32i} =$$

$$= 2\sqrt{-15 + 8i}.$$

Ранее в задаче 1.1 мы уже извлекали корень квадратный из данного комплексного числа. Воспользуемся ранее полученным результатом, тогда

$$D = \pm(2 + 8i).$$

Тогда $\qquad z_{1,2} = 2 - 3i \pm (1 + 4i)$, $z_1 = 1 - 7i$, $\quad z_2 = 3 + i$.

Задача 1.10. Извлечь корень: $\sqrt[6]{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^8}$.

Решение. Имеем $\arg\left(1 - i\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$, а потому

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Имеем $\quad \left(1 - i\sqrt{3}\right)^8 = 2^8\left(\cos\left(-\dfrac{8\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{8\pi}{3}\right)\right).$

Отсюда

$$\sqrt[6]{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^8} = 2^{4/3}\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{6}\right)\right),$$

$k = \overline{0,5}$.

Замечание. Обратите внимание, что мы не воспользовались «равенством» $\sqrt[6]{z^8} = \sqrt[3]{z^4}$, так как иначе потеряли бы три корня.

Задача 1.11. Извлечь корень: $\sqrt[4]{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}}$.

Решение. Анализируя подкоренное выражение, мы замечаем, что числитель и знаменатель дроби легко могут быть представлены в тригонометрической форме, поэтому имеем

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

Отсюда, используя формулу, получаем:

$$\sqrt[4]{\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{48} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{48} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right), \quad k = \overline{0,3}.$$

Задача 1.12. Найти все первообразные корни 12- ой степени из единицы.

Решение. Используя критерий первообразности корня, получаем, что ε_k является первообразным корнем 12-ой степени из 1 тогда и только тогда, когда $(k,12)=1$. Поэтому $\varepsilon_1, \varepsilon_5, \varepsilon_7, \varepsilon_{11}$ - это первообразные корни.

Задача 1.13. Найти сумму всех корней n - ой степени из 1.

Решение. Возьмем первообразный корень n - ой степени из 1. Таким корнем будет $\varepsilon_1 = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$. А тогда искомая сумма равна

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_1^{\,k} = \frac{1-\varepsilon_1^{\,n}}{1-\varepsilon_1} = 0.$$

Задача 1.14. Пусть $n = p^k$, где p - простое число. Доказать, что сумма всех первообразных корней n - ой степени из 1 равна (-1), если $k = 1$, и равна нулю, если $k > 1$.

Решение. Если $k = 1$, то каждый корень p - ой степени из 1, кроме 1, является первообразным. Значит сумма первообразных равна сумме всех корней p - ой степени из 1 за вычетом 1, то есть равна (-1). Если $k > 1$, то корень ε_m не является первообразным, если m делится на p. Поэтому искомая сумма первообразных корней равна

$$\sum_{m=0}^{p^k-1} \varepsilon_m - \sum_{m=0}^{p^{k-1}-1} \varepsilon_{mp} = -\sum_{m=0}^{p^{k-1}-1} \left(\cos \frac{2\pi mp}{p^k} + i \sin \frac{2\pi mp}{p^k} \right) =$$

$$= -\sum_{m=0}^{p^{k-1}-1} \left(\cos \frac{2\pi m}{p^{k-1}} + i \sin \frac{2\pi m}{p^{k-1}} \right) = 0.$$

Значит, сумма первообразных корней равна 0.

2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА.

Метод Гаусса является наиболее удобным для практического нахождения решений систем линейных уравнений с числовыми коэффициентами.

Система чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ называется **решением** системы линейных уравнений с n неизвестными, если она обращает каждое уравнение системы в тождество после замены x_i соответствующими числами α_i, $i = 1, 2, ..., n$.

Если система уравнений обладает решениями, то она называется **совместной**. Совместная система называется **определенной**, если она обладает единственным решением и **неопределенной,** если она имеет более одного решения. Система, не имеющая решений, называется **несовместной**.

Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется **матрицей системы (матрицей коэффициентов)**. Если к столбцам матрицы коэффициентов присоединить столбец свободных членов, то получим **расширенную матрицу.**

Решение системы методом Гаусса основано на применении следующих преобразований системы:

- перестановка уравнений;
- умножение обеих частей уравнения на какое-нибудь отличное от нуля число;
- прибавление к одному уравнению другого, умноженного на какое-нибудь число.

Выполняя указанные выше преобразования, мы обращаем в нуль коэффициенты при первом неизвестном, начиная со второго уравнения системы, при втором неизвестном, начиная с третьего уравнения и т.д.

После выполнения конечного числа таких преобразований, возможны три случая:

1) получим уравнение, в котором коэффициенты при всех неизвестных равны нулю, а свободный член отличен от нуля **(система – несовместна);**
2) последнее уравнение системы содержит только одно неизвестное (система приводится к треугольному виду), тогда **система - определенная;**
3) последнее уравнение системы содержит более одного неизвестного, система приводится к трапецеидальному виду **(система - неопределенная)**.

Если после выполнения преобразований выясняется, что система является совместной, но неопределенной, то в качестве главных неизвестных следует выбрать те неизвестные, с которых начинаются уравнения системы трапецеидального (ступенчатого) вида. Тогда будем говорить, что эти переменные имеют свои уравнения. Все остальные неизвестные будем считать свободными.

При решении систем методом Гаусса удобно выписывать расширенную матрицу системы, для удобства, отделив столбец свободных членов вертикальной чертой, и все преобразования выполнять над **строками** этой матрицы. Рассмотрим примеры.

Задача 2.1. Решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу нашей системы, предварительно поменяв местами первое и второе уравнения

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Обратим в нуль все элементы первого столбца, кроме первого. Для этого к четвертой строке прибавим вторую, умноженную на -1; к третьей строке прибавим первую, умноженную на -3; ко второй строке прибавим первую, умноженную на -2. Получим следующую матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -2 & 4 & 4 & -16 \end{array}\right).$$

Обратим в нуль все элементы второго столбца, кроме первых двух. Для этого к четвертой строке, умноженной на -2, прибавим третью; к третьей строке, умноженной на 5, прибавим вторую, умноженную на -4. Имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -54 \\ 0 & 0 & -18 & 0 & 18 \end{array}\right)$$

К четвертой прибавим третью, умноженную на -1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \lfloor 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & \lfloor -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & \lfloor -18 & 36 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & \lfloor -36 & 72 \end{array}\right)$$

Мы пришли к следующей системе уравнений треугольного вида

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ \quad -5x_2 - 8x_3 + x_4 = -4, \\ \qquad -18x_3 + 36x_4 = -54, \\ \qquad\qquad -36x_4 = 72. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = -1;\ x_4 = -2.$$

Задача 2.2. Решить систему:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 \qquad - 5x_4 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & -5 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right).$$

Ко второй строке, умноженной на 4, прибавим первую, умноженную на -3; к третьей строке, умноженной на -2 , прибавим первую; к чевертой строке, умноженной на 4, прибавим первую, умноженную на -5. Получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 9 & -4 \\ 0 & 3 & -6 & -27 & -36 \end{array}\right)$$

К третьей строке прибавим вторую, умноженную на -1; к четвертой строке прибавим вторую, умноженную на -3. Имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -48 \end{array}\right).$$

Мы пришли к системе, содержащей уравнение 0=-48. Следовательно, система несовместна.

Задача 2.3. Решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Подвергнем преобразованиям расширенную матрицу этой системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{array}\right).$$

Ко второй строке прибавим первую, умноженную на -4, к третьей – первую, умноженную на -2, к четвертой строке – первую, умноженную на -1. Получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -8 & 2 \end{array}\right)$$

К третьей строке прибавим вторую, к четвертой прибавим вторую, умноженную на 2, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \underline{2} & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{-5} & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Мы пришли к следующей системе

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ \qquad\qquad -5x_3 + 4x_4 = -1. \end{cases}$$

Эта система имеет трапецеидальный вид, так как из четырех неизвестных только две (x_1 и x_3) имеют свои уравнения. Неизвестные x_1 и x_3 являются главными, а x_2 и x_4 являются свободными. Когда мы выразим главные переменные через свободные и будем придавать свободным переменным определенные числовые значения, то каждый раз будем получать решение исходной системы. Так как таких решений более одного (их бесконечно много), то система является неопределенной.

Итак, из последнего уравнения полученной системы выразим неизвестное x_3 через x_4, полученное значение x_3 подставим в первое уравнение, и выразим неизвестное x_1 через x_2 и x_4, получим общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{6-15x_2-x_4}{10}, \\ x_3 = \dfrac{1+4x_4}{5}, \\ x_2, x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Так как неизвестные x_2 и x_4 - свободные, им можно придавать произвольные значения. Пусть, например,

$x_4 = c_4$, $x_2 = c_2$. Тогда $x_1 = \dfrac{6-15c_2-c_4}{10}$, $x_3 = \dfrac{1+4c_4}{5}$.

Таким образом,

$\left(\dfrac{6-15c_2-c_4}{10}, c_2, \dfrac{1+4c_4}{5}, c_4\right)$ - это общий вид решения нашей системы.

Придавая свободным неизвестным конкретные числовые значения, получим частное решение системы.

Например, пусть $x_4 = 1$, $x_2 = 0$, тогда $\left(\dfrac{1}{2}, 0, 1, 1\right)$ - частное решение системы.

Мы рассмотрели примеры решения неоднородных систем линейных уравнений. Однородные системы линейных уравнений решаются совершенно аналогично. В случае однородной системы, расширенная матрица совпадает с матрицей коэффициентов (нулевой столбец не выписывается).

3. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ n - ГО ПОРЯДКА.

3.1. Разложение определителя по элементам строки или столбца.

Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца позволяет свести вычисление определителя n - го порядка ($n > 1$) к вычислению определителей порядка $n-1$.

Если определитель имеет равные нулю элементы, то удобнее всего разлагать определитель по элементам той строки или столбца, который содержит наибольшее число нулей.

Используя свойства определителей, можно преобразовать определитель n - го порядка так, чтобы все элементы некоторой строки или столбца, кроме одного, стали равными нулю. Таким образом, вычисление определителя n - го порядка, если он отличен от нуля, сведется к вычислению одного определителя $(n-1)$ -го порядка.

Задача 3.1. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавив ко второй строке первую, к третьей – первую, умноженную на 2, к четвертой – первую, умноженную на -5, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 5 & 16 & 13 \\ 0 & -8 & -36 & -22 \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель по элементам первого столбца, имеем

$$\Delta = -1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 5 & 16 & 13 \\ -8 & -36 & -22 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 5 & 16 & 13 \\ -8 & -36 & -22 \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе 3-го порядка обратим в нуль все элементы первого столбца, кроме первого. Для этого ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-1), к третьей, умноженной на 5, прибавим первую, умноженную на 8. Так как умножали третью строку на 5, то (для того, чтобы определитель не изменился) умножим его на $\frac{1}{5}$. Имеем

$$\Delta = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 10 & 6 \\ 0 & -132 & -54 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель разложим по элементам первого столбца:

$$\Delta = -\frac{1}{5}\cdot 5\cdot\left(-1\right)^{1+1}\begin{vmatrix} 10 & 6 \\ -132 & -54 \end{vmatrix} = -\left(-540+792\right) = -252.$$

3.2. Разложение определителя по теореме Лапласа.

Теоремой Лапласа удобно пользоваться, когда в определителе имеются равные нулю миноры. В этом случае при вычислении определителя удобно выделять в нем те k строк и столбцов, которые содержат наибольшее число миноров k - го порядка, равных нулю. То есть, если в определителе два (или более) соответствующих элементов двух (или более) строк (столбцов) равны нулю (или легко обращаются в нуль), то будем применять теорему Лапласа.

Задача 3.2. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. В определителе Δ в первой и последней строках на одинаковых местах расположены нули. Выберем в определителе Δ эти строки, тогда, согласно теореме Лапласа, определитель Δ равен сумме произведений всевозможных-миноров 2-го порядка, расположенных в выбранных строчках на их алгебраические дополнения. В выбранных нами строчках находится только один, отличный от нуля, минор 2-го порядка, поэтому

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+4+2+3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-20) = 60.$$

Задача 3.3. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Решение. В этом определителе легко получить нули, стоящие на одинаковых местах в первой и в четвертой строчках. Для этого к первому столбцу прибавим второй, к четвертому столбцу прибавим пятый, умноженный на -2. Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Так как в первой, во второй и четвертой строчках на одинаковых местах находятся нули, то удобно выбрать эти строчки. Тогда, согласно теореме Лапласа, определитель Δ равен сумме произведений всевозможных миноров 3-го порядка, расположенных в выбранных строчках на их алгебраические дополнения. В выбранных нами строчках находится только один, отличный от нуля, минор 3-го порядка, поэтому

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+4+2+3+5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -84.$$

Задача 3.4. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 17 & 0 & 1 & 0 \\ 17 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Выделив в определителе две первые строки и применив теорему Лапласа, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \cdot \left(-1\right)^{1+2+1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 .$$

3.3. Приведение определителя к треугольному виду.

Некоторые определители удобно вычислять, используя метод приведения к треугольному виду. А, как известно, определитель треугольного вида равен произведению элементов главной диагонали.

Задача 3.5. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Легко увидеть, что в этом определителе сумма элементов каждой строки (столбца) одна и та же. Следовательно, прибавляя все строки определителя к первой, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вынесем общий множитель элементов первой строки за знак определителя. Имеем:

$$\Delta = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Из каждой строки, начиная со второй, вычтем первую. Мы получили определитель треугольного вида:

$$\Delta = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 8 = 48.$$

3.4. Вычисление определителей n - го порядка с буквенными элементами.

Универсального метода для вычисления таких определителей не существует, вычисление этих определителей требует некоторого опыта и сообразительности. Рассмотрим несколько основных приемов вычисления определителей с буквенными элементами.

Конечно, можно воспользоваться методом приведения к треугольному виду. Как и в случае определителей с числовыми элементами, преобразованиями, не меняющими определитель, обращаем в нуль элементы, лежащие по одну сторону одной из диагоналей.

Задача 3.6. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

Решение. Ко второй строке определителя Δ прибавим первую строку, полученную вторую строку прибавим к третьей, полученную третью строку прибавим к четвертой строке и т.д. В результате получим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Это определитель треугольного вида и, следовательно, равен произведению элементов главной диагонали, т.е. $\Delta = 1$.

Задача 3.7. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

Решение. Ко второму стролбцу определителя Δ прибавим первый стролбец, умноженный на ($-a_1$); к третьему столбцу прибавим первый, умноженный на ($-a_2$) и т.д. В результате получим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 0 & & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Это также определитель треугольного вида и, следовательно, определитель Δ равен $b_1 \cdot b_2 ... b_n$.

4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ.

Система векторов $a_1, a_2, ..., a_n$ называется **линейно зависимой,** если существует **ненулевой** набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ таких, что линейная комбинация

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n = 0 .$$

Система векторов $a_1, a_2, ..., a_n$ называется **линейно независимой,** если из равенства нулю линейной комбинации $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n$ следует равенство нулю **всех** коэффициентов α_i, $i = 1, 2, ..., n$.

Вопрос о линейной зависимости векторов $a_1, a_2, ..., a_n$ в общем случае сводится к вопросу о существовании ненулевого решения у однородной системы линейных уравнений с коэффициентами, равными соответствующим координатам данных векторов.

Для того чтобы хорошо усвоить понятия «линейная зависимость», «линейная независимость» системы векторов, полезно решить задачи следующего типа:

Задача 4.1. Найти линейную комбинацию $3a_1 + 5a_2 - a_3$ векторов $a_1 = (4, 1, 3, -2)$, $a_2 = (1, 2, -3, 2)$, $a_3 = (16, 9, 1, -3)$.

Решение. Умножим вектор a_1 на число 3, вектор a_2 - на 5, вектор a_3 - на -1: $3a_1 = (12,3,9,-6)$, $5a_2 = (5,10,-15,10)$, $-a_3 = (-16,-9,-1,3)$.

Найдем сумму полученных векторов, т.е. искомую линейную комбинацию: $3a_1 + 5a_2 - a_3 = (1,4,-7,7)$.

Задача 4.2. Выяснить, является ли данная система векторов линейно зависимой или линейно независимой: $a_1 = (2,-3,1)$, $a_2 = (3,-1,5)$, $a_3 = (1,-4,3)$.

Решение. Составим линейную комбинацию векторов с неопределенными коэффициентами

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 =$$
$$=(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3, \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3).$$

Потребуем, чтобы вектор $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ был нулевым, тогда, пользуясь условием равенства двух векторов (равны соответствующие координаты), мы получаем систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему методом Гаусса, найдем значения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & 14 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Имеем, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Следовательно, из равенства нулю линейной комбинации $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ следует равенство нулю ее коэффициентов. Значит, система векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима.

Задача 4.3. Выяснить, является ли вектор $b=(1,2,0)$ линейной комбинацией векторов

$$a_1=(2,0,-1),\ a_2=(3,0,-2),\ \ a_3=(-1,0,1)\ .$$

Решение. Составим линейную комбинацию векторов с неопределенными коэффициентами

$$\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3=(2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3,0,-\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3).$$

Потребуем, чтобы вектор $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3$ был равен вектору $b=(1,2,0)$, тогда мы получаем систему линейных неоднородных уравнений

$$\begin{cases} 2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3=1 \\ 0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3=1 \\ -\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0. \end{cases}$$

Так как эта система содержит противоречивое уравнение, то она несовместна. Следовательно, не найдется таких $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, чтобы $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3=b$. Поэтому вектор b не является линейной комбинацией векторов $a_1,a_2,\ a_3$.

Задача 4.4. Доказать, что если три вектора a_1,a_2,a_3 линейно зависимы и вектор a_3 не выражается линейно через $a_1,a_2,$ то векторы a_1 и a_2 пропорциональны.

Решение. Так как система векторов a_1,a_2,a_3 линейно зависима, то существует ненулевой набор чисел $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ такой, что $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3=0$. Коэффициент $\alpha_3=0$, в противном случае, вектор a_3 выражался бы линейно через a_1 и a_2. Поэтому $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2=0$, где либо $\alpha_1\neq 0$, либо $\alpha_2\neq 0$.

Пусть, для определенности, $\alpha_1\neq 0$, тогда $a_1=-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}a_2$, что и требовалось доказать.

4.1. Основы метода Штифеля.

Задачи, в которых требуется найти базис системы векторов и векторы, не входящие в данный базис, выразить через этот базис, удобо решать, пользуясь методом Штифеля. Кратко опишем этот метод.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ - произвольный базис пространства $\mathbb{R}^n$, а $y_1, y_2, ..., y_m$ - произвольная система векторов из $\mathbb{R}^n$. Пусть нам известно представление этих векторов через базис $x_1, x_2, ..., x_n$: $y_i = a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n$. $i = 1, ..., m$.

Условимся эти равенства записывать в виде таблицы

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & x_1 & \cdots & x_s & \cdots & x_n \\
\hline
y_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
y_r & a_{r1} & \cdots & a_{rs} & \cdots & a_{rn} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
y_m & a_{m1} & \cdots & a_{ms} & \cdots & a_{mn}
\end{array},$$

которую будем **называть схемой Штифеля.**

Символы $y_1, y_2, ..., y_m$ будем называть **левыми выражениями,** а $x_1, x_2, ..., x_n$ - **верхними выражениями.**

Основное свойство (смысл) схемы Штифеля состоит в том, что каждое его левое выражение равно сумме произведений элементов его строки на соответствующие верхние выражения.

Пусть $a_{rs} \neq 0$. Выразим из r - го равенства схемы x_s через $x_1, ..., x_{s-1}, y_r, x_{s+1}, ..., x_n$. Но тогда и все векторы $y_1, ..., y_{r-1}, y_{r+1} ..., y_m$ могут быть выражены через векторы $x_1, ..., x_{s-1}, y_r, x_{s+1}, ..., x_n$. И мы получим уже новую таблицу

$$\begin{array}{c|ccccc|l}
 & x_1 & \dots & y_r & \dots & x_n & \\
\hline
y_1 & b_{11} & \cdots & b_{1s} & \cdots & b_{1n} & \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \\
x_s & b_{r1} & \dots & b_{rs} & \dots & b_{rn} & : a_{rs} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \\
y_m & b_{m1} & \dots & b_{ms} & \dots & b_{mn} &
\end{array}$$

Запись «: a_{rs} » означает, что все элементы b_{ij} надо разделить на a_{rs} . Будем говорить, что эта схема получена из предыдущей в результате преобразования Штифеля с ведущим (разрешающим) элементом $a_{rs} \neq 0$, которое перебрасывает левое выражение y_r наверх (на место x_s), а верхнее выражение x_s - налево (на место y_r). При этом r - ая строка называется ведущей (разрешающей) строкой, а s -ый столбец - ведущим (разрешающим столбцом).

В качестве ведущего элемента можно взять любой элемент таблицы, отличный от нуля.

Элементы преобразованной схемы получаются из элементов исходной схемы по следующим правилам:

1. ведущий элемент заменяется единицей ($b_{rs} = 1$);
2. остальные элементы ведущей строки только меняют знак ($b_{rj} = -a_{rj}$ при $j \neq s$);
3. остальные элементы ведущего столбца не изменяются ($b_{is} = a_{is}$ при $i \neq r$);
4. элементы, не лежащие в ведущих рядах, преобразуются так: $b_{ij} = a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}$ $(i \neq r,\ j \neq s)$;

(преобразуемый элемент a_{ij} «проектируется» на ведущие ряды и находится разность двух произведений: преобразуемый на ведущий минус проекция на проекцию);

5. все полученные элементы делятся на a_{rs} .

Справедлива следующая **теорема независимости.**

Теорема. Различные левые выражения $y_1, y_2, ..., y_m$ схемы Штифеля можно последовательно перебросить наверх тогда и только тогда, когда векторы $y_1, y_2, ..., y_m$ (а значит, и их строки коэффициентов) линейно независимы.

Задача 4.5. Найти какой-нибудь базис системы векторов и все вектор, не входящие в данный базис, выразить через данный базис.

$$a_1 = (-1, 4, -3, -2),\ a_2 = (3, -7, 5, 3),$$

$$a_3 = (3, -2, 1, 0),\ a_4 = (-4, 1, 0, 1)\ .$$

Решение. Будем считать, что координаты векторов a_1, a_2, a_3, a_4 заданы в единичном базисе

$e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$.

Составим таблицу Штифеля:

	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	-1	4	-3	-2
a_2	3	-7	5	3
a_3	3	-2	1	0
a_4	-4	1	0	$\boxed{1}$

Имеем:

	e_1	e_2	e_3	a_4
a_1	-9	6	-3	-2
a_2	15	-10	5	3
a_3	3	-2	1	0

Поменяем местами a_3 и e_3, получим

	e_1	e_2	a_3	a_4
a_1	0	0	-3	-2
a_2	0	0	5	3

Левые выражения a_1 и a_2 нельзя поменять местами с верхними выражениями e_1 и e_2 (ведущие элементы равнялись бы нулю).

Так как в исходной схеме Штифеля e_1, e_2, e_3, e_4 - базис пространства $\mathbb{R}^4$, то, в силу теорем независимости, e_1, e_2, a_3, a_4 - базис пространства $\mathbb{R}^4$, а подсистема a_3, a_4 - один из базисов системы a_1, a_2, a_3, a_4.

Учитывая основнон свойство схемы Штифеля, из последней таблицы получим выражения векторов a_1 и a_2 через базис a_3, a_4.

$a_1 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 - 3a_3 - 2a_4 = -3a_3 - 2a_4,$

$a_2 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 5a_3 + 3a_4 = 5a_3 + 3a_4.$

Итак, a_3, a_4 - базис; $a_1 = -3a_3 - 2a_4$, $a_2 = 5a_3 + 3a_4$.

Пользуясь методом Штифеля, можно решать задачи на определение ранга системы векторов.

Если верхние выражения исходной схемы Штифеля линейно независимы, то число переброшенных левых выражений в последней схеме Штифеля равно рангу системы левых выражений исходной системы.

Задача 4.6. Найти ранг системы векторов:

$a_1 = (1, 2, 3, 4)$, $a_2 = (2, 3, 4, 5)$, $a_3 = (3, 4, 5, 6)$, $a_4 = (4, 5, 6, 7)$.

Решение. Будем считать, что координаты векторов a_1, a_2, a_3, a_4 заданы в единичном базисе e_1, e_2, e_3, e_4.

Составляем таблицу Штифеля:

	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	$\boxed{1}$	2	3	4
a_2	2	3	4	5
a_3	3	4	5	6
a_4	4	5	6	7

$\Rightarrow$

	a_1	e_2	e_3	e_4
a_2	2	$\boxed{-1}$	-2	-3
a_3	3	-2	-4	-6
a_4	4	-3	-6	-9

$\Rightarrow$

	a_1	a_2	e_3	e_4
a_3	1	-2	0	0
a_4	2	-3	0	0

$:(-1)$ $\Rightarrow$

	a_1	a_2	e_3	e_4
a_3	-1	2	0	0
a_4	-2	3	0	0

Векторы a_3 и a_4 нельзя поменять местами с векторами e_3, e_4. Значит ранг системы векторов a_1, a_2, a_3, a_4 равен 2. Одновременно мы получаем, что векторы a_1, a_2 образуют один из базисов системы $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и линейное представление векторов a_3, a_4 через этот базис:

$a_3 = -a_1 + 2a_2$, $a_4 = -2a_1 + 3a_2$.

5. МАТРИЦЫ.

5.1. Ранг матрицы.

Метод Штифеля.

Столбцы матрицы размера $n \times m$ можно рассматривать как n - мерные векторы, а строки - как m - мерные векторы. А так как рангом матрицы называется ранг системы столбцов (системы строк) матрицы, то задачи о нахождении ранга матрицы можно решать, используя метод Штифеля (задача 4.6). Как и в случае системы векторов, вычисляя ранг матрицы методом Штифеля, мы находим один из базисов системы строк (системы столбцов) матрицы и выражение строк (столбцов), не входящих в базис, через этот базис.

Метод элементарных преобразований.

Для нахождения ранга матрицы часто используется **метод элементарных преобразований**.

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие преобразования:

- перемена мест двух строк (солбцов);
- умножение строки (столбца) на произвольное отличное от нуля число;
- прибавление к одной строке (или столбцу) другой строки (столбца), умноженной на некоторое число.

Так как элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, то, приводя матрицу с помощью элементарных преобразований к диагональному виду, подсчитываем число единиц на главной диагонали. Число единиц на главной диагонали, диагональной формы матрицы равно рангу исходной матрицы.

Задача 5.1. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Поменяем местами в матрице A первую и третью строчки:

$$\rho A = \rho \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ко второй строке полученной матрицы прибавим первую, умноженную на -5; к третьей строке прибавим первую, умноженную на -3; к четвертой строке прибавим первую, умноженную на -7. Получим

$$\rho A = \rho\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 12 & 27 & 3 & 39 \\ 0 & 8 & 18 & 2 & 26 \\ 0 & 16 & 36 & 4 & 50 \end{pmatrix}.$$

Прибавляем ко второму столбцу первый, умноженный на 3, к третьему – первый, умноженный на 5; к пятому – первый, умноженный на 7, получим: в первой строке все элементы, кроме первого, обратились в нуль, причем элементы других строк при этих преобразованиях не изменились. Поэтому, в дальнейшем, если в каком-нибудь столбце (в какой-нибудь строке) все элементы, кроме одного, нули, то будем «автоматически» записывать нули в строке вместо элементов, стоящих за или перед (под или над) этим элементом. Имеем

$$\rho A = \rho\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 27 & 3 & 39 \\ 0 & 8 & 18 & 2 & 26 \\ 0 & 16 & 36 & 4 & 50 \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице поменяем местами второй и четвертый столбцы, умножим вторую строку на $\frac{1}{3}$, третью и четвертую строки – на $\frac{1}{2}$. Получим

$$\rho A = \rho\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 9 & 4 & 13 \\ 0 & 2 & 18 & 8 & 25 \end{pmatrix}.$$

К третьей строке прибавим вторую, умноженную -1; к четвертой строке прибавим вторую, умноженную на -2. Получим матрицу, в которой все элементы второго столбца, кроме второго, равны нулю. Тогда, вместо элементов второй строки, стоящих за ним, тоже запишем нули. Имеем

$$\rho A=\rho\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Умножим четвертую строку полученной матрицы на (-1), поменяем местами пятый и третий столбцы, получим

$$\rho A=\rho\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Меняя местами третью и четвертую строчки, получим диагональный вид матрицы A

$$\rho A=\rho\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы равен 3.

Метод окаймляющих миноров.

При вычислении ранга матрицы методом окаймляющих миноров следует помнить, что нужно проверить, равны ли нулю **все** миноры $(r+1)$ - го порядка, окаймляющие один и тот же отличный от нуля минор r - го порядка. В противном случае заключение о ранге матрицы может оказаться неправильным.

Задача 5.2. Найти ранг матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 3 & -3 & 1\\ 1 & 2 & -3 & 4\end{pmatrix}.$$

Решение. Минор 2-го порядка $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\neq 0$.

Этот минор окаймляют четыре минора 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 3 & -3\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 1\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=12\,.$$

Так как определитель матрицы A равен

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 3 & -3 & 1\\ 1 & 2 & -3 & 4\end{vmatrix}=0\ ,$$

то ранг матрицы равен 3.

5.2. Нахождение обратной матрицы.

Матрица B называется **обратной** квадратной матрице A , если $AB=BA=E$, где E - единичная матрица, и обозначается A^{-1} .

В этом пункте мы рассмотрим два способа построения обратной матрицы.

1 способ.

1. Вычисляем определитель матрицы A . Для существования обратной иматрицы, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, то есть ее определитель $\det A \neq 0$.

2. Строим матрицу $\tilde{A}$, которая состоит из алгебраических дополнений элементов матрицы A.

3. Транспонируем матрицу $\tilde{A}$. $\tilde{A}^T$ называется матрицей, присоединенной к матрице A.

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij}. Заметим, что в $\tilde{A}^T$ алгебраическое дополнения к элементам i - й строки матрицы A расположены в i - м столбце.

4. Умножаем матрицу $\tilde{A}^T$ на $\dfrac{1}{\det A}$ и получаем обратную матрицу.

Итак, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\tilde{A}^T$.

Задача 5.3. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, существует ли обратная ей матрица A^{-1}, и если существует, то найти ее.

Решение. Определитель матрицы A

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$

Следовательно, данная матрица невырождена и A^{-1} существует. Согласно формуле,

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения A_{ij} элементов данной матрицы. Получим:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 15,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 25, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 9,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -14.$$

Тогда $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 1,5 & 0,3 & -0,8 \\ 2,5 & 0,9 & -1,4 \end{pmatrix}.$

2 способ. Нахождение обратной матрицы при помощи элементарных преобразований.

Этот способ опирается на следующую теорему.

Теорема. Если к единичной матрице порядка n применить те же преобразования только над столбцами (строками) и в том же порядке, с помощью которых невырожденная матрица A порядка n приводится к единичной, то полученная при этом матрица будет обратной матрице A.

Задача 5.4. С помощью элементарных преобразований найти матрицу A^{-1}, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 1 & -1 & -2\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем матрицы A и E через черту

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Умножив первую строку на $\frac{1}{2}$, получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Ко второй строке прибавим первую строку, умноженную на -1, а к третьей строке – первую строку. Имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -1 & -4 & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 2 & 5 & \frac{1}{2} & 0 & 1\end{array}\right).$$

Умножив вторую строку на -1, получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & \frac{1}{2} & -1 & 0\\ 0 & 2 & 5 & \frac{1}{2} & 0 & 1\end{array}\right).$$

Далее, прибавив к третьей строке вторую, умноженную на

-2, получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Умножив третью строку на $-\frac{1}{3}$, имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right).$$

К первой строке прибавим третью, умноженную на -2, а ко второй – третью, умноженную на -4. Получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

5.3. Матричные уравнения.

Пусть даны две матрицы A и B соответственно размеров $m \times n$ и $k \times l$. Возникает вопрос: существуют ли матрицы X и Y такие, что $AX = B$ и $YA = B$.

Необходимым условием этих матричных уравнений является условие $m = k$ и $n = l$. Если эти условия выполнены, то матрица X должна быть размера $n \times l$, Y - $k \times m$. Но эти условия не являются достаточными.

Например, если A и B - квадратные матрицы порядка n, причем A - вырождена, а B - невырождена, то таких X и Y не существует.

Рассмотрим матричное уравнение $AX = B$.

Справедлива следующая теорема, которую можно считать обобщением теоремы Кронекера-Капелли.

Теорема. Пусть A - матрица размера $m \times n$, B - матрица размера $m \times l$. Для того чтобы матричное уравнение $AX = B$ было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был равен рангу матрицы $A \cup B$ (здесь $A \cup B$ - матрица, составленная из столбцов матриц A и B).

Итак, если уравнение разрешимо, то мы ищем матрицу X размера $n \times l$ в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \dots & z_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_n & y_n & \dots & z_n \end{pmatrix}.$$

Сравнивая элементы матриц AX и B, получаем l систем линейных уравнений для определения $x_1, \dots, x_n$; $y_1, \dots, y_n$; $z_1, \dots, z_n$, которые имеют одну и ту же матрицу коэффициентов - матрицу A, а столбцами свободных членов будут соответственно 1, 2, …, l-ый столбцы матрицы B.

Решения этих систем можно находить одновременно, используя метод Гаусса.

Выделим случай, когда A - квадратная матрица порядка n, причем A - невырождена, тогда решение уравнения можно искать в виде $X = A^{-1}B$.

Задача 5.5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Это матричное уравнение вида $AX = B$, причем, матрица A - невырождена, и, следовательно, существует обратная матрица, которую мы нашли в задаче 5.4. Следовательно,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5.6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Это тоже матричное уравнение вида $AX = B$, но матрица A - вырождена. Необходимо выяснить, разрешимо ли это уравнение. Для этого составим матрицу $A \cup B$, составленную из столбцов матриц A и B, найдем ее ранг.

$$\rho\left(A \cup B\right) = \rho\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 10 & 4 \end{array}\right) = \rho\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 1 = \rho\left(A\right).$$

Итак, уравнение разрешимо.

Представим матрицу X в виде $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$. Подставим X в уравнение и получим две системы линейных уравнений с матрицей коэффициентов A.

$$\left\{\begin{array}{l|l} & \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline \end{array} \\ 2u_1 + 3u_2 = & \begin{array}{c|c} 5 & 2 \end{array} \\ 4u_1 + 6u_2 = & \begin{array}{c|c} 10 & 4 \end{array} \end{array}\right.$$

Решим эти системы

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 10 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}x_2$, $y_1 = 1 - \dfrac{3}{2}y_2$ - общие решения этих систем.

Отсюда получаем следующий вид матрицы X, удовлетворяющей исходному уравнению

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}x_2 & 1 - \dfrac{3}{2}y_2 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix},$$

где x_2, y_2 - произвольные числа.

6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

В пункте 2 мы познакомились с решением систем линейных уравнений методом Гаусса. Рассмотрим еще один способ решения систем линейных уравнений, требующий предварительного исследования совместности системы, затем применения правила Крамера.

Правило Крамера.

Система из n уравнений с n неизвестными, в случае, когда определитель матрицы системы отличен от нуля, имеет решение, и притом только одно. Это решение находится по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta} \text{ (для всех } i = 1, \ldots, n\text{)}.$$

Где через Δ обозначен определитель матрицы системы, а через Δ_{x_i} - определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой i - го столбца столбцом свободных членов.

6.1. Общее правило решения систем, подпространство решений системы линейных однородных уравнений.

Задача 6.1. Исследовать совместность, найти общее и одно частное решение системы:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}.$$

Решение. Система m линейных уравнений с n неизвестными совместна, согласно теореме Кронекера-Капелли, тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов системы равен рангу расширенной матрицы.

Вычислим ранги матриц из коэффициентов системы и расширенной матрицы с помощью элементарных преобразований. Учитывая, что ранг системы векторов не изменится, если удалить из нее один из пропорциональных векторов, имеем:

$$\rho\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right) = \rho\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 46 & -22 & -38 & -1 \end{array}\right).$$

Вычеркнем третий и четвертый столбец этой матрицы, умножим второй столбец на $\frac{1}{23}$ и обнулим первую строку, получим

$$\rho A = \rho\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы из коэффициентов системы равен 2, а ранг расширенной матрицы равен 3. Следовательно, система несовместна.

Задача 6.2. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Система линейных однородных уравнений всегда совместна, поэтому исследовать на совместность ее не нужно. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений – это **базис** пространства решений этой системы.

Размерность пространства решений однородной системы равна $(n - r)$, где n - число неизвестных, а r - ранг матрицы коэффициентов системы.

а) Итак, вычислим ранг матрицы нашей системы.

$$\rho\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ 6 & -2 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \rho\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 12 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\,.$$

б) Найдем общее решение системы. Оставим в системе два уравнения, коэффициенты при неизвестных у которых образуют один из базисов системы строк матрицы системы. Учитывая, что при вычислении ранга матрицы мы вычеркивали третью и четвертую строчки, то оставляем в системе второе и четвертое уравнения.

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Оставим в левых частях неизвестные, коэффициенты при которых образуют определитель 2-го порядка, отличный от нуля, например, x_4 и x_5. Остальные неизвестные перенесем в правую часть уравнений:

$$\begin{cases} 8x_4 + 9x_5 = -9x_1 + 3x_2 - 4x_3, \\ 4x_4 - x_5 = -3x_1 + x_2 - 4x_3. \end{cases}$$

Полученную систему решим по правилу Крамера, рассматривая неизвестные x_1, x_2, x_3 как параметры.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -8 - 36 = -44\ ;$$

$$\Delta_{x_4} = \begin{vmatrix} -9x_1 + 3x_2 - 4x_3 & 9 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 & -1 \end{vmatrix} = 36x_1 - 12x_2 + 40x_3\ ;$$

$$\Delta_{x_5} = \begin{vmatrix} 8 & -9x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ 4 & -3x_1 + x_2 - 4x_3 \end{vmatrix} = 12x_1 - 4x_2 - 16x_3\ .$$

Имеем,

$$x_4 = \frac{36x_1 - 12x_2 + 40x_3}{-44} = \frac{-9x_1 + 3x_2 - 10x_3}{11},$$

$$x_5 = \frac{12x_1 - 4x_2 - 16x_3}{-44} = \frac{-3x_1 + x_2 + 4x_3}{11}.$$

Равенства $x_4 = \dfrac{-9x_1 + 3x_2 - 10x_3}{11}$, $x_5 = \dfrac{-3x_1 + x_2 + 4x_3}{11}$

определяют общее решение нашей системы: придавая свободным неизвестным x_1, x_2, x_3 произвольные числовые значения, мы найдем **все** решения нашей системы.

Для того чтобы найти фундаментальную систему решений для нашей системы, мы придаем свободным неизвестным такие числовые значения, которые образуют **отличный** от нуля определитель третьего порядка. Удобно в качестве значений свободных неизвестных брать элементы единичной матрицы.

Составим таблицу:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
α_1	1	0	0	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{3}{11}$
α_2	0	1	0	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$
α_3	0	0	1	$-\frac{10}{11}$	$\frac{4}{11}$

Решения $\alpha_1 = \left(1,0,0,-\frac{9}{11},-\frac{3}{11}\right)$, $\alpha_2 = \left(0,1,0,\frac{3}{11},\frac{1}{11}\right)$,

$\alpha_3 = \left(0,0,1,-\frac{10}{11},\frac{4}{11}\right)$ - один из базисов пространства решений нашей системы линейных однородных уравнений. Любое решение α нашей системы является линейной комбинацией решений α_1, α_2, α_3: $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$, где $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

6.2. Структура решений системы линейных неоднородных уравнений.

Известно, что если система линейных неоднородных уравнений совместна, то множество решений этой системы представляет собой линейное многообразие типа $M = x_{\div} + L$, где $x_{\div}$ -одно из частных решений системы, L - подпространство решений соответствующей однородной системы, которая получена из исходной в результате замены столбца свободных членов нулевым столбцом.

Задача 6.3. Исследовать совместность, представить общее решение системы в виде линейного многообразия:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Решение. Вычислим ранги матриц из коэффициентов системы и расширенной матрицы с помощью элементарных преобразований. Учитывая, что ранг системы векторов не изменится, если удалить из нее один из пропорциональных векторов, имеем:

$$\rho\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = \rho\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 8 & 19 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Мы вычеркнули второй столбец, теперь обнулим все элементы, кроме первого, первого столбца, а затем первой строки. Получим

$$\rho\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & -3 \end{array}\right).$$

А теперь уже в полученной матрице вычеркнем вторую строку и пятый столбец.

$$\rho\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 3.$$

Итак, наша система совместна.

Так как ранг матрицы из коэффициентов системы равен трем, то оставляем в системе три уравнения, коэффициенты при неизвестных у которых образуют максимальную линейно независимую подсистему системы строк матрицы нашей системы.

При вычислении ранга матрицы мы удаляли из системы ее строк третью строку, поэтому оставляем в системе уравнений первое, второе и четвертое уравнения:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

При вычислении ранга матрицы мы удаляли из системы ее столбцов второй и пятый столбцы. Значит, коэффициенты при неизвестных x_1, x_3, x_4 образуют определитель 3-го порядка, отличный от нуля. Эти неизвестные оставим в левых частях уравнений, остальные неизвестные перенесем в правые части уравнений. Получим систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 2 + x_2 - 3x_5, \\ 6x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 3 + 3x_2 - 5x_5, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 1 + 2x_2 - 2x_5. \end{cases}$$

Решим полученную систему по правилу Крамера, рассматривая свободные неизвестные x_2, x_5 как параметры:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\ ;$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 + x_2 - 3x_5 & 1 & 2 \\ 3 + 3x_2 - 5x_5 & 2 & 4 \\ 1 + 2x_2 - 2x_5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$- x_5 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} - x_5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 + x_2 + x_5\ ;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 2+x_2-3x_5 & 2 \\ 6 & 3+3x_2-5x_5 & 4 \\ 4 & 1+2x_2-2x_5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} - .$$

$$- x_5 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 8x_5 .$$

$$\Delta_{x_4} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2+x_2-3x_5 \\ 6 & 2 & 3+3x_2-5x_5 \\ 4 & 1 & 1+2x_2-2x_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} -$$

$$- x_5 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Имеем,

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_5 ;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = 3 - 4x_5 ;$$

$$x_4 = \frac{\Delta_{x_4}}{\Delta} = 0 .$$

Эти равенства определяют общее решение нашей системы: придавая свободным неизвестным произвольные числовые значения, мы получим все решения нашей системы. Положим $x_2 = 1, x_5 = 0$, получим частное решение нашей системы $x_÷ = (0,1,3,0,0)$.

Следующим шагом является построение соответствующей однородной системы и нахождение ее общего решения. Итак, это будет система

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Далее, проделывая те же действия, что и для неоднородной, мы увидим, что из этой системы также можно удалить третье уравнение, а общее решение будет следующим:

$x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_5$; $x_3 = -4x_5$; $x_4 = 0$.

Оно отличается от общего решения неоднородной системы тем, что не содержит свободных членов.

Пользуясь ходом решения предыдущей задачи, можно построить фундаментальную систему решений для соответствующей однородной системы, которая будет содержать $(n - r) = 5 - 3 = 2$ вектора.

Будем придавать свободным неизвестным такие числовые значения, которые образуют **отличный** от нуля определитель второго порядка. Составим таблицу:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
α_1	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0
α_2	$\frac{1}{2}$	0	-4	0	1

Решения $\alpha_1 = \left(\frac{1}{2},1,0,0,0\right)$, $\alpha_2 = \left(\frac{1}{2},0,-4,0,1\right)$ - один из базисов пространства L решений нашей соответствующей системы линейных однородных уравнений.

Итак, множество решений исходной неоднородной системы линейных уравнений является линейным многообразием типа

$$M = (0,1,3,0,0) + L,$$

где $(0,1,3,0,0)$ - одно из частных решений исходной системы, L - подпространство решений соответствующей однородной системы.

Любое решение α нашей системы можно представить в виде

$$\alpha = (0,1,3,0,0) + c_1\left(\frac{1}{2},1,0,0,0\right) + c_2\left(\frac{1}{2},0,-4,0,1\right),$$

где $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$.

Задача 6.4. По линейному многообразию M восстановить систему линейных уравнений, если

$M = (1,0,3,0) + L$, L -подпространство $\mathbb{R}^4$;

$\alpha_1 = (1,1,1,1)$, $\alpha_2 = (0,1,0,1)$ - один из базисов L.

Решение. Из условия задачи мы сразу определяем, что число неизвестных в системе будет равно четырем, так как заданные вектора принадлежат пространству $\mathbb{R}^4$. На самом деле, таких систем, у которых множество решений можно представить в виде заданного линейного многообразия M, бесконечно много, но все они являются эквивалентными. Найдем одну из этих систем.

Система будет иметь две свободные переменные (так как базис пространства L содержит два вектора).

Любое решение $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ искомой системы можно представить в виде

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,0,3,0) + t_1(1,1,1,1) + t_2(0,1,0,1),$$

где $t_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$.

Пользуясь условием равенства двух векторов, мы получим следующую систему линейных неоднородных уравнений от шести неизвестных $x_1, x_2, x_3, x_4, t_1, t_2$:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t_1, \\ x_2 = t_1 + t_2, \\ x_3 = 3 + t_1, \\ x_4 = t_1 + t_2. \end{cases}$$

Перенесем все переменные в левые части уравнений.

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad - t_1 \qquad = 1, \\ \quad x_2 \qquad\quad - t_1 - t_2 = 0, \\ \qquad x_3 \quad - t_1 \qquad = 3, \\ \qquad\quad x_4 - t_1 - t_2 = 0. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и будем исключать из уравнений переменные t_1, t_2.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

В первых двух уравнениях отсутствуют t_1, t_2, а значит, они и образуют искомую систему (так как ранг выделенной матрицы равен 2 и равен $n - k$, где n - число неизвестных восстанавливаемой системы, k - число свободных неизвестных). Итак, по линейному многообразию мы восстановили систему линейных уравнений, которая имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -2, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Завало С.Т., Костарчук В.Н., Хацет Б.И. **Алгебра и теория чисел, ч.1. –** К.: Вища школа, 1980.
2. Кострикин А. И. **Введение в алгебру**. - М.: Наука, 1977 .
3. Курош А.Г. **Курс высшей алгебры**. – М.: Наука, 1975.