

УДК 517.91

Н. В. Скрипник

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ИМПУЛЬСАМИ В НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

Скрипник Н. В. Лінійні диференціальні рівняння з імпульсами у невизначені моменти часу. У роботі розглядаються лінійні диференціальні рівняння з імпульсами у невизначені моменти часу, доведено компактність перерізу жмутка розв'язків, отримано умови стійкості та існування періодичного жмутка розв'язків.

Ключові слова: лінійні імпульсні диференціальні рівняння.

Скрипник Н. В. Линейные дифференциальные уравнения с импульсами в неопределенные моменты времени. В работе рассматриваются линейные дифференциальные уравнения с импульсами в неопределенные моменты времени, доказана компактность сечения пучка решений, получены условия устойчивости и существования периодического пучка решений.

Ключевые слова: линейные импульсные дифференциальные уравнения.

Scripnik N. V. Linear differential equations with impulses in uncertain moments of time. The linear differential equations with impulses in uncertain moments of time are considered. The compactness of the section of the solution set is proved, the conditions of stability and existence of periodical set are obtained.

Key words: linear impulsive differential equations.

ВВЕДЕНИЕ. Вопросы устойчивости решений и нахождения периодических решений для импульсных дифференциальных уравнений рассматривались в работах [3, 4], для импульсных дифференциальных включений — в [2, 5]. В данной статье рассматриваются линейные дифференциальные уравнения с импульсами в неопределенные моменты времени, у которых в силу неоднозначности моментов импульсов возникают пучки решений, доказывается компактность пучка решений, устанавливаются условия устойчивости и существования периодического решения и пучка решений.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с импульсами в неопределенные моменты времени:

$$\dot{x} = A(t)x + f(t); \quad t \neq \tau_i; \quad (1)$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x + p_i,$$

где $x \in R^n$ — фазовый вектор; $t \in I = [t_0, T]$ — время; $A(t)$ — непрерывная на I матричная функция; $f(t)$ — непрерывная на I вектор-функция; моменты импульсов $\tau_i \in [\tau_i^-, \tau_i^+] \subset I$, $i = \overline{1, m}$, сегменты $[\tau_i^-, \tau_i^+]$ не пересекаются; B_i — матрицы размерности $n \times n$; $p_i \in R^n$. Уравнение вида (1) описывает, например, физические процессы, подвергающиеся импульсному воздействию в моменты времени, которые известны с некоторой погрешностью.

Пусть $\tau(t_0, T) = (\tau_1, \dots, \tau_m)$ и $\Phi(t, t_0, \tau(t_0, T))$ – матрицант соответствующего (1) однородного импульсного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = A(t)x; \quad t \neq \tau_i;$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x.$$

В силу [3] (формула (6.7)) при $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$ справедливо представление

$$\Phi(t, t_0, \tau(t_0, T)) = e^{\int_{\tau_k}^t A(s)ds} (E + B_k) \prod_{j=1}^{k-1} e^{\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} A(s)ds} (E + B_j) e^{\int_{t_0}^{\tau_1} A(s)ds}.$$

Тогда всякое решение $x(t, x_0, \tau(t_0, T))$, $x(t_0, x_0, \tau(t_0, T)) = x_0$ уравнения (1) при $t \in I$ представимо в виде:

$$x(t, x_0, \tau(t_0, T)) = \Phi(t, t_0, \tau(t_0, T))x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s, \tau(t_0, T))f(s)ds + \sum_{t_0 \leq \tau_i < t} \Phi(t, \tau_i, \tau(t_0, T))p_i. \quad (2)$$

Обозначим через $X(t, t_0, x_0)$ пучок решений, выходящих из начальной точки (t_0, x_0) и соответствующих различным моментам импульсов $\tau_1, \dots, \tau_m$.

Теорема 1. *Пучок решений $X(t, t_0, x_0)$ является непустым компактным подмножеством пространства R^n при любом фиксированном $t \in I$.*

Доказательство. В силу [3] множество $X(t, t_0, x_0)$ непусто. Покажем, что множество $X(t, t_0, x_0)$ компактно. Пусть $M_1 = \max_{t \in I} \|A(t)\|$, $M_2 = \max_{t \in I} \|f(t)\|$. Тогда в силу представления (2) справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \|x(t, x_0, \tau(t_0, T))\| &\leq \|\Phi(t, t_0, \tau(t_0, T))\| \cdot \|x_0\| + \\ &+ \int_{t_0}^t \|\Phi(t, s, \tau(t_0, T))\| \cdot \|f(s)\| ds + \sum_{t_0 \leq \tau_i < t} \|\Phi(t, \tau_i, \tau(t_0, T))\| \cdot \|p_i\| \leq \\ &\leq \prod_{i=1}^m (1 + \|B_i\|) e^{M_1(T-t_0)} \left\{ \|x_0\| + M_2(T-t_0) + \sum_{i=1}^m \|p_i\| \right\} = K. \end{aligned}$$

Следовательно, множество $X(t, t_0, x_0)$ является ограниченным.

Покажем, что множество $X(t, t_0, x_0)$ является замкнутым. Рассмотрим сходящуюся последовательность $x_k(t, x_0, \tau^k(t_0, T)) \in X(t, t_0, x_0)$ и покажем, что ее предел $x(t) \in X(t, t_0, x_0)$. Так как $\tau_1^k \in [\tau_1^-, \tau_1^+]$, то существует подпоследовательность $\{k_1\}$ последовательности $\{k\}$, такая, что $\tau_1^{k_1} \rightarrow \tau_1^0 \in [\tau_1^-, \tau_1^+]$. Из последовательности $\{k_1\}$ выберем подпоследовательность $\{k_2\}$ такую, что $\tau_2^{k_2} \rightarrow \tau_2^0 \in [\tau_2^-, \tau_2^+]$. Продолжая этот процесс, построим последовательность $\{k_s\}$ такую, что $\tau_s^{k_s} \rightarrow \tau_s^0 \in [\tau_s^-, \tau_s^+]$, где $s = \min(j = \overline{1, m} : t < \tau_{j+1}^-)$.

Так как функция $\Phi(t, t_0, \tau(t_0, T))$ является непрерывной функцией последнего аргумента, то $\Phi(t, t_0, \tau^{k_s}(t_0, T)) \rightarrow \Phi(t, t_0, \tau^0(t_0, T))$ при $k_s \rightarrow \infty$. Тогда в силу (2)

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t, x_0, \tau^k(t_0, T)) = \lim_{k_s \rightarrow \infty} x_{k_s}(t, x_0, \tau^{k_s}(t_0, T)) =$$

$$= x(t, x_0, \tau^0(t_0, T)) \in X(t, t_0, x_0).$$

Таким образом, компактность множества $X(t, t_0, x_0)$ при любом фиксированном $t \in I$ доказана.

Замечание 1. Утверждение теоремы остается верным, если $I = [t_0, +\infty)$ и $\tau_i^\pm \rightarrow +\infty$ при $i \rightarrow +\infty$. Для доказательства последовательно рассмотрим уравнение (1) на сегментах $[t_0, T_p]$, $T_p \rightarrow +\infty$ и получим, что множество $X(t, t_0, x_0)$ компактно при любом фиксированном $t \in [t_0, T_p]$ для всех $p \in N$.

Замечание 2. Утверждение теоремы остается верным, если рассмотреть пучок решений $X(t, t_0, X_0)$, удовлетворяющих начальным условиям $x(t_0) \in X_0$.

Рассмотрим вопрос существования ω -периодического решения $x(t, x_0)$ и ω -периодического пучка решений $X(t, 0, X_0)$, $X_0 \in \text{comp}(R^n)$ для уравнений вида (1) в случае $I = [0, +\infty)$ и ω -периодической правой части, то есть матрица $A(t)$ и вектор-функция $f(t)$ предполагаются ω -периодическими, матрицы B_i , векторы p_i и моменты времени $\tau_i^\pm$ таковы, что

$$B_{i+r} = B_i, \quad p_{i+r} = p_i, \quad \tau_{i+r}^\pm = \tau_i^\pm + \omega$$

для всех $i \in N$ и некоторого натурального r .

Вопрос существования периодических решений и периодических пучков решений сводится к вопросу существования решений уравнений:

$$x_0 = \Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega))x_0 + d(\tau(0, \omega)), \quad (3)$$

где $d(\tau(0, \omega)) = \int_0^\omega \Phi(\omega, s, \tau(0, \omega))f(s)ds + \sum_{0 \leq \tau_i < \omega} \Phi(\omega, \tau_i, \tau(0, \omega))p_i$ и

$$X_0 = \bigcup_{\tau_i \in [\tau_i^-, \tau_i^+]} \{ \Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega))X_0 + d(\tau(0, \omega)) \}. \quad (4)$$

Уравнение (3) разрешимо тогда и только тогда, когда хотя бы для одного набора $\tau_i \in [\tau_i^-, \tau_i^+]$ матрица $E - \Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega))$ является невырожденной, либо когда ранг расширенной матрицы $(E - \Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega)), d(\tau(0, \omega)))$ равен рангу исходной матрицы. При этом различным $\tau_i \in [\tau_i^-, \tau_i^+]$ соответствуют различные матрицы $\Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega))$ и вектора $d(\tau(0, \omega))$ и, следовательно, одной начальной точке может соответствовать несколько периодических решений.

Рассмотрим вопрос разрешимости уравнения (4).

Теорема 2. Если для всех $\tau_i \in [\tau_i^-, \tau_i^+]$, $i = \overline{1, r}$ справедливо неравенство

$$\|\Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega))\| \leq M < 1,$$

то уравнение (1) имеет единственный ω -периодический пучок решений.

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение

$$\phi(X_0) = \bigcup_{\tau_i \in [\tau_i^-, \tau_i^+]} \{ \Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega))X_0 + d(\tau(0, \omega)) \}.$$

Используя свойства расстояния по Хаусдорфу $h(\cdot, \cdot)$ и расстояния от точки до множества $\rho(\cdot, \cdot)$, получим

$$h(\phi(X_0), \phi(Y_0)) = h\left(\bigcup_{\tau_i \in [\tau_i^-, \tau_i^+]} \{\Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega))X_0 + d(\tau(0, \omega))\}; \right. \\ \left. \bigcup_{\tau_i \in [\tau_i^-, \tau_i^+]} \{\Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega))Y_0 + d(\tau(0, \omega))\}\right) = \sup\{d_1, d_2\},$$

где

$$d_1 = \rho\left(\Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega))x_0 + d(\tau(0, \omega)), \right. \\ \left. \bigcup_{\tau_i \in [\tau_i^-, \tau_i^+]} \{\Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega))Y_0 + d(\tau(0, \omega))\}\right) \leq \\ \leq \rho(\Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega))x_0 + d(\tau(0, \omega)), \Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega))Y_0 + d(\tau(0, \omega))) \leq \\ \leq \|\Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega))\|\rho(x_0, Y_0) \leq Mh(X_0, Y_0) < h(X_0, Y_0); \quad (5)$$

$$d_2 = \rho\left(\Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega))y_0 + d(\tau(0, \omega)), \right. \\ \left. \bigcup_{\tau_i \in [\tau_i^-, \tau_i^+]} \{\Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega))X_0 + d(\tau(0, \omega))\}\right) \leq \\ \leq \rho(\Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega))y_0 + d(\tau(0, \omega)), \Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega))X_0 + d(\tau(0, \omega))) \leq \\ \leq \|\Phi(\omega, 0, \tau(0, \omega))\|\rho(y_0, X_0) \leq Mh(X_0, Y_0) < h(X_0, Y_0). \quad (6)$$

В силу оценок (5) и (6), имеем

$$h(\phi(X_0), \phi(Y_0)) \leq Mh(X_0, Y_0) < h(X_0, Y_0).$$

Таким образом, многозначное отображение $\phi(X_0)$ является сжимающим, следовательно выполнены все условия теоремы Банаха ([1], стр. 207), а значит отображение $\phi(X_0)$ имеет в $\text{cotr}(R^n)$ единственную неподвижную точку.

Рассмотрим теперь вопрос устойчивости пучка решений $X(t, t_0, x_0)$ импульсного дифференциального уравнения (1).

Теорема 3. Пусть для уравнения (1) матрицанты $\Phi(t, t_0, \tau(0, +\infty))$ равномерно ограничены. Тогда пучок решений $X(t, t_0, x_0)$ устойчив по Ляпунову в положительном направлении.

Доказательство. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при выполнении неравенства $\|x_0 - y_0\| < \delta$ справедлива оценка

$$h(X(t, t_0, x_0), X(t, t_0, y_0)) < \varepsilon.$$

Оценим

$$h(X(t, t_0, x_0), X(t, t_0, y_0)) = \sup\{d_1(t), d_2(t)\},$$

где по аналогии с оценками (5), (6)

$$d_1(t) = \rho(x(t, x_0), X(t, t_0, y_0)) \leq M\|x_0 - y_0\|,$$

$$d_2(t) = \rho(x(t, y_0), X(t, t_0, x_0)) \leq M\|x_0 - y_0\|.$$

Выбирая $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, получим требуемое утверждение.

Замечание 3. Полученные результаты очевидным образом переносятся на случай измеримых $A(t)$ и $f(t)$.

1. **Байокки К., Капело А.** Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. – М.: Наука, 1988. – 448 с.
2. **Плотникова Н.В.** Периодические решения линейных импульсных дифференциальных включений // Нелінійні коливання. – 2004. – Т.7, №4. – С.495–515.
3. **Самойленко А.М., Перестюк Н.А.** Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища шк., 1987. – 288 с.
4. **Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.** Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Scientific, 1989. – 275 p.
5. **Watson P. J.** Impulsive differential inclusions // Nonlinear World. – 1997. – Vol. 4, №4. – P. 395 – 402.

Получена 3.05.2006