

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра математичного та комп'ютерного моделювання

Дипломна робота

бакалавра

на тему: **«Змішана задача теплопровідності для сектора
кола»**

«Mixed thermal conductivity problem for the circle sector»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Пушкін Нікіта Глібович

Керівник: к. ф.-м. н., доц. Реут В.В.

Рецензент: к. ф.-м. н., доц. Гришин В. О.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від «____» _____ р.
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____
Протокол № ____ від «____» ____ р.
Оцінка _____ / _____ / _____
Голова ЕК

Одеса — 2021 р.

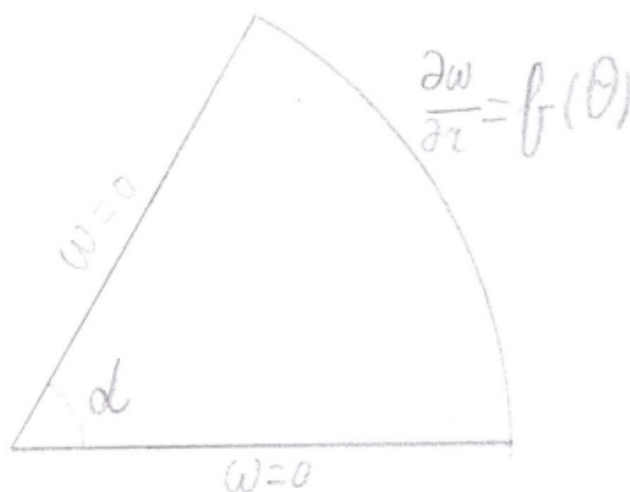
ЗМІСТ

1	Постановка задачі	3
1.1	Математическая модель	3
2	Теория	4
3	Решение поставленной задачи	6
3.1	Численное решение	9
3.2	Код программы	9
	Висновки	10
	Список літератури	11

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача теплопроводности для секторе круга, прямолинейные края которого поддерживаются при температуре равной нулю, а на криволинейной грани задан тепловой поток. Отсутствуют внутренние источники тепла. Требуется найти температуру $W(r, \theta)$



Математическая модель

Математической моделью данной задачи является:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \\ w|_{\theta=0} = 0, w|_{\theta=\alpha} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial r}|_{r=a} = f(\theta) = \theta(\alpha - \theta) \\ w, \frac{\partial w}{\partial r}|_{r \rightarrow 0} - \text{огр.} \end{cases} \quad (1.1)$$

РОЗДІЛ 2

ТЕОРИЯ

Уравнение теплопроводности — дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, которое описывает распределение температуры в заданной области пространства и ее изменение во времени. В общем виде в пространстве с произвольной системой координат $r = (r_1, \dots, r_n)$ уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(r, t)$$

где a — положительная константа (число a^2 является коэффициентом теплопроводности), $\Delta = \nabla^2$ — оператор Лапласа и $f(r, t)$ — функция тепловых источников. Искомая функция $u = u(r, t)$ задает температуру в точке с координатами r в момент времени t .

Температура нестационарного теплого поля удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u \quad (a^2 = \frac{k}{c\rho})$$

Если процесс стационарен, то устанавливается распределение температуры $u(x, y, z)$, не меняющееся с течением времени и, следовательно, удовлетворяющее уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{2.1}$$

При наличии источников тепла получаем уравнение

$$\Delta u = -f, \quad f = \frac{F}{k} \tag{2.2}$$

где F — плотность тепловых источников, а k — коэффициент теплопроводности. Неоднородное уравнение Лапласа (2.2) часто называют уравнением Пуассона.

Рассмотрим некоторый объём T , ограниченный поверхностью Σ . Задача о стационарном распределении температуры $u(x, y, z)$ внутри тела T форму-

лируется следующим образом: найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую внутри T уравнению

$$\Delta u = -f(x, y, z) \quad (2.3)$$

и граничному условию, которое может быть взято в одном из следующих видов:

1. $u = f_1$ на Σ (первая краевая задача)
2. $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ на Σ (вторая краевая задача)
3. $\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0$ на Σ (третья краевая задача)

где f_1, f_2, f_3, h - заданные функции, $\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по внешней нормали к поверхности Σ

Первую краевую задачу для уравнения Лапласа часто называют задачей Дирихле, а вторую краевую задачу - задачей Неймана.

Если ищется решение в области T_0 , внутренней (или внешней) по отношению к поверхности Σ , то соответствующую задачу называют внутренней (или внешней) краевой задачей.

РОЗДІЛ 3

РЕШЕНИЕ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Применим к этой задаче интегральное преобразование Фурье:

$$w_m(r) = \int_0^\alpha w(r, \theta) \sin \lambda_m \theta d\theta, \lambda_m = \frac{m\pi}{\alpha} \quad (3.1)$$

Для этого обе части уравнения в (1.1) умножим на $\sin \lambda \theta$ и проинтегрируем по θ в пределах от 0 до α . В результате задача сводится к одномерной краевой задаче:

$$\begin{cases} r^2 w_m''(r) + r w_m'(r) - \lambda_m^2 w_m(r) = 0 \\ w_m' |_{r=a} = f_m, \\ w_m, w_m' |_{r \rightarrow 0} - \text{огр} \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь $w_m(r)$ - трансформанта (3.1) исходной функции, а

$$f_m = \int_0^\alpha f(\theta) \sin(\lambda_m \theta) d\theta$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения в (3.2) имеет вид

$$w_m(r) = c_m r^{\lambda_m} + d_m r^{-\lambda_m},$$

где c_m и d_m - произвольные постоянные.

Из условия убывания при $r \rightarrow 0$ следует $d_m = 0$.

Поэтому

$$w_m(r) = c_m r^{\lambda_m}$$

Удовлетворяя граничному условию находим:

$$r w_m'(r) = c_m \lambda_m r^{\lambda_m}$$

$$r w_m'(r) |_{r=a} = c_m \lambda_m a^{\lambda_m} = a f_m$$

$$c_m = \frac{a f_m}{\lambda_m} a^{-\lambda_m}$$

Откуда

$$w_m = f_m \frac{a}{\lambda_m} \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_m} \quad (3.3)$$

Вычисляем значение f_m для функции

$$f(\theta) = \theta(\alpha - \theta)$$

Находим

$$f_m = \int_0^\alpha f(\theta) \sin(\lambda_m \theta) d\theta$$

После интегрирования по частям

$$f_m = \frac{2}{\lambda_m^3} (1 - (-1)^m)$$

т.е.

$$f_{2m} = 0 \quad ; \quad f_{2m+1} = \frac{4}{\lambda_{2m+1}^3}, \quad m = \overline{0, \infty} \quad (3.4)$$

Обратное преобразование Фурье:

$$w(r, \theta) = \frac{2}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} f_m \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_m} \frac{a}{\lambda_m} \sin \lambda_m \theta \quad (3.5)$$

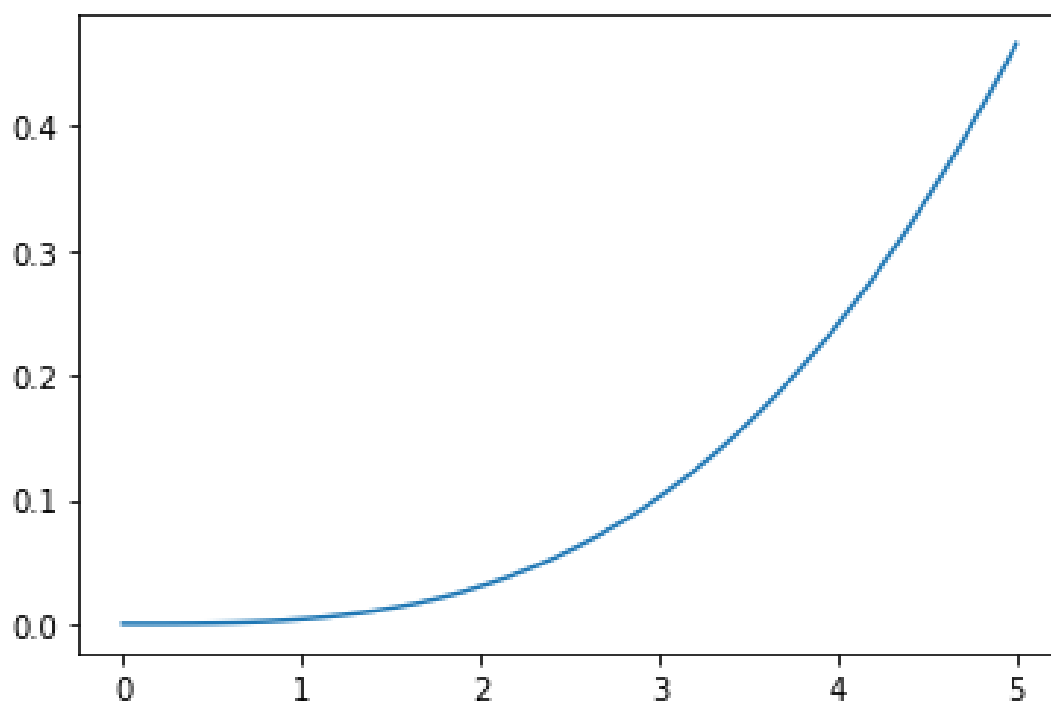
решение поставленной задачи

Учитывая $\lambda_m = \frac{m\pi}{\alpha}$ и (3.4) получим расчётную формулу:

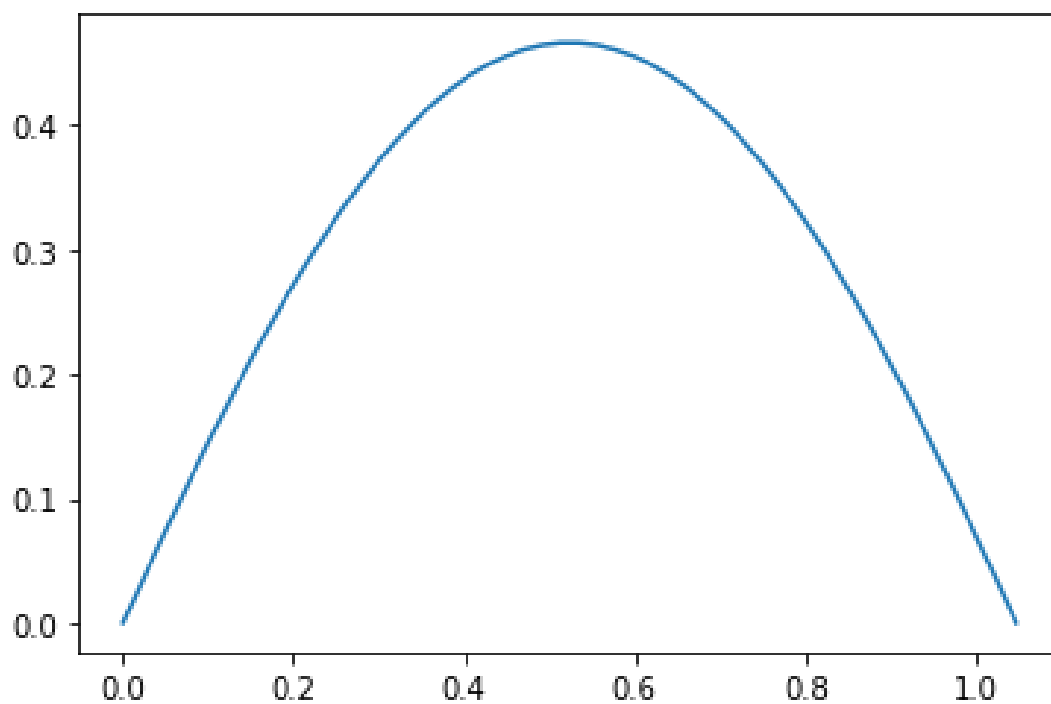
$$w(r, \theta) = \frac{a\alpha^3\pi^4}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{2m+1}{\alpha}\pi} \frac{\sin(2m+1)\frac{\pi\theta}{\alpha}}{2m+1}$$

Были проведены расчёты при $a = 5$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Построен график функции $w(r, \theta)$ при $\theta = \frac{\alpha}{2}$:



Построен график функции $w(r, \theta)$ при $r = a$:



Численное решение

Пусть $r = a$, $\theta = \frac{\alpha}{2}$ и пусть точность $\epsilon = 0,00001$

Тогда численным решением в данной точке и при заданной точности ϵ является выражение $0.0812180408877302a\alpha^3$

Код программы

```
import math as m
import sympy as sym

a = sym.Symbol('a')
eps = 0.00001
k = 1
n = 2*k-1
alpha = sym.Symbol('alpha')
l_n = n*m.pi/alpha

theta = alpha/2
r = a

y_1 = 0
y_0 = (2/alpha)*(4*a*r**l_n*m.sin(l_n*theta))/(l_n**4*a**l_n)
k += 1
n = 2*k-1
l_n = n*m.pi/alpha
y_1 = y_0 + (2/alpha)*(4*a*r**l_n*m.sin(l_n*theta))/(l_n**4*a**l_n)
while (sym.cancel(abs(y_0 - y_1))).subs({a:1,alpha:1}) >= eps:
    y_0 = y_1
    k += 1
    n = 2*k-1
    l_n = n*m.pi/alpha
    y_1 = y_0 + (2/alpha)*(4*a*r**l_n*m.sin(l_n*theta))/(l_n**4*a**l_n)
```

ВЫВОД

В результате расчётов была найдена функция температуры $w(r, \theta)$. Благодаря программе возможно найти значение температуры в любой точке сектора и построить график роста температуры в секторе круга.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Попов Г.Я., Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. навчальний посібник з курсу "Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень" // Одеса: Астропринт, 2005 - 183 стр.
2. Справочник по специальным функциям (под. ред. М. Абрамовица и И. Стигана) // Москва, «Наука», 1979 - 828 стр.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.// М.: Наука, 1966 - 742 стр.
4. Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. навчально-методичний посібник "Рівняння математичної фізики"// Одеса: Астропринт, 2018 - 193 стр.