УДК 517.925

Г. А. Гержановская
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОСОБЫХ РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, с нелинейностями в некотором смысле близкими к правильно меняющимся рассматривается достаточно широкий класс медленно меняющихся при стремлении аргумента к особой точке решений. В работе получены необходимые и достаточные условия существования решений из введенного класса. Кроме того, найдены асимптотические представления при стремлении аргумента к особой точке для таких решений и их производных первого порядка. Результаты работы применимы как исследования решений при стремлении аргумента к бесконечности, так и для сингулярных решений.
MSC: 34C41, 34E10.
Ключевые слова: асимптотические представления решений, медленно меняющиеся решения, правильно меняющиеся нелинейности, $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-решения.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149700.

Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')\exp(R(|\ln|yy'||)), \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p : [a,\omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leqslant +\infty)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ — непрерывные функции, $R :]0; +\infty[\to]0; +\infty[$ — непрерывно дифференцируемая с монотонной производной, правильно меняющаяся (см., например, [1]) на бесконечности функция порядка $\mu, 0 < \mu < 1$, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — промежуток либо $[y_i^0; Y_i[$,* либо $]Y_i; y_i^0]$ $(i = 0,1)$. Кроме того, предполагается, что каждая из функций $\varphi_i(z)$, (i=0,1) является правильно меняющейся функцией (см. [1], глава 1, §1.1, стр. 9) при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$ порядка σ_i, $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$, $\sigma_1 \neq 1$.

Определение 1. *Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решением, если оно задано на $[t_0,\omega[$ и*

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad (i = 0,1), \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)\,y(t)} = \lambda_0. \tag{2}$$

Данный класс решений охватывает как правильно, так и быстро, и медленно меняющиеся решения. Быстро меняющиеся (см., например, [2]) и правильно меняющиеся решения ненулевого порядка были исследованы ранее (см., например, [3]). В данной работе рассматривается особый класс $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-решений уравнения (1). Такие решения являются медленно меняющимися функциями при

*При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ считаем $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ соответственно.

Получена 23.09.2018

$t \uparrow \omega$, поэтому их исследование требует существенных изменений в методике. Кроме того, приходится накладывать дополнительные условия на правую часть уравнения (1). В работе [5] также иcледовались $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-решения, однако сейчас удалось получить результаты для случая, когда не будут выполнятся условия из теоремы 1 из [5].

Основные результаты. Введем дополнительные обозначения и определения, необходимые далее.

Определение 2. *Пусть $\varphi : \Delta_Y \to]0,+\infty[$ — правильно меняющаяся функция при $z \to Y \quad (z \in \Delta_Y)$ $(Y \in \{0,\infty\}$, Δ_Y — некоторая односторонняя окрестность Y порядка σ. Будем говорить, что φ удовлетворяет условию S, если для любой непрерывно дифференцируемой функции $L : \Delta_Y \to]0;+\infty[$ такой, что*

$$\lim_{\substack{z \to Y \\ z \in \Delta_Y}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0,$$

имеет место соотношение

$$\Theta(zL(z)) = \Theta(z)(1+o(1)) \qquad \text{при } z \to Y, \quad (z \in \Delta_Y),$$

где $\Theta(z) = \varphi(z)|z|^{-\sigma}$.

Положим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t-\omega & \text{при } \omega < +\infty, \end{cases} \qquad \Theta_i(z) = \varphi_i(z)|z|^{-\sigma_i}, \quad (i = 0,1)$$

и в случае, когда $\frac{y_1^0}{|\pi_\omega(t)|} = Y_1$,

$$I(t) = \alpha_0 \int_{A_\omega}^{t} p(\tau)d\tau, \qquad A_\omega = \begin{cases} a, \text{если } \int_a^\omega p(\tau)d\tau = +\infty, \\ \omega, \text{если } \int_a^\omega p(\tau)d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$N(t) = \frac{(1-\sigma_1)I(t)\left|(1-\sigma_1)I(t)\Theta_1\left(\frac{y_1^0}{|\pi_\omega(t)|}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}{I'(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}$$

при $t \in [b,\omega[$, где $b \in [a,\omega[$ выбирается так, чтобы $\frac{y_1^0}{|\pi_\omega(t)|} \in \Delta_1$.

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1) φ_1 удовлетворяет условию S и выполняется условие*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)N'(t)}{R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)N(t)} = 0. \tag{3}$$

Тогда, для существования у уравнения (1) $P(Y_0,Y_1,0)-$решений, для которых существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$ необходимо и достаточно выполнения условий

$$\lim_{t\uparrow\omega} y_0^0 \left(\exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)||)\right)^{\frac{\sigma_1-1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{-\alpha_0}{\pi_\omega(t)} = Y_1,$$
$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} = \sigma_1 - 1 \tag{4}$$

и неравенств

$$\alpha_0 y_1^0 \pi_\omega(t) < 0, \qquad I(t)(1-\sigma_0-\sigma_1) y_0^0 R'(|\ln|\pi_\omega(t)||) > 0. \tag{5}$$

Более того, для каждого такого решения справедливы асимптотические представления при $t \uparrow \omega$

$$\begin{gathered} \frac{y(t)}{|\varphi_0(y(t)) \exp\left(R(|\ln|y(t)y'(t||)\right)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} N(t)[1+o(1)], \\ \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{I'(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)I(t)}[1+o(1)]. \end{gathered} \tag{6}$$

Доказательство. *Необходимость* Пусть $y : [t_0,\omega[\to \Delta_{Y_0} - P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-решение уравнения (1). Из условий на функцию R, с учетом предложения 9 из [2] (раздел 5, пункт 1, стр. 116) следует, что

$$\lim_{z\to\infty} \frac{zR'(z)}{R(z)} = \mu, \quad \lim_{z\to\infty} R'(z) = 0. \tag{7}$$

Из определения $P_\omega(Y_0,Y_1,0)-$решений [ЕВТУХОВ], так как существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$, следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = -1, \tag{8}$$

откуда следует выполнение второго из условий (4) и первого из условий (5). Из первого из соотношений (8) получим, что $y(t)$ является медленно меняющейся функцией при $t \uparrow \omega$. Поэтому, в силу второго из соотношений (8) функцию $y(t)$ можно представить в виде $y(t) = L(y'(t))$, где L - медлено меняющаяся функция при стремлении аргумента к Y_1. Поэтому уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{y''(t)}{\varphi_0(L(y'(t)))\varphi_1(y'(t))\exp(R(|\ln|L(y'(t))y'(t)||))} = \alpha_0 p(t). \tag{9}$$

Отсюда, с учетом свойств правильно и медлено меняющихся функций получим при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(L(y'(t)))\varphi_1(y'(t))\exp(R(|\ln|L(y'(t))y'(t)||))} = (1-\sigma_1)I(t)[1+o(1)]. \tag{10}$$

Используя (9) и (10) получим

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{p(t)}{(1-\sigma_1)I(t)}[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{11}$$

Отсюда, в силу второго из соотношений (8) следует выполнение третьего из условий (4).

Перепишем (10) в виде при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1}\exp(R|\ln|y(t)y'(t)||)} = (1-\sigma_1)I(t)\Theta_1(y'(t))[1+o(1)]. \tag{12}$$

Кроме того, так как φ_1 удовлетворяет условию S, из (8) следует, что

$$\Theta_1(y'(t)) = \Theta_1\left(\frac{\mathrm{sign} y_0^1}{|\pi_\omega(t)|}\right)[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{13}$$

С учетом (7), (8) и свойств функции R имеем при $t \uparrow \omega$

$$\begin{aligned} R(|\ln|y(t)y'(t)||) &= R(|\ln|\pi_\omega(t)||)[1+o(1)], \\ R'(|\ln|y(t)y'(t)||) &= R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)[1+o(1)]. \end{aligned} \tag{14}$$

Рассмотрим функцию

$$W(t) = \int_a^t \frac{\exp(R(|\ln|y(\tau)y'(\tau)||))y''(\tau)N(\tau)R'(|\ln|\pi_\omega(\tau)||)}{y'(\tau)}d\tau. \tag{15}$$

Покажем, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{W(t)}{\exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))N(t)} = 1. \tag{16}$$

Используя правило Лопиталя и (14), получим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{W(t)}{\exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))N(t)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(W(t))'}{(\exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))N(t))'} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\frac{N(t)\exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))y''(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{y'(t)\exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))}}{\left(N'(t) + \frac{N(t)R'(|\ln|y(t)y'(t)||)}{y(t)y'(t)}(y''(t)y(t)+(y'(t))^2)\right)} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{\frac{y'(t)N'(t)}{y''(t)N(t)} + \frac{R'(|\ln|y(t)y'(t)||)}{y(t)y'(t)}(y''(t)y(t)+(y'(t))^2)} =$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{\frac{y'(t)}{\pi_\omega(t)y''(t)}\frac{\pi_\omega(t)N'(t)}{N(t)} + R'(|\ln|y(t)y'(t)||)\left(1+\frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)}\right)} = 1.$$

Используя (11) перепишем (12) в виде при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t)}{|\varphi_0(y)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \frac{y''(t)(1-\sigma_1)I(t)|(1-\sigma_1)\Theta_1(y')I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\exp\left(\frac{R(|\ln|yy'||)}{1-\sigma_1}\right)}{y'(t)I'(t)}[1+o(1)]. \tag{17}$$

Из данного соотношения, с учетом (13) и (15) получим

$$\frac{y'(t)}{|\varphi_0(y)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \frac{y''(t)N(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)\exp\left(\frac{R(|\ln|yy'||)}{1-\sigma_1}\right)}{y'(t)}[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{18}$$

Из (18), с учетом вида функции W и свойств правильно меняющихся функций, получим

$$\frac{y(t)}{|\varphi_0(y)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}W(t)[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{19}$$

В силу (16), соотношение (19) можно переписать в виде

$$\frac{y(t)}{|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}=\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\exp\left(\frac{R(\ln|y(t)y'(t)||)}{1-\sigma_1}\right)N(t)[1+o(1)] \text{ при } t\uparrow\omega, \tag{20}$$

откуда следует второе из условий (5) и первое из представление (6). Из (18) и (20) получим

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{(1-\sigma_1)y''(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)y'(t)}[1+o(1)] \text{ при } t\uparrow\omega.$$

Отсюда, используя (11), получим

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{I'(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)I(t)}[1+o(1)] \text{ при } t\uparrow\omega,$$

то есть имеет место второе из представление (6) и первое из условий (4)

Достаточность. Пусть существуют бесконечно дифференцируемые функции $L_0:\Delta_{Y_0}\to]0,+\infty[$, $L_1:\Delta_{Y_1}\to]0,+\infty[$ такие, что

$$L_i(z)=\Theta_i(z)[1+o(1)] \text{ при } z\to Y_i\,(z\in\Delta_{Y_i}), \quad \lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}}\frac{zL_i'(z)}{L_i(z)}=0, \quad i=0{,}1.$$

Обозначим $g(v_0,v_1)=\exp(R(|\ln|v_0v_1||))L_0(v_0)$.

Отсюда, с учетом вида функций φ_0 и R, имеем

$$\lim_{\substack{v_i\to Y_i\\ v_i\in\Delta_{Y_i}}}\frac{v_i\frac{\partial g}{\partial v_i}(v_0,v_1)}{g(v_0,v_1)}=0 \quad \text{равномерно по } v_j\in\Delta_{Y_j},\, j\neq i,\, i,j=0{,}1 \tag{21}$$

Таким образом, можна выбрать $\tilde\Delta_{Y_i}\subset\Delta_{Y_i}$ $(i=0{,}1)$ так, чтобы

$$\left|\frac{v_i\frac{\partial g}{\partial v_i}(v_0,v_1)}{g(v_0,v_1)}\right|<\zeta,\ (i=0{,}1) \tag{22}$$

при $(v_0,v_1)\in\tilde\Delta_{Y_0}\times\tilde\Delta_{Y_1}$, где $0<\zeta<\frac{|1-\sigma_0-\sigma_1|}{4}$, ζ достаточно мало и

$$\tilde\Delta_{Y_i}=\begin{cases}\{[\tilde y_i^0,Y_i[, \text{ если } \Delta_{Y_i}=[y_i^0,Y_i[,\ y_i^0\leqslant\tilde y_i^0<Y_i;\\ \ ]Y_i,\tilde y_i^0],\ \text{ если } \Delta_{Y_i}=]Y_i,y_i^0],\ Y_i>\tilde y_i^0\geqslant y_i^0,\end{cases} \quad (i=0,1).$$

Рассмотрим функцию

$$F(s_0,s_1)=\begin{pmatrix}\dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}\\[2ex] \dfrac{s_1}{s_0}\end{pmatrix},$$

заданную на множестве $\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$. Рассмотрим первую компоненту данной функции. С учетом (21) имеем

$$\lim_{\substack{s_0 \to Y_0 \\ s_0 \in \tilde{\Delta}_{Y_0}}} \frac{s_0 \left(\dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)} \right)'_{s_0}}{\dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}} =$$

$$= \lim_{\substack{s_0 \to Y_0 \\ s_0 \in \tilde{\Delta}_{Y_0}}} \left(1 - \frac{\sigma_0}{1-\sigma_1} - \frac{1}{1-\sigma_1} \frac{s_0 \frac{\partial g}{\partial s_0}(s_0,s_1)}{g(s_0,s_1)} \right) = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}$$

равномерно по $s_1 \in \tilde{\Delta}_{Y_1}$.

Поэтому

$$\lim_{\substack{s_0 \to Y_0 \\ s_0 \in \tilde{\Delta}_{Y_0}}} \frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)} = \Upsilon \text{ равномерно по } s_1 \in \tilde{\Delta}_{Y_1},$$

$$\Upsilon = \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad Y_0 = +\infty \text{ и } \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} > 0, \text{ или } Y_0 = 0 \text{ и } \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} < 0, \\ 0, & \text{если} \quad Y_0 = +\infty \text{ и } \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} < 0, \text{ или } Y_0 = 0 \text{ и } \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} > 0. \end{cases} \tag{23}$$

Покажем, что F взаимно однозначно отображает $\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$ на множество

$$F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}) = \begin{cases} \left[\frac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0,\tilde{y}_0^1)}; \Upsilon \right) \times \Delta_0, \text{ если } \frac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0,\tilde{y}_0^1)} < \Upsilon, \\ \left(\Upsilon; \frac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0,\tilde{y}_0^1)} \right] \times \Delta_0, \text{ если } \frac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0,\tilde{y}_0^1)} > \Upsilon, \end{cases} \tag{24}$$

где

$$\Delta_0 = \begin{cases} (0;+\infty), & \text{если } \tilde{y}_0^0 \tilde{y}_0^1 > 0, \\ (-\infty;0), & \text{если } \tilde{y}_0^0 \tilde{y}_0^1 < 0. \end{cases} \tag{25}$$

Рассмотрим поведение функции $\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}$ на прямых

$$s_1 = ks_0, \qquad k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{26}$$

На каждой такой прямой $\dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)} = \dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)}$. Кроме того, имеем

$$\left(\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)} \right)'_{s_0} =$$

$$= \frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{(1-\sigma_1)s_0 g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)} \left(1 - \sigma_0 - \sigma_1 - \frac{s_0 g'_{s_0}(s_0,ks_0)}{g(s_0,ks_0)} - \frac{ks_0 g'_{ks_0}(s_0,ks_0)}{g(s_0,ks_0)} \right).$$

Это означает, что с учетом (22)

$$\operatorname{sign}\left(\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)}\right)'_{s_0} = \operatorname{sign}(y_0^0(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)).$$

Поэтому функция $\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)}$ строго монотонна на любой прямой вида (26). Допустим, что отображение F не является взаимно однозначным. Тогда

$$\exists (p_0,p_1),(q_0,q_1) \in \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1},$$

$$(p_0,p_1) \neq (q_0,q_1): \qquad F(p_0,p_1) = F(q_0,q_1).$$

С учетом определения множеств $\tilde{\Delta}_{Y_0},\tilde{\Delta}_{Y_1}$ последнее равенство означает, что

$$\frac{|p_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(p_0,p_1)} = \frac{|q_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(q_0,q_1)}, \qquad \frac{p_0}{p_1} = \frac{q_0}{q_1} = c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{27}$$

Покажем, что точки (p_0,p_1) и (q_0,q_1) лежать на одной прямой вида (26). Но тогда (27) не может иметь места, так как функция $\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,cs_0)}$ строго монотонна на этой прямой. Таким образом, существует обратная $F^{-1}: F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}) \to \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$. Учитывая вид функции, имеем

$$F^{-1}(w_0,w)_1 = \begin{pmatrix} F_0^{-1}(w_0,w_1) \\ \\ F_1^{-1}(w_0,w_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0^{-1}(w_0,w_1) \\ \\ w_1 F_0^{-1}(w_0,w_1) \end{pmatrix},$$

где $(w_0,w_1) \in F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1})$. Поскольку якобиан

$$JF(s_0,s_1) = \begin{vmatrix} \frac{|s_0|^{1-\frac{1}{1-\sigma_1}}\left(1-\sigma_0-\sigma_1-\frac{s_0\frac{\partial g}{\partial s_0}(s_0,s_1)}{g(s_0,s_1)}\right)}{(1-\sigma_1)s_0 g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)} & \frac{-|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_0,s_1)}{(1-\sigma_1)g^{1+\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)} \\ \\ -\frac{s_1}{s_0^2} & \frac{1}{s_0} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{|s_0|^{1-\frac{1}{1-\sigma_1}}}{(1-\sigma_1 s_0^2)g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}\left(1-\sigma_0-\sigma_1-\frac{s_0\frac{\partial g}{\partial s_0}(s_0,s_1)}{g(s_0,s_1)}-\frac{s_1\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_0,s_1)}{g(s_0,s_1)}\right) \neq 0,$$

при $(s_0,s_1) \in \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$, функция F^{-1} является непрерывно дифференцируемой на $F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1})$. Кроме того, для $(w_0,w_1) \in F(\tilde{\Delta_{Y_0}} \times \tilde{\Delta_{Y_1}})$ справедливы равенства

$$\frac{|F_0^{-1}(w_0,w_1)|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))} = w_0,$$

$$\frac{F_i^{-1}(w_0,w_1)}{w_0 \dfrac{\partial F_i^{-1}}{\partial w_0}(w_0,w_1)} = 1 - \frac{\sigma_0}{1-\sigma_1} - \frac{1}{1-\sigma_1} \times \tag{28}$$

$$\times \sum_{k=1}^{2} \left[\frac{F_{k-1}^{-1}(w_0,w_1) \dfrac{\partial g}{\partial v_k}(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}{g(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))} \right] \ (i = 0,1),$$

$$\frac{F_0^{-1}(w_0,w_1)}{w_1 \dfrac{\partial F_0^{-1}}{\partial w_1}(w_0,w_1)} = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} \frac{g(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}{w_1 F_0^{-1}(w_0,w_1) \dfrac{\partial g}{\partial v_0}(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))} +$$

$$+ \frac{1}{1-\sigma_1} \frac{F_0^{-1}(w_0,w_1) \dfrac{\partial g}{\partial v_0}(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}{w_1 F_0^{-1}(w_0,w_1) \dfrac{\partial g}{\partial v_0}(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))} + 1, \tag{29}$$

$$\frac{w_1 \frac{\partial F_1^{-1}}{\partial w_1}(w_0,w_1)}{F_1^{-1}(w_0,w_1)} = 1 + \frac{w_1 \frac{\partial F_0^{-1}}{\partial w_1}(w_0,w_1)}{F_0^{-1}(w_0,w_1)}. \tag{30}$$

Полагая

$$\begin{cases} \dfrac{y(t)}{|\varphi_0(y(t)) \exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = (1-\sigma_0-\sigma_1)N(t)[1+z_1(x)], \\ \dfrac{y'(y)}{y(t)} = \dfrac{I'(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)I(t)}[1+z_2(x)], \end{cases} \tag{31}$$

где

$$x = \beta \ln|\pi_\omega(t)|, \qquad \beta = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega = +\infty, \\ -1 & \text{при } \omega < \infty, \end{cases}$$

сведем уравнение (1) к системе

$$\begin{cases} z_1' = \beta C G_1(x)[1+z_1][1+z_2] \left(1 - K_2(x,z_1,z_2) - K_1(x,z_1,z_2) \frac{|1+z_1|^{\sigma_1-1}}{1+z_2|^{\sigma_1}}\right) \\ z_2 = \frac{\beta}{1-\sigma_1} G_2(x)[1+z_2] \left(\left| \frac{1+z_1}{1+z_2} \right|^{1-\sigma_1} + K_3(x,z_1,z_2) - 1 \right) \end{cases} \tag{32}$$

где

$$\Psi_0(x,z_1,z_2) =$$

$$= F_0^{-1}\left((1-\sigma_0-\sigma_1)N(t(x))[1+z_1(x)], \frac{I'(t(x))R'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)I(t(x))}[1+z_2(x)]\right),$$

$$\Psi_1(x,z_1,z_2) =$$

$$= F_1^{-1}\left((1-\sigma_0-\sigma_1)N(t(x))[1+z_1(x)], \frac{I'(t(x))R'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)I(t(x))}[1+z_2(x)]\right),$$

$$K_1(x,z_1,z_2) = \frac{R'(|\ln|\Psi_0(t(x),z_1,z_2)\Psi_1(t(x),z_1,z_2||)}{R'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)},$$

$$K_2(x,z_1,z_2) = -\frac{N'(t)\pi_\omega(t)}{CN(t)G_1(t)} - K_1(x,z_1,z_2)\frac{|(1-\sigma_1)|\mathrm{sign}(I(t(x)))G_1(t(x))}{y_1^0 G_2(t(x))} -$$

$$-\frac{\Psi_0(x,z_1,z_2)L_0'(\Psi_0(x,z_1,z_2))}{CL_0(\Psi_0(x,z_1,z_2))},$$

$$K_3(x,z_1,z_2) = (1-\sigma_1)\left(-G_1(t)[1+z_2] + \frac{\pi_\omega(t)N'(t)}{N(t)} + \frac{y_0^1\mathrm{sign}(I(t))}{(1-\sigma_1)\pi_\omega(t)}\frac{L_1'\left(\frac{y_1^0}{|\pi_\omega(t)|}\right)}{L_1\left(\frac{y_1^0}{|\pi_\omega(t)|}\right)}\right),$$

$$G_1(x) = \frac{\pi_\omega(t(x))I'(t(x))R'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)I(t(x))}, \quad G_2(x) = \frac{\pi_\omega(t(x))I'(t(x))}{I(t(x))},$$

$$C = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}.$$

Обозначим

$$\eta_1(t,z_1) = (1-\sigma_0-\sigma_1)N(t)[1+z_1(x)],$$

$$\eta_2(t,z_2) = \frac{I'(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)I(t)}[1+z_2(x)].$$

Так же, как при доказательстве теоремы 1 из [3], с учетом (28)-(30) получим, что при построении множеств $\tilde{\Delta}_{Y_0}$, $\tilde{\Delta}_{Y_1}$ число ζ может быть выбрано настолько малым, чтобы существовали таки константы $\zeta_1,\zeta_2 \in R$, что

$$\zeta_1 < \frac{N(t)(\Psi_0(x(t),\xi_1,\xi_2))_t'}{N'(t)\Psi_0(x(t),\xi_1,\xi_2)} < \zeta_2, \qquad \forall(\xi_1,\xi_2) \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\times \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$$

и $\mathrm{sign}\zeta_1 = \mathrm{sign}\zeta_2 = \mathrm{sign}\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\Psi_0(x,z_1,z_2) = Y_0 \quad \text{равномерно по } z_1,z_2 : |z_j| < \frac{1}{2}, j = 1,2.$$

Аналогично, с учетом вида функции Ψ_1 имеем, что при построении множеств $\tilde{\Delta}_{Y_0}, \tilde{\Delta}_{Y_1}$ число ζ может буть выбрано настолько малым, чтобы существовали такие константы $\zeta_3,\zeta_4 \in R$, что

$$\zeta_3 < \frac{\pi_\omega(t)(\Psi_1(x(t),\xi_1,\xi_2))'}{\Psi_1(x(t),\xi_1,\xi_2)} < \zeta_4,$$

$\mathrm{sign}\zeta_3 = \mathrm{sign}\zeta_4 = -1$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\Psi_1(x,z_1,z_2) = Y_1 \quad \text{равномерно по } z_1,z_2 : |z_j| < \frac{1}{2}, j = 1,2.$$

Отсюда, с учетом условия (3), получим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(\Psi_0(x(t),\xi_1,\xi_2)\Psi_1(x(t),\xi_1,\xi_2))'_t}{\Psi_0(x(t),\xi_1,\xi_2)\Psi_1(x(t),\xi_1,\xi_2)}=-1 \tag{33}$$

равномерно по $(\xi_1,\xi_2)\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\times\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$. Поэтому функция $\Psi_0(x(t),\xi_1,\xi_2)\Psi_1(x(t),\xi_1,\xi_2)$ является правильно меняющейся функцией порядка (-1) при $t\uparrow\omega$.

С учетом вида функций Ψ_0, Ψ_1 имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\Psi_0(x,z_1,z_2)\Psi_1(x,z_1,z_2)=\begin{cases}\infty, & \text{если } Y_1=\infty,\\ 0, & \text{если } Y_1=0,\end{cases}$$

равномерно по $z_1,z_2:|z_1|<\frac{1}{2}$, $|z_2|<\frac{1}{2}$.

Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\ln|\Psi_0(x,z_1,z_2)\Psi_1(x,z_1,z_2)|=\infty.$$

Таким образом, так как R — правильно меняющаяся функция при стремлении аргумента к ∞ порядка μ, то

$$\lim_{x\to+\infty}K_1(x,z_1,z_2)=1. \tag{34}$$

Так как R — правильно меняющаяся функция порядка при стремлении аргумента к ∞ порядка $0<\mu<1$, то R' — соответственно правильно меняющаяся функция порядка $-1<\mu-1<0$. Тогда, с учетом (33) и вида функций L_0, L_1, условия (3) и третьего из условий (4) получим

$$\lim_{x\to+\infty}K_i(x,z_1,z_2)=0,\qquad i=2,3.$$

Поэтому можно выбрать $t_0\in[a,\omega[$ так, чтобы

$$\begin{pmatrix}(1-\sigma_0-\sigma_1)N(t)[1+z_1(x)],\\[2ex] \dfrac{I'(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)I(t)}[1+z_2(x)],\end{pmatrix}\in F(\tilde{\Delta_{Y_0}}\times\tilde{\Delta_{Y_1}})$$

при $t\in[t_0,\omega[,|z_i|\leqslant\frac{1}{2},i\in\{1,2\}$. Теперь рассмотрим систему дифференциальных уравнений (32) на множестве

$$\Omega=[x_0,+\infty[\times D,\ \text{где } x_0=\beta\ln|t_0|,$$

$$D=\{(z_1,z_2):|z_i|\lesseqgtr\frac{1}{2},i\in\{1,2\}\}.$$

Перепишем систему (32) в виде

$$\begin{cases}z_1'=G_1(x)(A_{11}z_1+A_{12}z_2+R_1(x,z_1,z_2)+R_2(z_1,z_2)),\\ z_2'=A_{21}z_1+A_{22}z_2+R_3(x,z_1,z_2)+R_4(z_1,z_2),\end{cases} \tag{35}$$

где

$$A_{11}=\beta C(1-\sigma_1),\quad A_{12}=\beta C\sigma_1,\quad A_{21}=\beta,\quad A_{22}=\beta\frac{\sigma_1}{1-\sigma_1},$$

$$R_1(x,z_1,z_2) = -\beta C\left(K_2(x,z_1,z_2)(1+z_1)(1+z_2) + (K_1(x,z_1,z_2)-1)\frac{|1+z_1|^{\sigma_1}}{|1+z_2|^{1-\sigma_1}}\right);$$

$$R_2(z_1,z_2) = \beta C\left(z_1z_2 - (|1+z_1|^{\sigma_1}|1+z_2|^{1-\sigma_1} - 1 - \sigma_1 z_1 - (1-\sigma_1)z_2)\right);$$

$$R_3(x,z_1,z_2) = \frac{\beta}{1-\sigma_1}(1+z_2)\left(G_2(x)-\sigma_1+1\right)\left(\left|\frac{1+z_1}{1+z_2}\right|^{1-\sigma_1} - 1 + K_3(x,z_1,z_2)\right);$$

$$R_4(z_1,z_2) = \frac{\beta}{1-\sigma_1}\left(\frac{|1+z_1|^{1-\sigma_1}}{|1+z_2|^{\sigma_1}} - 1 - (1-\sigma_1)z_1 - \sigma_1 z_2\right).$$

В сили условия (3) и третьего из условий (4) следует, что

$$\lim_{x\to\infty} G_1(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} G_2(x) = \sigma_1 - 1.$$

С учетом вида функции G_1 ясно, что

$$\int_{x_0}^{\infty} G_1(x)dx = \infty \text{ при } x \in [x_0,\infty[.$$

Таким образом, с учетом (32) имеем

$$\lim_{x\to\infty} R_i(x,z_1,z_2) = 0 \text{ равномерно по } (z_1,z_2) \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\times\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right], i \in \{1,3\},$$

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0} \frac{R_i(z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|} = 0 \text{ равномерно по } x \in [x_0,+\infty], i \in \{2,4\}.$$

Тогда, согласно теореме 2.8 из [4], и система (35) имеет хотя бы одно решение $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_1,+\infty[\to \mathrm{R}^2 (x_1 \geqslant x_0)$, стремящееся к нулю при $x \to +\omega$. Ему соответствует решение y уравнения (1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (6). В силу этих представлений и (1), y является $P_\omega(Y_0,Y_1,0)-$решением.

Заключение. В данной статье были полученны необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(Y_0,Y_1,0)-$решений для достачно широкого класса существенно нелинейных дифференциальных уравнений вида (1), а также асимптотические представления таких решений и их производных первого порядка.

1. **Seneta E.** Regularly Varying Functions. – Lecture notes in Mathematics 508. SpringerVerlag, Berlin Heidelberg New York. – 1976. – 113 p.
2. **Maric V.** Regular variation and differential equations. – Lecture notes in Mathematics 1726. SpringerVerlag, Berlin Heidelberg New York. – 2000. – 128 p.
3. **Белозерова М. А., Гержановская Г. А.** Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, в некотором смысле близкими к правильно меняющимся // Мат. Студії. – 2015. – Т.44, №2. – С. 204–214.
4. **Евтухов В. М., Самойленко А. М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. Мат. Ж. – 2010. – Т. 62, №1. – С. 52–80.

5. **Гержановська Г. А.** Властивості повільно змінних розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Буковинський математичний журнал. 2017. – Т. 5, № 3–4. – С. 39–46.

Гержановська Г. А.
Дослідження деяких класів особливих розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівняннь другого порядку

Резюме

Для істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями, що є у деякому сенсі близькими до правильно змінних, розглянуто достатньо широкий клас повільно змінних при прямуванні аргументу до особливої точки розв'язків. У роботі отримано необхідні та достатні умови існування розв'язків з введеного класу. Крім того, знайдено асимптотичні зображення при прямуванні аргументу до особливої точки для таких розв'язків та їх похідних першого порядку. Результати роботи можна застосувати як при дослідженні розв'язків при прямуванні аргументу до нескінченності, так і для сингулярних розв'язків.
Ключові слова: асимптотичні зображення розв'язків, повільно змінні розв'язки, правильно змінні нелінійності, $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$*-розв'язки .*

Gerzhanovskaya G. A.
Investigation of some classes of special solutions of essentially nonlinear second order differential equations

Summary

The sufficiently wide class of slowly varying solutions as the argument tends to the special point for essentially nonlinear second order differential equations is considered. The necessary and sufficient conditions of the existence of solutions of considered class are obtained. The asymptotic representations as the argument tends to a special point of such solutions and their first derivatives are found also. The results of the work can be used by the investigation of solutions on infinity and for singular solutions.
Key words: asymptotic representations of solutions, slowly varying solutions, regularly varying nonlinearities, $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$*-solutions.*

References

1. Seneta, E. (1976). Regularly Varying Functions. *Lecture notes in Mathematics*, 508. SpringerVerlag, Berlin Heidelberg New York, 113 p.
2. Maric, V. (2000). Regular variation and differential equations. *Lecture notes in Mathematics*, 1726. SpringerVerlag, Berlin Heidelberg New York, 128 p.
3. Belozerova, M. O., Gerzhanovskaya, G. A. (2015). Asimptoticheskie predstavlenija reshenij differencial'nyh uravnenij vtorogo porjadka s nelinejnostjami, v nekotorom smysle blizkimi k pravil'no menjajushhimsja [Asymptotic representations of solutions of second order differential equations with nonlinearities close to regularly varying]. *Mat. Stud.*, vol. 44, no. 2., pp. 204–214.
4. Evtukhov, V. M., Samoilenko, A. M.(2010). Uslovija sushhestvovanija ischezajushhih v osoboj tochke reshenij u veshhestvennyh neavtonomnyh sistem kvazilinejnyh differencial'nyh uravnenij [Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point]. *Ukr. Mat. Zh*, vol. 62, no. 1, pp. 52–80.

5. Gerzhanovskaya, G. A. (2017). Vlastivosti povil'no zminnih rozv'jazkiv istotno nelinijnih diferencial'nih rivnjan' drugogo porjadku [Properties of the slowly verying solutions of essentually nonlinear second order differential equations] *Bukovins'kij matematichnij zhurnal.* Vol 5, no. 3–4, pp. 39–46.