Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

# Дипломна робота

бакалавра

на тему: **«Вісесиметрична задача кручення двошарового циліндра»**

«Axisymmetric torsion problem of a a two-layer cylinder»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Мартинюк Георгій Олександрови

Керівник: к. ф.-м. н., доц. Процеров Ю. С.
Рецензент: к. ф.-м. н., доц. Фесенко Г. О.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від «_____» ________ р.
Завідувач кафедри
_____________ __________________

Захищено на засіданні ЕК № _______
Протокол № _____ від «_____» _____ р.
Оцінка ________ / ________ / ________
Голова ЕК
_____________ ______________________

Одеса — 2021 р.

# ЗМІСТ

# ВСТУП

Дипломна робота присвячена вісісемитрічної задачі кручення двошарового циліндру, за допомогою перетворення Фур'є її рішення зведено до одновимірної. Далі ми шукали рішення одновимірної задачі та отрімували формули для зміщення і напруги. Отримано точне рішення поставленої задачі. Наведено формули для обчислення зсуву і напруження. Проведено розрахунки представлені у вигляді графіка.

# РОЗДІЛ 1

# ОСНОВНА ЧАСТИНА

## 1.1. Постановка задачі

Циліндр складається з двох шарів різних матеріалів: перший:

$$0 \le r < R_1, 0 \le \varphi < 2\delta, 0 < z < H$$

має модуль зсуву $G_1$, а другий:

$$R_1 < r < R_2, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 < z < H$$

має модуль зсуву $G_2$.

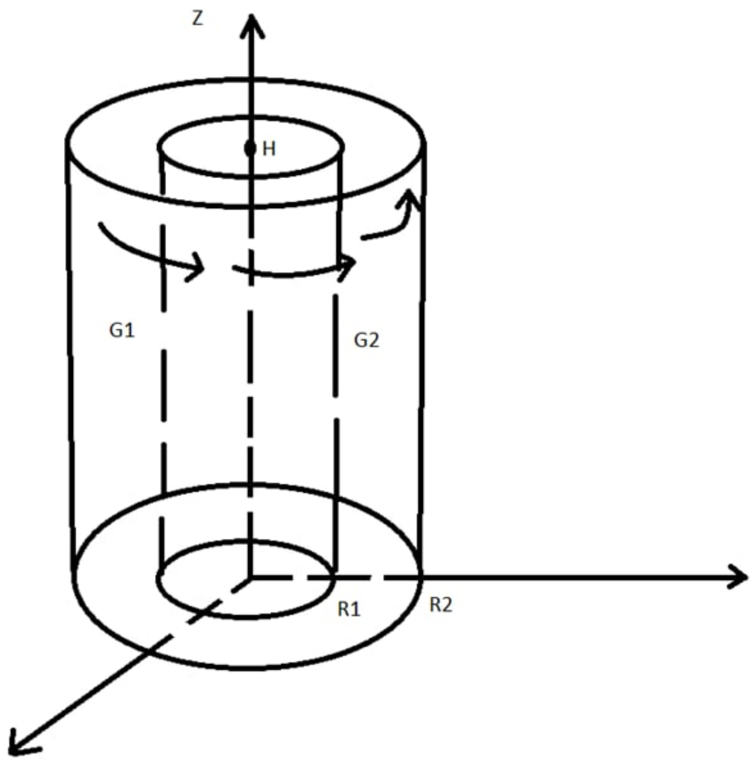


Рис. 1.1. Двошаровий циліндр.

Між шарами виконується умова ідеального механічного контакту, а саме безперервність зміщення і напруги при переході через поверхню поділу шарів. Нижня основа циліндра нерухомо закріплене, верхня основа вільна від напруг, а до бічної поверхні прикладена осесиметричне дотичне навантаження інтенсивністю $P(z)$.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial U_j}{\partial r}) - \frac{1}{r^2}U_j + \frac{\partial^2 U_j}{\partial z^2} = 0$$

$$0 < z < H,$$

$$j = 1 : 0 < r < R_1$$

$$j = 2 : R_1 < r < R_2$$

Крайові умови:

$$U_j \mid_{z=0} = 0$$

$$\tau^j_{z\varphi} \mid_{z=H} = G_j$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial z} \mid_{z=H} = 0, j = 1{,}2$$

$$\tau^2_{rz} \mid_{r=R_2} = G_2(\frac{\partial U_2}{\partial r} - \frac{1}{r}U_2) \mid_{r=R_2} = P(z)$$

Умвови сполучення шарів:

$$U_1(R_1, z) = U_2(R_1, z)$$

та

$$\tau^1_{r\varphi}(R_1, z) = \tau^2_{r\varphi}(R_1, z)$$

тобто

$$G_1(\frac{\partial U_1^R}{\partial r} - \frac{1}{r}U_1) \mid_{r=R_1} = G_2(\frac{\partial U_2}{\partial r} - \frac{1}{r}U_2) \mid_{r=R_1}$$

## 1.2. Зведення задачі до одновимірної за допомогою перетворення Фур'є

Застосюємо інтегральне перетворення Фур'є

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial U_j}{\partial r}) - \frac{1}{r^2}U_j + \frac{\partial^2 U_j}{\partial z^2} = 0$$

$$\int_0^H \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial U_j}{\partial r})sin\lambda_k zdz - \int_0^H \frac{1}{r^2}U_j sin\lambda_k zdz + \int_0^H \frac{\partial^2 U_j}{\partial z^2}\lambda_k zdz = 0$$

$$\lambda_k = \frac{\pi(2k-1)}{2H}$$

$$\int_0^H \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial U_j}{\partial r})sin\lambda_k zdz = \frac{1}{r}\frac{d}{dz}(r\frac{d}{dr}\int_0^H U_j sin\lambda_k zdz) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{d}{dr}U_{jk}(r))$$

$$\int_0^H \frac{1}{r^2}U_j sin\lambda_k zdz = \frac{1}{r^2}\int_0^H U_j sin\lambda_k zdz = \frac{1}{r^2}U_{jk}(r)$$

$$\int_0^H \frac{\partial^2 U_j}{\partial z^2}sin\lambda_k zdz = \begin{bmatrix} U = sin\lambda_k & du = \lambda_k cos\lambda_k zdz \\ dV = \frac{\partial^2 U_j}{\partial z^2}dz & V = \frac{\partial U_j}{\partial z} \end{bmatrix} =$$

$$= sin\lambda_k z \cdot \frac{\partial U_j}{\partial z} \mid_0^H - \lambda_k \int_0^H \frac{\partial U_j}{\partial z}cos\lambda_k zdz =$$

$$= \begin{bmatrix} U = cos\lambda_k z & du = -\lambda_k sin\lambda_k zdz \\ dV = \frac{\partial U_j}{\partial z}dz & V = U_j \end{bmatrix} = -\lambda_k(cos\lambda_k z \cdot U_j \mid_0^H + \lambda_k \int_0^H U_j sin\lambda_k zdz) =$$

$$= -\lambda_k^2 U_j^k(r)$$

Рівняння в трансформантах:

$$\frac{1}{r}(rU'_{jk}(r))' - \frac{1}{r^2}U^r_{jk} - \lambda_k^2 U_{jk}(r) = 0, j = 1{,}2 \qquad (1.1)$$

Застосовуємо інтегральне перетворення до крайових умов і умов сполучення шарів:

$$G_2(U'_{2k}(R_2) - \frac{1}{R_2}U_{2k}(R_2)) = P_k$$

$$P_k = \int_0^H P(z) sin \lambda_k z dz$$

$$U_{1k}(R_1) = U_{2k}(R_1)$$

$$G_1(U'_{1k}(R_1) - \frac{1}{R_1}U_{1k}(R_1)) = G_2(U'_{2k}(R_1) - \frac{1}{R_1}U_{2k}(R_1))$$

Рівняння (1.1) є рівняння Бесселя і його рішення:

$$U_{1k}(r) = A_k I_1(\lambda_k r), 0 \leq r < R_2$$

$$U_{2k}(r) = B_k I_1(\lambda_k r) + C_k K_1(\lambda_k r), R_1 < r < R_2$$

$I_1(x), K_1(x)$ - модифіковані функції Бесселя

При цьому враховано, що $U_{1k}(r)$ має бути обмежена при $r = 0$.

## 1.3. Розв'язання одновимірної задчі, знахождення констант $A_k$, $B_k$ та $C_k$

Для знаходження $A_k, B_k, C_k$, підставимо в умови сполучення та крайові умови:

$$A_k I_1(\lambda_k R_1) = B_k I_1(\lambda_k R_1) + C_k K_1(\lambda_k R_1)$$

$$G_1(R_k A_k \lambda_k I_1^{'}(\lambda_k R_2) - A_k I_1(\lambda_k R_1)) = G_2(R_1 B_k \lambda_k I_1^{'}(\lambda_k R_1) + R_1 C_k \lambda_k K_1^{'}(\lambda_k R_1) -$$

$$- B_k I_1(\lambda_k R_1) - C_k K_1(\lambda_k R_1))$$

$$R_2 \lambda_k B_k I_1^{'}(\lambda_k R_2) + R_2 \lambda_k C_k K_1^{'}(\lambda_k R_2) - B_k I_1(\lambda_k R_2) - C_k K_1(\lambda_k R_2) = \frac{R_2}{G_2} P_k$$

Скористаємося формулами:

$$x I_1^{'}(x) - I_1(x) = x I_2(x)$$

$$x K_1^{'}(x) = -x K_2(x)$$

$$B_k I_1(\lambda_k R_1) + C_k K_1(\lambda_k R_1) = A_k I_1(\lambda_k R_1)$$

$$G_1 A_k I_2(\lambda_k R_1) = G_2(B_k I_2(\lambda_k R_1) - C_k K_2(\lambda_k R_1))$$

$$B_k \lambda_k R_2 I_2(\lambda_k R_2) - C_k \lambda_k R_2 K_2(\lambda_k R_2) = \frac{R_2^{'}}{G_2} P_k$$

З перших двох рівнянь виразимо $B_k$ и $C_k$ через $A_k$:

$$\begin{cases} B_k I_1(\lambda_k R_1) + C_k K_1(\lambda_k R_1) = A_k I_1(\lambda_k R_2) \\ B_k I_2(\lambda_k R_1) + C_k K_2(\lambda_k R_1) = \frac{G_1}{G_2} A_k I_2(\lambda_k R_1) \end{cases}$$

$$det = \begin{vmatrix} I_1(\lambda_k R_1) & K_1(\lambda_k R_1) \\ I_2(\lambda_k R_1) & -K_2(\lambda_k R_1) \end{vmatrix} = [I_1(\lambda_k R_1) \cdot K_2(\lambda_k R_1) + I_2(\lambda_k R_1) K_1(\lambda_k R_1)]$$

Так як $I_1(x)K_2(x) + K_1(x)I_2(x) = \frac{1}{x}$

$$det = -\frac{1}{\lambda_k R_1}$$

$$B_k = -\lambda_k R_1 \begin{vmatrix} A_k I_1(\lambda_k R_1) & K_1(\lambda_k R_1) \\ \frac{G_1}{G_2} A_k I_2(\lambda_k R_1) & -K_2(\lambda_k R_1) \end{vmatrix} = (G^* = \frac{G_1}{G_2}) =$$

$$= -\lambda_k R_1(-A_k I_1(\lambda_k R_1) K_2(\lambda_k R_1) - G^* A_k I_2(\lambda_k R_1) K_1(\lambda_k R_1)) =$$

$$= \lambda_k R_1 A_k [I_1(\lambda_k R_1) K_2(\lambda_k R_1) + G^* I_2(\lambda_k R_1) K_1(\lambda_k R_1)]$$

$$C_k = -\lambda_k R_1 \begin{vmatrix} I_1(\lambda_k R_1) & A_k I_1(\lambda_k R_1) \\ I_2(\lambda_k R_1) & G^* A_k I_2(\lambda_k R_1) \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda_k R_1 A_k [G^* I_1(\lambda_k R_1) I_2(\lambda_k R_1) - I_1(\lambda_k R_1) I_2(\lambda_k R_1)] =$$

$$= -\lambda_k R_1 (G^* - 1) I_1(\lambda_k R_1) I_2(\lambda_k R_1) A_k$$

Підставим в 3 рівняння системи крайові умови

$$\lambda_k I_2(\lambda_k R_2) \cdot \lambda_k R_1 A_k [I_1(\lambda_k R_1) K_2(\lambda_k R_1) + G^* I_2(\lambda_k R_1) K_1(\lambda_k R_1)] + \lambda_k K_2(\lambda_k R_2) \cdot$$

$$\cdot \lambda_k R_1 (G^* - 1) A_k I_1(\lambda_k R_1) I_2(\lambda_k R_1) = \frac{P_k}{G_2}$$

$$R_1 \lambda_k^2 A_k [I_2(\lambda_k R_2)(I_1(\lambda_k R_1) K_2(\lambda_k R_1) + G^* I_2(\lambda_k R_1) K_1(\lambda_k R_2)) + K_2(\lambda_k R_2) \cdot$$

$$\cdot (G^* - 1) I_1(\lambda_k R_1) I_2(\lambda_k R_1)] = \frac{P_k}{G_2}$$

Позначимо:

$$\triangle_k = I_2(\lambda_k R_2) ... + (G^* - 1) K_2(\lambda_k R_2) I_1(\lambda_k R_1) I_2(\lambda_k R_1)$$

$$A_k = \frac{P_k}{R_1 G_2 \lambda_k^2 \triangle_k}$$

Знайдемо $B_k$ та $C_k$

$$B_k = \frac{P_k}{G_2 \lambda_k \triangle_k} [I_1(\lambda_k R_1) + G^* I_2(\lambda_k R_1) K_1(\lambda_k R_1)]$$

$$C_k = -(G^* - 1) \frac{P_k}{\lambda_k G_2 \triangle_k} I_1(\lambda_k R_1) I_2(\lambda_k R_1)$$

# 1.4. Знаходження переміщень

Запишемо вирази для трансформант переміщення $U_{1k}(r)$ та $U_{2k}(r)$.

$$U_{1k}(r) = \frac{P_k}{R_1 G_2 \lambda_k^2 \triangle_k} I_1(\lambda_k r), 0 \leq r \leq R_1$$

$$U_{2k}(r) = \frac{P_k}{G_2 \lambda_k \triangle_k} [I_1(\lambda_l R_1) K_2(\lambda_l R_1) + G^* I_2(\lambda_l R_1) K_1(\lambda_l R_1)] I_1(\lambda_k r) - (G_1^* - 1) \cdot$$

$$\cdot \frac{P_k}{G_2 \lambda_k \triangle_k} I_1(\lambda_k R_1) I_2(\lambda_k R_1) K_1(\lambda_k r), R_1 \leq r \leq R_2$$

## 1.5. Знаходження напружень

Застосуємо формули обернення для інтегрального перетворення Фур'є Зміщення:

$$U_1(r,z) = \frac{2}{H}\sum_{k=1}^{+\infty} U_{1k}(r) sin\lambda_k Z$$

$$U_2(r,z) = \frac{2}{H}\sum_{k=1}^{+\infty} U_{2k}(r) sin\lambda_k Z$$

Напруження (в внутрішньому шарі):

$$\tau_{r\varphi}(r,z) = G(\frac{\partial U_k}{\partial r} - \frac{1}{r}U_k)$$

$$\tau^1_{r\varphi}(r,z) = \frac{2G^*}{R_1 H}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{P_k}{\lambda_k\triangle_k} I_2(\lambda_k r) sin\lambda_k z$$

$$\tau^{(2)}_{r\varphi} = \frac{2}{H}\sum_{k=1}^{+\infty}[\frac{P_k}{\triangle_k}(I_1(\lambda_k R_1)K_2(\lambda_k R_1) + G^* I_2(\lambda_k R_1)K_1(\lambda_k R_1))\cdot$$

$$\cdot I_2(\lambda_k r) + (G^* - 1)\frac{P_k}{\lambda_k\triangle_k} I_1(\lambda_k R_1)K_2(\lambda_k r)] sin\lambda_k z$$

# РОЗДІЛ 2

# РОЗРАХУНКИ

Візьмемо конкретний вид зовнішнього навантаження

$$P(z) = \begin{cases} P_k, & 0.8H < z < H \\ 0, & 0 < z < 0.8H \end{cases}$$

Йогр трансформанта

$$P_k = \int_0^H P(z) sin\lambda_k(z)dz = P_k \int_{0.8H}^H sin\lambda_k z dz = P_k(-\frac{1}{\lambda_k} cos\lambda_k z) \mid_{0.8H}^H =$$

$$= -\frac{P^*}{\lambda_k}(cos\lambda_k H - cos\lambda_k 0.8H) = \frac{P^*}{\lambda_k} cos 0.4\pi(2k-1)$$

Тоді

$$\tau^1_{r\varphi}(r,z) = \frac{2G^*}{R_1 H} \cdot P^* \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{I_2(\lambda_k r)}{\lambda_k^2 \Delta_k} sin\lambda_k z \cdot cos 0.4(2k-1)\pi$$

## 2.1. Графіки напруження

Результат напруження для $G_1 = G_2$

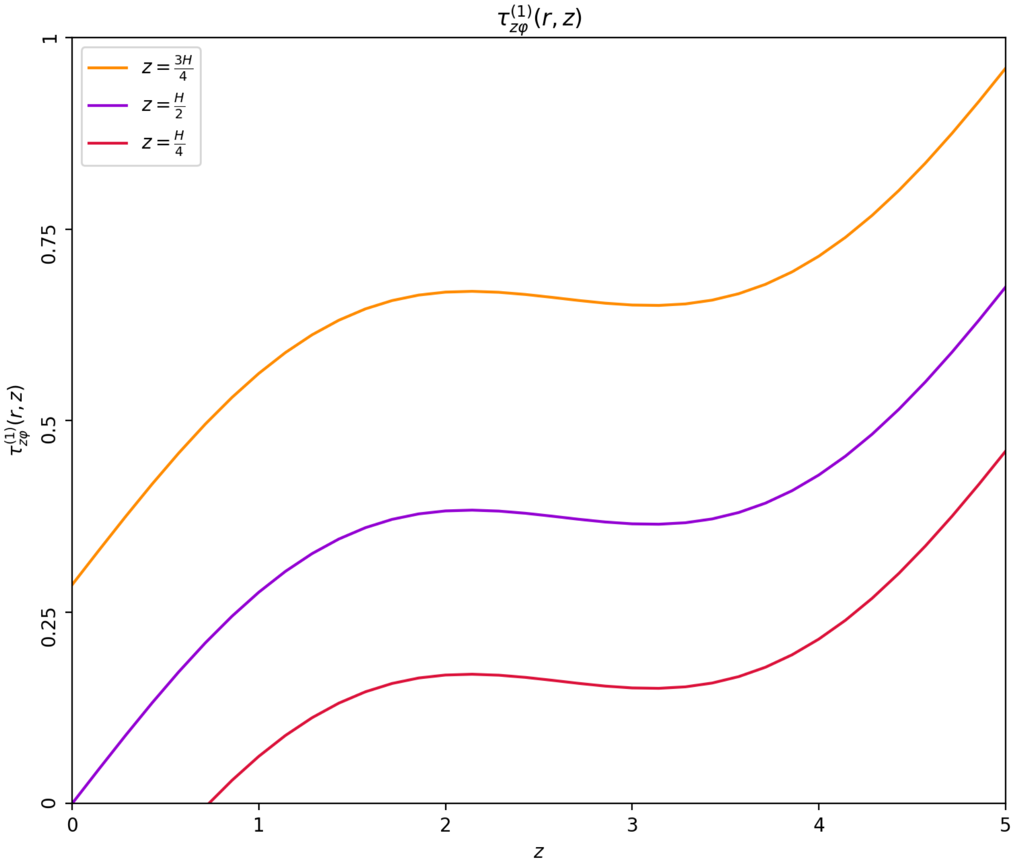


Рис. 2.1. Графік напруження.

Результат напруження для $G_1 = 2 \cdot G_2$ :

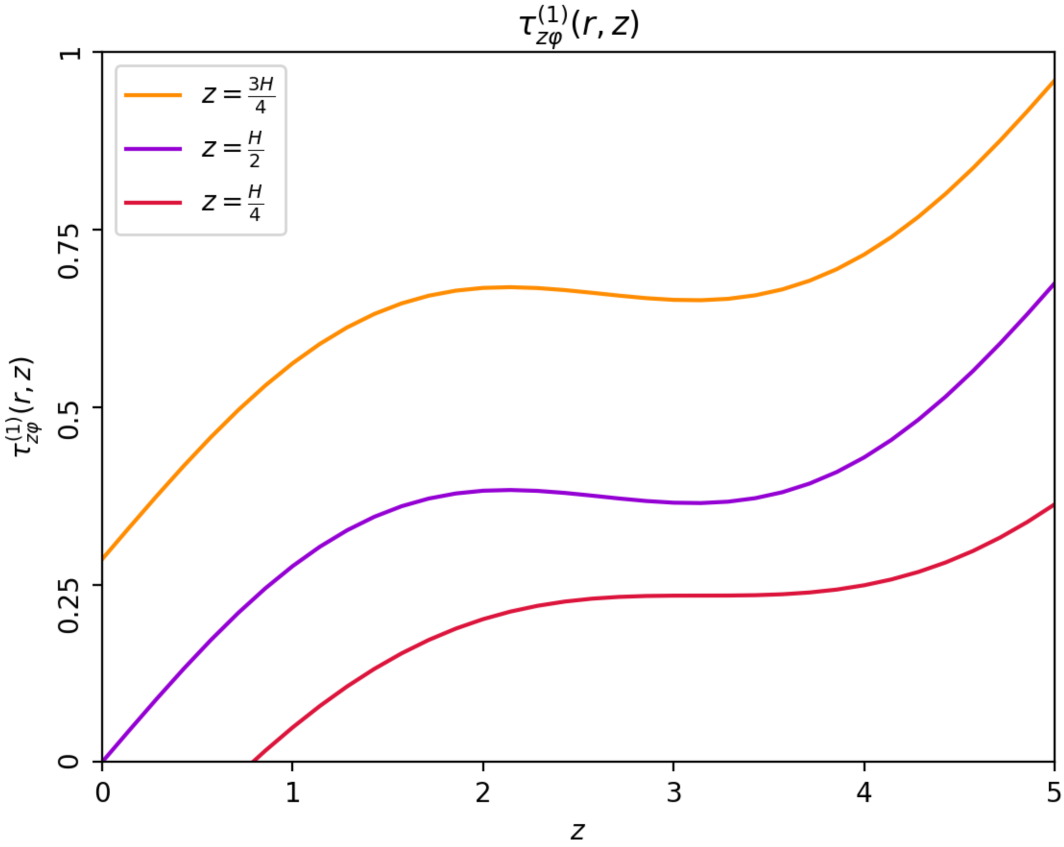


Рис. 2.2. Графік напруження.

Результат напруження для $G_1 = \frac{G_2}{2}$

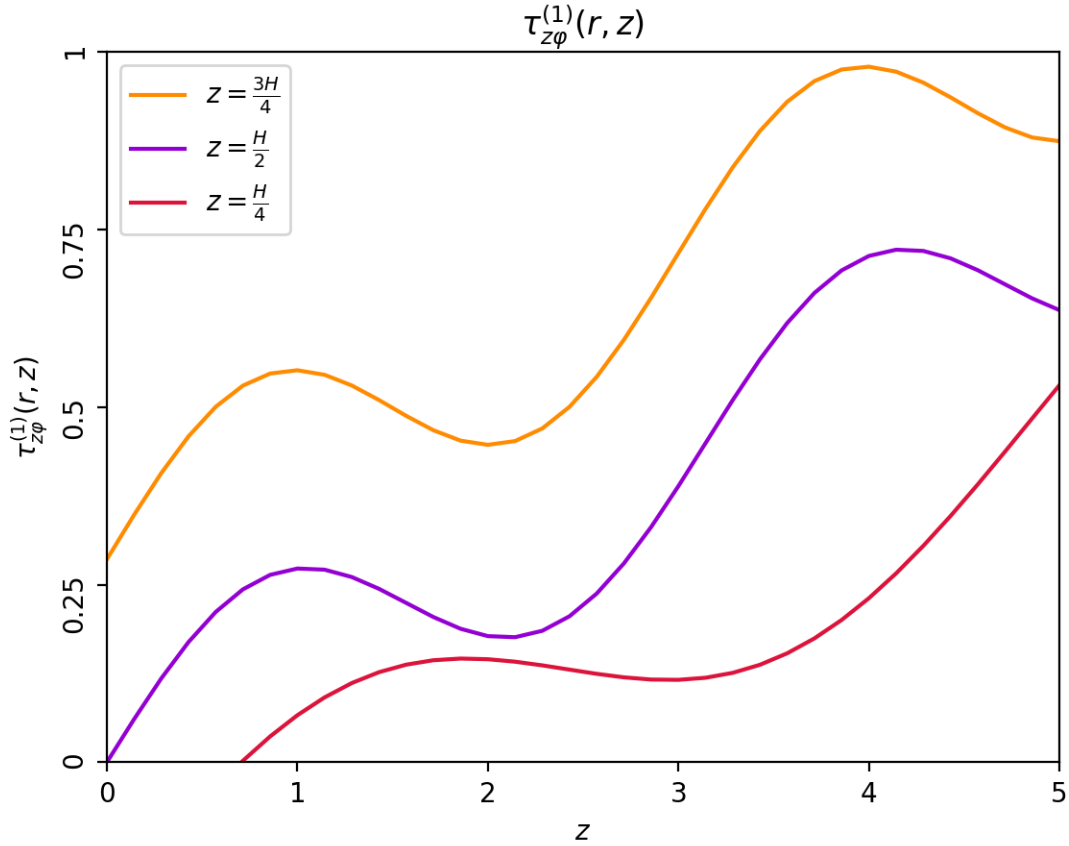


Рис. 2.3. Графік напруження.

# ВИСНОВКИ

За допомогою перетворення Фур'є задачу було зведено до одновимірної. Знайдені константи. Отримано точне рішення поставленої задачі. Наведено формули для обчислення зсуву і напруження .

# СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. Краснов А. М. "Рівняння математичної фізики"/ Краснов А. М., Процеров Ю.С., Реут В. В. — М.:Наука, 1997. — 14-15.
2. Попов Г. Я. "Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень"/Попов Г. Я., Реут В.В., Вайсфельд Н. Д. — М.: Наука, 1999. — 26-27.
3. Беитмен Г. Висші трансцендентні функції. Т. 2 / Беитмен Г., Ердеиі А. -М.: Наука, 1974. - 296 с.
4. Прудніков А. П. Інтеграли та ряди. Т. 2. Спеціальні функції/ Прудніков А. П., Бричков Ю. А., Марічев О. І. — М.: Наука, 1983. — 752 с.