

УДК 517.95

С. В. Орлов

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ОБЛАСТЯХ
С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ И ТОЧКАМИ СМЕНЫ ГРАНИЧНЫХ
УСЛОВИЙ**

Орлов С. В. Поведінка рішення крайової задачі для бігармонічних операторів в областях з кутковими точками і точками зміни межових умов. Вивчена поведінка розв'язків основних крайових задач для бігармонічного рівняння в областях з кутковими точками та точками зміни граничних умов. Побудовані асимптотичні розклади розв'язків окіл цих точок.

Ключові слова: крайова задача, бігармонічний оператор, межові умови, асимптотика рішення.

Орлов С. В. Поведение решений краевых задач для бигармонических операторов в областях с угловыми точками и точками смены граничных условий. Изучено поведение решений основных краевых задач для бигармонического уравнения в областях с угловыми точками и точками смены граничных условий. Построены асимптотические разложения решений в окрестности этих точек.

Ключевые слова: краевая задача, бигармонический оператор, граничные условия, асимптотика решения.

Orlov S. V. Behavior solutions boundary problems for biharmonic operators in region with corner pointers and pointers change boundary conditions. Behavior of solutions of main boundary problems for biharmonic equation in domains with corner points and points of boundary conditions change is investigated. Asymptotic decompositions of solutions in environment of these points are built.

Key words: boundary problem, biharmonic operator, boundary conditions, asymptotic solutions.

ВВЕДЕНИЕ. Поведение решений эллиптических краевых задач в негладких областях изучается в [1, 2]. Достаточно общий подход к этой проблеме изложен в [3]. Однако ряд краевых задач с особенностями, например для краевой задачи с бигармоническим оператором, не рассмотрены. Кроме того, непосредственное использование на практике полученных в вышеприведенных работах результатов затруднено. Для этого, как минимум, необходимо в явном виде найти асимптотику решения для каждой из краевых задач.

В данной работе исследуется поведение решений краевых задач для бигармонического оператора с угловыми точками и точками смены граничных условий. Рассматривается достаточно широкий спектр особенностей краевых задач. Найдена в явном виде асимптотика решений для всех этих задач [5]. На основании общих теорем [1, 2, 4] и асимптотик решений в данной работе получены точные оценки решений достаточно широкого спектра краевых задач для бигармонических уравнений. Полученные в работе точные априорные оценки поведения решений краевых задач вблизи особенностей можно использовать, например, для

построения оптимальной сетки разбиения области при поиске решения задачи. При таком разбиении мы можем гарантировать минимальный размер дискретной системы для получения решения с фиксированной точностью. Краевые задачи для бигармонического уравнения используются в задачах теории упругости. Минимизация размеров дискретной системы даст возможность уменьшить количество операций, необходимых для поиска решений. Например, при поиске напряженно-деформированного состояния некоторой оболочки с гарантированной точностью.

Будем исследовать поведение решения краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta^{(2)}u(x) = f(x), x \in \Omega \subset R^2, \\ Bu(x) = g(x), x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Оператор $Bu(x)$ определяет граничные условия краевой задачи, Ω — односвязная или многосвязная ограниченная область плоскости с границей $\partial\Omega$, состоящей из непересекающихся частей $\partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_n$. Каждая из частей бесконечно дифференцируема всюду, кроме конечного числа угловых точек Q_1, \dots, Q_n .

При этом $\Omega = \bigcup_{i=1}^n K_i$, где K_i — с границами $\partial\Omega_i$.

В случае гладкой границы гладкость решения зависит только от правой части. Наличие угловых точек и точек смены краевых условий существенно влияет на гладкость решения. Будем в дальнейшем считать правую часть достаточно гладкой, абстрагируясь от ее поведения. В этом случае гладкость решения в каждой из подобластей $\partial\Omega_i$ будет зависеть только от особенности непосредственно в угловой точке или точке смены граничных условий Q_i . Известна следующая теорема об асимптотике решения краевых задачи типа (1) вблизи особых точек.

Теорема 1. Об асимптотике решения краевых задач в ограниченных областях для $\overset{\circ}{H}_{\beta}^k(K_i)$ [1, 2]. Рассмотрим краевую задачу (1) в области K_i . Пусть

$$\begin{aligned} u(x) &\in \overset{\circ}{H}_{\beta}^{k+4}(K_i), \quad f(x) \in \overset{\circ}{H}_{\beta_1}^{k_1}(K_i), \\ g(x) &\in \overset{\circ}{H}_{\beta_1}^{k_1+4-\vec{m}-\frac{1}{2}}(\partial Q_i), \end{aligned}$$

где $k_1 \geq k$, $-\beta_1 + 2k_1 > -\beta + 2k$, $\vec{m} = (m_1, m_2)$ — вектор, определяющий порядок операторов для каждого из граничных условий, и на прямой $h_1 = \frac{1}{2}(2k_1 - \beta_1 + 8 - 2)$ нет полюсов функции $R(\lambda, \omega)$. Тогда решение задачи (1) вблизи особой точки Q_i имеет вид

$$u(x) = \sum_{h < \Im m(\lambda_{\mu}) < h_1} \sum_{\sigma=1}^{J_{\mu}} \sum_{s=0}^{\varkappa_{\mu}-1} c_{\mu\sigma s} r^{-i\lambda_{\mu}} (\ln r)^s P_{\mu\sigma s q}(r \ln^q r) + u_1(x), \quad (2)$$

где $h = \frac{1}{2}(2k - \beta + 6)$, λ_{μ} — полюса $R(\lambda, \omega)$ кратности $\varkappa_{\sigma\mu}$, J_{μ} — размерность пространства собственных функций краевой задачи, $R(\lambda, \omega)$ — характеристическая функция краевой задачи, σ — номер собственной функции из ядра задачи, $\varkappa_{\sigma\mu}$ — кратность полюса λ_{μ} для собственных функций $\varphi_{\mu}^{(0,\sigma)}(\omega)$, $c_{\mu\sigma s}$ — константа, зависящая от правых частей краевой задачи и от ее жордановых

канонических цепочек, $P_{\mu\sigma sq}(r \ln^q r)$ — полином степени $[h_1 - \Im t(\lambda_\mu)]$ с коэффициентами $\varphi_\mu^{(s,\sigma)}(\omega)$, $\varphi_\mu^{(s,\sigma)}(\omega)$ — бесконечное число раз дифференцируемые функции из жордановой канонической цепочки краевой задачи, r — расстояние до особой точки, $u_1(x) \in H_{\beta_1}^{k_1+4}(K_i)$.

Нам понадобятся следующие теоремы из [2].

Теорема 2. Функция $v(r, \omega) = a(r, \omega)r^\lambda(\ln r)^p f(\omega) \in H_\beta^k(K)$, если

- 1) $a(r, \omega), f(\omega)$ — бесконечно дифференцируемые функции,
- 2) $2 + 2\operatorname{Re}(\lambda) + \beta - 2k > 0$.

Теорема 3. Функция $g(r, \omega) = a(r, \omega)r^\lambda(\ln r)^p f(\omega) \in H_\beta^{k-\frac{1}{2}}(\partial K)$, если

- 1) $f(\omega)$ — бесконечно дифференцируемая функция,
- 2) $a(r, \omega)$ — такая, что $|r^s D^s a(r, \omega)| \leq N < +\infty, s = \overline{0, k}$,
- 3) $2 + 2\operatorname{Re}(\lambda) + \beta - 2k > 0$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать следующие граничные условия для краевых задач с бигармоническим оператором(1):

$$B^{(1)}u(x) = \begin{cases} u(x) \Big|_{\partial Q_+} & \frac{\partial Q_-}{\partial Q_+} \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} \Big|_{\partial Q_+} & \frac{\partial Q_-}{\partial Q_+} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$B^{(2)}u(x) = \begin{cases} u(x) \Big|_{\partial Q} \\ M_n(x) \Big|_{\partial Q} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$B^{(3)}u(x) = \begin{cases} \frac{\partial u(x)}{\partial n} \Big|_{\partial Q} \\ V_n(x) \Big|_{\partial Q} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$B^{(4)}u(x) = \begin{cases} M_n(x) \Big|_{\partial Q} \\ V_n(x) \Big|_{\partial Q} \end{cases}, \quad H(Q_i) = 0 \quad (3.4)$$

$$B^{(12)}u(x) = \begin{cases} M_n(x) \Big|_{\partial Q_+} \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} \Big|_{\partial Q_+} \\ u(x) \Big|_{\partial Q_-} \\ M_n(x) \Big|_{\partial Q_-} \end{cases} \quad (3.5)$$

$$B^{(13)}u(x) = \begin{cases} M_n(x) \Big|_{\partial Q_+} \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} \Big|_{\partial Q_+} \\ u(x) \Big|_{\partial Q_-} \\ V_n(x) \Big|_{\partial Q_-} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$B^{(14)}u(x) = \begin{cases} M_n(x) \Big|_{\partial Q_+} \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} \Big|_{\partial Q_+} \\ M_n(x) \Big|_{\partial Q_-} \\ V_n(x) \Big|_{\partial Q_-} \end{cases}, \quad H(Q_i) = 0 \quad (3.7)$$

$$B^{(23)}u(x) = \begin{cases} u(x) & | \partial Q_+ \\ M_n(x) & | \partial Q_+ \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} & | \partial Q_- \\ V_n(x) & | \partial Q_- \end{cases} \quad (3.8)$$

$$B^{(24)}u(x) = \begin{cases} u(x) & | \partial Q_+ \\ M_n(x) & | \partial Q_+ \\ M_n(x) & | \partial Q_- \\ V_n(x) & | \partial Q_- \end{cases}, H(Q_i) = 0 \quad (3.9)$$

$$B^{(34)}u(x) = \begin{cases} \frac{\partial u(x)}{\partial n} & | \partial Q_+ \\ V_n(x) & | \partial Q_+ \\ M_n(x) & | \partial Q_- \\ V_n(x) & | \partial Q_- \end{cases}, H(Q_i) = 0 \quad (3.10)$$

$M_n(x) = \nu \Delta u(x) + (1-\nu) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial n^2}$ нормальный момент к границе, $V_n(x) = \frac{\partial}{\partial n}(\Delta u(x)) + (1-\nu) \frac{\partial^3 u(x)}{\partial s^2 \partial n}$ — перерезывающая сила, $H(Q_i) = (1-\nu) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial n \partial s} \Big|_{S_+}^{S_-}$ — сосредоточенная сила в угловой точке Q_i , \vec{n} — внешняя нормаль к ∂Q , \vec{s} — касательная к ∂Q , S_+ , S_- — касательные вдоль границы ∂Q_+ , ∂Q_- в точке Q_i .

Граничные условия $B^{(3)}$, $B^{(4)}$, $B^{(34)}$ не являются нормальными, но совместны с бигармоническим оператором.

Для доопределения $B^{(3)}$, $B^{(34)}$ достаточно добавить условие $u(Q_i) = 0$. Для

доопределения $B^{(4)}$ добавим условие: $\begin{cases} u(Q_i) = 0 \\ u(C) = 0 \\ u(D) = 0 \end{cases}$, C — точка на границе ∂Q_+ , D — точка на границе ∂Q_- .

Будем рассматривать краевую задачу для области K_i . Все данные задачи являются совместными, нормальными и удовлетворяют условиям Шапиро–Лопатинского, см. [1].

2. Асимптотика решения краевых задач в ограниченных областях для пространства $H_\beta^k(K_i)$. Большая часть граничных условий не позволяет говорить о том, что $u(x) \in \overset{\circ}{H}_\beta^{k+4}(K_i)$. Поэтому для этих краевых задач необходимо распространить результаты теоремы на пространства $H_\beta^{k+4}(K_i)$. В дальнейшем нам будет удобнее рассматривать задачу (1) в полярных координатах.

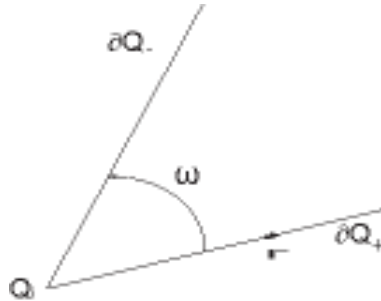


Рис. 1. Область K_i

Лемма 1. [5] Если $u(x) \in H_{\beta}^k(K_i)$, $k \geq \frac{n}{2}$, n -мерное пространство (четное число) и

$$\int_l |u(\xi)|^2 r^{\beta-2k+n-1+2\xi} dr < +\infty, \xi = 0, k - \frac{n}{2}, \quad (4)$$

где l — луч, проходящий через начало координат, то $u(x) \in \overset{\circ}{H}_{\beta}^k(K_i)$.

Доказательство в [5] в лемме 2.

Теорема 4. Об асимптотике решения краевых задач в ограниченных областях для $H_{\beta}^k(K_i)$ [5]. Пусть $n = 2$ и

$$f(x) \in H_{\beta_1}^{k_1}(K_i), g(x) \in H_{\beta_1}^{k_1+4-\vec{m}-\frac{1}{2}}(\partial Q_i),$$

$u(x) \in H_{\beta}^{k+4}(K_i)$, где $k < k_1$, $-\beta_1 + 2k_1 > -\beta + 2k$, $\vec{m} = (m_1, m_2)$ — вектор, определяющий порядок операторов для каждого из граничных условий, и на прямой $\Im m(\lambda) = h_1 = \frac{1}{2}(2k_1 - \beta_1 + 8 - n)$ нет полюсов функции $R(\lambda, \omega)$. Тогда решение задачи (1) вблизи особой точки Q_i имеет вид

$$\begin{aligned} u(r, \omega) = & \sum_{h < \Im m(\lambda_{\mu}) < h_1} \sum_{\sigma=1}^{J_{\mu}} \sum_{s=0}^{\varkappa_{\mu}-1} c_{\mu\sigma s} r^{-i\lambda_{\mu}} (\ln r)^s P_{\mu\sigma s q}(r \ln^q r) + \\ & + \sum_{h < j < h_1} \sum_{s=0}^{\varkappa_{\mu}-1} c_{j s} r^j (\ln^s r) g_{j s}(\omega) + u_1(r, \omega), \end{aligned} \quad (5)$$

где $h = \frac{1}{2}(2k - \beta + 8 - n)$, $u_1(r, \omega) \in H_{\beta_1}^{k_1+4}(K_i)$, $g_{j s}(\omega) \in C^{\infty}(K_i)$, $c_{j s}$ — константа, $j \in Z$. Остальные обозначения идентичны тем, что есть в теореме 1.

Доказательство. Для случая $\beta = 0, \beta_1 = 0$ есть теорема 4.4 из [2]. В ней рассматривается четное n , $f(x) \in H^{k_1}(K_i)$ и $g(x) \in H^{k_1+4-\vec{m}-\frac{1}{2}}(\partial Q_i)$. Из леммы 6 [5] ясно, что существует функция $v \in H_{\beta}^{k_1}(K_i)$, такая, что для $u = u_1 + v$ выполняется

$$\begin{cases} \Delta^2 u_1 = f - \Delta^2 v \in \overset{\circ}{H}_{\beta}^k(K_i), \\ B^{\vec{m}} u_1 = g - B^{\vec{m}} v \in \overset{\circ}{H}_{\beta}^{k+4-\vec{m}-\frac{1}{2}}(\partial K_i). \end{cases}$$

Из леммы 4.11 [2] ясно, что существует $u_0 \in \overset{\circ}{H}_{\beta}^k(K_i)$ и многочлен M степени $k + 4 - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$, такие, что $u = u_0 + M$, где $u \in H_{\beta}^k(K_i)$. Тогда

$$\begin{cases} \Delta^2 u_0 = f - \Delta^2 M, \\ B^{\vec{m}} u_0 = g - B^{\vec{m}} M. \end{cases}$$

Из леммы 3.10 [2] известно, что для краевой задачи с вышеприведенной правой частью найдется решение z в виде

$$z = \sum_{j=0}^{h_1+k_1-\frac{n}{2}-1-\frac{\beta}{2}} \sum_{s=0}^{\varkappa_{\mu}-1} c_{j s} r^j (\ln^s r) g_{j s}(\omega).$$

Нас интересует случай $z = \sum_{j=h}^{h_1} \sum_{s=0}^{\varkappa_\mu-1} c_{js} r^j (\ln^s r) g_{js}(\omega)$, так как для $j > h_1$ члены суммы будут входить в остаточный член, принадлежащий $\overset{\circ}{H}_\beta^{k+4}(K_i)$. Априорно известно, что $u \in \overset{\circ}{H}_\beta^{k+4}(K_i)$, а члены с $j < h$ не входят в этот класс. Из леммы 6 [5] следует существование такой функции v , что

$$\begin{cases} f - \Delta^2 v = f_1 \in \overset{\circ}{H}_\beta^k(K_i) \\ g - B^{\overline{m}} v = g_1 \in \overset{\circ}{H}_{\beta_1}^{k_1+4-\overline{m}-\frac{1}{2}}(\partial K_i) \end{cases} \quad v \in \overset{\circ}{H}_\beta^{k+4}(K_i), \beta < \beta_1.$$

Рассмотрим функцию $u_2 = u_0 - v - z \in \overset{\circ}{H}_{\beta_1}^k(K_i)$:

$$\begin{cases} \Delta^2 u_2 = f_2 \in \overset{\circ}{H}_\beta^k(K_i), \\ B^{\overline{m}} u_2 = g_2 \in \overset{\circ}{H}_{\beta_1}^{k_1+4-\overline{m}-\frac{1}{2}}(\partial K_i). \end{cases}$$

На основании теоремы 3.3 [2] получаем:

$$u_2(r, \omega) = \sum_{h < \Im m(\lambda_\mu) < h_1} \sum_{\sigma=1}^{J_\mu} \sum_{s=0}^{\varkappa_\mu-1} c_{\mu\sigma s} r^{-i\lambda_\mu} (\ln r)^s P_{\mu\sigma s q}(r \ln^q r) + u_1(r, \omega).$$

Отсюда получаем (5). Теорема доказана.

Случай области с конечным числом особых точек сводится к отысканию в каждой такой точке $Q_i, i = \overline{1, N}$ своего асимптотического разложения решения краевой задачи. Такое расчленение можно произвести путем введения для каждой окрестности Q_i отрезающую функцию, что и было сделано в [6, 5]. Это дает возможность во всех наших дальнейших исследованиях рассматривать нахождение асимптотического разложения решения краевой задачи только для одной конкретной точки. Из теорем Лакса–Мильграма и теорем 1 и 4 ясно, что краевые задачи (1) имеют смысл для

$$\overset{\circ}{H}_\beta^{k+4}(K_i) \subset H_\beta^{k+4}(K_i) \subset H^l(K_i), \text{ если } k + 4 - \frac{\beta}{2} \geq 2.$$

Значит, $h = k - \frac{\beta}{2} + 4 - \frac{n}{2} \geq 2 - \frac{n}{2}$. У нас $n = 2$, поэтому $h \geq 1$. В дальнейшем $\Im m(\lambda_\mu) \leq 1$ нами рассматриваться не будут.

Члены асимптотики (2), (5) имеют вид, идентичный функциям из теорем 2, 3. Класс этих функций, то есть их принадлежность к определенному пространству, зависит от минимального значения $\Im m(\lambda_\mu)$. Из теорем 2, 3 следует, что $k - \frac{\beta}{2} < \Im m(\lambda_\mu) + 1$ для всех λ_μ . Отсюда следует, что общий класс $H_\beta^k(K_i)$ решения можно найти из неравенства

$$k - \frac{\beta}{2} < \min_{h < \Im m(\lambda_\mu) < h_1} \Im m(\lambda_\mu) + 1.$$

Замечание 1. Зная минимальное значение мнимой части полюса λ_μ , можно априорно определить класс решения конкретной краевой задачи (1).

3. Асимптотика решения краевых задач в явном виде. Найдем в явном виде асимптотику решения для каждой из вышеприведенных краевых задач. Имеются в виду основные члены асимптотики (5). То есть в полиноме $P_{\mu\sigma sq}(rln^q r)$ мы найдем коэффициенты $\varphi_\mu^{(s,\sigma)}(\omega)$ и его минимальную степень λ_μ . Именно они существенно влияют на поведение решения задачи и ее класс.

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(1)}$ (3.1)

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(0,1)}(\omega) &= C_1(1 - \cos 2\omega), \text{ где } \omega = \pi, 2\pi, \lambda = 2i, \\ \varphi_2^{(0,1)}(\omega) &= C_2(S_0 - 2C_0\omega + C_0 \sin 2\omega - S_0 \cos 2\omega), \end{aligned}$$

где $\lambda = 2i$, ω — является решением уравнения $\omega = \tan \omega$.

$$\begin{cases} \varphi_3^{(0,1)}(\omega) = C_3(-b(C_b - C_a) \sin i\lambda\omega - (aS_b - BS_a) \cos i\lambda\omega + \\ + a(C_b - C_a) \sin[(i\lambda + 2)\omega] + (aS_b - bS_a) \cos[(i\lambda + 2)\omega]), \\ \varphi_3^{(1,1)}(\omega) = i\omega C_3(-b(C_b - C_a) \cos i\lambda\omega + (aS_b - bS_a) \sin i\lambda\omega + \\ + a(C_b - C_a) \cos[(i\lambda + 2)\omega] - (aS_b - bS_a) \sin[(i\lambda + 2)\omega]), \end{cases}$$

для

$$\begin{cases} \omega \neq \pi, 2\pi \text{ или} \\ \omega = \pi, i\lambda \neq n, n \in Z, \\ \omega = 2\pi, i\lambda \neq \frac{1}{2} + n, n \in Z, \end{cases}$$

$$\varphi_4^{(0,1)}(\omega) = C_4((-b \sin i\lambda\omega + a \sin[(i\lambda + 2)\omega]) + C_5(-\cos i\lambda\omega + \cos[(i\lambda + 2)\omega]),$$

где

$$\omega = \begin{cases} \pi & | i\lambda = n \\ 2\pi & | i\lambda = \frac{1}{2} + n, n \in Z. \end{cases}$$

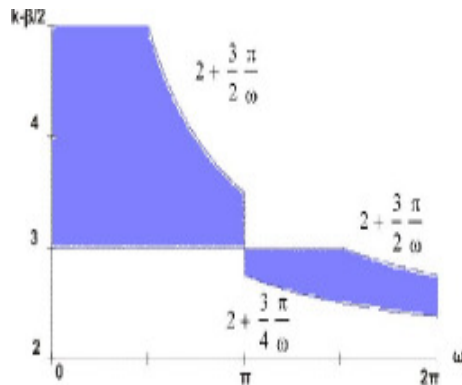


Рис. 2. Зависимость класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(1)}$

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(2)}$ (3.2)

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(0,1)}(\omega) &= C_1 \sin 2\omega, \text{ где } \omega = \frac{\pi}{2}k, k = \overline{1,4}, \lambda = 2i, \\ \varphi_2^{(0,1)}(\omega) &= C_2 \sin i\lambda\omega, \text{ где } \lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 = -in\frac{\pi}{\omega}, n \in Z, \\ \varphi_3^{(0,1)}(\omega) &= C_3 \sin[(i\lambda + 2)\omega], \text{ где } \lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1, \lambda_2 = -in\frac{\pi}{\omega} + 2i, n \in Z. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \varphi_4^{(0,1)}(\omega) = C_4 \sin i\lambda\omega, \\ \varphi_4^{(1,1)}(\omega) = i\omega C_4 \cos i\lambda\omega, \\ \varphi_4^{(0,2)}(\omega) = C_4 \sin[(i\lambda + 2)\omega], \\ \varphi_4^{(1,2)}(\omega) = i\omega C_4 \cos[(i\lambda + 2)\omega], \lambda = \lambda_1 = \lambda_2. \end{cases}$$

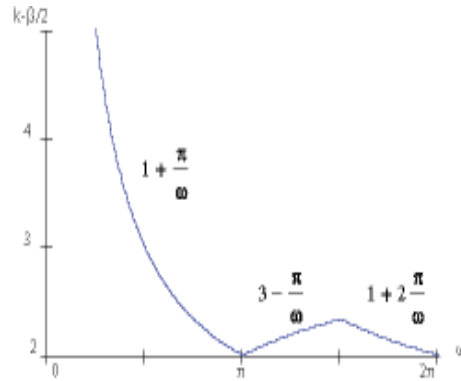


Рис. 3. Зависимость класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(2)}$

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(3)}$ (3.3)

$$\begin{cases} \varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1, \\ \varphi_1^{(1,1)}(\omega) = C_1 \cos 2\omega, \lambda = 2i, \omega = k\frac{\pi}{2}, k = \overline{1,4}, \end{cases}$$

$$\varphi_2^{(0,1)}(\omega) = C_2, \text{ где } \lambda = 2i, \omega \neq k\frac{\pi}{2}, k = \overline{1,4},$$

$$\begin{cases} \varphi_3^{(0,1)}(\omega) = C_3 \cos i\lambda\omega, \\ \varphi_3^{(1,1)}(\omega) = -i\omega C_3 \sin i\lambda\omega, \\ \varphi_3^{(0,2)}(\omega) = C_3 \cos[(i\lambda + 2)\omega], \\ \varphi_3^{(1,2)}(\omega) = -i\omega C_3 \sin[(i\lambda + 2)\omega], \lambda = \lambda_1 = \lambda_2, \end{cases}$$

$$\varphi_4^{(0,1)}(\omega) = C_4 \cos i\lambda\omega, \text{ где } \lambda = \lambda_1,$$

$$\varphi_5^{(0,1)}(\omega) = C_5 \cos[(i\lambda + 2)\omega], \text{ где } \lambda = \lambda_2.$$

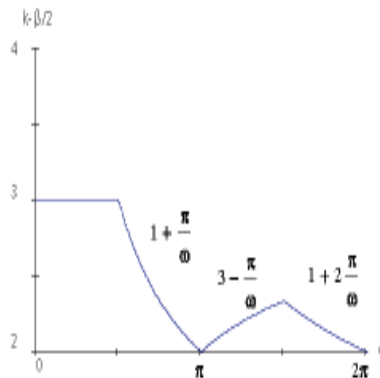


Рис. 4. Зависимость класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(3)}$

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(4)}$ (3.4)

$$\begin{cases} \varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \cos 2\omega), \\ \varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1(-i\frac{1-\nu}{(1+\nu)^2} + i\omega \sin 2\omega + c_0 \sin 2\omega + D(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \cos 2\omega)), \\ \varphi_1^{(0,2)}(\omega) = C_1 \sin 2\omega, \lambda = 2i, \omega = \pi, 2\pi, \end{cases}$$

$$\varphi_2^{(0,1)}(\omega) = C_2(\frac{1-\nu}{1+\nu} S_0 + (1-c_0) \sin 2\omega + S_0 \cos 2\omega), \text{ где } \lambda = 2i, \omega \neq \pi, 2\pi.$$

$$\begin{cases} \varphi_3^{(0,1)}(\omega) = C_3((c_b - c_a) \sin i\lambda\omega + \frac{1}{A-a^2}((A-a^2)S_a - \\ - \frac{a}{b} \frac{B-a^2}{B-b^2}(A-b^2)S_b) \cos i\lambda\omega - \frac{a}{b} \frac{B-a^2}{B-b^2}(c_b - c_a) \sin[(i\lambda + 2)\omega] - \\ - \frac{1}{A-a^2}((A-a^2)S_a - \frac{a}{b} \frac{B-a^2}{B-b^2}(A-b^2)S_b) \cos[(i\lambda + 2)\omega]), \\ \varphi_3^{(1,1)}(\omega) = i\omega C_3((c_b - c_a) \cos i\lambda\omega + \frac{1}{A-a^2}((A-a^2)S_a - \\ - \frac{a}{b} \frac{B-a^2}{B-b^2}(A-b^2)S_b) \sin i\lambda\omega - \frac{a}{b} \frac{B-a^2}{B-b^2}(c_b - c_a) \cos[(i\lambda + 2)\omega] - \\ - \frac{1}{A-a^2}((A-a^2)S_a - \frac{a}{b} \frac{B-a^2}{B-b^2}(A-b^2)S_b) \sin[(i\lambda + 2)\omega]), \end{cases}$$

где $\omega \neq \pi, 2\pi$ и λ удовлетворяет уравнениям (3.29) и (3.36) из [5].

$$\begin{cases} \varphi_4^{(0,1)}(\omega) = C_4(-(A-b^2) \cos i\lambda\omega + (A-a^2) \cos[(i\lambda + 2)\omega]), \\ \varphi_4^{(0,2)}(\omega) = C_4(-b(B-b^2) \sin i\lambda\omega + a(B-a^2) \sin[(i\lambda + 2)\omega]), \end{cases}$$

$$\omega = \begin{cases} \pi, i\lambda = n, \\ 2\pi, i\lambda = \frac{1}{2} + n, n \in Z. \end{cases}$$

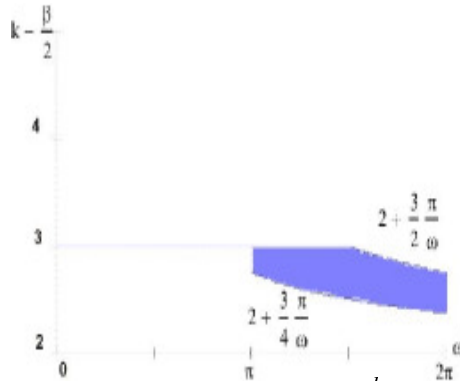


Рис. 5. Зависимость класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(4)}$

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(12)}$ (3.5)

$$\varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1(S_0 - 2c_0\omega + c_0 \sin 2\omega - S_0 \cos 2\omega),$$

где $\lambda = 2i, \omega$ — решение уравнения (3.22) [5].

$$\begin{cases} \varphi_2^{(0,1)}(\omega) = C_2(b(C_a - C_b) \sin i\lambda\omega - (bS_a - aS_b) \cos i\lambda\omega - \\ - a(c_a - c_b) \sin[(i\lambda + 2)\omega] + (bS_a - aS_b) \cos[(i\lambda + 2)\omega]), \\ \varphi_2^{(1,1)}(\omega) = i\omega C_2((bS_b - aS_a) \cos i\lambda\omega - a(c_a - c_b) \sin i\lambda\omega - \\ - \frac{a}{b}(bS_b - aS_a) \cos[(i\lambda + 2)\omega] + a(c_a - c_b) \sin[(i\lambda + 2)\omega]), \omega \neq k\frac{\pi}{2}, k = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

$$\varphi_3^{(0,1)}(\omega) = C_3(-\cos i\lambda\omega + \cos[(i\lambda + 2)\omega]), \text{ где } \omega = F,$$

$$\varphi_4^{(0,1)}(\omega) = C_4(-b \sin i\lambda\omega + a \sin[(i\lambda + 2)\omega]), \text{ где } \omega = G.$$

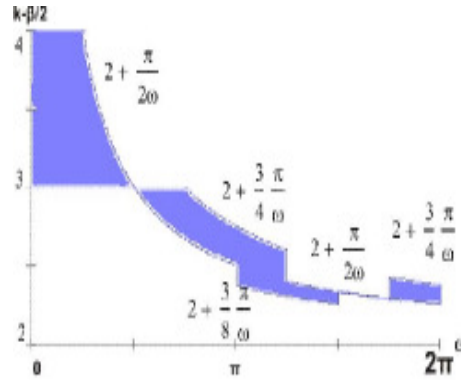


Рис. 6. Зависимость класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(12)}$

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(13)}$ (3.6)

$$\varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1(1 - \cos 2\omega), \text{ где } \lambda = 2i, \omega = k\frac{\pi}{2}, k = \overline{1,4}.$$

$$\begin{cases} \varphi_2^{(0,1)}(\omega) = C_2((bS_b - aS_a) \sin i\lambda\omega + a(c_a - c_b) \cos i\lambda\omega - \\ - \frac{a}{b}(bS_b - aS_a) \sin[(i\lambda + 2)\omega] - a(c_a - c_b) \cos[(i\lambda + 2)\omega]), \\ \varphi_2^{(1,1)}(\omega) = i\omega C_2((bS_b - aS_a) \cos i\lambda\omega - a(c_a - c_b) \sin i\lambda\omega - \\ - \frac{a}{b}(bS_b - aS_a) \cos[(i\lambda + 2)\omega] + a(c_a - c_b) \sin[(i\lambda + 2)\omega]), \omega \neq k\frac{\pi}{2}, k = \overline{1,4}, \end{cases}$$

где λ удовлетворяет уравнениям (3.29) и (3.36) из [5].

$$\varphi_3^{(0,1)}(\omega) = C_3(-b \sin i\lambda\omega + a \sin i\lambda\omega), \text{ где } \omega = F,$$

$$\varphi_4^{(0,1)}(\omega) = C_4(-\cos i\lambda\omega + \cos[(i\lambda + 2)\omega]), \text{ где } \omega = G.$$

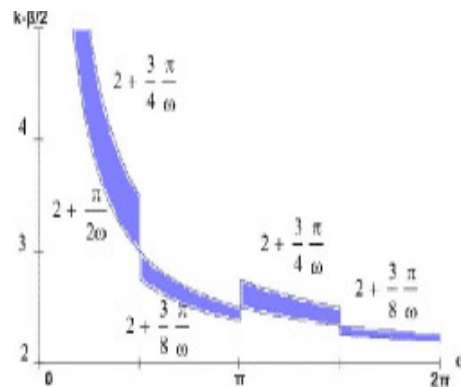


Рис. 7. Зависимость класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(13)}$

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(14)}$ (3.7)

$$\begin{cases} \varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1(bK_1 \sin i\lambda\omega + K_2 \cos i\lambda\omega - aK_1 \sin[(i\lambda + 2)\omega] - K_2 \cos[(i\lambda + 2)\omega]), \\ \varphi_1^{(1,1)}(\omega) = i\omega C_1(bK_1 \cos i\lambda\omega - K_2 \sin i\lambda\omega - aK_1 \cos[(i\lambda + 2)\omega] + \\ + K_2 \sin[(i\lambda + 2)\omega]), \\ \varphi_1^{(2,1)}(\omega) = -\omega^2 C_1(-bK_1 \sin i\lambda\omega - K_2 \cos i\lambda\omega + aK_1 \sin[(i\lambda + 2)\omega] + \\ + K_2 \cos[(i\lambda + 2)\omega]), \end{cases}$$

где λ — корни задачи кратности один, два или три, соответственно см. (3.3.2) [5].

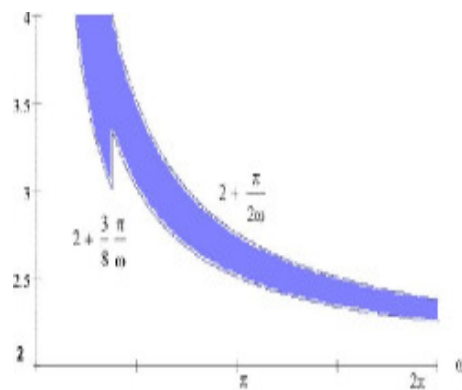


Рис. 8. Зависимость класса решения H_3^k от угла ω для условий $B^{(14)}$

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(23)}$ (3.8)

$$\varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1 \sin 2\omega, \text{ где } \omega = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k = \overline{0, 3}, \lambda = 2i,$$

$$\begin{cases} \varphi_2^{(0,1)}(\omega) = C_2 \sin i\lambda\omega, \\ \varphi_2^{(1,1)}(\omega) = i\omega C_2 \cos i\lambda\omega, \\ \varphi_2^{(0,2)}(\omega) = C_3 \sin[(i\lambda + 2)\omega], \\ \varphi_2^{(0,2)}(\omega) = i\omega C_3 \cos[(i\lambda + 2)\omega], \lambda = \lambda_3 = \lambda_4, \end{cases}$$

$$\varphi_3^{(0,1)}(\omega) = C_4 \sin i\lambda\omega, \text{ где } \lambda = \lambda_3 \neq \lambda_4,$$

$$\varphi_4^{(0,1)}(\omega) = C_5 \sin[(i\lambda + 2)\omega], \text{ где } \lambda = \lambda_4 \neq \lambda_3.$$

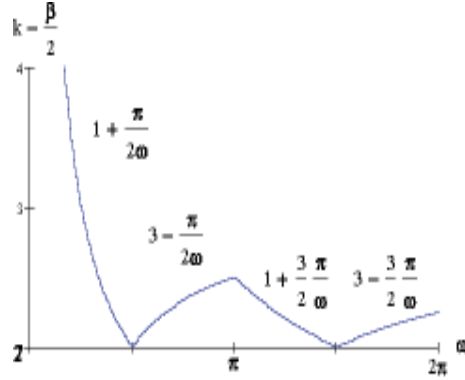


Рис. 9. Зависимость класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(23)}$

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(24)}$ (3.9)

$$\varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1 \sin 2\omega, \text{ где } \omega = \frac{\pi}{2}k, k = \overline{1, 4}, \lambda = 2i,$$

$$\varphi_2^{(0,1)}(\omega) = C_2(-(A - b^2)S_b \sin i\lambda\omega + (A - a^2)S_a \sin[(i\lambda + 2)\omega]), \text{ где } \omega = F,$$

$$\varphi_3^{(0,1)}(\omega) = C_3(-bc_b(B - b^2) \sin i\lambda\omega + ac_a(B - a^2) \sin[(i\lambda + 2)\omega]), \text{ где } \omega \neq F.$$

$$\begin{cases} \varphi_4^{(0,1)}(\omega) = C_4(-(A - b^2)S_b \sin i\lambda\omega + (A - a^2)S_a \sin[(i\lambda + 2)\omega]), \\ \varphi_4^{(1,1)}(\omega) = i\omega C_4(-(A - b^2)S_b \cos i\lambda\omega + (A - a^2)S_a \cos[(i\lambda + 2)\omega]), \end{cases}$$

где $\omega = \frac{\pi}{2}k, k = \overline{1, 4}$.

График зависимости класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(24)}$ совпадает с приведенным на рис. 7.

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(34)}$ (3.10)

$$\begin{cases} \varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1(c_0 \frac{1-\nu}{1+\nu} + \cos 2\omega), \\ \varphi_1^{(1,1)}(\omega) = iC_1(\omega \sin 2\omega - c_0 \frac{1-\nu}{(1+\nu)^2} + D(c_0 \frac{1-\nu}{1+\nu} + \cos 2\omega)), \end{cases}$$

где $\omega = \frac{\pi}{2}k, k = \overline{1, 4}$.

$$\varphi_2^{(0,1)}(\omega) = C_2(c_0 \frac{1-\nu}{1+\nu} + \cos 2\omega), \text{ где } \omega \neq \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k = \overline{0, 1}, \lambda = 2i,$$

$$\varphi_3^{(0,1)}(\omega) = C_3 \cos 2\omega, \text{ где } \omega = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k = \overline{0, 1}, \lambda = 2i.$$

$$\begin{cases} \varphi_4^{(0,1)}(\omega) = C_4(-C_b(A - b^2) \cos i\lambda\omega + C_a(A - a^2) \cos[(i\lambda + 2)\omega]), \\ \varphi_4^{(1,1)}(\omega) = i\omega C_4(C_b(A - b^2) \sin i\lambda\omega - C_a(A - a^2) \sin[(i\lambda + 2)\omega]), \end{cases}$$

где λ — корни кратности два, удовлетворяющие условиям (3.29), (3.36) из [5].

$$\varphi_5^{(0,1)}(\omega) = C_5(-C_b(A - b^2) \cos i\lambda\omega + C_a(A - a^2) \cos[(i\lambda + 2)\omega]), \text{ где } \omega \neq F,$$

$$\varphi_6^{(0,1)}(\omega) = C_6(-bS_b(B - b^2) \cos i\lambda\omega + aS_a(B - a^2) \cos[(i\lambda + 2)\omega]), \text{ где } \omega = F.$$

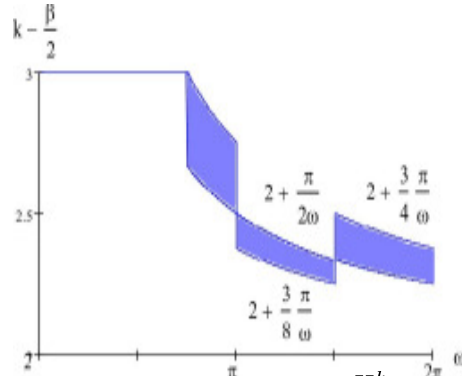


Рис. 10. Зависимость класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(34)}$

Где ν — коэффициент Пуассона, а $a, b, c_0, c_a, c_b, S_0, S_a, S_b, K_1, K_2, A, B, F, G$ определены в работе [5].

Замечание 2. Закрашенные области графиков ограничивают возможное значение H_β^k для решения задачи. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — полюса краевой задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Результаты можно распространить на другие эллиптические краевые задачи. При расчетах для конкретных задач данные априорные оценки поведения решения вблизи особых точек позволяют выбирать оптимальный шаг разбиения области. Сгенерированная сетка позволяет при минимальном количестве узлов гарантировать получение решения задачи с фиксированной точностью.

1. **Агранович М. С.** Общие краевые задачи [текст] / М. С. Агранович, М. И. Вишик // Успехи математических наук. — Т. 20. — № 5. — 1965. — С. 102–132.
2. **Кондратьев В. А.** Краевые задачи в негладких областях [текст] / В. А. Кондратьев // Труды Московского математического общества. — Т. 16. — 1967. — С. 209–292.
3. **Назаров С. А.** Эллиптические задачи с кусочно-гладкой границей [текст] / С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский. — М.: Наука, 1991. — 336 с.
4. **Масловская Л. В.** Поведение решений краевых задач для бигармонического уравнения в областях с угловыми точками [текст] / Л. В. Масловская // Дифференциальные уравнения. — Т. 19. — № 12. — 1983. — С. 2172–2175.
5. **Орлов С. В.** Асимптотика решения краевых задач для бигармонических операторов в окрестности угловых точек и точек смены граничных условий [текст] / С. В. Орлов, Л. В. Масловская. — Киев, 1989. — 62 с. — Деп. в УкрНИИИТИ 21.03.89, №830–Ук89.
6. **Grisvard P.** Elliptic problem in nonsmooth domains [text] / P. Grisvard // — Boston-London-Melbourne, University of Nice, Pitman advanced publishing program. — 1985. — 327 p.