

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ
ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

С. А. Щоголев

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ НЕЛІНІЙНОЇ МЕХАНІКИ

Частина 1

Конспект лекцій

Одеса
ОНУ
2021

УДК 517.957.6(075.8)
Щ92

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
ОНУ імені І. І. Мечникова
Протокол № 1 від 04.09.2020 р.

Рецензенти :

В. Г. Попов – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Одеської національної морської академії;

А. В. Плотніков – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури.

Ю. О. Григор'єв – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри «Математика, фізика та астрономія» Одеського національного морського університету

Щоголев С. А.

Щ92 Математичні проблеми нелінійної механіки. Частина 1 : конспект лекцій / С. А. Щоголев. – Одеса : «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2021. – 102 с.

ISBN 978-617-689-420-9

Конспект лекцій написано відповідно до програми курсу «Математичні проблеми нелінійної механіки», що читається магістрам 1 курсу спеціальності «математика» Викладено основи теорії, представлено основні практичні методи розв'язання задач, розглянуто низка прикладів, у тому числі фізичного змісту.

Для підготовки здобувачів спеціальностей 111 «Математика», 113 «Прикладна математика», 104 «Фізика та астрономія».

УДК 517.957.6(075.8)

ISBN 978-617-689-420-9

© С. А. Щоголев, 2021

© Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2021

Вступ. Що таке нелінійна механіка

Під *нелінійною механікою* ми розуміємо сукупність математичних методів дослідження нелінійних диференціальних рівнянь, що описують коливні процеси.

Коливання – це рухи або зміни стану системи, що мають ту або іншу ступінь повторювання. Наприклад, коливання маятника, коливання пружини, коливання струму в електричному контурі тощо. У розмаїтті природних явищ, що відбуваються навколо нас, коливні процеси відбивають найпоширеніші прояви руху. Віб्राції елементів конструкцій та машин, вібрація човнів, електромагнітні коливання в радіотехніці та оптиці, автоколивання в системах регулювання й спостереження, звукові та ультразвукові коливання. На коливаннях ґрунтуються також багато біологічних процесів, зокрема, тих, що відбуваються в людському організмі: биття серця, вібрація легенів під час дихання, вібрації голосових зв'язок під час розмови або співу та багато інших.

Отже, дослідження коливних процесів в різноманітних розділах механіки, фізики, біології, техніки є дуже важливою проблемою, що привертає до себе увагу численної кількості вчених. У зв'язку з цим з'являється така галузь природознавства і техніки як теорія коливань.

Теорія коливань – це наука, що вивчає найбільш загальні закономірності коливних процесів незалежно від фізичної природи систем, в яких ці процеси відбуваються.

Таким чином, у сферу теорії коливань потрапляють процеси, що відбуваються в механічних, електричних, біологічних та інших системах.

Теорію коливань можна розглядати як один з розділів теоретичної і математичної фізики. Хоча в той же час назвати її саме одним з розділів важко, позаяк теорія коливань з'єднує, узагальнює різні області фізики. За висловлюванням академіка Л. І. Мандельштама, теорія коливань – це інтернаціональна мова фізики. Не випадково у славнозвісному 10-томному «Курсі теоретичної фізики» Л. Д. Ландау та Є. М. Ліфшица нема окремого тому, присвяченого теорії коливань. Вона пронизує всю фізику, здійснює, так кажучи, її горизонтальний зріз.

Як вже відмічалось, однією з головних ознак коливного процесу є його *періодичність*, тобто повторюваність через певні проміжки часу.

Але в той же час теорія коливань займається і деякими неперіодичними процесами.

Коливні процеси з давнини привертали увагу вчених. Ще на початку XVII століття Галілео Галілей вивчав коливання маятника та винайшов годинник з маятником, точність якого була значно вищою, ніж у годинників без маятника. У другій половині того ж століття Христіан Гюйгенс продовжив дослідження годинникового механізму з маятником. Праці Галілея та Гюйгенса відіграли важливу роль у створенні класичної механіки. Задачею про коливання фізичного маятника, а також задачею про коливання струни займався також Іоганн І Бернуллі.

Засновником теорії коливань як самостійної науки можна вважати Дж. В. Стретта (лорд Релей). У своєму трактаті «Теорія звуку» він дав багато прикладів акустичних, механічних та інших систем.

Розрізняють лінійні (або малі) та нелінійні коливання. Перші з них – це ті, адекватний опис яких приводить до лінійних диференціальних рівнянь. Теорію лінійних коливань було сформульовано вже в працях Ж. Лагранжа. Другий випадок веде до нелінійних диференціальних рівнянь. Слід зауважити, що всі існуючі в природі коливання саме нелінійні. Але в деяких випадках при дослідженні коливань можна нехтувати нелінійними характеристиками. А в деяких лінійна модель недостатня, позаяк не відображає низки принципових особливостей коливних систем, що досліджуються. Розвиток радіозв'язку, дослідження коливань в електричних контурах та відповідні фізичні задачі, що виникли, поставили проблему вивчення саме нелінійних коливань. Перші значні результати в цій галузі належать Ван-дер-Полю (Голандія), Баркгаузену та Меллеру (Німеччина), Епплтону (Англія), Кога (Японія), Ліенару і Картану (Франція) та іншим. В 30-ті роки XX століття центр дослідження нелінійних коливань переміщується у СРСР. Саме тут завдяки працям, перш за все, Л. І. Мандельштама,

М. Д. Папалексі, О. О. Андропова, М. М. Крилова, М. М. Боголюбова та представниками їх наукових шкіл було закладено підвалини теорії нелінійних коливань в її сучасному вигляді.

У сучасній теорії коливань можна виділити два основні напрями. Перший – це вивчення фізики коливань. Тут основна увага зосереджується на фізичній сутності явища, що вивчається. Для цього напряму характерна не розробка нових методів, а групування різних ві-

домих методів дослідження фізичних задач. В розвиток цього напрямку великий внесок зробили такі вчені як Л. І. Мандельштам, М. Д. Папалексі, Г. С. Горелік, С. М. Ритов, В. В. Мігулін, М. І. Рабінювич, К. Магнус та інші.

Другий напрям – розробка загального математичного апарату теорії коливань. Тут інтерес, перш за все, являє не фізична сутність, а форми коливних закономірностей, записаних у математичній формі. Цей напрям у свою чергу розпадається ще на дві гілки. Першу з них пов'язано з аналітичними та асимптотичними методами теорії диференціальних рівнянь, бере свій початок з праць А. Пуанкаре і набуло величезного розвитку в працях М. М. Крилова та М. М. Боголюбова. Саме М. М. Криловим та М. М. Боголюбовим створено напрям, який дістав назву «нелінійна механіка». Наразі цей напрям інтенсивно розвивається, зокрема, київською математичною школою – Ю. О. Митропольський, А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, О. А. Бойчук, І. О. Парасюк, Р. І. Петришин, Ю. В. Теплинський, О. М. Станжицький, а також російськими математиками – М. М. Мойсєєв, Є. О. Гребеніков, Ю. О. Рябов, М. Х. Розов, В. О. Плісс, В. Ш. Бурд та інші.

Друга гілка спирається на якісну теорію диференціальних рівнянь, основи якої було розроблено А. Пуанкаре. Методи цього напрямку розроблялися Л. І. Мандельштамом, О. О. Андроновим, Ю. І. Неймарком, М. М. Баутініним та іншими.

Важливу роль відіграють питання стійкості одержаних розв'язків, і тут першорядне значення має теорія стійкості руху, розроблена О. М. Ляпуновим.

Наразі математична теорія коливань є величезною областю математики, яка інтенсивно розвивається і має як теоретичне, так і прикладне значення.

Розділ 1

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПУАНКАРЕ

Лекція 1. Періодичні розв'язки квазілінійного диференціального рівняння 2-го порядку в нерезонансному випадку

- 1.1. Теорема Пуанкаре про існування періодичного розв'язку диференціального рівняння 2-го порядку.
- 1.2. Знаходження 2π -періодичного розв'язку рівняння $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$ методом малого параметра в нерезонансному випадку.

1.1. Теорема Пуанкаре про існування періодичного розв'язку диференціального рівняння 2-го порядку

Розглянемо диференціальне рівняння, що залежить від так званого малого параметра. Під *малим параметром* ми розуміємо величину, що у певному сенсі є малою порівняно з іншими величинами, що фігурують у даній задачі. Зрозуміло, що «малість» поняття відносне. За одним умов значення, наприклад, 0,1 може бути малим, а за інших таким зовсім не бути. В задачах небесної механіки, наприклад, в якості малого параметру може фігурувати відношення маси Землі (або іншої планети Сонячної системи) до маси Сонця. В літературі з нелінійної механіки малий параметр позначається, зазвичай, грецькими буквами μ або ε . Ми також будемо притримуватись цих позначень. Отже, розглянемо диференціальне рівняння наступного вигляду:

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \mu), \quad (1.1.1)$$

де μ – малий параметр. У загальному випадку рівняння (1.1.1) в квадратурах зінтегрувати не вдається. За відомим афоризмом, «жодне диференціальне рівняння, що поважає себе та зустрічається у застосуваннях, не інтегрується в квадратурах». Тому, зазвичай, припускається, що рівняння (1.1.1) в певному сенсі близьке до інтегровного. Цю близькість може бути здійснено саме за рахунок малого параметра μ . Дійсно, покладемо в рівнянні (1.1.1) $\mu = 0$. Тоді одержимо рівняння:

$$\ddot{x}_0 = f(t, x_0, \dot{x}_0, 0), \quad (1.1.2)$$

яке назовемо *породжуючим*. Зазвичай припускається, що рівняння (1.1.2) відноситься до інтегровного типу, наприклад, є лінійним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Тоді при малих значеннях μ рівняння (1.1.1) буде в певному сенсі близьким до рівняння (1.1.2), а тоді можна очікувати, що за певних умов і розв'язки рівняння (1.1.1) будуть близькими до розв'язків рівняння (1.1.2).

Вважатимемо функцію $f(t, x, \dot{x}, \mu)$ неперервною та 2π -періодичною за $t \in \mathbb{R}$ і аналітичною за $x, \dot{x}, \mu$ в деякій області зміни $x, \dot{x}$ і при достатньо малих значеннях параметра μ . Вивчатимемо задачу про існування 2π -періодичних розв'язків рівняння (1.1.1).

Припустимо, що рівняння (1.1.2) має єдиний 2π -періодичний розв'язок $x_0 = \varphi_0(t)$, який назовемо *породжуючим* розв'язком. З'ясуємо, за яких умов рівняння (1.1.1) також має єдиний 2π -періодичний розв'язок $x = \varphi(t, \mu)$ такий, що

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \varphi(t, \mu) = \varphi_0(t).$$

Розглянемо розв'язок рівняння (1.1.1), що задовольняє початкові умови:

$$x(t_0) = \varphi_0(t_0) + \beta_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{\varphi}(t_0) + \beta_1.$$

Цей розв'язок позначимо $x(t, \beta_0, \beta_1, \mu)$. Величини β_0, β_1 є відхиленнями початкових значень розв'язку $x(t, \beta_0, \beta_1, \mu)$ та його похідної від початкових значень $\varphi_0(t_0), \dot{\varphi}(t_0)$ 2π -періодичного розв'язку породжуючого рівняння. Якщо розв'язок $x(t, \beta_0, \beta_1, \mu)$ 2π -періодичний, то

$$\begin{cases} x(2\pi, \beta_0, \beta_1, \mu) - x(0, \beta_0, \beta_1, \mu) = 0, \\ \dot{x}(2\pi, \beta_0, \beta_1, \mu) - \dot{x}(0, \beta_0, \beta_1, \mu) = 0. \end{cases} \quad (1.1.3)$$

Позначаючи праві частини цих рівнянь через $\Phi_0(\beta_0, \beta_1, \mu), \Phi_1(\beta_0, \beta_1, \mu)$, запишемо систему (1.1.3) у вигляді:

$$\Phi_0(\beta_0, \beta_1, \mu) = 0, \quad \Phi_1(\beta_0, \beta_1, \mu) = 0. \quad (1.1.4)$$

Умови (1.1.4), що їх називають *умовами періодичності*, є не тільки необхідними, але й достатніми для 2π -періодичності розв'язку $x(t, \beta_0, \beta_1, \mu)$ рівняння (1.1.1). Дійсно, оскільки функція $f(t, x, \dot{x}, \mu)$ – 2π -періодична за t , вона в точках $(t, x, \dot{x}), (t + 2\pi, x, \dot{x})$ набуває однакових значень. Отже, якщо в точках $t = 0, t = 2\pi$ задати однакові по-

чаткові значення $x_0, \dot{x}_0$, то ними у смугах $0 \leq t \leq 2\pi$, $2\pi \leq t \leq 4\pi, \dots$, $2n\pi \leq t \leq 2(n+1)\pi, \dots$ визначатимуться однакові інтегральні криві.

З теореми про неявні функції випливає, що, якщо

$$\frac{D(\Phi_0, \Phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta_0} & \frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta_0} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta_1} \end{vmatrix} \neq 0$$

в точці $\beta_0 = \beta_1 = \mu = 0$, то при достатньо малому μ існує єдина пара функцій $\beta_0(\mu), \beta_1(\mu)$, що задовольняють умови (1.1.3) і прямують до нуля при $\mu \rightarrow 0$. Отже, за вказаних умов існує єдиний 2π -періодичний розв'язок рівняння (1.1.1), що прямує до породжуючого розв'язку $\varphi_0(t)$ при $\mu \rightarrow 0$, і цей розв'язок буде аналітичним за μ . Це твердження й складає зміст теореми Пуанкаре.

Приклад. Розглянемо квазілінійне диференціальне рівняння 2-го порядку:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu), \quad (1.1.5)$$

де функція $f(t)$ – неперервна та 2π -періодична, а функція $F(t, x, \dot{x}, \mu)$ – неперервна та 2π -періодична за t і аналітична за $x, \dot{x}, \mu$ в деякій області зміни $x, \dot{x}$ і при достатньо малому $\mu \geq 0$.

Розв'язок $x(t, \beta_0, \beta_1, \mu)$ шукаємо у вигляді:

$$x(t, \beta_0, \beta_1, \mu) = x_0(t) + x_{11}(t)\beta_0 + x_{12}(t)\beta_1 + x_{13}(t)\mu + \dots, \quad (1.1.6)$$

де $x_0(t)$ – породжуючий розв'язок. У даному випадку породжуюче рівняння являє собою лінійне неоднорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Підставляючи вираз (1.1.6) у рівняння (1.1.5), і, зрівнюючи коефіцієнти біля β_0, β_1, μ , дістанемо:

$$\begin{cases} \ddot{x}_{11} + \omega^2 x_{11} = 0, & x_{11}(0) = 1, \quad \dot{x}_{11}(0) = 0, \\ \ddot{x}_{12} + \omega^2 x_{12} = 0, & x_{12}(0) = 0, \quad \dot{x}_{12}(0) = 1. \end{cases} \quad (1.1.7)$$

Звідси $x_{11}(t) = \cos \omega t$, $x_{12}(t) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t$.

Умови періодичности (1.1.4) в даному випадку мають вигляд:

$$\begin{cases} (\cos 2\omega\pi - 1)\beta_0 + \frac{1}{\omega}(\sin 2\omega\pi)\beta_1 + \dots = 0, \\ -\omega(\sin 2\omega\pi)\beta_0 + (\cos 2\omega\pi - 1)\beta_1 + \dots = 0. \end{cases}$$

Невиписані члени не впливають на величину визначника. Маємо:

$$\frac{D(\Phi_0, \Phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)} \Big|_{\beta_0=\beta_1=\mu=0} = (\cos 2\omega\pi - 1)^2 + \sin^2 2\omega\pi \neq 0,$$

якщо тільки ω відмінно від цілого числа. В нелінійній механіці такий випадок називається *нерезонансним*. Таким чином, в нерезонансному випадку рівняння (1.1.5) при достатньо малих значеннях параметра μ має єдиний 2π -періодичний розв'язок, і цей розв'язок аналітичний відносно μ .

1.2. Знаходження 2π -періодичного розв'язку рівняння

$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$ методом малого параметра в нерезонансному випадку

Розглянемо рівняння:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu). \quad (1.2.1)$$

Вважатимемо, що ω відмінно від цілого числа (нерезонансний випадок), а неперервна функція $f(t)$ є 2π -періодичною. Функція F є 2π -періодичною за t і аналітичною за $x, \dot{x}, \mu$ в деякій області зміни $x, \dot{x}$ і при достатньо малих значеннях μ .

Нашою задачею буде побудова 2π -періодичного розв'язку рівняння (1.2.1). Почнемо з того, що побудуємо 2π -періодичний розв'язок породжуючого рівняння:

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = f(t). \quad (1.2.2)$$

Розкладемо функцію $f(t)$ в ряд Фур'є:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt \quad (n=1,2,3,\dots).$$

Шукатимемо розв'язок, що нас цікавить, також у вигляді ряду Фур'є з невизначеними поки що коефіцієнтами:

$$x_0 = \varphi(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt.$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (1.2.2), і, зрівнюючи коефіцієнти біля *однакових гармонік* (тобто біля $\cos nt$, $\sin nt$), дістанемо:

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{\omega^2}, \quad \alpha_n = \frac{a_n}{\omega^2 - n^2}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{\omega^2 - n^2}$$

(оскільки ω відмінно від цілого числа, то знаменники всіх цих виразів відмінні від нуля). Таким чином, породжуючий розв'язок має вигляд:

$$x_0 = \varphi(t) = \frac{a_0}{2\omega^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega^2 - n^2} \cos nt + \frac{b_n}{\omega^2 - n^2} \sin nt.$$

Переконаємось в тому, що інших 2π -періодичних розв'язків рівняння (1.2.2) не має. Дійсно, загальний розв'язок рівняння (1.2.2) має вигляд:

$$x = \varphi(t) + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Але період функцій $\cos \omega t, \sin \omega t$ дорівнює $2\pi/\omega$, і, оскільки ω відмінно від цілого числа, то ці функції не можуть бути 2π -періодичними.

Перейдемо до побудови 2π -періодичного розв'язку квазілінійного рівняння (1.2.1). Шукатимемо цей розв'язок у вигляді степеневого ряду за степенями малого параметра μ :

$$x(t, \mu) = x_0(t) + x_1(t)\mu + x_2(t)\mu^2 + \dots + x_n(t)\mu^n + \dots \quad (1.2.3)$$

Підставляючи ряд (1.2.3) у рівняння (1.2.1), і, зрівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів μ у лівій і правій частинах, дістанемо ланцюжок рівнянь для визначення коефіцієнтів ряду (1.2.3):

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = f(t),$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = (F),$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right),$$

$$\ddot{x}_3 + \omega^2 x_3 = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x}_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) x_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right) x_1 \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right) x_1 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \mu} \right) \dot{x}_1,$$

...

$$\ddot{x}_n + \omega^2 x_n = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) x_{n-1} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x}_{n-1} + G_n(t, x_0, \dot{x}_0, \dots, x_{n-2}, \dot{x}_{n-2}), \quad (1.2.4)$$

$n = 4, 5, \dots,$

...

Тут символом (F) позначено $F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)$ (результат підстановки у функцію $F(t, x, \dot{x}, \mu)$ породжуючого розв'язку замість $x, \dot{x}$ і нуля замість μ). G_n ($n = 4, 5, \dots$) – деякі поліноми відносно $x_0, \dot{x}_0, \dots, x_{n-2}, \dot{x}_{n-2}$ з 2π -періодичними коефіцієнтами. Відмітимо також ту важливу обставину (її важливість проявиться особливо у подальшому, при розгляді резонансного випадку), що поліном G_n не залежить від $x_{n-1}, \dot{x}_{n-1}$, а залежить лише від попередніх коефіцієнтів ряду (1.2.3).

Якщо, зокрема, функція F не залежить явно від μ , що характерно для багатьох рівнянь нелінійної механіки, то рівняння (1.2.4) набувають більш простого вигляду.

Кожне з рівнянь ланцюжку (1.2.4) є лінійним неоднорідним рівнянням вигляду (1.2.2), відмінність лише у правих частинах. Перше рівняння цього ланцюжку є саме породжуючим рівнянням (1.2.2). Знайшовши його 2π -періодичний розв'язок описаним вище способом, підставимо його в праву частину другого рівняння ланцюжку. Таким чином, ця права частина буде відомою 2π -періодичною функцією змінної t . Знайшовши аналогічним чином 2π -періодичний розв'язок $x_1(t)$ другого рівняння, підставимо його і $x_0(t)$ у праву частину третього рівняння і знайдемо його 2π -періодичний розв'язок, і т.д. Таким чином, ми можемо послідовно знайти коефіцієнти ряду (1.2.3) для будь-якого n .

Приклад. Знайти наближено методом малого параметра 2π -періодичний розв'язок рівняння Дюффінга, обмежившись трьома першими членами ряду (1.2.3).

Відоме в нелінійній механіці рівняння Дюффінга має вигляд:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \lambda \sin t + \mu x^3. \quad (1.2.5)$$

Відповідне породжуюче рівняння

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = \lambda \sin t$$

має єдиний 2π -періодичний розв'язок

$$x_0(t) = \frac{\lambda}{\omega^2 - 1} \sin t.$$

Нагадуємо, що ми розглядаємо нерезонансний випадок, тобто ω відмінно від цілого числа, отже, в цій і подальших формулах цього параграфу всі знаменники відмінні від нуля.

Шуканий 2π -періодичний розв'язок рівняння (1.2.5) шукаємо у вигляді ряду (1.2.3). Тоді згідно з (1.2.4) для коефіцієнтів цього ряду дістанемо рівняння:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = x_0^3,$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = 3x_0^2 x_1,$$

...

Використовуючи відомі тригонометричні тотожності, одержимо:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{3\lambda^3}{4(\omega^2 - 1)^3} \sin t - \frac{\lambda^3}{4(\omega^2 - 1)^3} \sin 3t.$$

Звідси методом невизначених коефіцієнтів легко знайти, що 2π -періодичний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$x_1(t) = \frac{3\lambda^3}{4(\omega^2 - 1)^4} \sin t - \frac{\lambda^3}{4(\omega^2 - 1)^3(\omega^2 - 9)} \sin 3t.$$

Підставляючи цей вираз в праву частину рівняння для x_2 , і проводячи необхідні викладки, дістанемо:

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = A \sin t - B \sin 3t + C \sin 5t,$$

де

$$A = \frac{3\lambda^5(\omega^2 - 7)}{4(\omega^2 - 1)^6(\omega^2 - 9)}, \quad B = \frac{3\lambda^5(5\omega^2 - 29)}{16(\omega^2 - 1)^6(\omega^2 - 9)}, \quad C = \frac{3\lambda^5}{16(\omega^2 - 1)^5(\omega^2 - 9)}.$$

Знову застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів, і, проводячи необхідні викладки, дістаємо:

$$x_2(t) = \frac{A}{\omega^2 - 1} \sin t - \frac{B}{\omega^2 - 9} \sin 3t + \frac{C}{\omega^2 - 25} \sin 5t.$$

Отже, шуканий 2π -періодичний розв'язок рівняння (1.2.5) має вигляд:

$$x(t, \mu) = \frac{\lambda}{\omega^2 - 1} \sin t + \mu \left(\frac{3\lambda^3}{4(\omega^2 - 1)^4} \sin t - \frac{\lambda^3}{4(\omega^2 - 1)^3(\omega^2 - 9)} \sin 3t \right) + \\ + \mu^2 \left(\frac{A}{\omega^2 - 1} \sin t - \frac{B}{\omega^2 - 9} \sin 3t + \frac{C}{\omega^2 - 25} \sin 5t \right) + \dots$$

Невиписані доданки містять μ в степенях вище другої.

Вже цей приклад показує, що зі зростанням n формули для коефіцієнтів ряду (1.2.3) стають все більш громіздкими. Тому на практиці ефективно може бути знайдено лише декілька перших членів цього ряду, зазвичай ними і обмежуються. Якщо параметр μ достатньо малий, то знайдена таким способом часткова сума ряду (1.2.3) дає достатньо задовільне наближення до шуканого розв'язку.

Лекція 2. Періодичні розв'язки квазілінійного диференціального рівняння 2-го порядку в резонансному випадку

2.1. Коливання неавтономної системи в резонансному випадку.

Умови існування періодичних розв'язків.

2.2. Коливання неавтономної системи в резонансному випадку.

Знаходження періодичного розв'язку.

2.1. Коливання неавтономної системи в резонансному випадку.

Умови існування періодичних розв'язків

Розглянемо знову рівняння:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu), \quad (2.1.1)$$

де функції f , F такі ж самі, як і в рівнянні (1.2.1), але цього разу припустимо, що ω дорівнює цілому числу або близьке до нього. Такий випадок називається *резонансним* (частота змушуючої сили співпадає з власною частотою коливань системи). Теорія, викладена в попередніх параграфах, не «проходить», позаяк визначник

$$\left. \frac{D(\Phi_0, \Phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)} \right|_{\beta_0=\beta_1=\mu=0} = (\cos 2\omega\pi - 1)^2 + \sin^2 2\omega\pi$$

(див. п. 1.1) цього разу дорівнює нулю або близький до нього. В знаменниках формул, що визначають розв'язок, з'являються нулі або величини, близькі до нуля, тобто виникає так звана *проблема малих знаменників*. Тому умови існування 2π -періодичних розв'язків для рівняння (1.3.1) будуть принципово іншими, ніж для рівняння (1.2.1). Отже, припустимо виконання наступних умов:

$$\omega^2 - n^2 = \mu a, \quad a_n = \mu a'_n, \quad b_n = \mu b'_n.$$

Тоді рівняння (1.3.1) можемо переписати у вигляді:

$$\ddot{x} + n^2 x = g(t) + \mu G(t, x, \dot{x}, \mu), \quad (2.1.2)$$

де функція $g(t)$ не містить n -их (резонансних) гармонік:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq n)}}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt.$$

Розглянемо породжуюче рівняння:

$$\ddot{x}_0 + n^2 x_0 = g(t). \quad (2.1.3)$$

Його загальний розв'язок має вигляд:

$$x_0 = \varphi(t) + M_0 \cos nt + N_0 \sin nt, \quad (2.1.4)$$

де

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2n^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq n)}}^{\infty} \frac{a_k \cos kt + b_k \sin kt}{n^2 - k^2}.$$

Таким чином, рівняння (2.1.3) має цілу сім'ю 2π -періодичних розв'язків (на відміну від нерезонансного випадку).

Приймемо за породжуючий один з розв'язків сім'ї (2.1.4), що відповідає яким-небудь конкретним значенням сталих M_0, N_0 , і з'ясуємо, за яких умов рівняння (2.1.2) має 2π -періодичний розв'язок, що при $\mu = 0$ перетворюється на породжуючий.

Позначимо шуканий 2π -періодичний розв'язок рівняння (2.1.2) через $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$, припускаючи, що:

$$\begin{cases} x(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = x_0(0) + \beta_1, \\ \dot{x}(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = \dot{x}_0(0) + \beta_2, \end{cases} \quad (2.1.5)$$

$\beta_j = \beta_j(\mu)$ ($j=1, 2$). Розкладемо $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ за степенями β_1, β_2, μ в околі $x_0(t)$:

$$x(t, \beta_1, \beta_2, \mu) = x_0(t) + A(t)\beta_1 + B(t)\beta_2 + C(t)\mu +$$

$$+\mu(D(t)\beta_1 + E(t)\beta_2 + F(t)\mu) + \dots \quad (2.1.6)$$

Введемо позначення:

$$[f] = f(2\pi) - f(0).$$

Для того, щоб функція (2.1.6) була 2π -періодичною, необхідно і достатньо, щоб β_1, β_2 задовольняли систему рівнянь:

$$\begin{cases} \phi_1(\beta_1, \beta_2, \mu) = x(2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu) - x(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = 0, \\ \phi_2(\beta_1, \beta_2, \mu) = \dot{x}(2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu) - \dot{x}(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = 0. \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Повторюючи тепер міркування, аналогічні проведеним для нерезонансного випадку, дістанемо:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{dt^2} + n^2 A &= 0, \quad A(0) = 1, \quad \dot{A}(0) = 0, \\ \frac{d^2 B}{dt^2} + n^2 B &= 0, \quad B(0) = 0, \quad \dot{B}(0) = 1, \end{aligned}$$

звідки

$$A = \cos nt, \quad B = \frac{1}{n} \sin nt.$$

Тоді $[A] = [\dot{A}] = [B] = [\dot{B}] = 0$, і рівняння (1.3.7) набувають вигляду:

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_1(\beta_1, \beta_2, \mu) = \mu([C] + [D]\beta_1 + [E]\beta_2 + [F]\mu + \dots) = 0, \\ \tilde{\phi}_2(\beta_1, \beta_2, \mu) = \mu([\dot{C}] + [\dot{D}]\beta_1 + [\dot{E}]\beta_2 + [\dot{F}]\mu + \dots) = 0. \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Треба знайти такі розв'язки $\beta_1(\mu), \beta_2(\mu)$ рівнянь (2.1.8), які перетворюються на нуль при $\mu = 0$. За цією обставиною рівняння (2.1.8) не можна скорочувати на μ , оскільки в цьому випадку в них будуть присутні вільні члени $[C]$ і $[\dot{C}]$, і тоді ці рівняння не будуть задовольнятися при $\beta_1 = \beta_2 = \mu = 0$. Тому треба вимагати, щоб

$$[C] = [\dot{C}] = 0. \quad (2.1.9)$$

Підставивши вираз (2.1.6) у рівняння (2.1.2), зрівняємо коефіцієнти біля μ . Дістанемо:

$$\frac{d^2 C}{dt^2} + n^2 C = G(t, x_0, \dot{x}_0, 0). \quad (2.1.10)$$

Початкові умови (2.1.5) дають:

$$C(0) = \dot{C}(0) = 0. \quad (2.1.11)$$

Методом варіації довільних сталих нескладно показати, що розв'язок рівняння (2.1.10) з початковими умовами (2.1.11) має вигляд:

$$C(t) = \frac{1}{n} \int_0^t G(\tau, x_0(\tau), \dot{x}_0(\tau), 0) \sin(n(t-\tau)) d\tau,$$

$$\dot{C}(t) = \int_0^t G(\tau, x_0(\tau), \dot{x}_0(\tau), 0) \cos(n(t-\tau)) d\tau.$$

Беручи до уваги (2.1.4), і, підставляючи в (2.1.9), маємо:

$$\begin{cases} P(M_0, N_0) = 0, \\ Q(M_0, N_0) = 0, \end{cases} \quad (2.1.12)$$

де

$$P = \int_0^{2\pi} G(\tau, x_0(\tau, M_0, N_0), \dot{x}(\tau, M_0, N_0), 0) \sin n\tau d\tau,$$

$$Q = \int_0^{2\pi} G(\tau, x_0(\tau, M_0, N_0), \dot{x}_0(\tau, M_0, N_0), 0) \cos n\tau d\tau.$$

В літературі з нелінійної механіки рівняння (2.1.12) називаються *рівняннями для породжуючих амплітуд*. Якщо M_0, N_0 обрано з системи (1.3.12), то рівняння (1.3.8) набувають вигляду:

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_1 = [D]\beta_1 + [E]\beta_2 + [C]\mu + \dots = 0, \\ \tilde{\phi}_2 = [\dot{D}]\beta_1 + [\dot{E}]\beta_2 + [\dot{C}]\mu + \dots = 0. \end{cases} \quad (2.1.13)$$

Звідси:

$$\Delta = \frac{\partial(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2)}{\partial(\beta_1, \beta_2)} \bigg|_{\beta_1=\beta_2=\mu=0} = \begin{vmatrix} [D] & [E] \\ [\dot{D}] & [\dot{E}] \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то на підставі теореми про неявні функції система (2.1.13), а, отже, й система (2.1.8) мають єдиний розв'язок $\beta_j = \beta_j(\mu)$, $\beta_j(0) = 0$ ($j=1,2$), і цей розв'язок аналітичний за μ . Отже, для кожного породжуючого розв'язку, для якого сталі M_0, N_0 обрано з системи (2.1.12), і для якого $\Delta \neq 0$, існує єдиний 2π -періодичний розв'язок рівняння (2.1.2), і цей розв'язок також аналітичний за μ .

Обчислимо визначник Δ . Підставляючи ряд (2.1.6) у рівняння (2.1.2), і, зрівнюючи коефіцієнти біля $\beta_{1\mu}, \beta_{2\mu}$, одержимо, що функції $D(t)$ і $E(t)$ мають задовольняти рівняння:

$$\frac{d^2 D}{dt^2} + n^2 D = \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) \cos nt - n \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} \right) \sin nt,$$

$$\frac{d^2 E}{dt^2} + n^2 E = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) \sin nt + \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} \right) \cos nt.$$

Круглі дужки означають, що $\partial G / \partial x$, $\partial G / \partial \dot{x}$ обчислюються на породжуючому розв'язку і при $\mu = 0$.

Початкові умови (2.1.5) дають:

$$D(0) = \dot{D}(0) = E(0) = \dot{E}(0) = 0.$$

Звідси:

$$D = \frac{1}{n} \int_0^t \left\{ \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)_{t=\tau} \cos n\tau - n \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} \right)_{t=\tau} \sin n\tau \right\} \sin n(t-\tau) d\tau,$$

$$\dot{D} = \int_0^t \left\{ \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)_{t=\tau} \cos n\tau - n \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} \right)_{t=\tau} \sin n\tau \right\} \cos n(t-\tau) d\tau.$$

Отже,

$$[D] = -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)_{t=\tau} \cos n\tau - n \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} \right)_{t=\tau} \sin n\tau \right\} \sin n\tau d\tau,$$

$$[\dot{D}] = \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)_{t=\tau} \cos n\tau - n \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} \right)_{t=\tau} \sin n\tau \right\} \cos n\tau d\tau.$$

Порівнюючи ці вирази з виразами для функцій $P(M_0, N_0), Q(M_0, N_0)$, легко переконатися в справедливості рівностей:

$$[D] = -\frac{1}{n} \cdot \frac{\partial P}{\partial M_0}, \quad [\dot{D}] = \frac{\partial Q}{\partial M_0}.$$

Аналогічно дістаємо, що

$$[E] = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial N_0}, \quad [\dot{E}] = \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial Q}{\partial N_0}.$$

Отже, умова $\Delta \neq 0$ еквівалентна умові:

$$\frac{\partial(P, Q)}{\partial(M_0, N_0)} \neq 0.$$

Нехай m величин $x_1, x_2, \dots, x_m$ задовольняють системі m рівнянь:

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.1.14)$$

Будемо казати, що величини $x_1, x_2, \dots, x_m$ утворюють *простий розв'язок системи* (2.1.14), якщо

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} \neq 0.$$

Тоді одержані результати можна сформулювати наступним чином:

Теорема. *Для того, щоб породжуючому розв'язку (2.1.4) відповідав 2π -періодичний розв'язок рівняння (2.1.2), необхідно і достатньо, щоб стали M_0, N_0 задовольняли системі (2.1.12). Кожному простому розв'язку цієї системи при достатньо малих значеннях μ відповідає 2π -періодичний розв'язок рівняння (2.1.2), і цей розв'язок аналітичний за μ .*

2.2. Коливання неавтономної системи в резонансному випадку. Знаходження періодичного розв'язку

Перейдемо тепер до питання практичного знаходження періодичних розв'язків квазілінійного рівняння в резонансному випадку. Розглянемо рівняння:

$$\ddot{x} + n^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu). \quad (2.2.1)$$

Розв'язок рівняння (2.2.1) шукаємо у вигляді степеневого ряду

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots + \mu^m x_m(t) + \dots \quad (2.2.2)$$

Для коефіцієнтів цього ряду одержуємо рівняння:

$$\ddot{x}_0 + n^2 x_0 = f(t),$$

$$\ddot{x}_1 + n^2 x_1 = (F),$$

$$\ddot{x}_2 + n^2 x_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right),$$

$$\ddot{x}_3 + n^2 x_3 = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x}_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) x_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right) x_1 \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right) x_1 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \mu} \right) \dot{x}_1,$$

...

$$\ddot{x}_s + n^2 x_s = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) x_{s-1} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x}_{s-1} + G_s(t, x_0, \dot{x}_0, \dots, x_{s-2}, \dot{x}_{s-2}),$$

$$s = 4, 5, \dots \quad (2.2.3)$$

Тут, як і раніше, через (F) позначено $F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)$.

Породжуючий розв'язок $x_0(t)$ має вигляд (2.1.4), де сталі M_0, N_0 обираються з системи рівнянь для породжуючих амплітуд (2.1.12). Решта функцій $x_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) мають вигляд:

$$x_k(t) = \varphi_k(t) + M_k \cos nt + N_k \sin nt,$$

де $\varphi_k(t)$ – частинний 2π -періодичний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння. Відносно вибору сталих M_k, N_k тут ситуація трохи інша, ніж у випадку породжуючого розв'язку. Ці сталі обираються з умови відсутності n -ї резонансної гармоніки в правій частині рівняння, що визначає наступний коефіцієнт $x_{k+1}(t)$, тобто з умови відсутності в неї доданків $\cos nt, \sin nt$. Але ця права частина містить $x_k, \dot{x}_k$ лише в двох перших, лінійних відносно цих функцій, доданках. Тому й рівняння, що визначають M_k, N_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), цього разу будуть лінійними (на відміну від системи (2.1.12)), а саме мати вигляд:

$$\begin{aligned} & M_k \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \cos nt - n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \sin nt \right\} \cos ntdt + \\ & + N_k \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \sin nt + n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \cos nt \right\} \cos ntdt + \\ & + \int_0^{2\pi} F_{k+1}^*(\dots) \cos ntdt = 0, \\ & M_k \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \cos nt - n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \sin nt \right\} \sin ntdt + \\ & + N_k \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \sin nt + n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \cos nt \right\} \sin ntdt + \\ & + \int_0^{2\pi} F_{k+1}^*(\dots) \sin ntdt = 0, \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

де

$$F_{k+1}^* = F_{k+1} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \varphi_k + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{\varphi}_k.$$

Функція F_{k+1} залежить лише від $x_0, \dots, x_{k-1}$ та їх похідних. Визначник системи (1.4.4) співпадає з $\partial(P, Q)/\partial(M_0, N_0)$.

Приклад. Розглянемо рівняння Ван-дер-Поля:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \lambda \sin t + \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt}. \quad (2.2.5)$$

Припустимо, що $\omega^2 = 1 + \mu a$, $\lambda = \mu \lambda_0$. Тоді рівняння (2.2.5) перепишеться у вигляді:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \mu \left(\lambda_0 \sin t + (1 - x^2) \frac{dx}{dt} - ax \right). \quad (2.2.6)$$

Як бачимо, вільний член $f(t) \equiv 0$, тому породжуючий розв'язок має вигляд:

$$x_0 = M_0 \cos t + N_0 \sin t. \quad (2.2.7)$$

Розв'язок рівняння (1.4.6) шукаємо у вигляді:

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots. \quad (2.2.8)$$

Підставляючи (2.2.8) у рівняння (2.2.6), і, зрівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів μ в лівій та правій частинах, дістаємо:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = \lambda_0 \sin t + (1 - x_0^2) \frac{dx_0}{dt} - ax_0, \quad (2.2.9)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + x_2 = -2x_0 \dot{x}_0 x_1 + (1 - x_0^2) \dot{x}_1 - ax_1. \quad (2.2.10)$$

Підставивши у рівняння (2.2.9) вираз (2.2.7) після очевидних перетворень дістанемо:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = & \left(-aM_0 + N_0 - \frac{1}{4} N_0 M_0^2 - \frac{1}{4} N_0^3 \right) \cos t + \\ & + \left(\lambda_0 - M_0 - aN_0 + \frac{1}{4} M_0^3 + \frac{1}{4} M_0 N_0^2 \right) \sin t + \\ & + \frac{1}{4} N_0 (N_0^2 - 3M_0^2) \cos 3t + \frac{1}{4} M_0 (M_0^2 - 3N_0^2) \sin 3t. \end{aligned}$$

Дорівнюємо до нуля коефіцієнти при $\sin t$, $\cos t$, тобто так звані перші гармоніки, що є в даному випадку резонансними:

$$\begin{cases} P(M_0, N_0) = -aM_0 + N_0 - \frac{1}{4}N_0M_0^2 - \frac{1}{4}N_0^3 = 0, \\ Q(M_0, N_0) = \lambda_0 - M_0 - aN_0 + \frac{1}{4}M_0^3 + \frac{1}{4}M_0N_0^2 = 0. \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Припустимо, що M_0, N_0 обрано з системи (2.2.11). Тоді загальний розв'язок рівняння (2.2.9) буде 2π -періодичним і мати вигляд:

$$x_1 = M_1 \cos t + N_1 \sin t + \frac{1}{32}N_0(3M_0^2 - N_0^2)\cos 3t + \frac{1}{32}M_0(3N_0^2 - M_0^2)\sin 3t,$$

де M_1, N_1 – довільні сталі. Підставимо x_1 у рівняння (2.2.10), внаслідок чого матимемо:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 x_2}{dt^2} + x_2 = \\ & = \left[\left(-\frac{1}{2}M_0N_0 - a \right) M_1 + \left(1 - \frac{1}{4}M_0^2 - \frac{3}{4}N_0^2 \right) N_1 + \frac{1}{128}M_0(M_0^2 + N_0^2)^2 \right] \cos t + \\ & + \left[\left(-1 + \frac{3}{4}M_0^2 + \frac{1}{4}N_0^2 \right) M_1 + \left(\frac{1}{2}M_0N_0 - a \right) N_1 + \frac{1}{128}N_0(M_0^2 + N_0^2)^2 \right] \sin t + \dots \end{aligned}$$

Невиписані члени не містять $\sin t, \cos t$. Звідки одержуємо систему відносно M_1, N_1 :

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{2}M_0N_0 - a \right) M_1 + \left(1 - \frac{1}{4}M_0^2 - \frac{3}{4}N_0^2 \right) N_1 = -\frac{1}{128}M_0(M_0^2 + N_0^2)^2, \\ \left(-1 + \frac{3}{4}M_0^2 + \frac{1}{4}N_0^2 \right) M_1 + \left(\frac{1}{2}M_0N_0 - a \right) N_1 = -\frac{1}{128}N_0(M_0^2 + N_0^2)^2. \end{cases} \quad (2.2.12)$$

Рівняння системи (2.2.12) лінійні. Визначник цієї системи дорівнює:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(-\frac{1}{2}M_0N_0 - a \right) \left(\frac{1}{2}M_0N_0 - a \right) - \left(1 - \frac{1}{4}M_0^2 - \frac{3}{4}N_0^2 \right) \left(-1 + \frac{3}{4}M_0^2 + \frac{1}{4}N_0^2 \right) = \\ &= a^2 + 1 - (M_0^2 + N_0^2) + \frac{3}{16}(M_0^2 + N_0^2)^2. \end{aligned}$$

Далі, оскільки

$$\frac{\partial P}{\partial M_0} = -\frac{1}{2}M_0N_0 - a, \quad \frac{\partial P}{\partial N_0} = 1 - \frac{1}{4}M_0^2 - \frac{3}{4}N_0^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial M_0} = -1 + \frac{3}{4}M_0^2 + \frac{1}{4}N_0^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial N_0} = \frac{1}{2}M_0N_0 - a,$$

то якобіан $\partial(P, Q)/\partial(M_0, N_0)$ співпадає з визначником Δ системи (2.2.12), що збігається з теоретичним результатом.

Лекція 3. Періодичні розв'язки квазілінійного рівняння у випадку $\omega = 0$

3.1. Періодичні розв'язки в неособливому випадку.

3.2. Періодичні розв'язки в особливому випадку.

3.1. Періодичні розв'язки в неособливому випадку

Побудови двох попередніх параграфів застосовні також для того випадку, коли частота власних коливань системи $\omega = 0$. Розглянемо рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu), \quad (3.1.1)$$

де функція $f(t)$ неперервна і 2π -періодична, а F – неперервна і 2π -періодична за t і аналітична за $x, \dot{x}, \mu$ в деякій області зміни величин $x, \dot{x}$ і при достатньо малих значеннях параметра μ .

З точки зору попередньої теорії рівняння (3.1.1) відповідає резонансному випадку, позаяк тут ω дорівнює цілому числу – нулеві. Але резонансна гармоніка тут відповідно нульова, а це породжує деякі особливості. Почнемо з породжуючого рівняння:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = f(t). \quad (3.1.2)$$

Вимога відсутності в правій частині нульової гармоніки для існування 2π -періодичного розв'язку рівняння (3.1.2) приводить до умови:

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0. \quad (3.1.3)$$

Тобто середнє значення функції на періоді має перетворюватися на нуль. Отже, розвинення в ряд Фур'є функції $f(t)$ повинно мати вигляд:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Тоді рівняння (3.1.2) має сім'ю 2π -періодичних розв'язків:

$$x_0(t) = M_0 + \varphi(t), \quad (3.1.4)$$

де

$$\varphi(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nt + b_n \sin nt}{n^2}.$$

Враховуючи співвідношення

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt,$$

можемо записати функцію $\varphi(t)$ у вигляді:

$$\varphi(t) = L[f(t)], \quad (3.1.5)$$

де L – лінійний інтегральний оператор.

Таким чином, породжуючий розв'язок залежить від однієї довільної сталої, а не від двох, як в попередніх параграфах, хоча рівняння (3.1.2) також другого порядку.

2π -періодичний розв'язок рівняння (3.1.1) шукаємо у вигляді степеневого ряду:

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \mu^3 x_3(t) + \dots \quad (3.1.6)$$

Тоді:

$$\ddot{x}_0 = f(t),$$

$$\ddot{x}_1 = (F),$$

$$\ddot{x}_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right),$$

$$\ddot{x}_3 = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x}_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) x_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right) x_1 \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right) x_1 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \mu} \right) \dot{x}_1, \\
& \ddot{x}_4 = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) x_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x}_3 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) x_1 x_2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right) \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \\
& + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right) (x_1 \dot{x}_2 + x_2 \dot{x}_1) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right) x_2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \mu} \right) \dot{x}_2 + G_4(t, x_0, \dot{x}_0, x_1, \dot{x}_1), \\
& \dots \\
& \ddot{x}_s = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) x_{s-1} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x}_{s-1} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) x_1 x_{s-2} + \\
& + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right) \dot{x}_1 \dot{x}_{s-2} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right) (x_1 \dot{x}_{s-2} + \dot{x}_1 x_{s-2}) + \\
& + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right) x_{s-2} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \mu} \right) \dot{x}_{s-2} + G_s(t, x_0, \dot{x}_0, \dots, x_{s-3}, \dot{x}_{s-3}), \quad s = 4, 5, \dots
\end{aligned}$$

Тут, як і раніше, через (F) позначено $F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)$. $G_s(t, x_0, \dot{x}_0, \dots, x_{s-3}, \dot{x}_{s-3})$ — поліноми відносно $x_0, \dot{x}_0, \dots, x_{s-3}, \dot{x}_{s-3}$ з 2π -періодичними за t коефіцієнтами.

Обмеження на константу M_0 в (3.1.4) одержується з умови відсутності нульової гармоніки в функції $F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)$, тобто з умови:

$$P(M_0) = \int_0^{2\pi} F(t, M_0 + \varphi(t), \dot{\varphi}(t), 0) dt = 0. \quad (3.1.7)$$

Кожному простому кореню рівняння (3.1.7), тобто такому, що $P'(M_0) \neq 0$, буде при достатньо малих значеннях μ відповідати 2π -періодичний розв'язок рівняння (3.1.1), і цей розв'язок буде аналітичним за μ .

Приклад. Розглянемо рівняння:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = l \sin t + \mu x^3. \quad (3.1.8)$$

Породжуюче рівняння

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = l \sin t \quad (3.1.9)$$

має сім'ю 2π -періодичних розв'язків:

$$x_0 = -l \sin t + M_0.$$

Підставляючи цей розв'язок в нелінійність, дістанемо:

$$x_0^3 = (-l \sin t + M_0)^3 = M_0^3 + \frac{3}{2} M_0 l^2 - \left(\frac{3}{4} l^3 + 3 M_0^2 l \right) \sin t - \frac{3}{2} M_0 l^2 \cos 2t + \frac{l^3}{4} \sin 3t.$$

Звідси видно, що середнє значення цієї функції:

$$P(M_0) = M_0^3 + \frac{3}{2} M_0 l^2.$$

Таким чином, рівняння (1.5.6) набуває вигляду:

$$M_0^3 + \frac{3}{2} M_0 l^2 = 0. \quad (3.1.10)$$

Рівняння (3.1.10) має корені $M_{0,1} = 0$, $M_{0,2} = -il\sqrt{3/2}$, $M_{0,3} = il\sqrt{3/2}$.

Всі ці корені прості, тобто для них виконано:

$$P'(M_0) = 3M_0^2 + \frac{3}{2} l^2 \neq 0.$$

Отже, кожному з цих коренів при достатньо малих μ відповідає 2π -періодичний розв'язок рівняння (3.1.8). Візьмемо, наприклад, корінь $M_0 = 0$. Тоді:

$$x_0(t) = -l \sin t.$$

2π -періодичний розв'язок рівняння (3.1.8) шукаємо у вигляді:

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \mu^3 x_3(t) + \dots$$

Рівняння відносно коефіцієнта $x_1(t)$ набуде вигляду:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{3}{4} l^3 \sin t + \frac{1}{4} l^3 \sin 3t.$$

Це рівняння має сім'ю 2π -періодичних розв'язків:

$$x_1(t) = M_1 + \frac{3l^3}{4} \sin t - \frac{l^3}{36} \sin 3t.$$

Умови на константу M_1 дістанемо з умови відсутності нульової гармоніки в правій частині рівняння відносно коефіцієнта $x_2(t)$ (тут враховано, що в даному випадку функція $F = x^3$ не залежить явно від μ):

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{\partial F(t, x_0, \dot{x}_0)}{\partial x} x_1 + \frac{\partial F(t, x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}} \dot{x}_1 = 3x_0^2 x_1 =$$

$$= \frac{3l^2}{2} M_1 + \frac{137}{96} l^5 \sin t + \dots$$

(невиписані доданки не містять нульової гармоніки). Тобто для визначення константи M_1 дістаємо рівняння:

$$\frac{3l^2}{2} M_1 = 0.$$

Звернемо увагу, що коефіцієнт $3l^2/2$ в цьому рівнянні не що інше, як $P'(M_0)$ для $M_0 = 0$. І цей коефіцієнт відмінний від нуля. Тому $M_1 = 0$.

Отже, кореню $M_0 = 0$ рівняння (3.1.10) відповідає при достатньо малих μ 2π -періодичний розв'язок рівняння (3.1.8):

$$x(t, \mu) = -l \sin t + \mu l^3 \left(\frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{36} \sin 3t \right) + \mu^2 \dots$$

3.2. Періодичні розв'язки в особливому випадку

Розглянемо тепер питання побудови 2π -періодичного розв'язку рівняння (3.1.1) в особливому випадку, а саме, коли справджується тотожність:

$$P(M_0) = \int_0^{2\pi} F(t, M_0 + \varphi(t), \dot{\varphi}(t), 0) dt \equiv 0. \quad (3.2.1)$$

Як і раніше, шукатимемо 2π -періодичний розв'язок рівняння (3.1.1) у вигляді ряду:

$$x(t, \mu) = x_0(t) + x_1(t)\mu + x_2(t)\mu^2 + x_3(t)\mu^3 + \dots + x_k(t)\mu^k + \dots \quad (3.2.2)$$

Для функції $x_1(t)$ маємо рівняння:

$$\ddot{x}_1 = F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), 0). \quad (3.2.3)$$

Цього разу це рівняння має 2π -періодичний розв'язок при будь-якому виборі константи M_0 в породжуючому розв'язку (3.1.4), адже рівняння (3.2.1) задовольняється зараз тотожно. Цей розв'язок має вигляд:

$$x_1(t) = M_1 + \varphi_1(t), \quad (3.2.4)$$

де $\varphi_1(t)$ – який-небудь частинний 2π -періодичний розв’язок рівняння (3.2.3), а M_1 – довільна стала. І, таким чином, функція $x_1(t)$ містить вже дві довільні сталі M_0 та M_1 .

Запишемо умови існування 2π -періодичного розв’язку рівняння для $x_2(t)$:

$$\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) (M_1 + \varphi_1(t)) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{\varphi}_1(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right) \right] dt = 0.$$

Або

$$M_1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) dt + \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \varphi_1(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{\varphi}_1(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right) \right] dt = 0.$$

Але, оскільки

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) dt = P'(M_0) = 0, \quad (3.2.5)$$

то дістанемо рівняння, що містить лише константу M_0 :

$$Q(M_0) = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \varphi_1(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{\varphi}_1(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right) \right] dt = 0. \quad (3.2.6)$$

Це й буде рівняння для визначення константи M_0 у породжуючому розв’язку. На відміну від неособливого випадку (п. 3.1) воно отримується з умови існування 2π -періодичного розв’язку рівняння відносно $x_2(t)$, а не $x_1(t)$.

Знайдемо:

$$Q'(M_0) = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \varphi_1(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \frac{d\varphi_1(t)}{dM_0} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right) \dot{\varphi}_1(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \frac{d\dot{\varphi}_1(t)}{dM_0} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right) \right] dt.$$

Тут врахували, що функції $\varphi_1(t)$, $\dot{\varphi}_1(t)$ також залежать від M_0 , адже $\varphi_1(t)$ визначається з рівняння, що містить у правій частині M_0 . В ролі функції $\varphi_1(t)$ згідно (3.1.5) можемо взяти:

$$\varphi_1(t) = L[F(t, M_0 + \varphi(t), \dot{\varphi}(t), 0)] = L[F].$$

Тоді

$$\dot{\phi}_1(t) = \frac{d}{dt}(L[(F)]), \quad \frac{d\phi_1(t)}{dM_0} = L\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right], \quad \frac{d\dot{\phi}_1(t)}{dM_0} = \frac{d}{dt}\left(L\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right]\right).$$

З урахуванням цього $Q'(M_0)$ переписується наступним чином:

$$Q'(M_0) = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) L[(F)] + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) L\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right] + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right) \frac{d}{dt}(L[(F)]) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \frac{d}{dt}\left(L\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right]\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right) \right] dt.$$

Припустимо, що рівняння (3.2.6) не задовольняється тотожно, і M_0 – який-небудь корінь цього рівняння, такий, що:

$$Q'(M_0) \neq 0. \quad (3.2.7)$$

Покажемо, що в цьому випадку коефіцієнти ряду (3.2.2) визначаються однозначно. Складемо рівняння для $x_{k+2}(t)$, виділивши в ньому явно члени, що залежать від $x_k(t)$ и $x_{k+1}(t)$:

$$\ddot{x}_{k+2} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) x_{k+1} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x}_{k+1} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) x_1 x_k + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right) \dot{x}_1 \dot{x}_k + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right) (x_1 \dot{x}_k + \dot{x}_1 x_k) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right) x_k + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \mu} \right) \dot{x}_k + G_{k+2}(t, x_0, \dot{x}_0, \dots, x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}). \quad (3.2.8)$$

Припустимо, що функції $x_0(t), \dots, x_{k+1}(t)$ вже вийшли 2π -періодичними. Ці функції мають вигляд:

$$x_s(t) = M_s + \overline{\varphi_s(t)}, \quad s = \overline{1, k+1}, \quad (3.2.9)$$

де $\varphi_s(t)$ – який-небудь частинний 2π -періодичний розв'язок рівняння для функції $x_s(t)$, а M_s – стала, причому константи M_k, M_{k+1} ще підлягають визначенню. Щоб їх визначити, складемо умову існування 2π -періодичного розв'язку рівняння (3.2.8). При $k > 1$ дістанемо:

$$\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) x_{k+1} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x}_{k+1} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) x_1 x_k + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right) \dot{x}_1 \dot{x}_k + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right) (x_1 \dot{x}_k + \dot{x}_1 x_k) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right) x_k + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \mu} \right) \dot{x}_k \right] dt = 0.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right) x_k + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \mu} \right) \dot{x}_k + G_{k+2}(t, x_0, \dot{x}_0, \dots, x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}) \Big] dt = 0. \quad (3.2.10)$$

Замінімо тут $x_k(t)$, $x_{k+1}(t)$ їх виразами з (3.2.9):

$$\begin{aligned} & M_{k+1} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) dt + \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \varphi_{k+1}(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{\varphi}_{k+1}(t) + \right. \\ & + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) (M_1 + \varphi_1(t))(M_k + \varphi_k(t)) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right) \dot{\varphi}_1(t) \dot{\varphi}_k(t) + \\ & + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right) ((M_1 + \varphi_1(t)) \dot{\varphi}_k(t) + \dot{\varphi}_1(t) (M_k + \varphi_k(t))) + \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right) (M_k + \varphi_k(t)) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \mu} \right) \dot{\varphi}_k(t) + G_{k+2}(\dots) \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

З урахуванням (3.2.5) величина M_{k+1} тут зникає. Розкриваючи тепер дужки, і, враховуючи, що

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) dt = 0,$$

дістанемо:

$$\begin{aligned} & M_k \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \varphi_1(t) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right) \dot{\varphi}_1(t) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right) \right] dt + \\ & + \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \varphi_{k+1}(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{\varphi}_{k+1}(t) \right] dt + N_k = 0, \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

де

$$\begin{aligned} N_k = & \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) (M_1 \varphi_k(t) + \varphi_1(t) \varphi_k(t)) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right) \dot{\varphi}_1(t) \dot{\varphi}_k(t) + \right. \\ & + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right) (M_1 \dot{\varphi}_k(t) + \varphi_1(t) \dot{\varphi}_k(t) + \dot{\varphi}_1(t) \varphi_k(t)) + \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right) \varphi_k(t) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \mu} \right) \dot{\varphi}_k(t) + G_{k+2}(\dots) \right] dt \end{aligned}$$

– визначена стала, що не залежить від M_k , M_{k+1} .

Помітимо, що стала M_k буде також міститися в функціях $\varphi_{k+1}(t)$, $\dot{\varphi}_{k+1}(t)$, оскільки $\varphi_{k+1}(t) \in 2\pi$ -періодичним розв'язком рівняння, права

частина якого містить M_k . Встановимо в явній формі залежність $\varphi_{k+1}(t)$ від M_k . Для цього $\varphi_{k+1}(t)$ подамо у вигляді:

$$\varphi_{k+1}(t) = \xi_{k+1}(t) + \eta_{k+1}(t), \quad (3.2.13)$$

де $\xi_{k+1}(t)$ – який-небудь 2π -періодичний розв'язок рівняння

$$\ddot{\xi}_{k+1} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) M_k, \quad (3.2.14)$$

а $\eta_{k+1}(t)$ – 2π -періодичний розв'язок рівняння:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_{k+1} = & \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \varphi_k(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{\varphi}_k(t) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) x_1(t) x_{k-1}(t) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right) \dot{x}_1(t) \dot{x}_{k-1}(t) + \\ & + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right) (x_1(t) \dot{x}_{k-1}(t) + \dot{x}_1(t) x_{k-1}(t)) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right) x_{k-1}(t) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \mu} \right) \dot{x}_{k-1}(t) + \\ & + G_{k+1}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \dots, x_{k-2}(t), \dot{x}_{k-2}(t)). \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Оскільки функція $\varphi_{k+1}(t)$ за умовою 2π -періодична, то у випадку 2π -періодичності функції $\xi_{k+1}(t)$ автоматично буде 2π -періодичною і функція $\eta_{k+1}(t)$. Умова (3.2.5) гарантує існування частинного 2π -періодичного розв'язку рівняння (3.2.14), і цей розв'язок має вигляд:

$$\begin{aligned} \xi_{k+1}(t) &= L \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) M_k \right] = M_k L \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \right], \\ \dot{\xi}_{k+1}(t) &= M_k \frac{d}{dt} \left(L \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \right] \right). \end{aligned}$$

Тоді рівняння (1.6.12) перепишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} M_k \int_0^{2\pi} & \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) L[(F)] + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right) \frac{d}{dt} (L[(F)]) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) L \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \right] + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \frac{d}{dt} \left(L \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \right] \right) \right] dt + \tilde{N}_k = 0, \end{aligned}$$

де

$$\tilde{N}_k = N_k + \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \eta_{k+1}(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{\eta}_{k+1}(t) \right] dt.$$

Або:

$$Q'(M_0)M_k + \tilde{N}_k = 0. \quad (3.2.16)$$

Внаслідок умови (3.2.7) рівняння (3.2.16) має єдиний корінь

$$M_k = -\frac{\tilde{N}_k}{Q'(M_0)}.$$

Отже, ми встановили, що для кожного породжуючого розв'язку, в якому стала M_0 задовольняє рівняння (3.2.6) і умову (3.2.7), існує один і тільки один ряд (3.2.2), що формально задовольняє рівняння (3.1.1). Питання збіжності цього ряду ми тут не розглядаємо.

Приклад. Розглянемо коливання маятника, що описуються рівнянням:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\mu^2 \sin \varphi - \mu b \sin(\varphi - \delta) \cos t, \quad (3.2.17)$$

де $\varphi = \varphi(t)$ – кут відхилення маятника від вертикалі, b, δ – деякі відомі сталі.

Породжуюче рівняння має вигляд:

$$\frac{d^2\varphi_0}{dt^2} = 0.$$

Це рівняння має 2π -періодичний розв'язок $\varphi_0 = M_0$, що залежить від однієї довільної сталої M_0 . Шукатимемо 2π -періодичний розв'язок рівняння (3.2.17) у вигляді ряду:

$$\varphi(t, \mu) = \varphi_0(t) + \mu\varphi_1(t) + \mu^2\varphi_2(t) + \mu^3\varphi_3(t) + \dots \quad (3.2.18)$$

Для $\varphi_1(t)$ одержимо рівняння:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -b \sin(M_0 - \delta) \cos t. \quad (3.2.19)$$

Це рівняння припускає 2π -періодичний розв'язок при будь-якому значенні сталої M_0 , тобто ми маємо справу з особливим випадком. З (3.2.19) знаходимо:

$$\varphi_1(t) = b \cos t \cdot \sin(M_0 - \delta) + M_1, \quad (3.2.20)$$

де M_1 – довільна стала. Запишемо рівняння для функції $\varphi_2(t)$:

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = -\sin M_0 - b^2 \sin(M_0 - \delta) \cos(M_0 - \delta) \cos^2 t - M_1 b \cos(M_0 - \delta) \cos t.$$

Для того, щоб це рівняння мало 2π -періодичний розв'язок, необхідно і достатньо, щоб розвинення в ряд Фур'є його правої частини не містило нульової гармоніки, тобто вільного члена. Це дає:

$$Q(M_0) = -\sin M_0 - \frac{b^2}{4} \sin 2(M_0 - \delta) = 0, \quad (3.2.21)$$

після чого знаходимо:

$$\varphi_2(t) = bM_1 \cos(M_0 - \delta) \cos t + \frac{b^2}{16} \sin 2(M_0 - \delta) \cos 2t + M_2.$$

Рівняння (3.2.21) визначає величину M_0 . Стала M_1 визначиться з умови існування 2π -періодичного розв'язку рівняння для $\varphi_3(t)$. Це рівняння має вигляд:

$$\frac{d^2 \varphi_3}{dt^2} = -\cos M_0 \cdot \varphi_1(t) - b \cos(M_0 - \delta) \varphi_2(t) \cos t + \frac{b}{2} \sin(M_0 - \delta) \cdot \varphi_1^2(t) \cos t.$$

Умова 2π -періодичності функції $\varphi_3(t)$ дає:

$$\left(-\cos M_0 - \frac{b^2}{2} \cos 2(M_0 - \delta) \right) M_1 = -Q'(M_0) M_1 = 0.$$

Таким чином, $M_1 = 0$, після чого з (3.2.18) і (3.2.20) дістанемо:

$$\varphi(t, \mu) = M_0 + \mu b \sin(M_0 - \delta) \cos t + \dots$$

Лекція 4. Періодичні розв'язки автономних рівнянь

4.1. Умови існування періодичних розв'язків.

4.2. Метод Лінштєдта–Пуанкаре знаходження періодичного розв'язку автономного рівняння.

4.1. Умови існування періодичних розв'язків

Розглядатимемо тепер рівняння, що не містять явно незалежної змінної t :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu F(x, \dot{x}, \mu). \quad (4.1.1)$$

Такі рівняння називаються *автономними*. Вони мають низку особливостей. Якщо для неавтономного рівняння (1.2.1) період розв'язку визначався періодом вільного члена $f(t)$, то для рівняння (4.1.1) можливі періодичні розв'язки довільного періоду, який, взагалі кажучи, буде залежати від μ : $T = T(\mu)$.

Крім того, рівняння (4.1.1) не змінюється при заміні t на $t + h$, де h – стала. Дійсно,

$$\frac{d^2 x(t+h)}{d(t+h)^2} + \omega^2 x(t+h) = \mu F \left(x(t+h), \frac{dx(t+h)}{d(t+h)}, \mu \right).$$

Оскільки $d(t+h) = dt$, $d(t+h)^2 = dt^2$, то

$$\frac{d^2 x(t+h)}{dt^2} + \omega^2 x(t+h) = \mu F \left(x(t+h), \frac{dx(t+h)}{dt}, \mu \right).$$

Отже, функція $x(t+h)$ є розв'язком рівняння (4.1.1). Геометрично це означає, що лінія, що отримується з інтегральної кривої рівняння (4.1.1) паралельним зсувом вздовж осі Ox , є також інтегральною кривою цього рівняння.

Це дає можливість припустити, що похідна шуканого періодичного розв'язку в початковий момент часу дорівнює нулю. Дійсно, якщо період шуканого періодичного розв'язку дорівнює T , то $x(0) = x(T)$. Тоді за теоремою Ролля на відрізку $[0, T]$ знайдеться точка t_1 така, що $\dot{x}(t_1) = 0$. Прийmemo цей момент за початковий. Це буде означати, що в рівнянні (4.1.1) здійснено зсув $t \rightarrow t + t_1$. Таким чином, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $\dot{x}(0) = 0$.

Розглянемо породжуюче рівняння:

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0. \quad (4.1.2)$$

Розв'язок цього рівняння, що задовольняє умову $\dot{x}_0(0) = 0$, має вигляд:

$$x_0 = M_0 \cos \omega t. \quad (4.1.3)$$

Його період $T_0 = 2\pi/\omega$. Позначимо періодичний розв'язок рівняння (4.1.1) через $x(t, \beta, \mu)$ з огляду на те, що $x(0, \beta, \mu) = x_0(0) + \beta$, $\dot{x}(0, \beta, \mu) = 0$. Або:

$$\begin{cases} x(0, \beta, \mu) = M_0 + \beta, \\ \dot{x}(0, \beta, \mu) = 0. \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Тут $\beta = \beta(\mu)$ – невідома функція така, що $\beta(0) = 0$.

Період шуканого розв'язку завчасно невідомо. Він має вигляд:

$$T = T_0 + \alpha = \frac{2\pi}{\omega} + \alpha,$$

де $\alpha = \alpha(\mu)$ – також невідома функція з умовою $\alpha(0) = 0$.

Обидві невідомі функції α і β знайдуться з умови періодичності розв'язку $x(t, \beta, \mu)$ та його похідної, а також умови $\dot{x}(0, \beta, \mu) = 0$, а саме:

$$\begin{cases} x(T_0 + \alpha, \beta, \mu) - x(0, \beta, \mu) = x(T_0 + \alpha, \beta, \mu) - M_0 - \beta = 0, \\ \dot{x}(T_0 + \alpha, \beta, \mu) = 0. \end{cases} \quad (4.1.5)$$

Можна довести справедливість наступного твердження:

Теорема. Кожному ненульовому і некрратному кореню рівняння

$$P(M_0) = \int_0^{2\pi} F(M_0 \cos u, -\omega M_0 \sin u, 0) \sin u du = 0$$

відповідає єдиний, причому аналітичний розв'язок рівнянь (4.1.5), а, отже, єдиний періодичний розв'язок рівняння (4.1.1), і цей розв'язок буде аналітичним відносно μ . Аналітичним за μ буде і період $T(\mu) = 2\pi/\omega + \alpha(\mu)$ цього розв'язку.

Зауваження. Якщо $P(M_0) \equiv 0$, то будь-який розв'язок рівняння (4.1.1) буде періодичним. Такий випадок виникає тоді, коли нелінійність F не залежить від $\dot{x}$ (так звані консервативні системи).

4.2. Метод Лінштедта-Пуанкаре знаходження періодичного розв'язку автономного рівняння

Періодичний розв'язок рівняння (4.1.1) нема сенсу шукати у вигляді ряду

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots, \quad (4.2.1)$$

оскільки його коефіцієнти не будуть періодичними функціями. Це пояснюється тим, що період рівняння залежить від μ . Наприклад, у функції $\sin((1+\mu)t)$ період дорівнює $2\pi/(1+\mu)$, тобто залежить від μ . Розклад цієї функції за степенями μ має вигляд:

$$\sin((1+\mu)t) = \sin(t + \mu t) = \sin t + \mu t \cos t - \frac{\mu^2 t^2}{2} \sin t + \dots$$

Звідси видно, що коефіцієнти цього розкладу неперіодичні.

Розглянемо наступний приклад. Нехай задано рівняння

$$\ddot{x} + x = \mu(x^2 + x).$$

Якщо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді степеневого ряду (4.2.1), то дістанемо:

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0.$$

Звідси $x_0 = M \cos(t + \varphi)$, де M, φ – довільні сталі. Далі:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = x_0^2 + x_0 = \frac{M^2}{2} - \frac{M^2}{2} \cos(2(t + \varphi)) + M \cos(t + \varphi).$$

Звідси

$$x_1 = A + Bt \cos(t + \varphi) + C \cos(2(t + \varphi)) + M \cos(t + \varphi).$$

Доданок $Bt \cos(t + \varphi)$ неперіодичний (так званий *секулярний*). Величина Bt характеризує амплітуду коливань, яка зростає зі зростанням t . Тому можливість використання формул, що отримуються, обмежується лише вельми невеликим проміжком зміни t .

У зв'язку з цим виникає задача одержати такі розвинення періодичних розв'язків рівняння (4.1.1), які б не містили секулярних членів. Одним з методів отримання розвинень такого типу є *метод Лінштедта–Пуанкаре*. За своєю ідеєю він близький до вищевикладених методів Пуанкаре, але результати Лінштедта з'явилися за 10 років до появи основних праць Пуанкаре (в літературі також зустрічається назва *метод Ньюкомба–Лінштедта*).

Нехай період шуканого розв'язку

$$T = \frac{2\pi}{\omega} + \alpha(\mu) = \frac{2\pi}{\omega} (1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots). \quad (4.2.2)$$

Тобто ми розкладаємо невідомий період шуканого розв'язку в ряд за степенями параметра μ . Аналогічно в ряд за степенями параметра μ розкладається частота шуканого розв'язку:

$$\omega_1 = 2\pi/T = \omega / (1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots) = \omega (1 + a_1\mu + a_2\mu^2 + \dots).$$

В рівнянні (1.7.1) здійснимо заміну змінної:

$$t = \frac{\tau}{\omega} (1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots). \quad (4.2.3)$$

Якщо $t = T = T(\mu)$, то $\tau = 2\pi$. Фактично заміна (4.2.3) вводить невідому частоту до самого рівняння. Дійсно, рівняння (4.1.1) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x(1 + h_1 \mu + h_2 \mu^2 + \dots)^2 = \\ & = \frac{\mu}{\omega^2} F\left(x, \omega(1 + h_1 \mu + h_2 \mu^2 + \dots)^{-1} \frac{dx}{d\tau}, \mu\right) (1 + h_1 \mu + h_2 \mu^2 + \dots)^2. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Період розв'язку цього рівняння дорівнює 2π , тобто він не залежить від μ . Цей новий періодичний розв'язок також аналітичний за μ . Шукатимемо його у вигляді:

$$x = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \dots \quad (4.2.5)$$

Коефіцієнти $x_j(\tau)$ періодичні з періодом 2π . Крім того, виконано початкові умови:

$$\dot{x}_j(0) = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.2.6)$$

Підставляючи вираз (4.2.5) у рівняння (4.2.4), і, зрівнюючи коефіцієнти біля однакових степенях μ , дістанемо:

$$\frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + x_0 = 0,$$

Звідки внаслідок (4.2.6):

$$x_0 = M_0 \cos \tau.$$

Далі:

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = -2h_1 M_0 \cos \tau + \frac{1}{\omega^2} F(M_0 \cos \tau, -\omega M_0 \sin \tau, 0). \quad (4.2.7)$$

Для m -го наближення дістанемо:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 x_m}{d\tau^2} + x_m = -2h_m M_0 \cos \tau - 2h_1 x_{m-1} + \\ & + \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) x_{m-1} + \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \frac{dx_{m-1}}{d\tau} + F_m. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Під символом (F) розуміється $F(M_0 \cos \tau, -\omega M_0 \sin \tau, 0)$. F_m – деякий многочлен від $x_0, x_1, \dots, x_{m-2}$ зі сталими коефіцієнтами. Цей многочлен залежить також від $h_1, \dots, h_{m-1}$, але не залежить від h_m .

Для того, щоб рівняння (4.2.8) мало 2π -періодичний розв'язок, необхідно виконання умов відсутності резонансних гармонік у його правій частині, тобто:

$$-2h_m - 2h_1 M_{m-1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{M_{m-1}}{\pi \omega^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \cos \tau - \omega \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \sin \tau \right\} \cos \tau d\tau + \\
& + \frac{N_{m-1}}{\pi \omega^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \sin \tau + \omega \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \cos \tau \right\} \cos \tau d\tau + \\
& + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_m(\tau) \cos \tau d\tau = 0. \\
& - 2h_1 N_{m-1} + \frac{M_{m-1}}{\pi \omega^2} \int_0^{2\pi} \{ \}_1 \sin \tau d\tau + \frac{N_{m-1}}{\pi \omega^2} \int_0^{2\pi} \{ \}_2 \sin \tau d\tau + \\
& + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_m(\tau) \sin \tau d\tau = 0.
\end{aligned}$$

Зокрема, для того, щоб рівняння для x_1 мало 2π -періодичний розв'язок, необхідно виконання рівностей:

$$\begin{aligned}
P(M_0) &= \int_0^{2\pi} F(M_0 \cos \tau, -\omega M_0 \sin \tau, 0) \sin \tau d\tau = 0, \\
-2h_1 M_0 + \frac{1}{\pi \omega^2} \int_0^{2\pi} F(M_0 \cos \tau, -\omega M_0 \sin \tau, 0) \cos \tau d\tau &= 0.
\end{aligned}$$

Приклад. Розглянемо рівняння автоколивань лампового генератора:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \mu (\alpha - \gamma^2 x^2) \frac{dx}{dt}. \quad (4.2.9)$$

Здійснимо в рівнянні (4.2.9) підстановку:

$$t = \frac{\tau}{\omega} (1 + h_1 \mu + h_2 \mu^2 + \dots); \quad \tau = \frac{\omega t}{1 + h_1 \mu + h_2 \mu^2 + \dots}.$$

Дістанемо:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x (1 + h_1 \mu + h_2 \mu^2 + \dots)^2 = \frac{\mu}{\omega} (\alpha - \gamma^2 x^2) (1 + h_1 \mu + h_2 \mu^2 + \dots) \frac{dx}{d\tau}. \quad (4.2.10)$$

Розв'язок рівняння (4.2.10) шукаємо у вигляді ряду:

$$x = x_0(\tau) + x_1(\tau)\mu + x_2(\tau)\mu^2 + \dots, \quad (4.2.11)$$

де $x_0(\tau) = M_0 \cos \tau$, а $x_1(\tau)$, $x_2(\tau)$, . . . – 2π -періодичні функції змінної τ , що задовольняють початкові умови:

$$\dot{x}_j(0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

Підставляючи ряд (4.2.1) у рівняння (4.2.10), дістаємо наступне рівняння для $x_1(\tau)$:

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = -2h_1 M_0 \cos \tau - \frac{1}{\omega} \left(\alpha - \gamma^2 M_0^2 \cos^2 \tau \right) M_0 \sin \tau = \\ = \left(-\frac{\alpha M_0}{\omega} + \frac{\gamma^2 M_0^3}{4\omega} \right) \sin \tau + \frac{\gamma^2 M_0^3}{4\omega} \sin 3\tau - 2h_1 \cos \tau.$$

Дорівнюючи до нуля коефіцієнти біля $\sin \tau$ і $\cos \tau$, одержимо:

$$h_1 = 0, \quad -\frac{\alpha M_0}{\omega} + \frac{\gamma^2 M_0^3}{4\omega} = 0.$$

Якщо $M_0 \neq 0$, то $M_0 = 2\sqrt{\alpha/\gamma}$.

Отже, рівняння для $x_1(\tau)$ набуває вигляду:

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = \frac{\gamma^2 M_0^3}{4\omega} \sin 3\tau,$$

звідки:

$$x_1(\tau) = -\frac{\gamma^2 M_0^3}{32\omega} \sin 3\tau + M_1 \cos \tau + N_1 \sin \tau,$$

де M_1, N_1 – довільні сталі. Рівняння для $x_2(\tau)$ має вигляд:

$$\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + x_2 = -2h_2 M_0 \cos \tau + \frac{\alpha}{\omega} \cdot \frac{dx_1}{d\tau} - \frac{\gamma^2 M_0^2}{\omega} \cos^2 \tau \cdot \frac{dx_1}{d\tau} + \\ + \frac{\gamma^2 M_0^2}{\omega} \sin 2\tau \cdot x_1 = M_0 \left(-2h_2 + \frac{\alpha^2}{8\omega^2} \right) \cos \tau + \frac{\gamma^2 M_0^2 M_1}{2\omega} \sin \tau + \dots$$

Невиписані в правій частині доданки не містять $\cos \tau, \sin \tau$. З умови рівності коефіцієнтів біля цих функцій нулю, матимемо:

$$M_1 = 0, \quad h_2 = \frac{\alpha^2}{16\omega^2}.$$

Оскільки

$$\dot{x}_1 = -\frac{3\gamma^2 M_0^3}{32\omega} \cos 3\tau + N_1 \cos \tau,$$

то умова $\dot{x}_1(0) = 0$ дає:

$$-\frac{3\gamma^2 M_0^3}{32\omega} + N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{3\gamma^2 M_0^3}{32\omega}.$$

Таким чином, дістаємо:

$$x(\tau) = M_0 \cos \tau + \left(-\frac{\gamma^2 M_0^3}{4\omega} \sin 3\tau + \frac{3\gamma^2 M_0^3}{32\omega} \sin \tau \right) \mu + \dots$$

Враховуючи тепер співвідношення

$$\tau = \omega t \left(1 + \frac{\alpha^2}{16\omega^2} \mu^2 + \dots \right)^{-1} \approx \omega t \left(1 - \frac{\alpha^2}{16\omega^2} \mu^2 \right), \quad M_0 = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\gamma},$$

остаточно маємо:

$$x \approx \frac{2\sqrt{\alpha}}{\gamma} \cos \left(\omega t \left(1 - \frac{\alpha^2}{16\omega^2} \mu^2 \right) \right) + \left(\frac{3\gamma^2 M_0^3}{32\omega} \sin \left(\omega t \left(1 - \frac{\alpha^2}{16\omega^2} \mu^2 \right) \right) - \frac{\gamma^2 M_0^3}{4\omega} \sin \left(3 \left(\omega t \left(1 - \frac{\alpha^2}{16\omega^2} \mu^2 \right) \right) \right) \right) \mu.$$

Розділ 2

МЕТОД КРИЛОВА–БОГОЛЮБОВА

Лекція 5. Асимптотичне інтегрування квазілінійних автономних диференціальних рівнянь

- 5.1. Асимптотичні ряди та їх властивості.
- 5.2. Побудова асимптотичного розв'язку автономного диференціального рівняння, близького до лінійного.
- 5.3. Визначення коефіцієнтів асимптотичних розвинень.

5.1. Асимптотичні ряди та їх властивості

В главі 1 періодичні розв'язки диференціальних рівнянь ми шукали у вигляді ряду за степенями малого параметру μ . І за теоремою Пуанкаре цей ряд є збіжним при достатньо малих значеннях μ . Разом з цим в задачах нелінійної механіки, а також в інших галузях застосувань математики, доводиться мати справу зі степеневими рядами іншого типу, які називаються *асимптотичними*. Такі ряди, взагалі кажучи, розбіжні, тем не менш, їх часткові суми можуть досить добре апроксимувати шукані величини (корені алгебраїчних рівнянь, інтеграли, розв'язки диференціальних рівнянь тощо).

Розглянемо приклад. Нехай треба наближено обчислити інтеграл

$$I(\varepsilon) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1 + \varepsilon x} dx \quad (5.1.1)$$

при малих $\varepsilon > 0$. Розкладемо функцію $\frac{1}{1 + \varepsilon x}$ в степеневий ряд:

$$\frac{1}{1 + \varepsilon x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n x^n, \quad (5.1.2)$$

що збігається при $x \in \left(-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Підставляючи розвинення (5.1.2) в інтеграл (5.1.1), знаходимо:

$$I(\varepsilon) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n x^n e^{-x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$$

Але оскільки

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!,$$

то

$$I(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! \varepsilon^n. \quad (5.1.3)$$

Легко бачити, що цей ряд розбігається для будь-яких $\varepsilon > 0$. Здавалось би, для наближеного обчислення величини $I(\varepsilon)$ його не можна використати. Тем не менш, деякі можливості для цього все ж існують.

Розглянемо часткову суму ряду (5.1.3):

$$I_N(\varepsilon) = \sum_{n=0}^N (-1)^n n! \varepsilon^n.$$

Тоді

$$I(\varepsilon) = I_N(\varepsilon) + R_N(\varepsilon),$$

де $R_N(\varepsilon)$ – залишок ряду (5.1.3). Оскільки

$$\frac{1}{1+\varepsilon x} = \sum_{n=0}^N (-1)^n \varepsilon^n x^n + (-1)^{N+1} \frac{\varepsilon^{N+1} x^{N+1}}{1+\varepsilon x},$$

то

$$R_N(\varepsilon) = (-1)^{N+1} \varepsilon^{N+1} \int_0^{+\infty} \frac{x^{N+1} e^{-x}}{1+\varepsilon x} dx.$$

Цей залишок прямує до нескінченності для будь-яких $\varepsilon > 0$, якщо $N \rightarrow +\infty$, що узгоджується з тим, що ряд (5.1.3) розбіжний. Але ми не будемо спрямовувати N до $+\infty$, а зафіксуємо N і дослідимо $R_N(\varepsilon)$ для фіксованого N . Маємо:

$$\frac{1}{1+\varepsilon x} < \frac{1}{\varepsilon x},$$

отже,

$$|R_N(\varepsilon)| = \varepsilon^{N+1} \int_0^{+\infty} \frac{x^{N+1} e^{-x}}{1+\varepsilon x} dx < \varepsilon^N \int_0^{+\infty} x^N e^{-x} dx = N! \varepsilon^N.$$

Для фіксованого N і $\varepsilon \rightarrow 0$ остання величина прямує до нуля, отже, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_N(\varepsilon) = 0$ (для фіксованого N). Тому, хоча ряд (5.1.3) розбігається, але для фіксованого N перші N членів цього ряду можуть бути придатними для обчислення шуканого інтеграла $I(\varepsilon)$ з похибкою, що

може бути зроблена скільки завгодно малою для достатньо малих значень ε . Причому ця похибка має порядок $O(\varepsilon^N)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Ряди такого типу і називаються *асимптотичними в сенсі Пуанкаре*.

Перейдемо до точних означень.

Розглянемо функцію $f(t, \varepsilon)$ і ряд вигляду

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t, \varepsilon) \varepsilon^k. \quad (5.1.4)$$

Функцію $f(t, \varepsilon)$ і кожен член ряду (5.1.4) визначено в деякій множині $G = \{t \in [0, T], \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\}$. Позначимо

$$U_n(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n u_k(t, \varepsilon) \varepsilon^k$$

– часткова сума ряду (5.1.4).

Означення. Якщо для будь-якого $n > 0$ має місце співвідношення

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t, \varepsilon) - U_n(t, \varepsilon)}{\varepsilon^n} = 0, \quad (5.1.5)$$

то ряд (5.1.4) називається *асимптотичним зображенням функції $f(t, \varepsilon)$ на множині G* .

У цьому випадку домовимось писати:

$$f(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t, \varepsilon) \varepsilon^k$$

Якщо параметр $\varepsilon > 0$ досить малий, то різниця $f(t, \varepsilon) - U_n(t, \varepsilon)$ також буде мала, і хоча ряд (5.1.4) розбіжний, сума $U_n(t, \varepsilon)$ досить добре апроксимує функцію $f(t, \varepsilon)$.

Будь-який збіжний ряд є, природно, і асимптотичним. Обернене твердження несправедливе, як показує вищенаведений приклад.

З даного означення випливає дуже важлива рівність:

$$f(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n u_k(t, \varepsilon) \varepsilon^k + o(\varepsilon^n). \quad (5.1.6)$$

У цьому випадку домовимось писати:

$$f(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t, \varepsilon) \varepsilon^k.$$

Зосередимось на операціях, що можна виконувати з асимптотичними рядами.

Два асимптотичних ряди можна додавати та множити, тобто, якщо

$$f(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t, \varepsilon) \varepsilon^k, \quad g(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t, \varepsilon) \varepsilon^k,$$

то

$$f(t, \varepsilon) + g(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (u_k(t, \varepsilon) + v_k(t, \varepsilon)) \varepsilon^k,$$

$$f(t, \varepsilon) \cdot g(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^k u_s(t, \varepsilon) v_{k-s}(t, \varepsilon) \right) \varepsilon^k.$$

Якщо кожен член асимптотичного ряду (5.1.4) інтегровний на відрізьку $[t_1, t_2] \subset [0, T]$, то має місце асимптотична рівність:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t, \varepsilon) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{t_1}^{t_2} u_k(t, \varepsilon) dt \right) \varepsilon^k,$$

тобто асимптотичні ряди можна почленно інтегрувати і в результаті знову отримуються асимптотичні ряди.

Ділення та почленне диференціювання асимптотичних рядів також можливі, але за певних додаткових умов.

Якщо $v_0(t, \varepsilon) \neq 0$ в G , то

$$\frac{f(t, \varepsilon)}{g(t, \varepsilon)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} d_k(t, \varepsilon) \varepsilon^k,$$

де коефіцієнти $d_k(t, \varepsilon)$ послідовно знаходяться з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь:

$$v_0(t, \varepsilon) d_0(t, \varepsilon) = u_0(t, \varepsilon),$$

$$v_0(t, \varepsilon) d_k(t, \varepsilon) = u_k(t, \varepsilon) - \sum_{l=1}^k v_l(t, \varepsilon) d_{k-l}(t, \varepsilon), \quad k = 1, 2, \dots$$

Як показав А. Пуанкаре, почленно диференціювати асимптотичний ряд (5.1.4) у загальному випадку не можна, навіть якщо кожен член ряду (5.1.4) є диференційовною функцією. Інакше кажучи, якщо ряд (5.1.4) є асимптотичним зображенням функції $f(t, \varepsilon)$ в G , то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{du_k(t, \varepsilon)}{dt} \varepsilon^k$$

може не бути асимптотичним зображенням в G функції $df(t, \varepsilon)/dt$.

Водночас А. Пуанкаре показав, що асимптотичними рядами для побудови розв'язків можна користуватися в наступному сенсі. Нехай диференційована за t функція $u(t, \varepsilon)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{du}{dt} = U(u, t, \varepsilon), \quad (5.1.7)$$

а ряд

$$D(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t, \varepsilon) \varepsilon^k$$

формально задовольняє рівняння (5.1.7) (тобто, не має значення, збіжний він, чи розбіжний). Запишемо асимптотичну рівність:

$$\frac{dD(t, \varepsilon)}{dt} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(t, \varepsilon)}{dt} \varepsilon^k.$$

Можна твердити, що

$$\frac{du(t, \varepsilon)}{dt} \sim \frac{dD(t, \varepsilon)}{dt}.$$

Сформулюємо тепер асимптотичну рівність для складеної функції. Нехай функція $F(z)$ аналітична в деякому околі точки $z = 0$. Нехай також має місце асимптотична рівність

$$z(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t, \varepsilon) \varepsilon^k.$$

Тоді має місце асимптотична рівність

$$F(z(t, \varepsilon)) \sim F\left(\sum_{k=0}^{\infty} z_k(t, \varepsilon) \varepsilon^k\right).$$

Сформулюємо без доведення* фундаментальну теорему Пуанкаре, що обґрунтовує асимптотичні розвинення в теорії звичайних диференціальних рівнянь

Теорема. Нехай маємо задачу Коші

$$\frac{du}{dt} = U(u, t, \varepsilon), \quad u(0, \varepsilon) = u_0. \quad (5.1.8)$$

Нехай виконано наступні умови

1) вектор-функція $U(u, t, \varepsilon)$ визначена, неперервна й обмежена $(n+2)$ -вимірній області $G_{n+2} = G_n \times [0, T] \times [0, \varepsilon_0]$, аналітична за u та ε в області $G_{n+1} = G_n \times [0, \varepsilon_0]$;

* Доведення можна знайти в книзі: Митропольський Ю. О. Методи нелінійної механіки. К.2005 (стор. 229–233).

2) коефіцієнти $u_k(t, \varepsilon)$ рядів

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t, \varepsilon) \varepsilon^k$$

аналітичні за $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ та задовольняють умови

$$u_k(0, \varepsilon) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Тоді для будь-якого $\eta > 0$ існує $\varepsilon_1 \in [0, \varepsilon_0]$ таке, що для всіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ та $t \in [0, T_0]$ ($T_0 \leq T$) справедлива оцінка

$$\|u(t, \varepsilon) - S_p(t, \varepsilon)\| \leq \eta,$$

де $u(t, \varepsilon)$ – точний розв’язок задачі Коші (5.1.8), а

$$S_p(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^p u_k(t, \varepsilon) \varepsilon^k.$$

5.2. Побудова асимптотичного розв’язку автономного диференціального рівняння, близького до лінійного

Будемо вивчати коливання, що описуються диференціальним рівнянням вигляду

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (5.2.1)$$

де x – зсув системи, що вивчається, t – час, ε – малий додатний параметр.

Зауважимо, що рівняння (5.2.1) автономне. Тому, як ми знаємо (див лекцію 4), період періодичних розв’язків тут завчасно невідомий і залежить від параметру ε .

На відміну від задач, викладених в главі 1, ми будемо будувати не окремий періодичний розв’язок, а загальний розв’язок диференціального рівняння.

Для правильного формулювання запропонованого М. М. Криловим та М. М. Боголюбовим методу ми приходимо, враховуючи фізичні міркування щодо характеру коливного процесу, що розглядається.

При $\varepsilon = 0$, тобто за відсутності збурення, рівняння (5.2.1) вироджується в лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (5.2.2)$$

загальним розв'язком якого є функція

$$x = a \cos \psi, \quad (5.2.3)$$

що описує суто гармонічні коливання із сталою амплітудою a і сталою частотою ω (рівномірним фазовим кутом, що обертається):

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega, \quad (5.2.4)$$

звідки $a = \text{const}$, $\psi = \omega t + \theta$, $\theta = \text{const}$. Амплітуда a та фаза θ коливань – сталі величини, залежні від початкових умов.

Наявність нелінійного збурення ($\varepsilon \neq 0$) приводить до появи в розв'язку рівняння (5.2.1) обертонів, зумовлює залежність частоти $d\psi/dt$ від амплітуди і зрештою може викликати систематичне збільшення чи зменшення амплітуди коливань в залежності від постачання чи поглинання енергії збурювальними силами.

Всі ці ефекти збурення, вочевидь, зникають при $\varepsilon = 0$.

З огляду на ці обставини шукатимемо загальний розв'язок рівняння (5.2.1) у вигляді розвинення:

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \varepsilon^3 u_3(a, \psi) + \dots, \quad (5.2.5)$$

де функції $u_1(a, \psi)$, $u_2(a, \psi)$, ... є 2π -періодичними за ψ , а величини a і ψ , як функції часу, визначаються диференціальними рівняннями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.2.6)$$

Отже, щоб побудувати наближений асимптотичний розв'язок, треба дібрати відповідні вирази для функцій $u_1(a, \psi)$, $u_2(a, \psi)$, ..., $A_1(a)$, $B_1(a)$, $A_2(a)$, $B_2(a)$, ... таким чином, щоб вираз (5.2.5), до якого замість a і ψ підставлено функції часу, визначені з системи рівнянь (5.2.6), став розв'язком рівняння (5.2.1).

Розв'язавши цю задачу, і, знайшовши явні вирази для коефіцієнтів розвинень, що стоять у правих частинах рівності (5.2.5) та рівнянь (5.2.6), ми зведемо задачу інтегрування рівняння (5.2.1) до простішої задачі інтегрування диференціальних рівнянь (5.2.6) з відокремлюваними змінними. Визначення коефіцієнтів вказаних розвинень не

спричиняє принципових труднощів, але з огляду на швидке ускладнення формул на практиці можна ефективно знайти лише два-три перші члени.

Обмеживши розвинення (5.2.5), (5.2.6) скінченним числом членів, тобто поклавши

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots + \varepsilon^m u_m(a, \psi), \quad (5.2.7)$$

де a, ψ мають бути визначені як функції часу з системи рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots + \varepsilon^m A_m(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots + \varepsilon^m B_m(a), \end{aligned} \right\} \quad (5.2.8)$$

можемо дістати наближення першого, другого, тощо, але взагалі невисокого порядку. Це означає, що практична застосовність методу визначається не збіжністю сум (5.2.7), (5.2.8) при $m \rightarrow \infty$, а їх асимптотичними властивостями при фіксованому m та $\varepsilon \rightarrow 0$ (див п. 5.1). Тобто вираз (5.2.7) має задовольняти рівняння (5.2.1) з точністю до величин порядку мализни ε^{m+1} .

5.3. Визначення коефіцієнтів асимптотичних розвинень

Накладемо на функції $u_1(a, \psi), \dots, u_m(a, \psi)$ додаткові умови, а саме, будемо вважати, що розвинення в ряд Фур'є за змінною ψ цих функцій не містить першої гармоніки, тобто

$$\int_0^{2\pi} u_k(a, \psi) \sin \psi d\psi = \int_0^{2\pi} u_k(a, \psi) \cos \psi d\psi = 0 \quad k = \overline{1, m}. \quad (5.3.1)$$

Здиференціювавши праву частину (5.2.5), знайдемо:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{da}{dt} \left(\cos \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right) + \\ &+ \frac{d\psi}{dt} \left(-a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \psi} + \dots \right), \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d^2 a}{dt^2} \left(\cos \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d^2\psi}{dt^2} \left(-a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \psi} + \dots \right) + \\
& + \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \left(\varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2} + \dots \right) + \\
& + 2 \frac{da}{dt} \cdot \frac{d\psi}{dt} \left(-\sin \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial \psi} + \dots \right) + \\
& + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \left(-a \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \dots \right). \tag{5.3.2}
\end{aligned}$$

Здиференціювавши рівняння (5.2.8), знайдемо вирази для $\frac{d^2 a}{dt^2}$,

$\frac{d^2\psi}{dt^2}$, $\left(\frac{da}{dt} \right)^2$, $\frac{da}{dt} \cdot \frac{d\psi}{dt}$, $\left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2$ у вигляді рядів за ε . Підставимо ці вирази у праві частини рівностей (5.3.2) і розташуємо результати за степенями ε . Дістанемо:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -a\omega \sin \psi + \varepsilon \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) + \\
&+ \varepsilon^2 \left(A_2 \cos \psi - aB_2 \sin \psi + A_1 \frac{\partial u_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \omega \frac{\partial u_2}{\partial \psi} \right) + \varepsilon^3 \dots \\
\frac{d^2 x}{dt^2} &= -a\omega^2 \cos \psi + \varepsilon \left(-2\omega A_1 \sin \psi - 2\omega a B_1 \cos \psi + \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \right) + \\
&+ \varepsilon^2 \left\{ \left(A_1 \frac{dA_1}{da} - aB_1^2 - 2\omega a B_2 \right) \cos \psi - \left(2\omega A_2 + 2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right) \sin \psi + \right. \\
&+ 2\omega A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} \left. \right\} + \varepsilon^3 \dots \tag{5.3.3}
\end{aligned}$$

Тоді ліву частину рівняння (5.2.1) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x &= \varepsilon \left(-2\omega A_1 \sin \psi - 2a\omega B_1 \cos \psi + \omega^2 u_1 \right) + \\
&+ \varepsilon^2 \left\{ \left(A_1 \frac{dA_1}{da} - aB_1^2 - 2a\omega B_2 \right) \cos \psi - \left(2\omega A_2 + 2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right) \sin \psi + \right.
\end{aligned}$$

$$+2\omega A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \omega^2 u_2 \Big\} + \varepsilon^3 \dots . \quad (5.3.4)$$

Праву частину рівняння (5.2.1) з урахуванням (5.2.5) і (5.3.3) після розкладу в ряд Тейлора можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = & \varepsilon f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \varepsilon^2 \left\{ u_1 f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \right. \\ & \left. + \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \right\} + \varepsilon^3 \dots . \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Для того, щоб вираз (5.2.5) задовольняв початкове рівняння (5.2.1) з точністю до величин порядку мализни ε^{m+1} , треба зрівняти коефіцієнти біля однакових степеней ε в правих частинах виразів (5.3.4) і (5.3.5) до членів порядку ε^m включно. Внаслідок цього одержуємо рівняння:

$$\left\{ \begin{aligned} \omega^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + u_1 \right) &= f_0(a, \psi) + 2\omega A_1 \sin \psi + 2\omega a B_1 \cos \psi, \\ \omega^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + u_2 \right) &= f_1(a, \psi) + 2\omega A_2 \sin \psi + 2\omega a B_2 \cos \psi, \\ &\dots \\ \omega^2 \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial \psi^2} + u_m \right) &= f_{m-1}(a, \psi) + 2\omega A_m \sin \psi + 2\omega a B_m \cos \psi, \end{aligned} \right. \quad (5.3.6)$$

де позначено:

$$\begin{aligned} f_0(a, \psi) &= f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi), \\ f_1(a, \psi) &= u_1 f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \\ &+ \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \left(aB_1^2 - A_1 \frac{dA_1}{da} \right) \cos \psi + \\ &+ \left(2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right) \sin \psi - 2\omega A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} - 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} . \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Нескладно бачити, що $f_k(a, \psi)$ ($k=0,1,2,\dots$) є 2π -періодичними функціями змінної ψ , що залежать і від a ; їх явні вирази буде відомо, щойно буде знайдено вирази $A_j(a)$, $B_j(a)$, $u_j(a, \psi)$ до k -го номера включно.

Щоб визначити $A_1(a)$, $B_1(a)$ і $u_1(a, \psi)$ з першого рівняння системи (5.3.6), розглянемо розвинення в ряд Фур'є функцій $f_0(a, \psi)$ і $u_1(a, \psi)$:

$$\left. \begin{aligned} f_0(a, \psi) &= g_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi, \\ u_1(a, \psi) &= v_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(a) \cos n\psi + w_n(a) \sin n\psi. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.8)$$

Тут $g_0(a)$, $g_n(a)$, $h_n(a)$ – відомі коефіцієнти, що визначаються формулами

$$g_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos n\psi d\psi, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$h_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin n\psi d\psi, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

а $v_0(a)$, $v_n(a)$, $w_n(a)$ підлягають визначенню.

Підставивши праві частини рівностей (5.3.8) в перше рівняння системи (5.3.6), і, зрівнявши коефіцієнти біля однакових гармонік, знайдемо:

$$\left. \begin{aligned} g_1(a) + 2\omega B_1 &= 0, \quad h_1(a) + 2\omega A_1 = 0, \\ v_0(a) &= \frac{g_0(a)}{\omega^2}, \quad v_n(a) = \frac{g_n(a)}{\omega^2(1-n^2)}, \quad w_n(a) = \frac{h_n(a)}{\omega^2(1-n^2)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\}$$

Отже, однозначно визначаються $A_1(a)$, $B_1(a)$:

$$A_1(a) = -\frac{h_1(a)}{2\omega}, \quad B_1(a) = -\frac{g_1(a)}{2\omega a}.$$

Внаслідок додаткових умов (5.3.1) маємо:

$$v_1(a) = w_1(a) = 0.$$

Таким чином,

$$u_1(a, \psi) = \frac{g_0(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi}{1-n^2}. \quad (5.3.9)$$

Визначивши $u_1(a, \psi)$, $A_1(a)$, $B_1(a)$, одержуємо явний вираз для $f_1(a, \psi)$. Розкладаючи цю функцію в ряд Фур'є за змінною ψ

$$f_1(a, \psi) = g_0^{(1)}(a) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(1)}(a) \cos n\psi + h_n^{(1)}(a) \sin n\psi,$$

і, скориставшись другим рівнянням системи (5.3.6) та умовами (5.3.1), аналогічно знайдемо:

$$A_2(a) = -\frac{h_1^{(1)}(a)}{2\omega}, \quad B_2(a) = -\frac{g_1^{(1)}(a)}{2\omega a}, \quad (5.3.10)$$

$$u_2(a, \psi) = \frac{g_0^{(1)}(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n^{(1)}(a) \cos n\psi + h_n^{(1)}(a) \sin n\psi}{1-n^2}. \quad (5.3.11)$$

Отже, ми побудували процес послідовного визначення шуканих величин $u_k(a, \psi)$, $A_k(a)$, $B_k(a)$ ($k=1, 2, \dots$). Варто зауважити, що вирази для коефіцієнтів $g_n^{(j)}(a)$, $h_n^{(j)}(a)$ зі збільшенням індексу j істотно ускладнюються.

Розглянемо перше наближення:

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi), \quad (5.3.12)$$

де

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a). \quad (5.3.13)$$

З огляду на (5.3.13) можемо написати:

$$\Delta a = a(t) - a(0) \sim \varepsilon t \tilde{A}_1, \quad \Delta(\psi - \omega t) = [\psi(t) - \omega t] - \psi(0) \sim \varepsilon t \tilde{B}_1,$$

де $\tilde{A}_1$ і $\tilde{B}_1$ – деякі середні значення величин $A_1(a)$ і $B_1(a)$ на інтервалі $(0, t)$. Отже, час t , протягом якого величини a і $\psi - \omega t$ зможуть отримати скінченні прирости, має бути порядку $1/\varepsilon$.

З іншого боку, рівняння (5.3.13) утворюються після знехтування в рівняннях (5.2.8) членів порядку мализни ε^2 , а така похибка в значеннях перших похідних $\frac{da}{dt}$ і $\frac{d\psi}{dt}$ за час t приводить до похибки по-

рядку $\varepsilon^2 t$ в значеннях самих функцій a і ψ . Отже, бачимо, що на інтервалі часу, протягом якого a і $\psi - \omega t$ встигають помітно відійти від своїх початкових значень, похибки в значеннях амплітуди та фази коливань є величинами порядку ε , і тому на цьому інтервалі у виразі (5.3.12) немає сенсу зберігати член $\varepsilon u_1(a, \psi)$ першого порядку мализни, оскільки і похибка формули (5.3.12), і похибка спрощеної формули

$$x = a \cos \psi$$

є величинами першого порядку мализни.

З огляду на це природно далі брати за перше наближення спрощений вираз

$$x = a \cos \psi, \quad (5.3.14)$$

в якому a і ψ визначено рівняннями:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a). \quad (5.3.15)$$

З аналогічних міркувань за друге наближення беремо вираз:

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi), \quad (5.3.16)$$

де функції часу a і ψ визначено рівняннями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a). \end{aligned} \right\} \quad (5.3.17)$$

Наведемо явні формули для $A_1(a)$, $B_1(a)$, $A_2(a)$, $B_2(a)$ і $u_1(a, \psi)$:

$$\left. \begin{aligned} A_1(a) &= -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ B_1(a) &= -\frac{1}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.18)$$

З (5.3.9) випливає, що

$$u_1(a, \psi) = \frac{g_0(a)}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi}{n^2 - 1},$$

де

$$\left. \begin{aligned} g_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos n\psi d\psi, \\ h_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin n\psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.19)$$

Внаслідок (5.3.7) і (5.3.10) можемо написати:

$$A_2(a) = -\frac{1}{2\omega} \left\{ 2A_1B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right\} - \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} [u_1(a, \psi) f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) f'_{x'}(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \Big] \sin \psi d\psi, \\
B_2(a) = & -\frac{1}{2\omega} \left\{ B_1^2 - \frac{A_1}{a} \frac{dA_1}{da} \right\} - \frac{1}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} \left[u_1(a, \psi) f'_{x'}(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) + \right. \\
& \left. + \left(A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) f'_{x'}(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \right] \cos \psi d\psi. \quad (5.3.20)
\end{aligned}$$

Приклад. В якості прикладу використання методу Крилова–Боголюбова розглянемо задачу побудови наближеного розв'язку автономного рівняння Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon (1 - x^2) \frac{dx}{dt}. \quad (5.3.21)$$

Шукатимемо спочатку наближений загальний розв'язок рівняння (5.3.21) з точністю до доданків 1-го порядку за ε , тобто:

$$x = a \cos \psi, \quad (5.3.22)$$

де a і ψ визначаються рівняннями:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a). \quad (5.3.23)$$

Згідно з формулами (5.3.18) маємо:

$$\begin{aligned}
A_1(a) = & -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} (1 - a^2 \cos^2 \psi) (-a \omega \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{a}{2} - \frac{a^3}{8}, \\
B_1(a) = & -\frac{1}{2\pi a \omega} \int_0^{2\pi} (1 - a^2 \cos^2 \psi) (-a \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi = 0.
\end{aligned}$$

Таким чином, амплітуда $a(t)$ знайдеться з диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{8} \right). \quad (5.3.24)$$

Інтегруючи його, дістаємо:

$$a(t) = \pm \frac{2}{\sqrt{1 - c e^{-\varepsilon t}}}, \quad a = 0, \quad a = \pm 2.$$

З другого з рівнянь (5.3.23) дістаємо:

$$\psi = \omega t + \psi_0.$$

Таким чином, беручи для визначеності:

$$a(t) = \frac{2}{\sqrt{1 - a_0 e^{-\varepsilon t}}},$$

одержуємо такий наближений загальний розв'язок рівняння (5.3.21):

$$x(t) \approx \frac{2}{\sqrt{1 - a_0 e^{-\varepsilon t}}} \cos(\omega t + \psi_0),$$

де a_0, ψ_0 - довільні сталі.

Знаходження подальших наближень пов'язано з досить громіздкими обчисленнями.

Лекція 6. Побудова розв'язків з урахуванням зовнішніх періодичних сил

6.1. Нерезонансний випадок.

6.2. Резонансні випадки

6.1. Нерезонансний випадок

Будемо досліджувати коливну систему, для якої диференціальне рівняння має вигляд:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(vt, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (6.1.1)$$

де ε – малий додатний параметр, $f\left(vt, x, \frac{dx}{dt}\right)$ – функція, яку можна подати у вигляді

$$f\left(vt, x, \frac{dx}{dt}\right) = \sum_{n=-N}^N f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right) e^{invt}, \quad (6.1.2)$$

де коефіцієнти $f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ є поліноми щодо $x, \frac{dx}{dt}$.

При відсутності збурення ($\varepsilon = 0$) ми маємо суто гармонічні коливання:

$$x = a \cos(\omega t + \varphi), \quad \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \varphi),$$

де a і φ – довільні сталі.

Якщо ми будемо застосовувати метод, викладений в лекції 5, тобто визначати функції $u_1, u_2, \dots$, то, з огляду на залежність зовнішнього

впливу від часу, в розвиненні функції $f\left(vt, x, \frac{dx}{dt}\right)$ в ряд Фур'є

з'являться члени, що містять $\sin(nv + m\omega)t$ і $\cos(nv + m\omega)t$, де $n, m \in \mathbb{Z}$. Тобто з'являться так звані комбінаційні частоти $nv + m\omega$. Якщо одна з таких частот буде малою, то це приведе до появи малих знаменників в правих частинах виразів для $u_1, u_2, \dots$. І, отже, ми маємо справу з явищем резонансу.

В нелінійних системах резонанс може виникнути при виконанні умови

$$v \approx \frac{p}{q} \omega, \quad (6.1.3)$$

де p, q – взаємно прості цілі числа. Вводиться наступна класифікація резонансів.

1. $p = q = 1$ ($v \approx \omega$) – головний резонанс.
2. $q = 1, p = 1$ ($v \approx p\omega$) – резонанс на обертонах власної частоти ω (він же так званий *параметричний* резонанс).
3. $p = 1, q \neq 1$ ($\omega = qv$) – резонанс на обертонах зовнішньої частоти.

Почнемо з розгляду нерезонансного випадку. Тобто будемо припускати, що жодна з комбінаційних частот $nv + m\omega$ не дорівнює і не близька до ω , тобто

$$nv + m\omega \neq \omega.$$

За відсутності збурювальних сил ($\varepsilon = 0$) коливання, очевидно, є суто гармонічними ($x = a \cos \psi$) зі сталою амплітудою a і рівномірно обертним фазовим кутом:

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega.$$

Розв'язок рівняння (6.1.1) шукаємо у вигляді:

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(vt, \psi, a) + \varepsilon^2 u_2(vt, \psi, a) + \dots, \quad (6.1.4)$$

де функції $u_1(vt, \psi, a)$, $u_2(vt, \psi, a)$, періодичні за обома змінними vt і ψ з періодом 2π .

Функції a і ψ знаходяться з наступної системи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.1.5)$$

Праві частини цих рівнянь мають залежати тільки від амплітуди a .

Таким чином, треба знайти функції

$$u_1(vt, \psi, a), u_2(vt, \psi, a), \dots, A_1(a), A_2(a), \dots, B_1(a), B_2(a), \dots \quad (6.1.6)$$

такі, щоб вираз (6.1.4) був розв'язком рівняння (6.1.1).

Варто зауважити, що в нерезонансному випадку для визначення a і ψ отримуємо рівняння з відокремлюваними змінними. В резонансному випадку, як ми побачимо у подальшому, в цих рівняннях змінні у загальному випадку вже будуть невідокремлюваними.

Далі накладаємо на функції $u_1(vt, \psi, a)$, $u_2(vt, \psi, a)$,... вимогу відсутності в них першої гармоніки. Після всіх звичайних викладок отримуємо систему для визначення $u_1(vt, \psi, a)$, $u_2(vt, \psi, a)$,..., а також $A_1(a)$, $A_2(a)$,..., $B_1(a)$, $B_2(a)$,... :

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + 2\omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial t} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega^2 u_1 &= \\ = f_0(vt, \psi, a) + 2a\omega B_1 \cos \psi + 2\omega A_1 \sin \psi, \\ \omega^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + 2\omega \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi \partial t} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \omega^2 u_2 &= \\ = f_1(vt, \psi, a) + 2a\omega B_2 \cos \psi + 2\omega A_2 \sin \psi, \\ &\dots \\ \omega^2 \frac{\partial^2 u_m}{\partial \psi^2} + 2\omega \frac{\partial^2 u_m}{\partial \psi \partial t} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} + \omega^2 u_m &= \\ = f_{m-1}(vt, \psi, a) + 2a\omega B_m \cos \psi + 2\omega A_m \sin \psi, \end{aligned} \right\} \quad (6.1.7)$$

де позначено

$$f_0(vt, \psi, a) = f(vt, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi),$$

$$f_1(vt, \psi, a) = f'_x(vt, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) u_1 + f'_{x'}(vt, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \times$$

$$\times \left[A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \omega + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right] + \left(aB_1^2 - \frac{dA_1}{da} A_1 \right) \cos \psi +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{dB_1}{da} A_1 a + 2A_1 B_1 \right) \sin \psi - 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} - \\
& - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} A_1 - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial t} B_1 - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} \omega A_1,
\end{aligned} \tag{6.1.8}$$

...

З цієї системи знаходимо:

$$\left. \begin{aligned} A_1(a) &= -\frac{1}{4\pi^2 \omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\theta, \psi, a) \sin \psi d\theta d\psi, \\ B_1(a) &= -\frac{1}{4\pi^2 \omega a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\theta, \psi, a) \cos \psi d\theta d\psi. \end{aligned} \right\} \tag{6.1.9}$$

Вираз для $u_1(\theta, \psi, a)$ ($\theta = vt$) має вигляд:

$$\begin{aligned}
u_1(\theta, \psi, a) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{n,m \\ [n^2 + (m^2 - 1)^2 \neq 0]}} \frac{e^{i(n\theta + m\psi)}}{\omega^2 - (nv + m\omega)^2} \times \\
&\times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\theta, \psi, a) e^{-i(n\theta + m\psi)} d\theta d\psi.
\end{aligned} \tag{6.1.10}$$

Знайшовши $u_1(\theta, \psi, a)$, $A_1(a)$, $B_1(a)$, отримаємо явний вираз для $f_1(\theta, \psi, a)$ і, отже, можемо знайти необхідні для побудови другого наближення $u_2(\theta, \psi, a)$, $A_2(a)$, $B_2(a)$. Маємо:

$$\begin{aligned}
u_2(\theta, \psi, a) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{n,m \\ [n^2 + (m^2 - 1)^2 \neq 0]}} \frac{e^{i(n\theta + m\psi)}}{\omega^2 - (nv + m\omega)^2} \times \\
&\times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta, \psi, a) e^{-i(n\theta + m\psi)} d\theta d\psi,
\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

$$A_2(a) = -\frac{1}{2\omega} \left[\frac{dB_1}{da} a A_1 + 2A_1 B_1 \right] - \frac{1}{4\pi^2 \omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ f'_x(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) u_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + f'_x(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \omega + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \nu \right) \Bigg\} \sin \psi d\theta d\psi, \\
B_2(a) = & \frac{1}{2a\omega} \left[\frac{dA_1}{da} A_1 - aB_1^2 \right] - \frac{1}{4\pi^2 \omega a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ f'_x(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) u_1 + \right. \\
& \left. + f'_x(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \omega + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \nu \right) \right\} \cos \psi d\theta d\psi.
\end{aligned} \tag{6.1.12}$$

Приклад. Розглянемо узагальнене рівняння Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y - \varepsilon(1 - y^2) \frac{dy}{dt} = E \sin vt, \tag{6.1.13}$$

де $v \neq 1$. Вводячи заміну

$$y = x + V \sin vt, \tag{6.1.14}$$

де $V = \frac{E}{1-v^2}$, зводимо рівняння до вигляду

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \varepsilon \left[1 - (x + V \sin vt)^2 \right] \left(\frac{dx}{dt} + V \nu \cos vt \right). \tag{6.1.15}$$

Скориставшись формулами (6.1.9), одержимо розв'язок рівняння (6.1.15) у першому наближенні:

$$x = a \cos(t + \vartheta), \tag{6.1.16}$$

де $\vartheta = \text{const}$, а функція a визначається з рівняння

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} - \frac{V^2}{2} \right). \tag{6.1.17}$$

З цього рівняння видно, що коли

$$V^2 \leq 2,$$

існує стійкий стаціонарний режим з амплітудою

$$a^2 = 4 - 2V^2.$$

Коли $V^2 > 2$, амплітуда a із зростанням t прямує до нуля, і, отже, в системі відбувається асинхронне згасання коливань.

Скориставшись формулою

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(\theta, \psi, a)$$

і формулами (6.1.10), (6.1.12) одержимо розв'язок рівняння (6.1.15) у другому наближенні:

$$\begin{aligned} x = & a \cos \psi + \frac{\varepsilon V v (4 - V^2 - 2a^2)}{4(1 - v^2)} \cos \theta + \frac{\varepsilon V^3 v}{4(1 - 9v^2)} \cos 3\theta + \\ & + \frac{\varepsilon V a^2 (2 + v)}{4(1 + v)(3 + v)} \cos(\theta + 2\psi) - \frac{\varepsilon V a^2 (2 - v)}{4(1 - v)(3 - v)} \cos(\theta - 2\psi) + \\ & + \frac{\varepsilon V^2 a (1 + 2v)}{16v(1 + v)} \sin(2\theta + \psi) + \frac{\varepsilon V^2 a (1 - 2v)}{16v(1 - v)} \sin(2\theta - \psi) - \frac{\varepsilon a^3}{32} \sin 3\psi, \end{aligned}$$

де $\theta = vt$, а величини a і ψ повинні задовольняти систему другого наближення:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} - \frac{V^2}{2} \right), \\ \frac{d\psi}{dt} &= 1 - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{a^2}{8} + \frac{7a^4}{256} \right) + \frac{\varepsilon^2 V^2}{8} - \\ &- \frac{\varepsilon^2 V^2 a^2 (v^4 - 14v^2 + 21)}{16(9 - v^2)(1 - v^2)} + \frac{\varepsilon^2 V^4 (2v^2 - 3)}{64(1 - v^2)}. \end{aligned} \right\}$$

За виконанням умови $V^2 > 2$ режим коливань є нестійким і тому фізично неможливим. Якщо виконано умову $V^2 \leq 2$, режим є єдиним стійким стаціонарним режимом. З плином часу у системі усталюються коливання вигляду:

$$x = \frac{\varepsilon V v (4 - V^2)}{4(1 - v^2)} \cos \theta + \frac{\varepsilon V^3 v (4 - V^2)}{4(1 - 9v^2)} \cos 3\theta.$$

6.2. Резонансні випадки

Перейдемо до розгляду резонансних випадків. Припустимо, що

$$\omega \approx \frac{p}{q} \nu, \quad (6.2.1)$$

де p, q – взаємно прості числа.

Тоді, залежно від характеру задачі, що розглядається, можуть виникнути два різних підходи до її розв’язання: 1) для дослідження резонансу достатньо обмежитись розглядом самої резонансної області; 2) крім дослідження резонансної області, треба також вивчити підходи до цієї області з боку нерезонансної зони.

Почнемо з розгляду першого випадку, що є більш простим. Оскільки в цьому випадку можна розглядати значення $\frac{p}{q} \nu$, досить близькі до ω , природно покласти

$$\omega^2 = \left(\frac{p}{q} \nu \right)^2 + \varepsilon \Delta,$$

де $\varepsilon \Delta$ описує неузгодженість квадратів власної і зовнішньої частот. Тоді вихідне рівняння (6.1.1) можна записати у вигляді:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{p}{q} \nu \right)^2 x = \varepsilon \left\{ f \left(\nu t, x, \frac{dx}{dt} \right) - \Delta x \right\}. \quad (6.2.2)$$

Отже, неузгодженість $\varepsilon \Delta$, оскільки вона мала, розглядаємо як компоненту збурювальної сили. Тоді розв’язок рівняння (6.2.2) можна шукати у вигляді:

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi, \nu t) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi, \nu t) + \dots, \quad (6.2.3)$$

де $u_1(a, \psi, \nu t), u_2(a, \psi, \nu t), \dots$ – 2π -періодичні функції за змінними ψ і νt , а a і ψ – деякі функції часу, що їх ми маємо визначити з відповідних диференціальних рівнянь.

Для складання цих рівнянь зручно ввести до розгляду, крім кутової змінної ψ , що є повною фазою коливань, ще різницю фаз:

$$\vartheta = \psi - \frac{p}{q} \nu t.$$

Отже, ми будемо зображувати $\frac{da}{dt}$ і $\frac{d\psi}{dt}$ як функції не тільки a а також і ϑ . Тобто визначатимемо a і ψ з системи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(a, \vartheta) + \dots \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{p}{q} v + \varepsilon B_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(a, \vartheta) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (6.2.4)$$

де $A_1(a, \vartheta)$, $A_2(a, \vartheta)$, ... $B_1(a, \vartheta)$, $B_2(a, \vartheta)$, ... – періодичні функції кутової змінної ϑ з періодом 2π .

Оскільки праві частини виразів (6.2.4) містять не повну фазу ψ , а фазовий кут ϑ , доцільно вилучити ψ з виразу (6.2.3) і рівнянь (6.2.4).

Тоді, поклавши $\psi = \frac{p}{q} vt + \vartheta$, одержимо замість (6.2.3) вираз:

$$x = a \cos\left(\frac{p}{q} vt + \vartheta\right) + \varepsilon u_1\left(a, \vartheta, \frac{v}{q} t\right) + \varepsilon^2 u_2\left(a, \vartheta, \frac{v}{q} t\right) + \dots, \quad (6.2.5)$$

де a і ϑ мають задовольняти рівняння:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(a, \vartheta) + \dots \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \varepsilon B_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(a, \vartheta) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.2.6)$$

Таким чином нам треба визначити функції $A_1(a, \vartheta)$, $A_2(a, \vartheta)$, ... ,

$B_1(a, \vartheta)$, $B_2(a, \vartheta)$, ..., $u_1\left(a, \vartheta, \frac{v}{q} t\right)$, $u_2\left(a, \vartheta, \frac{v}{q} t\right)$, ... так, щоб вираз (6.2.5),

до якого замість a і ϑ підставлено розв'язки рівнянь (6.2.6), задовольняло основне рівняння (6.2.2).

Подібно до нерезонансного випадку, диференціюємо вираз (6.2.5) та знаходимо $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, враховуючи, що a і ϑ – функції часу, що задовольняють систему (6.2.6). Після впорядкування лівої частини за степенями параметра ε , вона набуває вигляду:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{p}{q} v\right)^2 x = \\ &= \varepsilon \left\{ -2 \frac{p}{q} v \sin\left(\frac{p}{q} vt + \vartheta\right) A_1 - 2a \frac{p}{q} v \cos\left(\frac{p}{q} vt + \vartheta\right) B_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(\frac{p}{q} v\right)^2 u_1 \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon^2 \left\{ \left[\frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 - a B_1^2 - 2a \frac{p}{q} v B_1 \right] \cos \left(\frac{p}{q} vt + \vartheta \right) + \right. \\
& + \left[-2A_1 B_1 - 2 \frac{p}{q} v A_2 - a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 - a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} B_1 \right] \sin \left(\frac{p}{q} vt + \vartheta \right) + \\
& \left. + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} A_1 + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \vartheta \partial t} B_1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(\frac{p}{q} v \right)^2 u_2 \right\} + \varepsilon^3 \dots . \quad (6.2.7)
\end{aligned}$$

Розклавши праву частину рівняння (6.2.2) за степенями малого параметра ε , знайдемо:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \left\{ f \left(vt, x, \frac{dx}{dt} \right) - \Delta x \right\} = \\
& = \varepsilon \left\{ -\Delta a \cos \left(\frac{p}{q} vt + \vartheta \right) + f \left(vt, a \cos \left(\frac{p}{q} vt + \vartheta \right), -a \frac{p}{q} v \sin \left(\frac{p}{q} vt + \vartheta \right) \right) \right\} + \\
& + \varepsilon^2 \left\{ f'_x \left(vt, a \cos \left(\frac{p}{q} vt + \vartheta \right), -a \frac{p}{q} v \sin \left(\frac{p}{q} vt + \vartheta \right) \right) u_1 + \right. \\
& + f'_{x'} \left(vt, a \cos \left(\frac{p}{q} vt + \vartheta \right), -a \frac{p}{q} v \sin \left(\frac{p}{q} vt + \vartheta \right) \right) \times \\
& \times \left(A_1 \cos \left(\frac{p}{q} vt + \vartheta \right) - a B_1 \sin \left(\frac{p}{q} vt + \vartheta \right) + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) - \Delta u_1 \left. \right\} + \varepsilon^3 \dots . \quad (6.2.8)
\end{aligned}$$

Дорівнявши в правих частинах (6.2.7) і (6.2.8) коефіцієнти біля однакових степеней ε , одержимо систему рівнянь, що визначає шукані функції:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(\frac{p}{q} v \right)^2 u_1 = f_0 \left(a, vt, \frac{p}{q} vt + \vartheta \right) + 2 \frac{p}{q} v A_1 \sin \left(\frac{p}{q} vt + \vartheta \right) + \\
& + 2a \frac{p}{q} v B_1 \cos \left(\frac{p}{q} vt + \vartheta \right) - \Delta a \cos \left(\frac{p}{q} vt + \vartheta \right), \quad (6.2.9) \\
& \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(\frac{p}{q} v \right)^2 u_2 = f_1 \left(a, vt, \frac{p}{q} vt + \vartheta \right) + \\
& + \left[2 \frac{p}{q} v A_2 + a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} B_1 + 2A_1 B_1 \right] \sin \left(\frac{p}{q} vt + \vartheta \right) +
\end{aligned}$$

$$+ \left[2 \frac{p}{q} v B_2 - \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 - \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 + a B_1^2 \right] \cos \left(\frac{p}{q} v t + \vartheta \right), \quad (6.2.10)$$

де позначено

$$f_0 \left(a, v t, \frac{p}{q} v t + \vartheta \right) = f \left(v t, a \cos \left(\frac{p}{q} v t + \vartheta \right), -a \frac{p}{q} v \sin \left(\frac{p}{q} v t + \vartheta \right) \right), \quad (6.2.11)$$

$$\begin{aligned} f_1 \left(a, v t, \frac{p}{q} v t + \vartheta \right) &= f'_x \left(v t, a \cos \left(\frac{p}{q} v t + \vartheta \right), -a \frac{p}{q} v \sin \left(\frac{p}{q} v t + \vartheta \right) \right) u_1 + \\ &+ f'_{x'} \left(v t, a \cos \left(\frac{p}{q} v t + \vartheta \right), -a \frac{p}{q} v \sin \left(\frac{p}{q} v t + \vartheta \right) \right) \times \\ &\times \left(A_1 \cos \left(\frac{p}{q} v t + \vartheta \right) - a B_1 \sin \left(\frac{p}{q} v t + \vartheta \right) + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) - \\ &- \Delta u_1 - 2 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} - 2 B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \vartheta \partial t}. \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

Як і в попередніх випадках, функції $f_k \left(a, v t, \frac{p}{q} v t + \vartheta \right)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) є періодичними функціями с періодом 2π за обома кутовими змінними $v t, \frac{p}{q} v t + \vartheta$, тоді як $A_i(a, \vartheta)$, $B_i(a, \vartheta)$ ($i = 1, 2, \dots$) періодичні функції за змінною ϑ з періодом 2π .

Знайдемо з рівняння (6.2.9) $u_1 \left(a, v t, \frac{p}{q} v t + \vartheta \right)$, $A_1(a, \vartheta)$ і $B_1(a, \vartheta)$ за умови, що вирази для $u_1 \left(a, v t, \frac{p}{q} v t + \vartheta \right)$ не містять членів, знаменник яких можуть перетворитися на нуль.

Подавши $u_1 \left(a, v t, \frac{p}{q} v t + \vartheta \right)$ і $f_0 \left(a, v t, \frac{p}{q} v t + \vartheta \right)$ у вигляді скінченних сум Фур'є, маємо:

$$u_1\left(a, vt, \frac{p}{q}vt + \vartheta\right) = \sum_n \sum_m u_{nm}^{(1)}(a) e^{i\left[nvt+m\left(\frac{p}{q}vt+\vartheta\right)\right]}, \quad (6.2.13)$$

$$f_0\left(a, vt, \frac{p}{q}vt + \vartheta\right) = \sum_n \sum_m f_{nm}^{(0)}(a) e^{i\left[nvt+m\left(\frac{p}{q}vt+\vartheta\right)\right]}, \quad (6.2.14)$$

де

$$f_{nm}^{(0)}(a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-i(n\theta+m\psi)} d\theta d\psi.$$

Підставимо праві частини (6.2.13), (6.2.14) у рівняння (6.2.9). Одержимо:

$$\begin{aligned} & \sum_n \sum_m \left\{ \left(\frac{p}{q}v \right)^2 - \left(nv + m \frac{p}{q}v \right)^2 \right\} e^{i\left[nvt+m\left(\frac{p}{q}vt+\vartheta\right)\right]} u_{nm}^{(1)}(a) = \\ & = \sum_n \sum_m f_{nm}^{(0)}(a) e^{i\left[nvt+m\left(\frac{p}{q}vt+\vartheta\right)\right]} + 2 \frac{p}{q} v A_1 \sin\left(\frac{p}{q}vt + \vartheta\right) + \\ & + 2a \frac{p}{q} v B_1 \cos\left(\frac{p}{q}vt + \vartheta\right) - \Delta a \cos\left(\frac{p}{q}vt + \vartheta\right), \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

звідки, прирівнявши коефіцієнтами біля однакових гармонік, знайдемо:

$$u_{nm}^{(1)}(a) = \frac{f_{nm}^{(0)}(a)}{\left(\frac{p}{q}v\right)^2 - \left(nv + m \frac{p}{q}v\right)^2} \quad (6.2.16)$$

для всіх n, m , що задовольняють умову

$$\left(\frac{p}{q}v\right)^2 - \left(nv + m \frac{p}{q}v\right)^2 \neq 0,$$

чи еквівалентну умову

$$np + (m \pm 1)p \neq 0.$$

Також знаходимо співвідношення, що визначають $A_1(a, \vartheta)$, $B_1(a, \vartheta)$:

$$\left. \begin{aligned} A_1(a, \vartheta) &= \frac{-q}{4\pi^2 \nu p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-iq\sigma\vartheta'} \sin \psi d\theta d\psi, \\ B_1(a, \vartheta) &= \frac{\Delta q}{2\nu p} - \frac{q}{4\pi^2 a p \nu} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) \times \\ &\times e^{-iq\sigma\vartheta'} \cos \psi d\theta d\psi \left(\vartheta' = \psi - \frac{p}{q} \theta \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.2.17)$$

Отже, за наявності резонансу в першому наближенні розв'язок рівняння (6.1.1) має вигляд:

$$x = a \cos \left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right),$$

де a і ϑ треба знайти з системи рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{-\varepsilon q}{4\pi^2 \nu p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-iq\sigma\vartheta'} \sin \psi d\theta d\psi, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{\varepsilon \Delta q}{2\nu p} - \frac{\varepsilon q}{4\pi^2 a p \nu} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) \times \\ &\times e^{-iq\sigma\vartheta'} \cos \psi d\theta d\psi \left(\vartheta' = \psi - \frac{p}{q} \theta \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.2.18)$$

Знайшовши вирази для $u_1 \left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right)$, $A_1(a, \vartheta)$, $B_1(a, \vartheta)$, можна

згідно з (6.2.12) знайти явний вираз для $f_1 \left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right)$, а тоді з рівняння (6.2.10) знаходимо вирази для $A_2(a, \vartheta)$, $B_2(a, \vartheta)$, потрібні для побудови другого наближення:

$$\left. \begin{aligned} A_2(a, \vartheta) &= -\frac{q}{2\nu p} \left[a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} A_1 + 2A_1 B_1 \right] - \\ &- \frac{q}{4\pi^2 \nu p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \theta, \psi) e^{-iq\sigma\vartheta'} \sin \psi d\theta d\psi, \\ B_2(a, \vartheta) &= \frac{q}{2a\nu p} \left[\frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 - aB_1^2 \right] - \\ &- \frac{q}{4\pi^2 a\nu p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \theta, \psi) e^{-iq\sigma\vartheta'} \cos \psi d\theta d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.19)$$

Лекція 7. Найзагальніший випадок резонансу

- 7.1. Побудова розв'язків в околі резонансу і поблизу підходів до резонансної області з нерезонансної зони.
7.2. Приклад.

7.1. Побудова розв'язків в околі резонансу і поблизу підходів до резонансної області з нерезонансної зони

Нехай треба дослідити поведінку системи і в околі резонансу, і поблизу підходів до резонансної зони з нерезонансної зони. Для цього треба побудувати такі наближені розв'язки, що давали б можливість вивчити поведінку системи в досить великому інтервалі частот, з яких, як частинний випадок, можна було б отримати наведені вище формули для резонансного та нерезонансного випадків.

Тут вже не можна вважати, що неузгодженість мала, тому наближений розв'язок треба шукати безпосередньо для рівняння (6.1.1). До того ж, у виразі для миттєвої амплітуди й частоти треба ввести залежність від кута зсуву фаз.

Отже, розв'язок, як і вище, шукаємо у вигляді ряду:

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, vt, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, vt, \psi) + \dots, \quad (7.1.1)$$

де $\psi = \frac{p}{q} vt + \vartheta$, причому a і ϑ мають бути визначені з наступної системи диференціальних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(a, \vartheta) + \dots, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{p}{q} v + \varepsilon B_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(a, \vartheta) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (7.1.2)$$

і різниця $\omega - \frac{p}{q} v$ не обов'язково мала.

Тут, як і завжди, $u_1(a, vt, \psi)$, $u_2(a, vt, \psi)$, ... мають період 2π відносно змінних vt, ψ , а $A_j(a, \vartheta)$, $B_j(a, \vartheta)$ ($j=1, 2, \dots$) – 2π -періодичні відносно змінної ϑ .

Після ряду викладок отримаємо:

$$u_1(a, vt, \psi) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{n, m \\ (nq + (m \pm 1)p \neq 0)}} \frac{e^{i(nvt + m\psi)}}{\omega^2 - (nv + m\omega)^2} f_{nm}^{(0)}(a), \quad (7.1.3)$$

де

$$f_{nm}^{(0)}(a) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, vt, \psi) e^{i(n\theta + m\psi)} d\theta d\psi \quad \left(\psi = \frac{p}{q} vt + \vartheta \right). \quad (7.1.4)$$

Вирази для $A_1(a, \vartheta)$, $B_1(a, \vartheta)$ наступні:

$$A_1(a, \vartheta) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \left\{ \frac{(q\omega - pv)\sigma i \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0 e^{-iq\sigma\vartheta} \cos \psi d(vt) d\psi}{4\omega^2 - (q\omega - pv)^2 \sigma^2} - \right. \\ \left. - \frac{2\omega \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0 e^{-iq\sigma\vartheta} \sin \psi d(vt) d\psi}{4\omega^2 - (q\omega - pv)^2 \sigma^2} \right\}, \quad (7.1.5)$$

$$B_1(a, \vartheta) = -\frac{1}{2\pi^2 a} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \left\{ \frac{(q\omega - pv)\sigma i \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0 e^{-iq\sigma\vartheta} \sin \psi d(vt) d\psi}{4\omega^2 - (q\omega - pv)^2 \sigma^2} + \right. \\ \left. + \frac{2\omega \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0 e^{-iq\sigma\vartheta} \cos \psi d(vt) d\psi}{4\omega^2 - (q\omega - pv)^2 \sigma^2} \right\}. \quad (7.1.6)$$

Неважко побачити, що з цих формул, що описують і резонансну область, і підходи до неї, можна отримати всі раніше знайдені формули. Так, поклавши в цих формулах $\omega - \frac{p}{q}v = \varepsilon\Delta$, знайдемо з точністю до величин першого порядку мализни вирази для $A_1(a, \vartheta)$, $B_1(a, \vartheta)$ (6.2.17), що їх отримано для резонансного випадку.

Припустивши, що коливна система перебуває поза резонансом, маємо $\omega t - \frac{p}{q}vt = \text{const}$. Тоді рівняння (7.1.5), (7.1.6) дають для $A_1(a)$ і $B_1(a)$ вирази (6.1.9), отримані для нерезонансного випадку.

Тепер наведемо схему побудови розв'язку рівняння (6.1.1) в першому і другому наближенні для найзагальнішого випадку.

За перше наближення беремо

$$x = a \cos\left(\frac{p}{q}vt + \vartheta\right), \quad (7.1.7)$$

де a і ϑ треба визначити з рівнянь:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega - \varepsilon \frac{p}{q}v + \varepsilon B_1(a), \quad (7.1.8)$$

де $A_1(a, \vartheta)$, $B_1(a, \vartheta)$ визначаються формулами (7.1.5), (7.1.6).

У другому наближенні покладемо:

$$x = a \cos\left(\frac{p}{q}vt + \vartheta\right) + \varepsilon u_1\left(a, vt, \frac{p}{q}vt + \vartheta\right),$$

де a і ϑ треба знайти з рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(a, \vartheta) + \dots, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{p}{q} \nu + \varepsilon B_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(a, \vartheta) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (7.1.9)$$

що в них $A_1(a)$ і $B_1(a)$ визначають вирази (7.1.5), (7.1.6), функцію u_1 описує формула (7.1.3), $A_2(a, \vartheta)$, $B_2(a, \vartheta)$ – окремі періодичні за змінною ϑ розв'язки системи

$$\left. \begin{aligned} &\left(\omega - \frac{p}{q} \nu \right) \frac{\partial A_2}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_2 = - \left\{ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 - aB_1^2 \right\} + \\ &+ \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1 \left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) e^{-iq\sigma\vartheta} \cos \psi d(\nu t) d\psi, \\ &\left(\omega - \frac{p}{q} \nu \right) a \frac{\partial B_2}{\partial \vartheta} + 2a\omega A_2 = - \left\{ a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} B_1 - 2aA_1 B_1 \right\} - \\ &- \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1 \left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) e^{-iq\sigma\vartheta} \sin \psi d(\nu t) d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.10)$$

Зауважимо, що вирази (7.1.9) з урахуванням (7.1.10) виходять дуже складними лише тому, що їх записано у найзагальнішому вигляді. Для конкретних прикладів отримуються значно простіші рівняння.

Зробимо ще одну істотну заувагу. На відміну від нерезонансного випадку в рівняннях першого і другого наближення змінні не відокремлені, тому ми маємо систему двох взаємопов'язаних рівнянь для визначення невідомих a і ϑ .

Ефект резонансу проявляється, взагалі кажучи, за невеликих значень p і q .

7.2. Приклад

Розглянемо нелінійні площинні коливання супутника на еліптичній орбіті. Нехай розглядувані коливання близькі до гармонічних, і їх описує диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2\delta}{d\nu^2} + n^2\delta = ef \left(\nu, \delta, \frac{d\delta}{d\nu}, \frac{d^2\delta}{d\nu^2} \right), \quad (7.2.1)$$

$$\text{де } f\left(v, \delta, \frac{d\delta}{dv}, \frac{d^2\delta}{dv^2}\right) = \left[4\sin v + 2\frac{d\delta}{dv} - \frac{d^2\delta}{dv^2} \cos v \right] + n^2(\delta - \sin \delta),$$

e – ексцентриситет орбіти. За рахунок його можна вважати нелінійність малою величиною. Тому розв'язок рівняння (7.2.1) в першому наближенні шукаємо у вигляді:

$$\delta = a \cos \psi, \quad \psi = v + \vartheta, \quad (7.2.2)$$

де амплітуду a і фазу ϑ треба визначити з системи рівнянь:

$$\frac{da}{dv} = A_1(a, \vartheta), \quad \frac{d\vartheta}{dv} = n - 1 + B_1(a, \vartheta). \quad (7.2.3)$$

Тут $A_1(a)$ і $B_1(a)$ – окремі періодичні за ϑ розв'язки системи:

$$\left. \begin{aligned} (n-1) \frac{\partial A_1(a, \vartheta)}{\partial \vartheta} - 2anB_1(a, \vartheta) &= \frac{e}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0 \cos \psi d\psi, \\ (n-1)a \frac{\partial B_1(a, \vartheta)}{\partial \vartheta} + 2nA_1(a, \vartheta) &= -\frac{e}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0 \sin \psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (7.2.4)$$

де

$$\begin{aligned} f_0 &= f(\psi - \vartheta, a \cos \psi, -a n \sin \psi, a n^2 \cos \psi) = \\ &= 4\sin(\psi - \vartheta) - 2\sin(\psi - \vartheta) a n \sin \psi - \cos(\psi - \vartheta) a n^2 \cos \psi + \\ &+ n^2(a \cos \psi - \sin(a \cos \psi)). \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

Підставивши (7.2.5) до виразів у правих частинах (7.2.4), та, інтегрувавши їх, легко знаходимо з (7.2.4) періодичні по ϑ вирази для $A_1(a)$ і $B_1(a)$. Тоді система (7.2.3) набуває вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dv} &= -\frac{4e}{n+1} \cos \vartheta = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}, \\ \frac{d\vartheta}{dv} &= \left(\frac{n}{2} - \frac{n}{a} J_1(a) \right) - 1 + \frac{4e}{a(n+1)} \sin \vartheta = \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial a}, \end{aligned} \right\} \quad (7.2.6)$$

де $J_1(a)$ – функція Бесселя першого порядку, а

$$\Phi = \frac{4e}{n+1} a \sin \vartheta + n \left[\frac{a^2}{4} - (J_0(a) - 1) \right] - \frac{a^2}{4}, \quad (7.2.7)$$

де $J_0(a)$ – функція Бесселя нульового порядку.

Звідси одразу випливає, що рівняння (7.2.6) мають перший інтеграл $\Phi = \Phi_0$, наявність якого дозволяє звести задачу до квадратури.

Розділ 3

МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ

Лекція 8. Теореми про усереднення на скінченному проміжку

- 8.1. Системи в стандартній формі. Оператори усереднення.
- 8.2. Перша теорема М. М. Боголюбова.
- 8.3. Інші теореми про усереднення на скінченному проміжку.

8.1. Системи в стандартній формі. Оператори усереднення

Тут ми будемо мати справу з системами, записаними у *стандартній формі*:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x). \quad (8.1.1)$$

К формі (8.1.1) можна привести значну кількість рівнянь та їх систем. Нехай, наприклад, маємо систему:

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, \varepsilon), \quad (8.1.2)$$

де $X(t, x, \varepsilon)$ - неперервно диференційовна за ε на півінтервалі $(0, \varepsilon_0]$.

Припустимо, що відомо загальний розв'язок $\varphi(t, c)$ системи (8.1.2) при $\varepsilon = 0$:

$$\frac{dx_0}{dt} = X(t, x, 0). \quad (8.1.3)$$

Тоді, використовуючи метод варіації довільних сталих, одержимо:

$$\frac{dc}{dt} = \varepsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial c} \right)^{-1} \left[\frac{\partial X(t, \varphi, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0}, \quad (8.1.4)$$

тобто маємо систему в стандартній формі.

Розглянемо систему рівнянь другого порядку:

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \omega_k^2 x_k = \varepsilon X_k(t, x_k, \dot{x}_k), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (8.1.5)$$

Зробимо заміну змінних:

$$x_k = z_k e^{i\omega_k t} + z_{-k} e^{-i\omega_k t}, \quad (8.1.6)$$

$$\dot{z}_k = i\omega_k z_k e^{i\omega_k t} - i\omega_k z_{-k} e^{-i\omega_k t}, \quad (8.1.7)$$

в яких z_k, z_{-k} – комплексно спряжені невідомі функції часу. Диференціюючи (8.1.6), і, порівнюючи з (8.1.7), маємо:

$$\dot{z}_k e^{i\omega_k t} + \dot{z}_{-k} e^{-i\omega_k t} = 0. \quad (8.1.8)$$

Диференціюючи (8.1.7), і, підставляючи в (8.1.5), одержимо:

$$\dot{z}_k = i\omega_k \dot{z}_k e^{i\omega_k t} - i\omega_k \dot{z}_{-k} e^{-i\omega_k t} = \varepsilon X_k. \quad (8.1.9)$$

Покладаючи для спрощення

$$-\omega_{-k} = \omega_k, \quad X_{-k} = X_k,$$

можемо (8.1.5) подати у вигляді:

$$\frac{dz_j}{dt} = \varepsilon Z_j(t, z_k), \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N; \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N, \quad (8.1.10)$$

тобто дістали систему в стандартній формі.

До рівнянь типу (8.1.10) можуть бути зведено також рівняння, що описують коливання систем, які знаходяться під впливом сил високої частоти.

Системі (8.1.1) ставиться у відповідність спрощена система:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \bar{X}(\xi), \quad (8.1.11)$$

де

$$\bar{X}(x) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_0^T X(\tau, x) d\tau. \quad (8.1.12)$$

Означення. Вектор-функція $\bar{X}(x)$ називається *рівномірним середнім значенням* відносно x для вектор-функції $X(t, x)$ в області D , якщо для будь-якого $\delta > 0$ існує таке $T(\delta)$, що не залежить від x , що для будь-якого $\tau \geq T(\delta)$ для всіх $x \in D$ справедлива нерівність:

$$\left\| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau X(t, x) dt - \bar{X}(x) \right\| < \delta \quad (8.1.13)$$

$\|\cdot\|$ – евклідова норма вектор-функції.

Помітимо, що якщо область D обмежена, і вектор-функція $X(t, x)$ обмежена і задовольняє за x умову Ліпшица зі спільною константою, що не залежить від t , то з існування границі (8.1.12) в кожній точці $x \in D$ випливає існування рівномірного середнього.

Якщо функція $X(t, x)$ періодична за t з періодом ω і обмежена ($\|X(t, x)\| \leq M$), то

$$\bar{X}(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} X(t, x) dt$$

є рівномірним середнім.

Лема Гронуолла – Беллмана. Нехай $u(t) \geq 0$, $f(t) \geq 0$ на $[t_0, +\infty)$, $u(t)$, $f(t)$ неперервні на $[t_0, +\infty)$, причому виконано нерівність:

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t f(\tau) u(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0, \quad (8.1.14)$$

де $c > 0$. Тоді виконано нерівність:

$$u(t) \leq c \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right), \quad t \geq t_0. \quad (8.1.15)$$

Доведення. Помножимо обидві частини нерівності (8.1.14) на $f(t)$:

$$f(t)u(t) \leq cf(t) + f(t) \int_{t_0}^t f(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (8.1.16)$$

Позначимо:

$$v(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Очевидно, що $v(t) \geq 0$, $v(t_0) = 0$. Нерівність (8.1.16) перепишеться у вигляді:

$$\frac{dv(t)}{dt} \leq cf(t) + f(t)v(t) = f(t)(c + v(t)).$$

Або

$$\frac{dv(t)}{c + v(t)} \leq f(t) dt.$$

Зінтегруємо в межах від t_0 до t :

$$\int_{t_0}^t \frac{dv(\tau)}{c + v(\tau)} = \ln |c + v(t)| - \ln |c + v(t_0)| = \ln \left| \frac{c + v(t)}{c} \right| \leq \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau.$$

Звідси:

$$c + v(t) \leq c \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right).$$

Але за умовою:

$$u(t) \leq c + v(t) = c + \int_{t_0}^t f(\tau)u(\tau)d\tau ,$$

тому

$$u(t) \leq c \cdot \exp \int_{t_0}^t f(\tau)d\tau,$$

що й треба було довести.

8.2. Перша теорема М. М. Боголюбова

Наведемо першу теорему М. М. Боголюбова про усереднення на скінченному проміжку.

Теорема (перша теорема М. М. Боголюбова). *Нехай в області $Q = \{t \geq 0, x \in D\}$ виконано наступні умови:*

1) *функція $X(t, x)$ неперервна за t , рівномірно обмежена і задовольняє умову Ліпшица за x з константою λ , тобто існують такі сталі M і λ , що для будь-яких $t, x', x'' \in Q$ виконано:*

$$\|X(t, x)\| \leq M, \quad \|X(t, x') - X(t, x'')\| \leq \lambda \|x' - x''\|;$$

2) *рівномірно відносно $x \in D$ існує границя (8.1.12);*

3) *розв'язок $\xi(t)$ усередненої системи (8.1.11) з початковою умовою $\xi(0) = x_0 \in D' \subset D$ визначено для всіх $t \geq 0$ і лежить разом зі своїм ρ -околом в області D .*

Тоді для будь-яких $\eta > 0$ і $L > 0$ існує таке $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, що для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедлива нерівність

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq \eta, \tag{8.2.1}$$

де $x(t)$ і $\xi(t)$ – розв'язки систем (8.1.1) і (8.1.11) відповідно, що задовольняють умови $x(0) = \xi(0) \in D$.

Доведення. Зауважимо, що функція $\bar{X}(x)$ обмежена і задовольняє умову Ліпшица. Дійсно, внаслідок умови 2) теореми, для будь-якого $\delta > 0$ можна знайти таке $T_1(\delta)$, що при всіх $T > T_1$ справедлива оцінка

$$\|\bar{X}(x') - \bar{X}(x'')\| \leq \left\| \bar{X}(x') - \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x') dt \right\| +$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \frac{1}{T} \int_0^T [X(t, x') - X(t, x'')] dt \right\| + \left\| \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x'') - \bar{X}(x'') \right\| \leq \\
& \leq \delta + \frac{1}{T} \int_0^T \|X(t, x') - X(t, x'')\| dt \leq \delta + \lambda \|x' - x''\|.
\end{aligned}$$

Оскільки значення δ довільне, то у границі одержимо:

$$\|\bar{X}(x') - \bar{X}(x'')\| \leq \lambda \|x' - x''\|.$$

З умов 1) і 2) теореми випливає, що у систем (8.1.1) і (8.1.11) існують єдині і продовжувані при $t \geq 0$ розв'язки, поки $x(t)$ (відповідно $\xi(t)$) належить множині D . Тому при $D = \mathbb{R}^n$ виконання умови 3) автоматично випливає з умов 1) і 2).

Замінімо системи (8.1.1) і (8.1.11) відповідними системами інтегральних рівнянь:

$$x(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t X(s, x(s)) ds, \quad (8.2.2)$$

$$\xi(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t \bar{X}(\xi(s)) ds. \quad (8.2.3)$$

З (8.2.2) віднімемо (8.2.3) і до правої частини рівності додамо і віднімемо $X(s, \xi(s))$:

$$x(t) - \xi(t) = \varepsilon \int_0^t [X(s, x(s)) - X(s, \xi(s))] ds + \int_0^t [X(s, \xi(s)) - \bar{X}(\xi(s))] ds.$$

З урахуванням умови 1) одержимо:

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq \varepsilon \lambda \int_0^t \|x(s) - \xi(s)\| ds + \varepsilon \left\| \int_0^t [X(s, \xi(s)) - \bar{X}(\xi(s))] ds \right\|. \quad (8.2.4)$$

Оцінімо на проміжку $[0, L\varepsilon^{-1}]$ останній інтеграл в (8.2.4). Для цього розділимо відрізок $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на m рівних частин точками $t_0 = 0$,

$$t_1 = \frac{L}{\varepsilon m}, \dots, t_i = \frac{iL}{\varepsilon m}, \dots, t_m = \frac{mL}{\varepsilon m} = \frac{L}{\varepsilon} \text{ і позначимо } \xi(t_i) = \xi_i \text{ (} i = \overline{0, m} \text{);}$$

$$\varphi(t, \xi(t)) = X(t, \xi(t)) - \bar{X}(\xi(t)).$$

Припустимо, що $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $0 \leq k \leq m-1$. Маємо:

$$\left\| \varepsilon \int_0^t \varphi(s, \xi(s)) ds \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\varphi(s, \xi(s)) - \varphi(s, \xi_i)] ds + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \int_{t_k}^t [\varphi(s, \xi(s)) - \varphi(s, \xi_k)] ds + \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(s, \xi_i) ds + \int_{t_k}^t \varphi(s, \xi_k) ds \right\| \leq \\
& \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\varphi(s, \xi(s)) - \varphi(s, \xi_i)\| ds + \varepsilon \int_{t_k}^t \|\varphi(s, \xi(s)) - \varphi(s, \xi_k)\| ds + \\
& + \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_0^{t_{i+1}} \varphi(s, \xi_i) ds \right\| + \left\| \int_0^{t_i} \varphi(s, \xi_i) ds \right\| + \left\| \int_0^t \varphi(s, \xi_k) ds \right\| + \left\| \int_0^{t_k} \varphi(s, \xi_k) ds \right\|. \quad (8.2.5)
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
& \|\varphi(t, x') - \varphi(t, x'')\| \leq 2\lambda \|x' - x''\|, \\
& \|\xi(s) - \xi_i\| = \|\xi(s) - \xi(t_i)\| = \left\| \int_{t_i}^s \bar{X}(\xi(\tau)) d\tau \right\| \leq \varepsilon M(s - t_i),
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\varphi(s, \xi(s)) - \varphi(s, \xi_i)\| ds \leq 2\lambda \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\xi(s) - \xi(t_i)\| ds \leq \\
& \leq 2\lambda \varepsilon^2 M \int_{t_i}^{t_{i+1}} (s - t_i) ds = \frac{\lambda M L^2}{m^2}. \quad (8.2.6)
\end{aligned}$$

Внаслідок умови 2) теореми можна знайти таку монотонно спадну функцію $f(t)$, яка прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$, що для всіх $x \in D$ маємо:

$$\left\| \int_0^t \varphi(s, x) ds \right\| \leq t f(t).$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned}
& \left\| \varepsilon \int_0^{t_i} \varphi(s, \xi_i) ds \right\| \leq \varepsilon t_i f(t_i) \leq F(\varepsilon), \\
& \left\| \varepsilon \int_0^{t_i} \varphi(s, \xi_k) ds \right\| \leq \varepsilon t f(t_i) \leq F(\varepsilon), \quad (8.2.7)
\end{aligned}$$

де

$$F(\varepsilon) = \sup_{\tau \in [0, L]} \tau f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right), \quad F(\varepsilon) \rightarrow 0, \text{ якщо } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким чином, з (8.2.5) – (8.2.7) маємо:

$$\left\| \varepsilon \int_0^t \varphi(s, \xi(s)) ds \right\| \leq \frac{\lambda M L^2}{m} + 2mF(\varepsilon). \quad (8.2.8)$$

Оберемо число m так, щоб виконувалась нерівність

$$\exp(\lambda L) \frac{\lambda M L^2}{m} \leq \frac{\eta}{2}. \quad (8.2.9)$$

Тепер зафіксуємо m і оберемо ε_0 так, щоб при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ була справедлива нерівність:

$$\exp(\lambda L) 2mF(\varepsilon) \leq \frac{\eta}{2}. \quad (8.2.10)$$

З нерівностей (8.2.4), (8.2.8) – (8.2.10) і леми Гронуолла – Беллмана випливає твердження теореми.

Зауваження 1. Якщо умову 3) теореми не виконано, то її можна замінити наступною:

3') розв'язок $\xi(t)$ усередненої системи (8.1.11) з початковою умовою $\xi(0) = x_0 \in D$ при $\varepsilon = 1$ лежить разом зі своїм ρ -околом в області D при $t \in [0, T_1]$.

Тоді для будь-яких $\eta > 0$ і $L \in [0, T_1]$ існує таке $\varepsilon_0(\eta, L)$, що для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ і $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ справедлива нерівність (8.2.1).

Зауваження 2. Якщо функція $X(t, x)$ періодична за t з періодом T_1 , то можна отримати більш точні оцінки.

Дійсно, розділимо відрізок $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на частинні відрізки довжиною $\Delta t = t_{i+1} - t_i = T_1$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Тоді нерівності (8.2.5) – (8.2.7) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} \left\| \varepsilon \int_0^t \varphi(s, \xi(s)) ds \right\| &\leq \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\varphi(s, \xi(s)) - \varphi(s, \xi_i)] ds \right\| + \\ &+ \left\| \varepsilon \int_{t_k}^t [\varphi(s, \xi(s)) - \varphi(s, \xi_k)] ds \right\| + \varepsilon \left\| \int_{t_k}^t \varphi(s, \xi_k) ds \right\|, \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

$$\varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\varphi(s, \xi(s)) - \varphi(s, \xi_i)\| ds \leq 2\lambda \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\xi(s) - \xi(t_i)\| ds =$$

$$= 2\lambda\varepsilon^2 M \int_{t_i}^{t_{i+1}} (s - t_i) ds = \lambda\varepsilon^2 MT_1^2, \quad (8.2.12)$$

$$\varepsilon \left\| \int_{t_k}^t \varphi(s, \xi_k) ds \right\| \leq \varepsilon T_1 M. \quad (8.2.13)$$

Отже, з (8.2.11) – (8.2.13) маємо:

$$\varepsilon \left\| \int_0^t \varphi(s, \xi(s)) ds \right\| \leq \varepsilon MT_1 (\lambda L + 1)$$

і

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq C\varepsilon,$$

де

$$C = \exp(\lambda L) MT_1 (1 + \lambda L).$$

8.3. Інші теореми про усереднення на скінченному проміжку

Тут ми наведемо без доведення декілька теорем, що певним чином узагальнюють першу теорему М. М. Боголюбова.

Перша теорема М. М. Боголюбова вимагає виконання умови: розв'язок $\xi(t)$ усередненої системи (8.1.11) повинен належати області D разом зі своїм ρ -околом на всьому проміжку часу $0 \leq t < +\infty$.

Б. П. Демидович довів відповідну теорему М. М. Боголюбова за умови, що $\xi(t) \in D$ на скінченному проміжку часу, і вказано спосіб вибору чисел L і ε_0 .

Теорема М. М. Боголюбова – Б. П. Демидовича. *Нехай в області $\Omega = \{0 \leq t < +\infty, x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ (D – область у n -вимірному евклідовому просторі векторів $(x_1, \dots, x_n)$) виконано умову 1) теореми М. М. Боголюбова і умову:*

2) *усереднена система*

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \bar{X}(\xi), \quad \xi(0, \varepsilon) = x_0 \in D \quad (8.3.1)$$

має єдиний розв'язок $\xi = \xi(t, \varepsilon)$, визначений при $\varepsilon = 1$ на $[0, T_1]$. Тоді для кожного $\eta > 0$ існує $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) > 0$ таке, що розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$ системи (8.1.1) і розв'язок усередненої системи (8.1.11) з однаковими

початковими умовами $x(0, \varepsilon) = \xi(0, \varepsilon) = x_0$ при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ задовольняють нерівність

$$\|x(t) - \xi(t)\| < \eta$$

на деякому відрізку $[0, L\varepsilon^{-1}]$, де

$$L = \min\left(T_1, \frac{\rho}{M\sqrt{n}}\right), \quad 0 < L \leq T_1.$$

В працях О. М. Філатова було доведено теореми по обґрунтуванню метода усереднення при відсутності умови про рівномірну збіжність до середнього.

Теорема О. М. Філатова. Нехай в області

$$\Omega = \{0 \leq t < +\infty, x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$$

виконано наступні умови:

- 1) функція $X(t, x)$ неперервна за t і задовольняє умову Ліпшица за x з константою λ ;
- 2) в кожній точці $x_0 \in D$ існує границя (8.1.12);
- 3) розв'язок $\xi = \xi(t, \varepsilon)$, $\xi(0, \varepsilon) = x(0) = x_0 \in D' \subset D$ усередненої системи лежить разом з деяким ρ -околом в області D ;
- 4) на кожному скінченному відрізку $[t_1, t_2]$ вздовж траєкторії $\xi(t, \varepsilon)$ виконується нерівність

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} \bar{X}(\xi(s, \varepsilon)) ds \right\| \leq M |t_2 - t_1|, \quad M = \text{const}.$$

Тоді для будь-яких $\eta > 0$ та $L > 0$ можна вказати таке

$\varepsilon_0(\eta, L, x_0) > 0$, що при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ на відрізку $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ буде виконуватись нерівність (8.2.1), де $x(t, \varepsilon)$ і $\xi(t, \varepsilon)$ – розв'язки систем (8.1.1) і (8.1.11) відповідно, що задовольняють умову

$$x(0, \varepsilon) = \xi(0, \varepsilon) = x^0 \in D' \subset D.$$

Зауваження. Оцінки, отримані в теоремі О. М. Філатова, якісно відрізняються від відповідних оцінок в теоремі М. М. Боголюбова. Зовнішнє співпадіння за записом тверджень теорем М. М. Боголюбова і О. М. Філатова приводить іноді до неправильного їх розуміння. Дійсно, в теоремі М. М. Боголюбова стверджується, що нерівність (8.2.1) виконується рівномірно для всієї сім'ї траєкторій $x(t, \varepsilon)$ і $\xi(t, \varepsilon)$

зі збіжними початковими умовами $x(0, \varepsilon) = \xi(0, \varepsilon)$, тобто стверджується існування $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta, L)$.

Оцінка (8.2.1) теореми О. М. Філатова виконується тільки для розв'язків $x(t, \varepsilon)$ і $\xi(t, \varepsilon)$, що починаються в фіксованій початковій точці $x^0 \in D' \subset D$, тобто стверджується існування $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta, L, x_0)$.

Розглянемо стандартну систему

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon Z(t, z), \quad (8.3.2)$$

і припустимо, що існує така функція $\bar{Z}(t, z)$, для якої

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [Z(t, z) - \bar{Z}(t, z)] dt = 0. \quad (8.3.3)$$

Системі (8.3.2) поставимо у відповідність систему

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \bar{Z}(t, \xi), \quad \xi(0) = z_0, \quad (8.3.4)$$

і назвемо її *усередненою*.

Розглянемо питання про близькість розв'язків систем (8.3.2) і (8.3.4) на скінченному проміжку. Наступні теореми належать математикам Одеського університету.

Перша теорема В. О. Плотнікова – А. Т. Ярового. *Нехай в області $Q = \{0 \leq t < +\infty, z \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ виконано наступні умови:*

- 1) функції $Z(t, z)$ і $\bar{Z}(t, z)$ обмежені сталою M і задовольняють умову Ліпшица за змінною z з константою λ ;
- 2) рівномірно відносно z в області D існує границя (8.3.3);
- 3) розв'язок $\xi = \xi(t)$, $\xi(0) = z(0) \in D' \subset D$ усередненої системи при $t \geq 0$ для всіх $\varepsilon \in (0, \sigma)$ лежить в області D разом з деяким ρ -околом.

Тоді для будь-якого як завгодно малого $\eta > 0$ і як завгодно великого $L > 0$ можна вказати таке $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma)$, для якого при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ на відрізку $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ буде виконуватись нерівність $\|z(t) - \xi(t)\| < \eta$, де $z(t)$ і $\xi(t)$ – розв'язки відповідно систем (8.3.2) і (8.3.4), що задовольняють умову $z(0) = \xi(0) \in D' \subset D$.

Друга теорема В. О. Плотнікова – А. Т. Ярового. *Нехай в області $Q = \{0 \leq t < +\infty, z \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ виконано наступні умови:*

- 1) функція $Z(t, z)$ обмежена сталою M , рівномірно неперервна за z , рівномірно відносно $t \geq 0$;

2) рівномірно відносно z в області D існує границя (8.3.3);

3) функція $\bar{Z}(t, z)$ задовольняє умову Ліпшица за z з константою λ , і $\bar{Z}(t, z)$ обмежена сталою M ;

4) розв'язок $\xi = \xi(t)$, $\xi(0) = z(0) \in D' \subset D$ усередненої системи для всіх $t \geq 0$ і $\varepsilon \in (0, \sigma)$ лежить в області D разом з деяким ρ -околом.

Тоді для будь-якого скільки завгодно малого $\eta > 0$ і скільки завгодно великого $L > 0$ можна вказати таке $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma)$, що при

$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ на відрізку $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ буде виконуватись нерівність

$\|z(t) - \xi(t)\| < \eta$, де $z(t)$ і $\xi(t)$ – розв'язки відповідно систем (8.3.2) і

(8.3.4), що задовольняють умову $z(0) = \xi(0) \in D' \subset D$.

Зауважимо, що розв'язок $z(t)$ може бути не єдиним. В цьому випадку теорема стверджує що весь жмуток розв'язків системи (8.3.2) з початковою точкою $z(0)$ лежить в околі єдиного розв'язку $\xi(t)$ системи (8.3.4).

Лекція 9. Теореми про усереднення на нескінченному проміжку

9.1. Постановка задачі та деякі припущення.

9.2. Перетворення рівнянь в стандартній формі.

9.1. Постановка задачі та деякі припущення

Розглянемо систему рівнянь в стандартній формі:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad (9.1.1)$$

де x, X – точки n -вимірному евклідового простору $\mathbb{R}^n$, t – час, ε – малий параметр.

Водночас з системою (9.1.1) розглянемо усереднену систему

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi), \quad (9.1.2)$$

де

$$X_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt, \quad (9.1.3)$$

і детально дослідимо випадок, коли система (9.1.2) має «квазістатичний» розв'язок, що відповідає положенню рівноваги:

$$\xi = \xi_0, \quad X_0(\xi) = 0. \quad (9.1.4)$$

Для розв'язків системи (9.1.2), нескінченно близьких до ξ_0 , маємо рівняння у варіаціях:

$$\frac{d\delta\xi}{d\tau} = H\delta\xi, \quad H = \left(\frac{\partial X_0(\xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0}, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (9.1.5)$$

що є лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Характеристичне рівняння системи (9.1.5) має вигляд:

$$\det(H - \lambda E) = 0. \quad (9.1.6)$$

У подальшому будемо розглядати випадок, коли корені рівняння (9.1.6) мають від'ємні дійсні частини, отже всі $\delta\xi$ експоненціально прямують до нуля.

Припустимо, що праві частини системи (9.1.1) задовольняють наступні умови

а) функція $X(t, x)$ та її частинні похідні першого порядку обмежені і рівномірно неперервні щодо x в області

$$-\infty < t < +\infty, \quad x \in D_\rho, \quad (9.1.7)$$

де D_ρ – деякий ρ -окіл точки ξ_0 ;

б) в кожній точці цієї області виконано

$$\frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt \rightarrow X_0(x) \text{ при } T \rightarrow \infty \quad (9.1.8)$$

рівномірно за $t \in \mathbb{R}$.

9.2. Перетворення рівнянь в стандартній формі

Для спрощення перетворимо рівняння (9.1.1) наступним чином. Покладемо

$$x = \xi_0 + z, \quad (9.2.1)$$

де ξ_0 – квазістатичний розв’язок рівняння (9.1.2), z – нова змінна.

Тоді

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon H z + \varepsilon B(t, z), \quad (9.2.2)$$

де

$$B(t, z) = Z(t, \xi_0 + z) + X_0(\xi_0 + z) - H z, \quad (9.2.3)$$

$$Z(t, \xi_0 + z) = X(t, \xi_0 + z) - X_0(\xi_0 + z). \quad (9.2.4)$$

При цьому згідно з умовами а), б) (п. 9.1) в ρ -околі точки $z = 0$ функції $B(t, z)$, $Z(t, \xi_0 + z)$ та їх частинні похідні першого порядку за z обмежені та рівномірно неперервні в області

$$t \in \mathbb{R}, |z| \leq \rho. \quad (9.2.5)$$

Крім того, в кожній точці околу $|z| \leq \rho$ згідно (9.1.4) і позначенню (9.2.4) виконано:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} Z(t, \xi_0 + z) dt = 0 \quad (9.2.6)$$

рівномірно за $t \in \mathbb{R}$. Звідси, вочевидь, випливає

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} B(t, z) dt \rightarrow B(z) = X_0(\xi_0 + z) - X_0(\xi_0) - H z, \quad (9.2.7)$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial B(t, z)}{\partial z} dt \rightarrow \frac{\partial B(z)}{\partial z} = \frac{\partial X_0(\xi_0 + z)}{\partial z} - H, \text{ якщо } T \rightarrow \infty \quad (9.2.8)$$

рівномірно за t в області (9.2.5).

Оскільки $B(z)$ перетворюється на нуль при $z = 0$ разом зі своїми частинними похідними 1-го порядку, то з умови, що задовольняє функція $B(z)$

$$|B(z') - B(z'')| = \left| \frac{\partial B(z)}{\partial z} \right|_{z=\tilde{z}} |z' - z''| \quad (z' \leq \tilde{z} \leq z''), \quad (9.2.9)$$

впливає, що при $|z'| < \sigma$, $|z''| < \sigma$ ($\sigma < \rho$) справедлива нерівність

$$|B(z') - B(z'')| \leq \eta(\sigma) |z' - z''|, \quad (9.2.10)$$

де $\eta(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$.

Для подальшого дослідження зручно перетворити рівняння (9.2.2) до вигляду

$$\frac{dh}{dt} = Hh + Q(t, h, \varepsilon), \quad (9.2.11)$$

де $Q(t, h, \varepsilon)$ достатньо мала при малих h і ε . Тому зробимо деякі зауваження з приводу характеру функції $B(t, z)$.

Розглянемо функції

$$B_1(t, z) = B(t, z) - B(z), \quad (9.2.12)$$

$$\frac{\partial B_1(t, z)}{\partial z} = \frac{\partial B(t, z)}{\partial z} - \frac{\partial B(z)}{\partial z}. \quad (9.2.13)$$

Згідно з умовами (9.2.6), (9.2.7), (9.2.8) маємо

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} B_1(t, z) dt \rightarrow 0 \quad \text{при } T \rightarrow \infty$$

рівномірно за t та z в області (9.2.5).

Отже, можна побудувати такі функції $\varepsilon_1(T)$ і $\varepsilon_2(T)$, що прямують до нуля при $T \rightarrow \infty$, що будуть виконуватись нерівності:

$$\left| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} B_1(t, z) dt \right| \leq \varepsilon_1(T), \quad (9.2.14)$$

$$\left| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial B_1(t, z)}{\partial z} dt \right| \leq \varepsilon_2(T). \quad (9.2.15)$$

Побудуємо функції

$$B_{1\eta}(t, z) = \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} B_1(\tau, z) d\tau, \quad (9.2.16)$$

$$\frac{\partial B_{1\eta}(t, z)}{\partial z} = \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} \frac{\partial B_1(\tau, z)}{\partial z} d\tau, \quad (9.2.17)$$

де η – поки довільний параметр.

Згідно з умовами а), б) (п. 9.1) функції $B_1(t, z)$ і $\frac{\partial B_1(t, z)}{\partial z}$ в області (9.2.5) є обмеженими:

$$|B_1(\tau, z)| \leq M_1, \quad \left| \frac{\partial B_1(\tau, z)}{\partial z} \right| \leq M_2,$$

тому для функцій (9.2.16), (9.2.17) дістаємо нерівності:

$$|B_{1\eta}(t, z)| \leq \frac{T\varepsilon(T)}{1 - e^{-\eta T}} + M_1 T, \quad (9.2.18)$$

$$\left| \frac{\partial B_{1\eta}(t, z)}{\partial z} \right| \leq \frac{T\varepsilon(T)}{1 - e^{-\eta T}} + M_2 T, \quad (9.2.19)$$

де $\varepsilon(T) = \varepsilon_1(T) + \varepsilon_2(T)$.

Візьмемо T як функцію η ($T = T_\eta$), що визначається рівнянням

$$1 - e^{-\eta T} = \varepsilon(T).$$

Оскільки $\varepsilon(T) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$, то для T_η має виконуватись співвідношення

$$\eta T_\eta \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow 0. \quad (9.2.20)$$

Введемо позначення:

$$(M_1 + 1)\eta T_\eta = \zeta_1(\eta), \quad (9.2.21)$$

$$(M_2 + 1)\eta T_\eta = \zeta_2(\eta). \quad (9.2.22)$$

Тепер нерівності (9.2.18), (9.2.19) можна подати у вигляді

$$|B_{1\eta}(t, z)| = \left| \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} B_1(\tau, z) d\tau \right| \leq \frac{\zeta_1(\eta)}{\eta}, \quad (9.2.23)$$

$$\left| \frac{\partial B_{1\eta}(t, z)}{\partial z} \right| = \left| \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} \frac{\partial B_1(\tau, z)}{\partial z} d\tau \right| \leq \frac{\zeta_2(\eta)}{\eta}, \quad (9.2.24)$$

де $\zeta_1(\eta) \rightarrow 0$, $\zeta_2(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$ в області (9.2.5).

Здійснимо в системі (9.2.2) заміну змінних за формулою:

$$z = h + \varepsilon v(t, h), \quad (9.2.25)$$

де

$$v(t, h) = B_{1\eta}(t, h) = \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} B_1(\tau, h) d\tau. \quad (9.2.26)$$

Для визначення області зміни h в якості величини η візьмемо де-яку функцію η_ε параметру ε таким чином, щоб

$$\eta_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \frac{\varepsilon}{\eta_\varepsilon} \rightarrow \text{const} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (9.2.27)$$

Беручи до уваги позначення (9.2.21), дістаємо:

$$\varepsilon \frac{\zeta_1(\eta)}{\eta} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (9.2.28)$$

Оберемо ε_1 настільки малим, що при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ виконано:

$$\varepsilon \frac{\zeta_1(\eta)}{\eta} < \rho - \rho_1, \text{ де } 0 < \rho_1 < \rho. \quad (9.2.29)$$

Для $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ згідно (9.2.23) і виразу (9.2.25), $z \in D_\rho$ при $h \in D_\rho$.

Диференціюючи вираз (9.2.25) і підставляючи отриманий результат і значення z у систему (9.2.2), дістаємо:

$$\frac{dh}{dt} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt} = -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon Hh + \varepsilon^2 Hv + \varepsilon B(t, h + \varepsilon v). \quad (9.2.30)$$

Далі з (9.2.26) знаходимо:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\eta \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} B_1(\tau, z) d\tau + B_1(t, z) = -\eta v(t, h) + B(t, h) - B(h). \quad (9.2.31)$$

Підставляючи значення $\frac{\partial v}{\partial t}$ у рівняння (9.2.30), матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt} &= \varepsilon Hh + \varepsilon \eta v(t, h) + \varepsilon^2 Hv(t, h) + \varepsilon B(t, h + \varepsilon v) - \\ &- \varepsilon B(t, h) + \varepsilon B(h). \end{aligned} \quad (9.2.32)$$

Позначивши

$$L(t, h, \varepsilon) = \eta v(t, h) + \varepsilon Hv(t, h) + B(t, h + \varepsilon v) - B(t, h),$$

знайдемо

$$\left(E + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial h} \right) \frac{dh}{dt} = \varepsilon Hh + \varepsilon L(t, h, \varepsilon) + \varepsilon B(h). \quad (9.2.33)$$

Вираз $L(t, h, \varepsilon)$ і його частинні похідні 1-го порядку за h в області $t \in \mathbb{R}$, $h \in D_{\rho_1}$ обмежені деякою функцією від ε , що прямує до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$, E – n -вимірний одиничний матриця.

Згідно нерівності (9.2.24), виразу (9.2.26) і умови (9.2.27),

$$\left| \varepsilon \frac{\partial v}{\partial h} \right| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

та існує таке $\varepsilon_0 > 0$ ($\varepsilon_0 < \varepsilon_1$), що для будь-якого $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ буде виконуватись умова

$$\left| \varepsilon \frac{\partial v}{\partial h} \right| < 1.$$

Тоді існує $\left(E + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial h} \right)^{-1}$, тобто можемо розв'язати систему (9.2.33) відносно $\frac{dh}{dt}$:

$$\frac{dh}{dt}:$$

$$\frac{dh}{dt} = \left(E + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial h} \right)^{-1} [\varepsilon Hh + \varepsilon L(t, h, \varepsilon) + \varepsilon B(h)],$$

або

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon Hh + \varepsilon \Gamma(t, h, \varepsilon). \quad (9.2.34)$$

Далі, оскільки $\tau = \varepsilon t$, то

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \varepsilon \frac{dh}{d\tau} = \varepsilon Hh + \varepsilon \Gamma\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, h, \varepsilon\right)$$

і, перепозначивши τ знову через t , остаточно маємо:

$$\frac{dh}{dt} = Hh + Q(t, h, \varepsilon),$$

(9.2.35) де $Q(t, h, \varepsilon) = \Gamma\left(\frac{t}{\varepsilon}, h, \varepsilon\right)$, тобто прийшли до вигляду (9.2.11).

Нескладно переконатися, що функції $Q(t, h, \varepsilon)$ задовольняють умови:

а) функції $Q(t, h, \varepsilon)$ визначено в області

$$t \in \mathbb{R}, h \in D_{\rho_1}, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0; \quad (9.2.36)$$

б) для $t \in \mathbb{R}$ і $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ виконано

$$|Q(t, 0, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon), \quad (9.2.37)$$

де $M(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;

в) для будь-якого додатного $\sigma < \rho_1$ в області

$$t \in \mathbb{R}, h' \in D_\sigma, h'' \in D_\sigma, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

справедлива нерівність

$$|Q(t, h', \varepsilon) - Q(t, h'', \varepsilon)| \leq \lambda(\varepsilon, \sigma) |h' - h''|, \quad (9.2.38)$$

де $\lambda(\varepsilon, \sigma) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$;

г) дійсні частини коренів $p_1, p_2, \dots, p_n$ рівняння

$$\det(H - \lambda E) = 0 \quad (9.2.39)$$

відмінні від нуля.

Лекція 10. Розв'язки системи (9.2.35) та їх стійкість

- 10.1. Побудова розв'язків системи (9.2.35).
- 10.2. Друга теорема М. М. Боголюбова.
- 10.3. Приклад існування періодичного розв'язку в нелінійних системах.
- 10.4. Теорема К. Банфі – О. М. Філатова.

10.1. Побудова розв'язків системи (9.2.35)

Розглянемо матрицю H , що входить у систему (9.2.35). Подамо її у вигляді

$$H = U \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} U^{-1}, \quad (10.1.1)$$

де U – довільна матриця, що має обернену; 0 – нуль-матриця; H_+ , H_- – матриці відповідно з додатними та від'ємними коренями характеристичного рівняння. Таким чином, $\dim H_+ = n - s$, $\dim H_- = s$, де s – кількість коренів рівняння (9.2.39) з від'ємними дійсними частинами.

Введемо матрицю $J(t)$ за допомогою співвідношень:

$$J(t) = \begin{cases} -U \begin{pmatrix} e^{-H_+ t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{-1}, & t > 0, \\ -U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e^{-H_- t} \end{pmatrix} U^{-1}, & t < 0. \end{cases} \quad (10.1.2)$$

Тоді $J(t)$ задовольняє диференціальне рівняння:

$$\frac{dJ}{dt} = -HJ = -JH \quad \text{для } t \neq 0 \quad (10.1.3)$$

і умову розриву при $t = 0$:

$$J(-0) - J(+0) = E. \quad (10.1.4)$$

Оскільки загальний розв'язок рівняння (10.1.3) має вигляд:

$$J(t) = \sum_{j=1}^n c_j J_j(t),$$

де $J_j(t) = e^{p_j t}$ для простого кореня рівняння (9.2.39) и

$J_j(t) = F_j(t)e^{p_j t}$ для кратного кореня цього рівняння ($F_j(t)$ – деякий поліном, степінь якого не вище кратності кореня p_j), то, отже, у загальному випадку маємо:

$$J(t) = \sum_{j=1}^n c_j F_j(t) e^{p_j t} = e^{-Ht}. \quad (10.1.5)$$

Оскільки експонента зростає швидше полінома, то завжди можна знайти такі додатні константи K і α , щоб задовольнялась нерівність

$$|J(t)| < Ke^{-\alpha t} \quad (10.1.6)$$

на всій дійсній осі.

Зафіксуємо деяке додатне число $D < \rho_1$ і розглянемо клас обмежених неперервних функцій $F(t)$, визначених при $t \in \mathbb{R}$ зі значеннями в $\mathbb{R}^n$, що задовольняють нерівність:

$$\|F(t)\| \leq D \quad (10.1.7)$$

для будь-якого $t \in \mathbb{R}$; тут позначено $\|f(t)\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$.

Позначимо цей клас $C(D)$ і розглянемо перетворення S , що переводить функцію $F(t) \in C(D)$ в функцію:

$$S_t(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} J(z) Q[t+z, F(t+z), \varepsilon] dz, \quad (10.1.8)$$

де $J(z)$ визначається виразом (10.1.5) і має властивості (10.1.3), (10.1.4).

Згідно нерівностям (9.2.37), (9.2.38) для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ маємо:

$$\begin{aligned} |Q[t+z, F(t+z), \varepsilon]| &= |Q(t+z, 0, \varepsilon) + Q[t+z, F(t+z), \varepsilon] - Q(t+z, 0, \varepsilon)| \leq \\ &\leq |Q(t+z, 0, \varepsilon)| + |Q[t+z, F(t+z), \varepsilon] - Q(t+z, 0, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)D, \end{aligned} \quad (10.1.9)$$

де $\lambda(\varepsilon, D) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $D \rightarrow 0$.

Отже, з урахуванням (10.1.6):

$$|S_t(F)| \leq (M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)D) \int_{-\infty}^{+\infty} Ke^{-\alpha|z|} dz = \frac{2K}{\alpha} (M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)D). \quad (10.1.10)$$

Для двох функцій $F(t), \bar{F}(t) \in C(D)$ аналогічно маємо:

$$\begin{aligned}
|S_t(\bar{F}) - S_t(F)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} J(z) \{Q[t+z, \bar{F}(t+z), \varepsilon] - Q[t+z, F(t+z), \varepsilon]\} dz \right| \leq \\
&\leq K\lambda(\varepsilon, D) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|z|} |\bar{F}(t+z) - F(t+z)| dz \leq \\
&\leq \frac{2K\lambda(\varepsilon, D)}{\alpha} \|\bar{F}(t+z) - F(t+z)\|. \tag{10.1.11}
\end{aligned}$$

Підберемо тепер D як функцію параметру ε таким чином, щоб $D(\varepsilon) \rightarrow 0$ коли $\varepsilon \rightarrow 0$, і щоб для всіх ε , що не перевищують деякого $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, мали місце нерівності

$$\frac{2K}{\alpha} (M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)D) < D, \tag{10.1.12}$$

$$\frac{4\lambda(\varepsilon, D)}{\alpha} K \leq 1. \tag{10.1.13}$$

Такий вибір $D = D(\varepsilon)$ можливий, оскільки $M(\varepsilon) \rightarrow 0$, $\lambda(\varepsilon, D) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $D \rightarrow 0$.

Тоді для $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ згідно нерівностям (10.1.10), (10.1.11), дістанемо:

$$|S_t(F)| < D(\varepsilon), \tag{10.1.14}$$

$$|S_t(\bar{F}) - S_t(F)| \leq \frac{1}{2} \|\bar{F} - F\|. \tag{10.1.15}$$

Звідси випливає, що S є оператором стискання, що відображає повний нормований простір $C(D)$ на себе. Отже, згідно з теоремою Банаха, рівняння

$$F = S(F) \tag{10.1.16}$$

має єдиний розв'язок. Позначимо цей розв'язок через $F = f(t)$.

Покажемо, що $h = f(t)$ – розв'язок рівняння (9.2.35). Згідно прийнятому позначенню, а також рівнянню (10.1.16) і позначенню (10.1.8), маємо:

$$f(t) = \int_{-\infty}^t J(z) Q[t+z, f(t+z), \varepsilon] dz. \tag{10.1.17}$$

Виконуючи заміну змінної $t+z = \tau$, і, позначаючи $f_t = h_t$, знайдемо:

$$h_t = \int_{-\infty}^{+\infty} J(\tau-t) Q(\tau, h_t, \varepsilon) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^t J(\tau-t)Q(\tau, h_\tau, \varepsilon) d\tau + \int_t^{+\infty} J(\tau-t)Q(\tau, h_\tau, \varepsilon) d\tau. \quad (10.1.18)$$

Диференціюючи останню рівність за t , і, беручи до уваги рівняння (10.1.3) та умову (10.1.4), одержуємо:

$$\frac{dh_t}{dt} = Hh_t + Q(t, h_t, \varepsilon),$$

тобто функція $h_t = f(t)$ дійсно є розв'язком рівняння (9.2.35).

Нехай додатково до умов а) – г) (див. п. 9.2) функції $Q(t, h, \varepsilon)$ майже періодичні за t , тобто існує послідовність дійсних чисел $\{\tau_m\}$ така, що для будь-якого додатного $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ функції $Q(t, h, \varepsilon)$ в області $-\infty < t < +\infty$, $h \in D_p$ рівномірно задовольняють співвідношення

$$|Q(t + \tau_m, h, \varepsilon) - Q(t, h, \varepsilon)| \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (10.1.19)$$

Тоді можна показати, що у цьому випадку розв'язки рівняння (9.2.35) також майже періодичні за t , тобто для $\varepsilon < \varepsilon_1$ рівномірно відносно t виконано:

$$|f(t + \tau_m) - f(t)| \rightarrow 0, \text{ якщо } m \rightarrow \infty.$$

Питання про стійкість одержаного розв'язку вирішується наступним чином. Якщо серед коренів характеристичного рівняння (9.2.39) є хоч би один з додатною дійсною частиною, то будь-який розв'язок $h_t = f(t)$ рівняння (9.2.35) буде нестійким. Якщо дійсні частини всіх коренів рівняння (9.2.39) від'ємні, то знайдений розв'язок має властивість притягання близьких розв'язків:

$$|h_t - f(t)| \leq C |h_{t_0} - f(t_0)| e^{-\gamma(t-t_0)}.$$

10.2. Друга теорема М. М. Боголюбова

Викладене вище дозволяє сформулювати теорему.

Теорема (друга теорема М. М. Боголюбова). *Нехай функція $X(t, x)$, що входить у рівняння*

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad (10.2.1)$$

задовольняє наступні умови:

а) усереднене рівняння

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi), \quad (10.2.2)$$

де

$$X_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \xi) dt, \quad (10.2.3)$$

має квазістатичний розв'язок $\xi = \xi_0$;

б) дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння

$$\det(H - \lambda E) = 0, \quad (10.2.4)$$

яку складено для рівняння у варіаціях

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = \varepsilon H \delta\xi, \quad H = \left(\frac{\partial X_0(\xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0}, \quad (10.2.5)$$

що відповідає квазістатичному розв'язку $\xi = \xi_0$, відмінні від нуля;

в) можна вказати такий ρ -окіл D_ρ точки ξ_0 , в якому $X(t, x)$

майже періодична функція змінної t рівномірно відносно $x \in D_\rho$;

г) функція $X(t, x)$ та її частинні похідні першого порядку за x обмежені та рівномірно неперервні щодо x в області $-\infty < t < \infty$, $x \in D_\rho$.

Тоді можна знайти такі додатні сталі ε' , σ_0 , σ_1 ($\sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \rho$), що для будь-якого додатного $\varepsilon < \varepsilon'$ мають місце твердження:

1. Рівняння (10.2.1) має єдиний розв'язок $x = x^*(t)$, визначений на інтервалі $(-\infty, +\infty)$ що для нього

$$|x^*(t) - \xi_0| < \sigma_0, \quad -\infty < t < +\infty. \quad (10.2.6)$$

2. Цей розв'язок $x = x^*(t)$ майже періодичний з частотним базисом функції $X(t, x)$.

3. Можна знайти таку функцію $\delta(\varepsilon)$, що прямує до нуля разом з ε , що має місце нерівність

$$|x^*(t) - \xi_0| \leq \delta(\varepsilon), \quad -\infty < t < +\infty. \quad (10.2.7)$$

4. Нехай $x(t)$ – будь-який розв'язок рівняння (10.2.1), відмінний від $x^*(t)$, за деякого $t = t_0$ задовольняє нерівність

$$|x(t) - \xi_0| < \sigma_0. \quad (10.2.8)$$

Тоді, якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння (10.2.4) від'ємні, то

$$|x(t) - x^*(t)| < Ce^{-\gamma t(t-t_0)}, \quad (10.2.9)$$

де C, γ – додатні сталі.

Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння (10.2.4) додатні, то можна знайти таке $t_1 > t_0$, що

$$|x(t_1) - \xi_0| > \sigma_1. \quad (10.2.10)$$

Если s дійсних частин розглядуваних коренів від'ємні, а решта $n-s$ додатні, то у σ_0 -околі точки ξ_0 існує s -вимірний точковий многовид M_{t_0} такий, що з співвідношення $x(t_0) \in M_{t_0}$ випливає експоненціальне прямування до нуля різниці $|x(t) - x^*(t)|$, а зі співвідношення $x(t_0) \notin M_{t_0}$ випливає справедливність нерівності (10.2.10).

Примітка 1. Очевидно, що згідно з властивістю 4, розв'язок $x^*(t)$ стійкий, до того ж асимптотично, коли дійсні частини всіх коренів рівняння (10.2.4) від'ємні. Якщо дійсна частина хоч би одного кореня рівняння (10.2.4) додатна, то розв'язок $x^*(t)$ нестійкий.

Примітка 2. Припустимо, що додатково до умов наведеної теореми $X(t, x)$ є періодичною функцією змінної t з деяким періодом τ , що не залежить від x . Тоді

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T X(t, x) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau X(t, x) dt, \quad (10.2.11)$$

тому

$$X_0(\xi) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau X(t, x) dt. \quad (10.2.12)$$

Оскільки частотний базис функції $X(t, x)$ містить в розглядуваному випадку лише одне число $\frac{2\pi}{\tau}$, з властивості 3 сформульованої теореми випливає, що розв'язок $x^*(t)$ є періодичним з періодом τ .

10.3. Приклад існування періодичного розв'язку в нелінійних системах

Проілюструємо наведену теорему на прикладі нелінійного диференціального рівняння другого порядку, що описує вільні коливання нелінійного осцилятора, тобто

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (10.3.1)$$

де ε – малій додатний параметр. Зробивши в рівнянні (10.3.1) заміну змінних за формулами

$$x = a \cos \psi, \quad \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \psi, \quad (10.3.2)$$

одержимо

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi, \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega - \frac{\varepsilon}{a\omega} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi. \end{cases} \quad (10.3.3)$$

Вилучивши t з рівнянь (10.3.3), здобудемо диференціальне рівняння в стандартному вигляді типу (9.1.1):

$$\frac{da}{d\psi} = -\frac{\varepsilon}{\omega^2} \cdot \frac{f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi}{1 - \frac{\varepsilon}{a\omega^2} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi}. \quad (10.3.4)$$

Відповідне усереднене рівняння (рівняння першого наближення) має вигляд:

$$\frac{da}{d\psi} = \frac{\varepsilon}{\omega} A_1(a), \quad (10.3.5)$$

де

$$A_1(a) = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi. \quad (10.3.6)$$

Припустимо, що рівняння

$$A_1(a) = 0 \quad (10.3.7)$$

має нетривіальний корінь

$$a = a_0, \quad a_0 \neq 0,$$

що для нього

$$A_1'(a) \neq 0,$$

і що функція $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ на площині $\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в околі еліпсу

$$x^2 + \frac{1}{\omega^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = a_0^2.$$

(10.3.8)

Тоді, згідно з наведеною теоремою можемо стверджувати, що за достатньо малих значень параметра ε точне рівняння (10.3.4) має періодичний розв'язок $a = a(\psi)$ з періодом 2π , близький до a_0 . Цей розв'язок є стійким, якщо

$$A_1'(a) < 0, \quad (10.3.9)$$

і він має властивість притягання близьких розв'язків. Якщо

$$A_1'(a) > 0, \quad (10.3.10)$$

то розв'язок стає нестійким і набуває властивість відштовхувати близькі розв'язки.

Отже, рівняння (10.3.1) за достатньо малих значень параметра ε має близький до еліпса (10.3.8) граничний цикл, що відповідає періодичному розв'язку. За умови (10.3.9) цей граничний цикл є стійким і притягує до себе всі близькі до нього розв'язки рівняння (10.3.1), а за умови (10.3.10) – цикл нестійкий, і всі розв'язки рівняння (10.3.1) відштовхуються від нього.

Тепер розглянемо коливну систему, що її описує загальніше рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(vt, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (10.3.11)$$

де $f\left(vt, x, \frac{dx}{dt}\right)$ – періодична за t функція з періодом $\frac{2\pi}{v}$. Обмежує-
мось резонансним випадком, коли

$$\omega^2 = \left(\frac{p}{q}v\right)^2 + \varepsilon\Delta,$$

де p та q – взаємно прості числа.

Зводимо рівняння (10.3.11) до стандартного вигляду. Насамперед зробимо в ньому заміну змінних за формулами:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \xi \cos \frac{p}{q} vt + \eta \sin \frac{p}{q} vt, \\ \frac{dx}{dt} = -\xi v \frac{p}{q} \sin \frac{p}{q} vt + \eta v \frac{p}{q} \cos \frac{p}{q} vt. \end{array} \right. \quad (10.3.12)$$

Підставивши вирази (10.3.12) до рівняння (10.3.11), після очевидних викладок одержимо:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X(t, \xi, \eta), \quad \frac{d\eta}{dt} = \varepsilon Y(t, \xi, \eta), \quad (10.3.13)$$

де позначено

$$\begin{aligned} X(t, \xi, \eta) &= -\frac{qF(t, \xi, \eta) \sin \frac{p}{q} vt}{pv}, \quad Y(t, \xi, \eta) = \frac{qF(t, \xi, \eta) \cos \frac{p}{q} vt}{pv}; \\ F(t, \xi, \eta) &= f \left(vt, \xi \cos \frac{p}{q} vt + \eta \sin \frac{p}{q} vt, -\xi v \frac{p}{q} \sin \frac{p}{q} vt + \eta v \frac{p}{q} \cos \frac{p}{q} vt \right) - \\ &- \Delta \left(\xi \cos \frac{p}{q} vt + \eta \sin \frac{p}{q} vt \right). \end{aligned}$$

Очевидно, що праві частини одержаних рівнянь у стандартній формі (10.3.13) є періодичними функціями за t з періодом $\frac{2\pi q}{v}$. Усереднені рівняння, що відповідають системі (10.3.13), мають вигляд

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi, \eta), \quad \frac{d\eta}{dt} = \varepsilon Y_0(\xi, \eta), \quad (10.3.14)$$

де

$$X_0(\xi, \eta) = \frac{v}{2\pi q} \int_0^{\frac{2\pi q}{v}} X(t, \xi, \eta) dt, \quad Y_0(\xi, \eta) = \frac{v}{2\pi q} \int_0^{\frac{2\pi q}{v}} Y(t, \xi, \eta) dt.$$

Припускаємо, що рівняння

$$X_0(\xi, \eta) = 0, \quad Y_0(\xi, \eta) = 0 \quad (10.3.15)$$

мають сталий нетривіальний розв'язок

$$\xi = \xi_0, \quad \eta = \eta_0, \quad (10.3.16)$$

і що в околі еліпса

$$x^2 + \frac{(x')^2}{\left(\frac{p}{q}\right)^2} = a_0^2, \quad (10.3.17)$$

де $a_0^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2$, функція $f\left(vt, x, \frac{dx}{dt}\right)$ неперервна за $x, \frac{dx}{dt}$ разом зі своїми частинними похідними першого порядку.

Нехай додатково виконано умови

$$\begin{cases} \frac{\partial X_0(\xi_0, \eta_0)}{\partial \xi} + \frac{\partial Y_0(\xi_0, \eta_0)}{\partial \eta} < 0 \\ \frac{\partial X_0(\xi_0, \eta_0)}{\partial \xi} \frac{\partial Y_0(\xi_0, \eta_0)}{\partial \eta} - \frac{\partial X_0(\xi_0, \eta_0)}{\partial \eta} \frac{\partial Y_0(\xi_0, \eta_0)}{\partial \xi} > 0, \end{cases} \quad (10.3.18)$$

що гарантують від'ємність дійсних частин обох коренів характеристичного рівняння відповідного рівняння у варіаціях для розв'язків (10.3.16).

Тоді на підставі наведеної теореми можна стверджувати, що в розглядуваному випадку, за достатньо малих значень ε , рівняння

(10.3.11) має періодичний розв'язок з періодом $\frac{2\pi q}{v}$, близький до гармонічного

$$x = a \cos\left(\frac{p}{q}vt + \varphi_0\right), \quad (10.3.19)$$

де

$$a_0 = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}, \quad \varphi_0 = -\arctg \frac{\eta_0}{\xi_0}.$$

Будь-який розв'язок рівняння (10.3.11), що проходить через точку деякого околу еліпса (10.3.17) при $t \rightarrow \infty$ асимптотично наближається до періодичного розв'язку (10.3.19).

10.4. Теорема К. Банфі – О. М. Філатова

Якщо нема умови майже періодичності за t функції $X(t, x)$, проте є умова рівномірної асимптотичної стійкості розв'язку усередненої системи, то близькість розв'язків основної та усередненої системи на

нескінченному часовому проміжку встановлюється наступною теоремою.

Теорема К. Банфі – О. М. Філатова. Нехай вектор-функція $X(t, x)$ системи (10.2.1) визначена в області

$$\Omega = \{0 \leq t < +\infty, x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$$

і виконано наступні умови:

1) $X(t, x)$ неперервна за t , а за x задовольняє умову Ліпшица

$$|X(t, x^{(1)}) - X(t, x^{(2)})| \leq \lambda |x^{(1)} - x^{(2)}|$$

для будь-яких $x^{(1)}, x^{(2)} \in D$;

2) у кожній точці $x \in D$ рівномірно щодо t існує границя

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_t^{t+T} X(s, x) ds = X_0(x),$$

і функція $X_0(x)$ є обмеженою;

3) розв'язок $\xi = \xi(t)$, $\xi(0) = x(0)$ усередненої системи

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi)$$

визначений для всіх $t \geq 0$ і лежить в області D разом з деяким своїм ρ -околом;

4) розв'язок $\xi = \xi(\tau)$ ($\tau = \varepsilon t$) рівномірно асимптотично стійкий¹.

Тоді для будь-якого η такого, що $0 < \eta < \rho$, існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для будь-якого $\varepsilon < \varepsilon_0$ і для будь-якого $t \geq 0$ виконано:

$$|x(t) - \xi(t)| < \eta.$$

¹ Означення рівномірної стійкості див., напр., в книзі: Б. П. Демидович. Лекции по математической теории устойчивости. М., Наука, 1967, – стор. 67.

Список рекомендованой литературы

Базова

1. И. Г. Малкин. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М. Гостехиздат, 1956. – 491 с.
2. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М. : Наука, 1979. – 432 с.
3. Митропольский Ю. О. Методи нелінійної механіки. К.: Наук. думка, 2005. – 527 с.
4. Митропольский Ю. А., Хома Г. П. Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. К.: Наук. думка, 1983. – 215 с.

Додаткова

1. Старжинский В. М. Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. – 256 с.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М. ГИФМЛ, 1963. – 412 с.
3. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. К.: Наук. думка, 1971. – 440 с.
4. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. – 400 с.

Зміст

Вступ. Що таке нелінійна механіка.....	3
Розділ 1. МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПУАНКАРЕ.....	6
<u>Лекція 1.</u> Періодичні розв'язки квазілінійного диференціального рівняння 2-го порядку в нерезонансному випадку.....	6
1.1. Теорема Пуанкаре про існування періодичного розв'язку диференціального рівняння 2-го порядку.....	6
1.2. Знаходження 2π -періодичного розв'язку рівняння $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$ методом малого параметра в нерезонансному випадку.....	9
<u>Лекція 2.</u> Періодичні розв'язки квазілінійного диференціального рівняння 2-го порядку в резонансному випадку.....	13
2.1. Коливання неавтономної системи в резонансному випадку. Умови існування періодичних розв'язків.....	13
2.2. Коливання неавтономної системи в резонансному випадку. Знаходження періодичного розв'язку.....	18
<u>Лекція 3.</u> Періодичні розв'язки квазілінійного рівняння у випадку $\omega = 0$	22
3.1. Періодичні розв'язки в неособливому випадку.....	22
3.2. Періодичні розв'язки в особливому випадку.....	26
<u>Лекція 4.</u> Періодичні розв'язки автономних рівнянь.....	32
4.1. Умови існування періодичних розв'язків.....	32
4.2. Метод Лінштедта–Пуанкаре знаходження періодичного розв'язку автономного рівняння.....	34
Розділ 2. МЕТОД КРИЛОВА–БОГОЛЮБОВА.....	40
<u>Лекція 5.</u> Асимптотичне інтегрування квазілінійних автономних диференціальних рівнянь.....	40
5.1. Асимптотичні ряди та їх властивості.....	40
5.2. Побудова асимптотичного розв'язку автономного диференціального рівняння, близького до лінійного.....	45
5.3. Визначення коефіцієнтів асимптотичних розвинень.....	47
<u>Лекція 6.</u> Побудова розв'язків з урахуванням зовнішніх періодичних сил.....	54
6.1. Нерезонансний випадок.....	54
6.2. Резонансні випадки.....	59

<u>Лекція 7.</u> Найзагальніший випадок резонансу.....	66
7.1. Побудова розв’язків в околі резонансу і поблизу підходів до резонансної області з нерезонансної зони.....	66
7.2. Приклад.....	69
Розділ 3. МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ.....	71
<u>Лекція 8.</u> Теореми про усереднення на скінченному проміжку...71	71
8.1. Системи в стандартній формі. Оператори усереднення.....	71
8.2. Перша теорема М. М. Боголюбова.....	74
8.3. Інші теореми про усереднення на скінченному проміжку....	78
<u>Лекція 9.</u> Теореми про усереднення на нескінченному проміжку81	81
9.1. Постановка задачі та деякі припущення.....	81
9.2. Перетворення рівнянь в стандартній формі.....	82
<u>Лекція 10.</u> Розв’язки системи (9.2.35) та їх стійкість.....	88
10.1. Побудова розв’язків системи (9.2.35).....	88
10.2. Друга теорема М. М. Боголюбова.....	91
10.3. Приклад існування періодичного розв’язку в нелінійних системах.....	94
10.4. Теорема К. Банфі – О. М. Філатова.....	97
<i>Список рекомендованої літератури</i>	99

Навчальне видання

Щоголев Сергій Авенирович

**МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ
НЕЛІНІЙНОЇ МЕХАНІКИ**

Частина 1

Конспект лекцій

За редакцією автора

Підп. до друку 07.05.2021. Формат 60х84/16.

Ум.-друк. арк. 5,93. Тираж 15 пр.

Зам. № 2277.

**Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова**

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12

Тел.: (048) 723 28 39. E-mail: druk@onu.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.