Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2012 . – Т. 17, вип. 3 (15). – С. 68–81

УДК 517.926

С. А. Щёголев
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

О СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С КВАЗИЖОРДАНОВОЙ МАТРИЦЕЙ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

Щоголев С. А. Про спеціальні класи розв'язків диференціальної системи з квазіжордановою матрицею лінійної частини. Для квазілінійної диференціальної системи з матрицею лінійної частини, близької до жорданової нормальної форми, отримано ознаки існування частинного розв'язку, компоненти якого зображувані абсолютно та рівномірно збіжними рядами Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотою за умови наявності деяких резонансних співвідношень.
Ключові слова: диференціальний, повільно змінний, ряди Фур'є.

Щёголев С. А. О специальных классах решений дифференциальной системы с квазижордановой матрицей линейной части. Для квазилинейной дифференциальной системы с матрицей линейной части, близкой к жордановой нормальной форме, получены признаки существования частного решения, компоненты которого представимы абсолютно и равномерно сходящимися рядами Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, при наличии некоторых резонансных соотношений.
Ключевые слова: дифференциальный, медленно меняющийся, ряды Фурье.

Shchogolev S. A. On a special classes of solutions of the differential system with the quasijordan matrixof linear part. For quasilinear system with the matrix of linear part close to the Jordan normal form, the evidences of the existence of a particular solution, the components of which are represented by an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency, are obtained subject to certain resonance correlations.
Key words: differential, slowly varying, Fourier series.

1. **Введение.** В теории дифференциальных уравнений и теории колебаний хорошо известна задача о периодических решениях дифференциальных уравнений и их систем, и ей посвящены многочисленные исследования отечественных и зарубежных математиков. Из вышедших в последнее время отметим [1–4]. Важным методом исследования периодических решений является представление этих решений в виде тригонометрических рядов Фурье:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{in\varphi t}, \tag{1}$$

где φ — частота. В некоторых случаях требуется дополнительное условие:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| < +\infty, \tag{2}$$

гарантирующее при $\varphi \in \mathbf{R}$ абсолютную и равномерную на вещественной прямой сходимость ряда (1). В связи с этим возникает задача изначально исследовать не просто периодические решения дифференциальной системы, а именно решения, представимые в виде (1) с условием (2). Как отмечается в монографии [5], есть достаточные основания для того, чтобы заменить исследование периодических решений общего вида функциями вида (1) с условием (2). Сужение рассматриваемого пространства функций позволяет дать конструктивное аналитическое представление искомых решений, а также облегчает нахождение приближённых аналитических выражений для них в виде конечных тригонометрических сумм.

В то же время точная периодичность коэффициентов системы и её решений является некоторой идеализацией. В реальных физических (механических, электрических) системах амплитуды и частоты колебаний, строго говоря, являются не постоянными, а функциями времени, в определённом смысле медленно меняющимися. В частности, это могут быть функции, зависящие от так называемого медленного времени $\tau = \varepsilon t$ ($\varepsilon > 0$ — малый параметр). Поэтому, с учётом сказанного выше, естественным образом возникает задача исследовать решения дифференциальных систем, представимые рядами Фурье не с постоянными, а с медленно меняющимися коэффициентами и частотами. В такой постановке задача существенно отличается от задачи исследования обычных периодических решений, и её решение не может быть получено как следствие известных результатов, касающихся периодических решений.

2. Основные обозначения и определения.

Пусть $G = \{t, \varepsilon : \ t \in \mathbf{R}, \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \ \varepsilon_0 \in \mathbf{R}^+\}$.

Определение 1. *Скажем, что функция* $p(t,\varepsilon)$ *принадлежит классу* $S(m;\varepsilon_0) \quad (m \in \mathbf{N} \cup \{0\})$, *если выполнены следующие условия:*

1) $p : G \to \mathbf{C}$,

2) $p(t,\varepsilon) \in \mathrm{C}^m(\mathbf{G})$ *по* t,

3) $d^k p(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k p_k^*(t,\varepsilon), \quad \sup\limits_G |p_k^*(t,\varepsilon)| < +\infty \quad (0 \le k \le m)$.

Примерами функций класса $S(m;\varepsilon_0)$ являются в общем случае комплекснозначные, ограниченные вместе со своими производными до m-го порядка включительно, функции, зависящие от "медленного времени" $\tau = \varepsilon t$: $\sin\tau$, $\mathrm{arctg}\,\tau$ и т. д.

Определение 2. *Скажем, что функция* $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ *принадлежит классу* $F(m;\varepsilon_0;\theta) \quad (m \in \mathbf{N} \cup \{0\})$, *если эта функция представима в виде:*

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon) \exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),$$

причём выполнены условия:

1) $f_n(t,\varepsilon) \in S(m;\varepsilon_0), \ d^k f_n(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k f_{nk}(t,\varepsilon) \ (n \in \mathbf{Z}, \ 0 \le k \le m)$,

2) $\|f\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \overset{def}{=} \sum\limits_{k=0}^{m} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \sup\limits_G |f_{nk}(t,\varepsilon)| < +\infty$,

3) $\theta(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t \varphi(\tau,\varepsilon) d\tau, \ \varphi(t,\varepsilon) \in \mathbf{R}^+, \ \varphi(t,\varepsilon) \in S(m;\varepsilon_0), \ \inf\limits_G \varphi(t,\varepsilon) > 0.$

В частности, при $\varepsilon = 0$: $\varphi = \mathrm{const}$, $\theta = \varphi t$, $f_n = \mathrm{const}$, функции класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ превращаются в $2\pi/\varphi$-периодические функции переменной t:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\varphi t},$$

такие, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n| < +\infty.$$

Функции класса $S(m;\varepsilon_0)$, очевидно, являются частным случаем функций класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(f_n \equiv 0\ \forall n \neq 0)$.

Множество функций класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ образуют линейное пространство, которое превращается в полное нормированное пространство введением нормы $\|\cdot\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$. Справедлива цепочка включений:

$$F(0;\varepsilon_0;\theta) \supset F(1;\varepsilon_0;\theta) \supset \cdots \supset F(m;\varepsilon_0;\theta).$$

Пусть заданы две функции класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$:

$$u(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)),$$

$$v(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)).$$

Произведение этих функций определим по формуле [6]:

$$(uv)(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty} u_{n-s}(t,\varepsilon)v_s(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)).$$

Очевидно, что $uv \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$. Сформулируем некоторые свойства нормы $\|\cdot\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$. Пусть $k = \mathrm{const}$. Тогда

1) $\|ku\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = |k|\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$,

2) $\|u+v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leq \|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} + \|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$,

3) $\|uv\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leq 2^m\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$.

Для любой функции $f(t,\varepsilon,\theta) \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ обозначим:

$$\Gamma_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t,\varepsilon,u)\exp(-inu)du.$$

Для вектора $x(t,\varepsilon,\theta) = \mathrm{colon}(x_j(t,\varepsilon,\theta))_{j=\overline{1,N}}$, где $x_j \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, определим норму:

$$\|x\|^* = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \|x_j\|^2_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}}.$$

Для матрицы $A(t,\varepsilon,\theta) = a_{jk}(t,\varepsilon,\theta)_{j,k=\overline{1,N}}$, где $a_{jk} \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, определим норму:

$$\|A\|^* = \sqrt{\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \|a_{jk}\|^2_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}}.$$

3. Постановка задачи. Пусть $r, n_1, \ldots, n_r, K_0, K_1, \ldots, K_r, p_j$ $(j = \overline{1,K_0})$, $s_{\alpha j}$ $(\alpha = \overline{1,r}; j = \overline{1,K_\alpha})$ — заданные натуральные числа.

Рассматривается следующая система дифференциальных уравнений блочной структуры:

$$\frac{dx}{dt} = J(t,\varepsilon)x + \varepsilon S(t,\varepsilon)x + g(t,\varepsilon,\theta) + \mu X(t,\varepsilon,\theta,x), \tag{3}$$

где $x = \operatorname{colon}[x^0, x^1, x^2] \in D$, $x^0 = \operatorname{colon}[x_1^0, \ldots, x_{K_0}^0]$, $x_j^0 = \operatorname{colon}(x_{j1}^0, \ldots, x_{jp_j}^0)$ $(j = \overline{1,K_0})$, $x^\nu = \operatorname{colon}[x_{11}^\nu, \ldots, x_{1K_1}^\nu, x_{21}^\nu, \ldots, x_{2K_2}^\nu, \ldots, x_{r1}^\nu, \ldots, x_{rK_r}^\nu]$, $x_{\alpha j}^\nu = \operatorname{colon}\left(x_{\alpha j,1}^\nu, \ldots, x_{\alpha j, s_{\alpha j}}\right)$ $(\nu = 1,2;\ \alpha = \overline{1,N};\ j = \overline{1,K_\alpha})$; $J(t,\varepsilon) =$ $= \operatorname{diag}[J^0(t,\varepsilon), J^1(t,\varepsilon), J^2(t,\varepsilon)]$, $J^0(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}[J_1^0(t,\varepsilon), \ldots, J_{K_0}^0(t,\varepsilon)]$,

$$J_j^0(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрица размерности $p_j \times p_j$ $(j = \overline{1,K_0})$;
$J^\nu(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}[J_{11}^\nu(t,\varepsilon), \ldots, J_{1K_1}^\nu(t,\varepsilon), J_{21}^\nu(t,\varepsilon), \ldots, J_{2K_2}^\nu(t,\varepsilon), \ldots, J_{r1}^\nu(t,\varepsilon), \ldots, J_{rK_r}^\nu(t,\varepsilon)]$,

$$J_{\alpha j}^\nu(t,\varepsilon) =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^\nu i n_\alpha \varphi(t,\varepsilon) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & (-1)^\nu i n_\alpha \varphi(t,\varepsilon) & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & (-1)^\nu i n_\alpha \varphi(t,\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & (-1)^\nu i n_\alpha \varphi(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$$

— матрица размерности $s_{\alpha j} \times s_{\alpha j}$ $(\nu = 1,2;\ \alpha = \overline{1,r};\ j = \overline{1,K_\alpha}\ )$;
$g(t,\varepsilon,\theta) = \operatorname{colon}[g^0(t,\varepsilon,\theta), g^1(t,\varepsilon,\theta), g^2(t,\varepsilon,\theta)]$,
$g^0(t,\varepsilon,\theta) = \operatorname{colon}[g_1^0(t,\varepsilon,\theta), \ldots, g_{K_0}^0(t,\varepsilon,\theta)]$,
$g_j^0(t,\varepsilon,\theta) = \operatorname{colon}(g_{j1}^0(t,\varepsilon,\theta), \ldots, g_{jp_j}^0(t,\varepsilon,\theta)$ $(j = \overline{1,K_0}\ )$,
$g^\nu(t,\varepsilon,\theta) = \operatorname{colon}[g_{11}^\nu(t,\varepsilon,\theta), \ldots, g_{1K_1}^\nu(t,\varepsilon,\theta), \ldots, g_{r1}^\nu(t,\varepsilon,\theta), \ldots, g_{rK_r}^\nu(t,\varepsilon,\theta)]$,
$g_{\alpha j}^\nu(t,\varepsilon,\theta) = \operatorname{colon}(g_{\alpha j,1}^\nu(t,\varepsilon,\theta), \ldots, g_{\alpha j, s_{\alpha j}}^\nu(t,\varepsilon,\theta))$ $(\nu = 1,2;\ \alpha = \overline{1,r};\ j = \ \overline{1,K_\alpha}\ )$.

Общий порядок системы (3) равен

$$N = \sum_{j=1}^{K_0} p_j + 2\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{j=1}^{K_\alpha} s_{\alpha j}.$$

Общее число блоков в жордановой $(N \times N)$-матрице $J(t,\varepsilon)$ равно:

$$M = K_0 + 2\sum_{\alpha=1}^{r} K_\alpha.$$

$S(t,\varepsilon)$ — $(N\times N)$ — матрица, все элементы которой принадлежат классу $S(m-1;\varepsilon_0)$. Все компоненты векторов $g^{\nu}_{\alpha j}(t,\varepsilon,\theta)$ $(\nu=1,2;\ \alpha=\overline{1,r};\ j=\overline{1,K_\alpha})$ принадлежат классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$.
$X(t,\varepsilon,\theta,x)=\mathrm{colon}[X^0(t,\varepsilon,\theta,x),X^1(t,\varepsilon,\theta,x),X^2(t,\varepsilon,\theta,x)]$,
$X^0(t,\varepsilon,\theta,x)=\mathrm{colon}[X^0_1(t,\varepsilon,\theta,x),...,X^0_{K_0}(t,\varepsilon,\theta,x)]$,
$X^0_j(t,\varepsilon,\theta,x)=\mathrm{colon}(X^0_{j1}(t,\varepsilon,\theta,x),...,X^0_{jp_j}(t,\varepsilon,\theta,x))$ $(j=\overline{1,K_0})$,
$X^{\nu}(t,\varepsilon,\theta,x)=$
$=\mathrm{colon}[X^{\nu}_{11}(t,\varepsilon,\theta,x),...,X^{\nu}_{1K_1}(t,\varepsilon,\theta,x),...,X^{\nu}_{r1}(t,\varepsilon,\theta,x),...,X^{\nu}_{rK_r}(t,\varepsilon,\theta,x)]$,
$X^{\nu}_{\alpha j}(t,\varepsilon,\theta,x)=$
$=\mathrm{colon}(X^{\nu}_{\alpha j,1}(t,\varepsilon,\theta,x),...,X^{\nu}_{\alpha j,s_{\alpha j}}(t,\varepsilon,\theta,x))$ $(\nu=1,2;\ \alpha=\overline{1,r};\ j=\overline{1,K_\alpha})$.
Все компоненты вектор-функции $X(t,\varepsilon,\theta,x)$ имеют в D непрерывные частные производные по всем компонентам вектора x до порядка $2q+1$ $(q\in\mathbf{N})$ включительно, и, если компоненты вектора x принадлежат классу $F(k;\varepsilon_0^*;\theta)$ $(0\le k\le m;$ $0\le\varepsilon_0^*\le\varepsilon_0)$, то все эти частные производные принадлежат соответственно тому же классу; $\mu\in(0,\mu_0)$, $0<\mu_0<1$.

Замечание 1. *Некоторые достаточные условия выполнения требования, налагаемого на вектор-функцию $X(t,\varepsilon,\theta,x)$, приведены в [7].*

Целью статьи является получение для системы (3) признаков существования решений класса $F(m-1;\varepsilon_1;\theta)$, где $0<\varepsilon_1\le\varepsilon_0$. В работах [8–10] аналогичная задача была решена для системы 2-го порядка с чисто мнимыми или тождественно нулевыми собственными значениями матрицы линейной части. В работе [11] исследовалась система блочного вида, но матрица линейной части предполагалась близкой к диагональной. В настоящей работе матрица линейной части предполагается близкой к $J(t,\varepsilon)$, т. е. к жордановой нормальной форме, причём исследуется резонансный случай в том смысле, что все собственные значения матрицы $J(t,\varepsilon)$ имеют вид $is\varphi(t,\varepsilon)$ $(s\in\mathbf{Z})$, где $\varphi(t,\varepsilon)$ — функция, фигурирующая в определении класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, которому принадлежат все компоненты векторов g,X.

4. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть задана линейная однородная система дифференциальных уравнений вида:*

$$\frac{dx}{dt}=J(t,\varepsilon)x+\left(\sum_{l=1}^{q}P^{(l)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)x, \tag{4}$$

где x — N-мерный вектор, матрица $J(t,\varepsilon)$ — та же, что и в системе (3), элементы $(N\times N)$-матриц $P(l)(t,\varepsilon,\theta)$ $(l=\overline{1,q})$ принадлежат классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$; $\mu\in(0,\mu_0)$.

Тогда существует $\mu_1\in(0,\mu_0)$ такое, что $\forall\mu\in(0,\mu_1)$ существует линейное преобразование вида:

$$x=y+\left(\sum_{l=1}^{q}\Psi^{(l)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)y, \tag{5}$$

где элементы $(N\times N)$-матриц $\Psi^{(l)}$ $(l=\overline{1,q})$ принадлежат классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, *приводящее систему (4) к виду:*

$$\frac{dy}{dt} = J(t,\varepsilon)y + \left(\sum_{l=1}^{q} U^{(l)}(t,\varepsilon)\mu^l\right) y + \varepsilon\left(\sum_{l=1}^{q} V^{(l)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right) y + \\ +\mu^{q+1}W(t,\varepsilon,\theta,\mu)y, \tag{6}$$

где $U^{(l)}$ $(l=\overline{1,q})$ *—* $(N\times N)$ *— матрицы с элементами из класса* $S(m;\varepsilon_0)$*, а* $V^{(l)}$ $(l=\overline{1,q})$*,* W *—* $(N\times N)$ *— матрицы с элементами из класса* $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$*.*

Доказательство. Подставляя выражение (5) в систему (4), с учётом (6), получим следующие дифференциальные уравнения для определения матриц $\Psi^{(1)},...,\Psi^{(q)}$:

$$\frac{d\Psi^{(1)}}{dt} = J(t,\varepsilon)\Psi^{(1)} - \Psi^{(1)}J(t,\varepsilon) + P^{(1)}(t,\varepsilon,\theta) - U^{(1)}(t,\varepsilon) - \varepsilon V^{(1)}(t,\varepsilon,\theta), \tag{7}$$

$$\frac{d\Psi^{(l}}{dt} = J(t,\varepsilon)\Psi^{(l)} - \Psi^{(l)}J(t,\varepsilon) + P^{(l)}(t,\varepsilon,\theta) + \sum_{\nu=1}^{l-1} P^{(\nu)}(t,\varepsilon,\theta)\Psi^{(l-\nu)} - \\ -\sum_{\nu=1}^{l-1}\Psi^{(\nu)}U^{(l-\nu)}(t,\varepsilon) - \varepsilon\sum_{\nu=1}^{l-1}\Psi^{(\nu)}V^{(l-\nu)}(t,\varepsilon,\theta) - \\ -U^{(l)}(t,\varepsilon) - \varepsilon V^{(l)}(t,\varepsilon,\theta)\ (l=\overline{2,q}). \tag{8}$$

При этом матрица W определится из уравнения:

$$\left(E_N + \sum_{l=1}^{q}\Psi^{(l)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right) W = \sum_{s=0}^{q-1}\left[\sum_{\sigma+\delta=s+q+1}\left(P^{(\sigma)}\Psi^{(\delta)} - \Psi^{(\sigma)}U^{(\delta)}\right)\right]\mu^s - \\ -\varepsilon\sum_{s=0}^{q-1}\left(\sum_{\sigma+\delta=s+q+1}\Psi^{(\sigma)}V^{(\delta)}\right)\mu^s, \tag{9}$$

где E_N – единичная матрица порядка N.

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\Psi}{dt} = J(t,\varepsilon)\Psi - \Psi J(t,\varepsilon) + P(t,\varepsilon,\theta) - U(t,\varepsilon) - \varepsilon V(t,\varepsilon,\theta), \tag{10}$$

в котором элементы $(N\times N)$-матрицы $P(t,\varepsilon,\theta)$ известны и принадлежат классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, а элементы $(N\times N)$-матриц U,V подлежат определению, исходя из того, чтобы уравнение (10) имело решение $\Psi=\Psi(t,\varepsilon,\theta)$, причём все элементы матрицы Ψ должны принадлежать классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

В соответствии со структурой матрицы $J(t,\varepsilon)$ представим матрицы Ψ,P,U,V в блочном виде: $\Psi=[\Psi^{\sigma\nu}]_{\sigma,\nu=0,1,2}$, $P=[P^{\sigma\nu}]_{\sigma,\nu=0,1,2}$, $U=[U^{\sigma\nu}]_{\sigma,\nu=0,1,2}$, $V= =[V^{\sigma\nu}]_{\sigma,\nu=0,1,2}$. Тогда для матриц $\Psi^{\sigma\nu}$ получим следующие уравнения:

$$\frac{d\Psi^{\sigma\nu}}{dt} = J^{\sigma}(t,\varepsilon)\Psi^{\sigma\nu} - \Psi^{\sigma\nu}J^{\nu}(t,\varepsilon) + P^{\sigma\nu}(t,\varepsilon,\theta) - \\ -U^{\sigma\nu}(t,\varepsilon) - \varepsilon V^{\sigma\nu}(t,\varepsilon,\theta),\quad \sigma,\nu=0,1,2. \tag{11}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\sigma, \nu = 1, 2$. Тогда $\Psi^{\sigma\nu} = \left[\Psi^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l}\right]$, $P^{\sigma\nu} = \left[P^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l}\right]$, $U^{\sigma\nu} = \left[U^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l}\right]$, $V^{\sigma\nu} = \left[V^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l}\right]$ $(\alpha, \beta = \overline{1, N};\ j = \overline{1, K_\alpha};\ l = \overline{1, K_\beta})$, причём $\Psi^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l} = \left(\psi^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,\rho k}\right)$, $P^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l} = \left(p^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,\rho k}\right)$, $U^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l} = \left(u^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,\rho k}\right)$, $V^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l} = \left(v^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,\rho k}\right)$ $(\rho = \overline{1, s_{\alpha j}};\ k = \overline{1, s_{\beta l}})$.

Расписав уравнения (11) в скалярной форме, получим:

$$\frac{d\psi^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,1s_{\beta l}}}{dt} = i\left((-1)^\sigma n_\alpha - (-1)^\nu n_\beta\right)\varphi(t,\varepsilon)\psi^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,1s_{\beta l}} + \\ + p^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,1s_{\beta l}}(t,\varepsilon,\theta) - u^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,1s_{\beta l}}(t,\varepsilon) - \varepsilon v^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,1s_{\beta l}}(t,\varepsilon,\theta), \tag{12}$$

$$\frac{d\psi^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,\rho s_{\beta l}}}{dt} = \\ i\left((-1)^\sigma n_\alpha - (-1)^\nu n_\beta\right)\varphi(t,\varepsilon)\psi^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,\rho s_{\beta l}} + \psi^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,(\rho-1,s_{\beta l})} + \\ + p^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,\rho s_{\beta l}}(t,\varepsilon,\theta) - u^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,\rho s_{\beta l}}(t,\varepsilon) - \varepsilon v^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,\rho s_{\beta l}}(t,\varepsilon,\theta),\ \rho = \overline{2, s_{\alpha j}}. \tag{13}$$

$$\frac{d\psi^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,(1,k-1)}}{dt} = i\left((-1)^\sigma n_\alpha - (-1)^\nu n_\beta\right)\varphi(t,\varepsilon)\psi^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,(1,k-1)} - \\ - \psi^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,1k} + p^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,(1,k-1)}(t,\varepsilon,\theta) - u^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,(1,k-1)}(t,\varepsilon) - \varepsilon v^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,(1,k-1)}(t,\varepsilon,\theta), \tag{14}$$

$$\frac{d\psi^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,(\rho,k-1)}}{dt} = i\left((-1)^\sigma n_\alpha - (-1)^\nu n_\beta\right)\varphi(t,\varepsilon)\psi^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,(\rho,k-1)} + \\ + \psi^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,(\rho-1,k-1)} - \psi^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,\rho k} + p^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,(\rho,k-1)}(t,\varepsilon,\theta) - u^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,(\rho,k-1)}(t,\varepsilon) - \\ - \varepsilon v^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,(\rho,k-1)}(t,\varepsilon,\theta),\ \rho = \overline{2, s_{\alpha j}};\ k = \overline{2, s_{\beta l}}. \tag{15}$$

Каждое из уравнений (12) – (15) имеет вид:

$$\frac{d\psi}{dt} = in_0\varphi(t,\varepsilon)\psi + p(t,\varepsilon,\theta) - u(t,\varepsilon) - \varepsilon v(t,\varepsilon,\theta), \tag{16}$$

где $n_0 \in \mathbf{Z}$, $p \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$. Покажем, что уравнение (16) имеет решение класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ при определённом выборе функций u, v. Представим функцию p в виде ряда Фурье:

$$p(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(t,\varepsilon)e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

и функцию ψ также будем искать в виде ряда Фурье:

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(t,\varepsilon)e^{in\theta(t,\varepsilon)}.$$

Положим:

$$u(t,\varepsilon) = \Gamma_{n_0}(p(t,\varepsilon,\theta)), \quad \psi(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq n_0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(p(t,\varepsilon,\theta))}{i(n-n_0)\varphi(t,\varepsilon)}\, e^{in\theta},$$

$$v(t,\varepsilon,\theta) = -\frac{1}{\varepsilon}\sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq n_0)}}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n(p(t,\varepsilon,\theta))}{i(n-n_0)\varphi(t,\varepsilon)}\right)e^{in\theta}.$$

Очевидно, что $u \in S(m;\varepsilon_0)$, $\psi \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $v \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$. Следовательно, каждое из уравнений (12) – (15) имеет решение $\psi^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,\rho k}(t,\varepsilon,\theta) \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, при этом функции $u^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,\rho k}(t,\varepsilon) \in S(m;\varepsilon_0)$, $v^{\sigma\nu}_{\alpha j,\beta l,\rho k}(t,\varepsilon,\theta) \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$. Отсюда следует, что матричное уравнение (11) при $\sigma,\nu = 1,2$ имеет решение $\Psi^{\sigma\nu}(t,\varepsilon,\theta)$, все элементы которого принадлежат классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Легко убедиться, проведя аналогичные выкладки, в том, что уравнение (11) будет иметь решение класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ и в том случае, когда хотя бы одно из чисел σ или ν равно нулю. И во всех этих случаях все элементы матрицы $U^{\sigma\nu}(t,\varepsilon)$ будут принадлежать классу $S(m;\varepsilon_0)$, а все элементы матрицы $V^{\sigma\nu}(t,\varepsilon,\theta)$ будут принадлежать классу $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$.

Следовательно уравнение (10) имеет решение $\Psi(t,\varepsilon,\theta)$, все элементы которого принадлежат классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, при этом все элементы матрицы $U(t,\varepsilon)$ принадлежат классу $S(m;\varepsilon_0)$, а все элементы матрицы $V(t,\varepsilon,\theta)$ принадлежат классу $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$.

Выбрав теперь параметр μ достаточно малым, из уравнения (9) однозначно определим матрицу $W(t,\varepsilon,\theta,\mu)$, все элементы которой будут принадлежать классу $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$.

Лемма 1 доказана.

Введём вектор

$$\xi^0 = \mathrm{colon}[\xi^{00},\xi^{10},\xi^{20}], \tag{17}$$

где

$$\xi^{00} = \mathrm{colon}[\xi^{00}_1,\ldots,\xi^{00}_{K_0}], \quad \xi^{00}_j = \mathrm{colon}\left(\xi^{00}_{j,1},\ldots,\xi^{00}_{j,p_j}\right)\ (j=\overline{1,K_0}),$$

$$\xi^{\nu 0} = \mathrm{colon}\left[\xi^{\nu 0}_{11},\ldots,\xi^{\nu 0}_{1K_1},\ldots,\xi^{\nu 0}_{r1},\ldots,\xi^{\nu 0}_{rK_r}\right],$$

$$\xi^{\nu 0}_{\alpha j} = \mathrm{colon}\left(\xi^{\nu 0}_{\alpha j,1},\ldots,\xi^{\nu 0}_{\alpha j,s_{\alpha j}}\right)\ (\nu=1,2;\ \alpha=\overline{1,r};\ j=\overline{1,K_\alpha}),$$

$$\xi^{00}_{j1} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n(g^0_{j1})}{in\varphi}\,e^{in\theta} - \Gamma_0(g^0_{j2}),$$

$$\xi^{00}_{jk} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n(\xi^{00}_{j,k-1}+g^0_{jk})}{in\varphi}\,e^{in\theta} - \Gamma_0(g^0_{j,k+1})\ (k=\overline{2,p_j-1}),$$

$$\xi^{00}_{jp_j} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n(\xi^{00}_{j,p_j-1}+g^0_{jp_j})}{in\varphi}\,e^{in\theta} + M^{00}_j\ (j=\overline{1,K_0}),$$

где $M^{00}_j = M^{00}_j(t,\varepsilon)$ $(j=\overline{1,K_0})$ — пока не определённые функции;

$$\xi^{10}_{\alpha j,1} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq -n_\alpha)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n(g^1_{\alpha j,1})}{i(n+n_\alpha)\varphi}\,e^{in\theta} - \Gamma_{-n_\alpha}(g^1_{\alpha j,2})e^{-in_\alpha\theta},$$

$$\xi^{10}_{\alpha j,k} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq -n_\alpha)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(\xi^{10}_{\alpha j,k-1} + g^1_{\alpha j,k})}{i(n+n_\alpha)\varphi}\, e^{in\theta} - \Gamma_{-n_\alpha}(g^1_{\alpha j,k+1})e^{-in_\alpha\theta} \ (k = \overline{2, s_{\alpha j}-1}),$$

$$\xi^{10}_{\alpha j,s_{\alpha j}} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq -n_\alpha)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(\xi^{10}_{\alpha j,s_{\alpha j}-1} + g^1_{\alpha j,s_{\alpha j}})}{i(n+n_\alpha)\varphi}\, e^{in\theta} + M^{10}_{\alpha j}\, e^{-in_\alpha\theta} \ (\alpha = \overline{1,r};\ j = \overline{1,K_\alpha}),$$

где $M^{10}_{\alpha j} = M^{10}_{\alpha j}(t,\varepsilon)$ $(\alpha = \overline{1,r};\ j = \overline{1,K_\alpha})$ — пока не определённые функции;

$$\xi^{20}_{\alpha j,1} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq n_\alpha)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(g^2_{\alpha j,1})}{i(n-n_\alpha)\varphi}\, e^{in\theta} - \Gamma_{n_\alpha}(g^2_{\alpha j,2})e^{in_\alpha\theta},$$

$$\xi^{20}_{\alpha j,k} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq n_\alpha)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(\xi^{20}_{\alpha j,k-1} + g^2_{\alpha j,k})}{i(n-n_\alpha)\varphi}\, e^{in\theta} - \Gamma_{n_\alpha}(g^2_{\alpha j,k+1})e^{in_\alpha\theta} \ (k = \overline{2, s_{\alpha j}-1}),$$

$$\xi^{20}_{\alpha j,s_{\alpha j}} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq n_\alpha)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(\xi^{20}_{\alpha j,s_{\alpha j}-1} + g^2_{\alpha j,s_{\alpha j}})}{i(n-n_\alpha)\varphi}\, e^{in\theta} + M^{20}_{\alpha j}\, e^{in_\alpha\theta} \ (\alpha = \overline{1,r};\ j = \overline{1,K_\alpha}),$$

где $M^{20}_{\alpha j} = M^{20}_{\alpha j}(t,\varepsilon)$ $(\alpha = \overline{1,r};\ j = \overline{1,K_\alpha})$ – пока не определённые функции.

Т. о. имеем M функций $M^{00}_j(t,\varepsilon)$ $(j = \overline{1,K_0})$, $M^{\nu 0}_{\alpha j}(t,\varepsilon)$ $(\nu = 1,2;\ \alpha = \overline{1,r};\ j = \overline{1,K_\alpha})$, подлежащих определению.

Введём M-мерный вектор $M^0(t,\varepsilon) = \mathrm{colon}[M^{00}(t,\varepsilon), M^{10}(t,\varepsilon), M^{20}(t,\varepsilon)]$, где $M^{00}(t,\varepsilon) = \mathrm{colon}(M^{00}_j(t,\varepsilon))_{j=\overline{1,K_0}}$, $M^{\nu 0}(t,\varepsilon) = \mathrm{colon}(M^{\nu 0}_j(t,\varepsilon))_{\alpha=\overline{1,r};\ j=\overline{1,K_\alpha}}$ $(\nu = 1,2)$. Рассмотрим следующее векторное уравнение для определения вектора $M^0(t,\varepsilon)$ (уравнение для вектора порождающих амплитуд):

$$Q(t,\varepsilon,M^0) = 0, \tag{18}$$

где $Q = \mathrm{colon}[Q^0,Q^1,Q^2]$, $Q^0 = \mathrm{colon}(Q^0_j)_{j=\overline{1,K_0}}$, $Q^\nu = \mathrm{colon}(Q^\nu_{\alpha j})_{\alpha=\overline{1,r};\ j=\overline{1,K_\alpha}}$ $(\nu = 1,2)$,

$$Q^0_j = \Gamma_0(X^0_{j1}(t,\varepsilon,\theta,\xi^0))\ (j = \overline{1,K_0}),$$

$$Q^\nu_{\alpha j} = \Gamma_{(-1)^\nu n_\alpha}(X^\nu_{\alpha j,1}(t,\varepsilon,\theta,\xi^0))\ (\nu = 1,2;\ \alpha = \overline{1,r};\ j = \overline{1,K_\alpha}).$$

Лемма 2. *Пусть система (3) такова, что:*
1) функции $g^0_{\alpha j}(t,\varepsilon,\theta)$ $(j = \overline{1,K_0})$, $g^\nu_{\alpha j,1}(t,\varepsilon,\theta)$ $(\alpha = \overline{1,r};\ j = \overline{1,K_\alpha})$ *удовлетворяют условиям:*

$$\Gamma_0(g^0_{j1}(t,\varepsilon,\theta)) = 0,\ j = \overline{1,K_0},$$

$$\Gamma_{(-1)^\nu n_\alpha}(g^\nu_{\alpha j,1}(t,\varepsilon,\theta)) = 0,\ \nu = 1,2;\ \alpha = \overline{1,r};\ j = \overline{1,K_\alpha};$$

2) векторное уравнение (18) имеет решение $M^0 = M^0(t,\varepsilon)$ *такое, что*

$$\inf_G \left|\det \frac{\partial Q(t,\varepsilon,M^0)}{\partial M^0}\right| > 0.$$

Тогда $\exists\ \mu_2 \in (0,\mu_0]$ *такое, что* $\forall\ \mu \in (0,\mu_2)$ *существует преобразование вида*

$$x = h(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \Psi(t,\varepsilon,\theta,\mu)y, \tag{19}$$

где компоненты N-мерного вектора h и $(N \times N)$ — матрицы $\Psi(t, \varepsilon, \theta, \mu)$ из класса $F(m; \varepsilon_0; \theta)$, приводящее систему (3) к виду:

$$\frac{dy}{dt} = (J(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} B_l^*(t,\varepsilon)\mu^l)y + \varepsilon c(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^{2q} d(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \\ + \varepsilon A(t,\varepsilon,\theta,\mu)y + \mu^{q+1}P(t,\varepsilon,\theta,\mu)y + \mu Y(t,\varepsilon,\theta,y,\mu), \tag{20}$$

где элементы матриц $B_l^*(t,\varepsilon)$ $(l = \overline{1,q})$ принадлежат классу S_m, элементы векторов $c(t,\varepsilon,\theta,\mu)$, $d(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ и матриц $A(t,\varepsilon,\theta,\mu)$, $P(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ — классу $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$. Компоненты нелинейности Y принадлежат классу $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ относительно t,ε,θ и содержат слагаемые не ниже 2-го порядка относительно компонент вектора y.

Доказательство. Наряду с системой (3) рассмотрим вспомогательную систему:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi}{d\theta} = J(t,\varepsilon)\xi + g(t,\varepsilon,\theta) + \mu X(t,\varepsilon,\theta,\xi), \tag{21}$$

где t, φ играют роль постоянных. Рассмотрим частичную сумму разложения 2π-периодического по θ решения системы (21) в ряд по степеням параметра μ:

$$\tilde{\xi}(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \sum_{k=0}^{2q-1} \xi^k(t,\varepsilon,\theta)\mu^k. \tag{22}$$

Коэффициенты ξ^k $(k = \overline{0, 2q-1})$ определяются как 2π-периодические по θ решения линейных векторных уравнений:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi^0}{d\theta} = J(t,\varepsilon)\xi^0 + g(t,\varepsilon,\theta), \tag{23}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi^1}{d\theta} = J(t,\varepsilon)\xi^1 + X(t,\varepsilon,\theta,\xi^0), \tag{24}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi^2}{d\theta} = J(t,\varepsilon)\xi^2 + \frac{\partial X(t,\varepsilon,\theta,\xi^0)}{\partial x}\,\xi^1, \tag{25}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi^s}{d\theta} = J(t,\varepsilon)\xi^s + \frac{\partial X(t,\varepsilon,\theta,\xi^0)}{\partial x}\,\xi^{s-1} + \\ + R_s(t,\varepsilon,\theta,\xi^0,\xi^1,\dots,\xi^{s-2}),\ s = \overline{3, 2q-1}, \tag{26}$$

где R_s — некоторые полиномы от $\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^{s-2}$ с коэффициентами из класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Условия 1) леммы обеспечивает существование у порождающего уравнения (23) 2π-периодического по θ решения $\xi^0(t,\varepsilon,\theta)$, определяемого формулой (17). В соответствии с теорией метода малого параметра Пуанкаре для резонансного случая [12] условие 2) леммы обеспечивает существование 2π-периодического по θ решения каждого из уравнений (24) – (26). Вследствие свойств вектор-функции X компоненты всех этих решений принадлежат классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$. Таким образом вектор-функция $\tilde{\xi}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ полностью определена, и её компоненты принадлежат классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Произведём в системе (3) подстановку:

$$x = \widetilde{\xi}(t, \varepsilon, \theta, \mu) + z, \tag{27}$$

где z — новая неизвестная вектор-функция, относительно которой получим уравнение:

$$\begin{gathered}\frac{dz}{dt} = J(t,\varepsilon)z + \varepsilon S(t,\varepsilon)z + \varepsilon\widetilde{g}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^{2q}\widetilde{c}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \\ + \left(\sum_{l=1}^{q} B^{(l)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right) z + \mu^{q+1}H(t,\varepsilon,\theta,\mu)z + \mu Z(t,\varepsilon,\theta,z,\mu).\end{gathered} \tag{28}$$

Теперь на основании леммы 1 систему (28) с помощью невырожденного преобразования вида

$$z = \Psi(t, \varepsilon, \theta, \mu)y,$$

коэффициенты которого принадлежат классу $F(m; \varepsilon_0; \theta)$, сводим к виду (20).

Лемма 2 доказана.

5. Основные результаты. Рассмотрим матрицу:

$$B^*(t,\varepsilon,\mu) = J(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} B_l^*(t,\varepsilon)\mu^l,$$

где матрицы $B_l^*(t,\varepsilon)$ определены в лемме 2.

Теорема 1. *Пусть система (20) удовлетворяет условиям:*
1) собственные значения $\lambda_j^*(t,\varepsilon,\mu)$ $(j = \overline{1,N})$ матрицы $B^*(t,\varepsilon,\mu)$ таковы, что

$$\inf_G \left|\mathrm{Re}\lambda_j^*(t,\varepsilon,\mu)\right| \geq \gamma_0\mu^{q_0} \ (\gamma_0 > 0, \ 0 < q_0 \leq q);$$

2) для матрицы $B^*(t,\varepsilon,\mu)$ существует матрица $U(t,\varepsilon,\mu)$ такая, что:
а) $\inf\limits_G |\det U(t,\varepsilon,\mu)| > 0$,
б) $U^{-1}B^*U = \Lambda(t,\varepsilon,\mu)$ – диагональная матрица.
Тогда $\exists\ \mu_2 \in (0,\mu_0]$, $\exists K_1 \in (0,+\infty)$ такие, что $\forall\ \mu \in (0,\mu_2)$ система (20) имеет частное решение, принадлежащее классу $F(m-1;\varepsilon_1^*(\mu);\theta)$, где $\varepsilon_1^*(\mu) = \min\left(\varepsilon_0, K_1\mu^{2q_0-1}\right)$.

Доказательство. Произведём в системе (20) подстановку:

$$y = \frac{\varepsilon + \mu^{2q}}{\mu^{q_0}}\, U(t,\varepsilon,\mu)\widetilde{y}, \tag{29}$$

где $\widetilde{y}$ – новый неизвестный N-мерный вектор. Получим:

$$\begin{gathered}\frac{d\widetilde{y}}{dt} = \Lambda(t,\varepsilon,\mu)\widetilde{y} + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\, c(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\, d(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \\ + \varepsilon A(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{y} + \mu^{q+1}P(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{y} + \frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}}\, \widetilde{Y}(t,\varepsilon,\theta,\widetilde{y},\mu).\end{gathered} \tag{30}$$

Здесь учтено, что нелинейность Y в системе (20) содержит слагаемые не ниже 2-го порядка относительно y. Все коэффициенты системы (30) принадлежат классу $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$.

Рассмотрим соответствующую системе (30) линейную неоднородную и диагональную систему:

$$\frac{d\widetilde{y}_0}{dt} = \Lambda(t,\varepsilon,\mu)\widetilde{y}_0 + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\, c(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\, d(t,\varepsilon,\theta,\mu). \tag{31}$$

В работах [8, 13] было показано, что условия теоремы обеспечивают существование у системы (31) единственного решения $\widetilde{y}_0(t,\varepsilon,\theta,\mu)$, все компоненты которого принадлежат классу $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, причём $\exists\ K_0 \in (0,+\infty)$ такое, что

$$\begin{aligned} \|\widetilde{y}_0\|^* \le \frac{K_0}{\gamma_0\mu^{q_0}}\left(\frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\|c\|^* + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\|d\|^*\right) < \\ < \frac{K_0}{\gamma_0}\left(\|c\|^* + \|d\|^*\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Решение класса $F(m-1;\varepsilon_1^*;\theta)$ (ε_1^* пока не определено) будем искать методом последовательных приближений, выбирая в качестве начального $\widetilde{y}_0(t,\varepsilon,\theta,\mu)$, а последующие определив как решение класса $F(m-1;\varepsilon_1^*;\theta)$ линейных неоднородных и диагональных систем:

$$\begin{aligned} \frac{d\widetilde{y}_{s+1}}{dt} = \Lambda(t,\varepsilon,\mu)\widetilde{y}_{s+1} + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\, c(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\, d(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \\ +\varepsilon A(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{y}_s + \mu^{q+1}P(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{y}_s + \frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}}\, \widetilde{Y}(t,\varepsilon,\theta,\widetilde{y}_s,\mu),\ s=1,2,\ldots \end{aligned} \tag{33}$$

Пусть

$$\Omega = \left\{y \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta) : \|y-\widetilde{y}_0\|^* \le d\right\}.$$

Обозначим:

$$A^* = \max_{0\le\mu\le\mu_0}\|A(t,\varepsilon,\theta,\mu)\|^*,\ P^* = \max_{0\le\mu\le\mu_0}\|P(t,\varepsilon,\theta,\mu)\|^*,$$

$$M^*(d) = \max_{0\le\mu\le\mu_0}\sup_{y\in\Omega}\|Y(t,\varepsilon,\theta,y,\mu)\|^*.$$

В силу свойств функции $\widetilde{Y}$ существует $L(d) \in (0,+\infty)$ такое, что $\forall\ y_1,y_2 \in\ \Omega$

$$\|\widetilde{Y}(t,\varepsilon,\theta,y_1,\mu) - \widetilde{Y}(t,\varepsilon,\theta,y_2,\mu)\|^* \le L(d)\|y_1-y_2\|^*.$$

Выберем теперь $\mu_2 \in (0,\mu_0]$ и $K_1 \in (0,+\infty)$ из условия, чтобы $\forall\ \mu \in\ (0,\mu_2)$ и $\forall\ \varepsilon \in (0, K_1\mu^{2q_0-1})$ выполнялись неравенства:

$$\frac{K_0}{\gamma\mu^{q_0}}\left[2^m(\varepsilon A^* + \mu^{q+1}P^*)(d+\|\widetilde{y}_0\|^*) + \frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}}M^*(d)\right] \le d_0 < d, \tag{34}$$

$$\frac{K_0}{\gamma\mu^{q_0}}\left[2^m(\varepsilon A^* + \mu^{q+1}P^*) + \frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}}L(d)\right] < 1 \tag{35}$$

Тогда, используя обычную методику принципа сжимающих отображений [14], несложно показать, что все приближения, определяемые формулами (33), остаются внутри Ω, и процесс (33) сходится к решению системы (30), принадлежащему классу $F(m-1;\varepsilon_1^*(\mu);\theta)$, где $\varepsilon_1^*(\mu)=\min(\varepsilon_0,K_1\mu^{2q_0-1})$, т. е. существование решения класса $F(m-1;\varepsilon_1^*(\mu);\theta)$ системы (30) таким образом доказано. Из соотношения (29) вытекает существование решения класса $F(m-1;\varepsilon_1^*(\mu);\theta)$ системы (20).

Теорема 1 доказана.

Из леммы 2 и теоремы 1 непосредственно вытекает

Теорема 2. *Пусть система (3) такова, что для неё выполнены условия леммы 2, а система (20), получающаяся из системы (3) с помощью преобразования (19), удовлетворяет условию теоремы 1. Тгда* $\exists\ \mu_2\in(0,\mu_0]$, $\exists\ K_1\in(0,+\infty)$ *такие, что* $\forall\ \mu\in(0,\mu_2)$ *система (3) имеет частное решение, принадлежащее классу* $F(m-1;\varepsilon_1^*(\mu);\theta)$, *где* $\varepsilon_1^*(\mu)=\min(\varepsilon_0,K_1\mu^{2q_0-1})$.

Заключение. Для системы вида (3) получены условия существования частного решения, имеющего вид абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой в резонансном случае.

1. **Kiguradze I. T.** Periodic solutions os nonautonomous ordinary differential equations [text] / I. Kiguradze, A. Lomtatidze // Monatsh. Math. – 2010. – V. 159, № 3. – P. 235–252.
2. **Самойленко А. М.** Математичні аспекти теорії нелінійних коливань [текст] / А. М. Самойленко. Р. І. Петришин. – К.: Наук. думка, 2004. – 474 с.
3. **Мироненко В. И.** Временные симметрии уравнения Риккати [текст] / В. И. Мироненко // Проблемы физики, матем. и техники. – 2010. – № 1(2). – С. 31–33.
4. **Король І. І.** Про періодичні розв'язки одного класу систем диференціальних рівнянь [текст] / І. І. Король // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 4. – С. 483–495.
5. **Стрижак Т. Г.** Асимптотический метод нормализации [текст] / Т. Г. Стрижак. – К.: Вища школа, 1984. – 280 с.
6. **Бари Н. К.** Тригонометрические ряды [текст] / Нинель Карловна Бари. – М.: Физматгиз, 1961. – 935 с.
7. **Щоголев С. А.** Деякі задачі теорії коливань для диференціальних систем, які містять повільно змінні параметри: дис. ... д-ра. фіз.-мат. наук. 01.01.02 [текст] / Щоголев Сергій Авенірович. – Одеса, 2012. – 290 с.
8. **Костин А. В.** О решениях квазилинейной дифференциальной системы второго порядка, представимых рядами Фурье, содержащими медленно меняющиеся параметры [текст] / А. В. Костин, С. А. Щёголев // Укр. матем. журн. – 1998. – Т. 50, № 5. – С. 654–664.
9. **Щоголев С. А.** Про деякі резонансні випадки в квазілінійних системах із повільно змінними параметрами [текст] / С. А. Щоголев // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – Т. 53, № 3. – С. 85–92.

10. **Щоголев С. А.** Про розв'язки квазілінійної диференціальної системи другого порядку, зображувані рядами Фур'є з повільно змінними параметрами в деяких критичних випадках [текст] / С. А. Щоголев // Укр. матем. вісник. – 2010. – № 3. – С. 384–399.

11. **Щоголев С. А.** Про коливання у квазілінійних диференціальних системах з блочно-діагональною матрицею лінійної частини [текст] / С. А. Щоголев // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, № 4. – С. 31–37.

12. **Малкин И. Г.** Некоторые задачи теории нелинейных колебаний [текст] / И. Г. Малкин. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.

13. **Костин А. В.** Об устойчивости колебаний, представимых рядами Фурье с медленно меняющимися параметрами [текст] / А. В. Костин, С. А. Щёголев // Дифференц. уравн. – 2008. – Т. 44, № 1. – С. 45–51.

14. **Треногин В. А.** Функциональный анализ [текст] / В. А. Треногин. – М.: Наука, 1980. – 496 с.