

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова
Інститут математики, економіки і механіки
Кафедра обчислювальної математики

Д и п л о м н а р о б о т а
бакалавра

на тему: «Усереднення систем диференціальних рівнянь»
«Homogenization of Systems of Differential Equations»

Виконала: студентка денної форми навчання
напряму підготовки 6.040301 Прикладна математика
Шибасева Катерина Юріївна

Керівник канд.фіз.-мат.наук, доцент Таїрова М.С. _____
Рецензент канд.фіз.-мат.наук, професор Мороз В.В.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ _____ від _____ р.

Завідувач кафедри

(підпис) (прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ЕК № _____
протокол № _____ від _____
р.

О ц і н к а _____ / _____

(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

(підпис) (прізвище, ініціали)

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. Усереднення систем ОДР в стандартній формі.....	5
1.Формулювання задачі усереднення.....	6
2.Теорема Н.Н.Боголюбова.....	8
2.1.Оцінка похибки усереднення для періодичної правої частини.....	13
3.Дослідження поведінки рішення усередненої системи в залежності від параметрів L , ε та функції $X(t,x)$ на прикладах.....	15
РОЗДІЛ 2. Усереднення систем із багатозначною правою частиною.....	25
4.Відомості з теорії багатозначного аналізу.....	25
5.Диференціальні включення.....	31
6.Формулювання задачі усереднення.....	34
5.1.Аналог теореми Н.Н. Боголюбова для диференціальних включень.....	35
7.Дослідження поведінки рішення усередненої системи диференціальних включень на прикладах.....	36
ВИСНОВКИ.....	42
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	43
ДОДАТОК А. Код програми.....	45

ВСТУП

Дослідження реальних процесів через побудову ідеалізованих математичних моделей часто призводить до необхідності знаходити рішення систем диференціальних рівнянь із малим параметром. [1] Однак оскільки в більшості випадків вирішення таких систем є досить складним і трудомістким, становить інтерес розробка різних асимптотичних методів їх вирішення. Такі методи дозволяють знайти наближене рішення системи диференціальних рівнянь через заміну вихідної системи на таку, що схожу з нею за характеристиками, але має простіший вигляд. Зокрема, метод усереднення для диференціальних рівнянь та систем в стандартній формі заснований на заміні правих частин рівнянь вихідної системи усередненими автономними функціями (що не містять явно змінної часу). При цьому метод дозволяє враховувати основний внесок малих параметрів в описуваний процес на проміжках часу порядку $\frac{1}{\varepsilon}$. Отримана за допомогою методу усереднення система диференціальних рівнянь вирішується простіше вихідної, а також стає можливим використання ефективних чисельних методів для її вирішення. Широке розповсюдження метод усереднення придбав в задачах нелінійної механіки, особливо - в розділі теорії коливань.

Математичне обґрунтування методу було вперше отримано в роботах М. М. Крилова і М. М. Боголюбова. Для задач оптимального управління його вперше застосував М. М. Моїсєєв. Результат першої теореми Боголюбова про близькість рішень вихідної і усередненої систем був в подальшому узагальнен на випадок диференціальних включень В. А. Плотніковим. [2]

Сказане вище дозволяє зробити висновок про актуальність використання асимптотичних методів і, зокрема, описуваного методу усереднення, для рішень диференціальних рівнянь і систем з малим параметром.

Об'єктом мого дослідження є метод усереднення для систем диференціальних рівнянь в стандартній формі, а предметом дослідження є поведінка усередненого рішення в залежності від впливу різних параметрів і порівняння фактично отриманих результатів з теоретичними оцінками.

Завдання, поставлені переді мною для виконання дослідження:

1. дослідження поведінки рішення усередненої системи диференціальних рівнянь в залежності від значення малого параметра, довжини проміжку і виду правої частини рівнянь;
2. розбір теоретичного матеріалу з диференціальних включень;
3. проведення аналогічного дослідження для рішень усереднених диференціальних включень.

У теоретичній частині роботи було проведено розкриття всіх нетривіальних переходів першої основної теореми Боголюбова.

В ході дослідження була розроблена програма в середовищі Matlab, що дозволяє знаходити усереднене рішення для задачі Коші з періодичною і неперіодичною правими частинами. Також за допомогою Matlab були отримані наочні ілюстрації похибок усереднення.

ВИСНОВКИ

Протягом написання моєї дипломної роботи були вивчені такі теми:

- Метод усереднення для диференціальних рівнянь та систем у стандартній формі;
- Метод усереднення для диференціальних рівнянь з багатозначною правою частиною (диференціальних включень).

На ілюстративних прикладах була показана залежність похибки усереднення від малого параметра, довжини проміжку та виду правої частини системи. Були показані випадки, коли теоретична оцінка похибки значно відрізняється від реальної.

Для теореми М.М. Боголюбова, яка гарантує близькість рішень вихідної та усередненої систем, були розкриті всі нетривіальні переходи.

За допомогою Matlab розроблена програма для знайдення і побудови графіків усереднених рішень.

Для диференціальних включень побудова рішення проводилась за допомогою апарату опорних функцій, що також детально показано на прикладах.

В якості висновка щодо доцільності використання методу усереднення можна сказати наступне: найбільш точне наближення метод усереднення дає для тих систем диференціальних рівнянь, в яких права частина є періодичною (або майже періодичною) функцією, амплітуда коливань якої не зростає з часом. Проте, для будь-якого проміжку і будь-якого заданого значення похибки усереднення можна підібрати такий параметр ε_0 , що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ похибка не буде перевищувати заданого значення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Метод усреднения в задачах управления / В. А. Плотников. - К.: Одесса: Лыбидь, 1992. - С. 3 - 11.
2. Плотников В. А. Метод усреднения для дифференциальных включений и его приложение к задачам оптимального управления/ / Дифференц. уравнения. - 1979 - С. 1427 - 1433.
3. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью/ В.А. Плотников, А.В. Плотников, А.Н. Витюк. – Одесса: Астропринт, 1999. – С. 3 - 22.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский И.А. - Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. С.503.
5. Хапаев М.М. - О методе усреднения и некоторых задачах, связанных с усреднением // Диф. уравн., 1966. Т. 11, N 5. С. 600 - 608.
6. Митропольский Ю.А. - Метод усреднения в нелинейной механике. К.: Наук. думка, 1971. С.440.
7. Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. - Оптимальное управление7
Линейная теория и приложения: Учебное пособие для студентов
факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова , 2007 - 270 с.
8. Панасюк А. И. О динамике множеств, определяемых
дифференциальными включениями // Сиб. мат. журн. –1986. –Т. 27. № 5. –
С. 155 – 166.
9. Филиппов А. Ф. Классические решения дифференциальных уравнений с
многозначной правой частью // Вестн. МГУ. – 1967. – № 3. – С. 16 – 26.
10. Zaremba S. K. Sur une extension de la notion d'equation differentielle // C. P.
Acad. Sc. Paris. – 1934. – № 199. – P. 545– 548.
11. Marchaud A. Sur les champs de demi-cones et equations differentielles du
premier order // Bull. Soc. Math. France. – 1934. – № 62. – P. 1– 38.
12. Плотников В. А. Асимптотические методы в задачах оптимального
управления. – Изд-во Одесского госуниверситета, 1976. – 102 с.

13. Плотников В. А. Усреднение уравнений движения в задачах управления // Деп. ВИНТИ, 30.03.78, N1236-78. – 19 с.
14. Киясов С.Н., Шурыгин В.В. - Дифференциальные уравнения. Основы теории, методы решения задач: Учебное пособие. - Казань: Казанский федеральный университет, 2011. - 112 с.

Код програми
в середовищі MatLab

Приклад 3.1

```

eps=num2str(0.01);%малий параметр
T=2*pi;%період
S=90;%довжина проміжку
%задаємо диференціальне рівняння – строку
right_out_eps='(x*sin(t)^2)';
diffeq=['Dx=',eps,'*',right_out_eps];

solve1=dsolve(diffeq,'x(0)=1')%знаходимо рішення вихідної

syms x(t) u(x)
%перетворюємо вихідне ДР для отримання рівномірного
%середнього в символьному вигляді
[token rem]=strtok(diffeq,'*');
l=findstr(diffeq,rem);
h=diffeq(l+1:length(diffeq));

average=sym(h);
u=int(average,t,0,T)/T;%знаходим «середнє»

a=char(u);

solve_string=['Dx=',eps,'*',a];%ДУ для усредненной системы

y_solve=dsolve(solve_string,'x(0)=1')

ezplot(y_solve,[0,S]);
hold all
ezplot(solve1,[0,S])
legend('x(t)','\xi(t)');
hold all

```

Приклад 3.2

```

eps=num2str(0.03);

T=2*pi;
S=500;

right_out_eps='(cos(t)-x/2)';
diffeq=['Dx=',eps,'*',right_out_eps];

solve1=dsolve(diffeq,'x(0)=1')

syms x(t) u(x)

[token rem]=strtok(diffeq,'*');
l=findstr(diffeq,rem);
h=diffeq(l+1:length(diffeq));

average=sym(h);
u=int(average,t,0,T)/T;интеграл

a=char(u);

solve_string=['Dx=',eps,'*',a];

y_solve=dsolve(solve_string,'x(0)=1')

ezplot(y_solve,[0,S]);
hold all
ezplot(solve1,[0,S])
legend('x(t)','\xi(t)');
hold all

```

Приклад 3.3

```

eps=num2str(0.8);

syms T
right_out_eps='(x*(exp(-t)+1))';
diffeq=['Dx=',eps,'*',right_out_eps]

solve1=dsolve(diffeq,'x(0)=1')
ezplot(solve1,[0 400])
hold all

syms x(t) u(x)

[token rem]=strtok(diffeq,'*')
l=findstr(diffeq,rem)
h=diffeq(l+1:length(diffeq))

average=sym(h)
u=int(average,t,0,T)/T

w=limit(u,T,inf)%межа

a=char(w)

solve_string=['Dx=',eps,'*(' ,a,') ' ]

y_solve=dsolve(solve_string,'x(0)=1')
ezplot(y_solve,[0 400])
hold all

```