

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій  
Кафедра оптимального керування та економічної кібернетики

## Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Скінченно-різницева апроксимація рівняння переносу  
забруднення»

«A finite-difference approximation of the pollution  
transport equation»

Виконала: здобувачка денної форми навчання  
спеціальності 113 Прикладна математика  
Освітня програма «Прикладна математика»  
Юдіна Світлана Максимівна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Вербіцький В.В. *В.В.*

Рецензент: д. фіз.-мат. наук, проф. Кічмаренко О.Д.

Рекомендовано до захисту:	Захищено на засіданні ЕК № _____
Протокол засідання кафедри	Протокол № ____ від _____ 2025 р.
№ ____ від _____ 2025 р.	Оцінка _____ / _____ / _____
Завідувач кафедри	Голова ЕК
_____	_____

Одеса — 2025 р.

## ЗМІСТ

<b>Вступ</b>	3
<b>1 Постановка задачі</b>	6
<b>2 Похідні дробового порядку</b>	7
2.1 Дробові похідні Грюнвальда–Летнікова . . . . .	7
<b>3 Скінченно-різницева апроксимація дробового рівняння адвекції-дисперсії</b>	10
3.1 Матричне представлення схеми скінченних різниць . . . . .	12
<b>4 Перенос забруднюючих речовин у ріках</b>	15
<b>5 Обчислювальні експерименти</b>	21
5.1 Скінченно-різницева апроксимація дробової початково-крайової задачі . . . . .	21
5.2 Скінченно-різницева апроксимація дробової початково-крайової задачі щодо перенесення забруднення у ріках . . . . .	26
<b>Висновки</b>	29
<b>Список літератури</b>	30
<b>Додаток А. Текст програми для скінченно-різницевої апроксимації дробової початково-крайової задачі</b>	33
<b>Додаток Б. Текст програми для скінченно-різницевої апроксимації дробової початково-крайової задачі щодо перенесення забруднення у ріках</b>	36

## ВСТУП

Перенесення забруднюючих розчинених речовин у ґрунтових водах залежить від різних фізичних, хімічних, біологічних та екологічних процесів і властивостей середовища. Як тільки ґрунтові води якимось чином забруднюються, стає дуже складно покращити їхню якість. Математичні моделі перенесення забруднюючих речовин у пористому середовищі є основними інструментами для розуміння механізмів явищ перенесення. На сьогодні розроблено велику кількість методів математичного моделювання процесів перенесення забруднюючих речовин у природних дисперсних середовищах. Вони можуть використовуватися для прогнозування руху шлейфів забруднюючих речовин та механізмів відновлення у річках і ґрунтових водах.

Дослідження у природних дисперсних середовищах кількісних закономірностей перенесення вологи та розчинених у ній речовин широко затребуване під час вирішення таких прикладних завдань: оцінка ризику забруднення ґрунтових вод токсичними речовинами, зокрема радіонуклідами; оцінка надходження радіонуклідів, важких металів та інших токсичних речовин у рослини; аналіз потрапляння радіонуклідів, пестицидів та інших забруднювальних речовин у водні системи за рахунок поверхневого стоку; аналіз закономірностей формування водно-сольового режиму зрошуваних ґрунтів; прогноз екологічних наслідків заходів із регулювання процесів перенесення водорозчинних речовин у ґрунті.

Більшість забруднювачів ґрунтових вод зазвичай мігрують у напрямку потоку ґрунтових вод. Перенесення розчинених речовин на поверхні та під поверхнею тривалий час було головним об'єктом експериментальних і теоретичних досліджень у галузі підземної гідрології. Зменшення забруднення шляхом розбавлення — перевірений механізм, що швидко мінімізує концентрацію забруднювача у ґрунтових водах.

Для науково обґрунтованого та адекватного чисельного дослідження закономірностей перенесення у природних дисперсних середовищах вологи та розчинених у ній речовин доцільним є використання методів математичного моделювання, які не втрачають свою достовірність за широкого варіювання просторово-часових масштабів, гідрологічних та кліматичних

факторів.

Зробимо аналіз сучасних методів моделювання міграції забруднювальних речовин у природних дисперсних середовищах.

Автори робіт [5, 6] отримали аналітичні розв'язки для одномірного перенесення розчинених речовин і оцінили, що швидкість ґрунтових вод може змінюватися лінійно у просторі, а коефіцієнт розсіювання змінюється пропорційно квадрату просторової координати. У роботах [7, 8] було розроблено метод, що описує лінійну дисперсію, яка залежить від часу, та дисперсію, що залежить від масштабу. Просторова залежність швидкості ґрунтових вод зумовлена неоднорідністю природного середовища, через яке відбувається перенесення розчинених речовин. У роботі [9] показано, що часова залежність обумовлена нестійкістю потоку ґрунтових вод.

Досліджуючи одномірну масштабно-залежну фракційну адвекцію-дисперсію, автори [10, 11] вивчали вплив вмісту нерухомої води на адвекцію та диспергування забруднюючих речовин у ненасичених пористих утвореннях. Чисельні математичні моделі на основі рівняння дробової адвекції-дифузії в неоднорідному пористому шарі представлені у [12–14], а в [17] було розроблено аналітичний розв'язок із гіперболічною залежністю відстані дисперсності перенесення розчинених речовин через пористе середовище.

Аналітичні розв'язки для часової та просторової залежності дисперсії розчиненої речовини з вхідною концентрацією імпульсного типу в одномірних однорідних пористих середовищах розглянуті в [15–18]. Там само представлено одномірне рівняння адвекції-дисперсії у скінченній області із залежними від часу вхідними умовами для прогнозування розподілу концентрації уздовж нестационарного потоку підземних вод у водоносному горизонті.

Об'єктом дослідження є початково-крайова задача для дробового рівняння адвекції-дисперсії.

Предметом дослідження є скінченно-різницева апроксимація початково-крайової задачі для дробового рівняння адвекції-дисперсії.

Мета роботи — здобуття практичного досвіду та розширення знань щодо числових розв'язків фізичних моделей з дробовими похідними. Розробка

математичної моделі для визначення, як перенесення розчинених речовин, потік забруднюючих речовин та інші параметри можуть бути застосовані для аналізу поведінки забруднюючих речовин у неоднорідних пористих середовищах.

## РОЗДІЛ 1

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо дробове рівняння адвекції-дисперсії

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Z \frac{\partial u}{\partial x} = d \left( \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + d \left( \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) \frac{\partial^\alpha u}{\partial (-x)^\alpha}, \quad (1.1)$$

де  $u$  – концентрація розчинених речовин у даній системі (щільність).  $Z$  – середня швидкість руху води в порах,  $d$  – коефіцієнт дифузії,  $x$  і  $t$  – відповідні просторові та часові координати,  $\alpha$  – порядок дробової похідної з  $1 < \alpha \leq 2$ . Параметр  $\gamma$  належить проміжку  $-1 \leq \gamma \leq 1$  та відображає співвідношення ймовірностей переходу частинок розчинника вперед та назад. Якщо  $0 \leq \gamma \leq 1$ , то ймовірність переходу зміщена вперед, а якщо  $-1 \leq \gamma \leq 0$ , то ймовірність переходу зміщена назад.

Розглянемо скінченно-різницеву апроксимацію початково-крайової задачі для дробового рівняння адвекції-дисперсії.

Створимо програмний додаток мовою пакету Octave, який реалізує задану схему та знаходить скінченно-різницевий розв'язок для різних коефіцієнтів дробового рівняння і різних параметрів сітки. Проведемо серію обчислювальних експериментів.

Потім застосуємо дробове рівняння (1.1) для моделювання перенесення забруднення у ріках.

## РОЗДІЛ 2

### ПОХІДНІ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ

Нижче приведемо основні визначення щодо дробових похідних.

#### 2.1 Дробові похідні Грюнвальда–Летнікова

Похідні Грюнвальда–Летнікова є одним із способів визначення дробових похідних, що використовуються в математичному аналізі, зокрема у теорії дробового числення. Такий підхід є узагальненням класичного визначення похідних на випадок дробового порядку.

Скінченні різниці назад порядку  $n$  з кроком  $h$  визначаються як

$$\Delta_h^n f(x) := \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh), \quad (2.1)$$

щоб отримати наступний результат.

**Теорема 2.1.** *Нехай  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^n[a, b]$  та  $a < x \leq b$ . Тоді*

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^n f(x)}{h^n}. \quad (2.2)$$

Такий результат є дійсно корисним не лише для аналітичних досліджень. Якщо замість граничного переходу  $h \rightarrow 0$  використати скінченне позитивне значення для  $h$ , то отримуємо чисельну апроксимацію похідної. Тож нам потрібно мати аналог і для дробового випадку.

Насправді, все, що нам потрібно зробити, це надати значення скінченній різниці в (2.1) при  $n \notin \mathbb{N}$ . Біноміальні коефіцієнти  $\binom{n}{k}$  для  $n \in \mathbb{R}$  і  $k \in \mathbb{N}_0$  визначаються такими співвідношеннями

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}. \quad (2.3)$$

Варто зауважити, що  $\binom{n}{k} = 0$ , якщо  $n \in \mathbb{N}$  та  $n < k$ . Тож маємо, що при

$n \in \mathbb{N}$  (2.3) рівносильно

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh), \quad (2.4)$$

Тепер згадаємо, що хочемо мати вираз для класу функцій, який зазвичай є підмножиною  $C[a, b]$ , тобто класу функцій, визначених на скінченному інтервалі  $[a, b]$ . У цьому контексті варто зауважити, що представлення (2.4) мають дві проблеми в разі  $n \notin \mathbb{N}$ , де жоден з біноміальних коефіцієнтів не дорівнює нулю, тому що цей вираз насправді є нескінченним рядом:

- щоб обчислити вираз в (2.4) для всіх  $x \in (a, b]$ , необхідно визначити функцію  $f$  на  $(-\infty, b]$ ;
- функція  $f$  повинна бути такою, щоб ряд збігався

Маємо таке рішення для цих двох проблем: для заданої функції  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  визначимо нову функцію

$$f^* : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \in [a, b], \\ 0, & \text{якщо } x \in (-\infty, a), \end{cases}$$

та використаємо цю функцію замість  $f$ . Ураховуючи, що  $f$  і  $f^*$  співпадають на відрізку, де визначені обидва функції, інтерпретуємо  $f^*$  як продовження  $f$  і, трохи зловживаючи позначеннями, будемо далі писати  $f$  замість  $f^*$ .

Узагальнимо тепер (2.2). З метою спрощення обмежимося умовою, що  $h \rightarrow 0$ . Спеціально для розглянутого значення  $x$  ми припускаємо, що  $h$  приймає лише значення  $h_N = (x - a)/N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Детальний аналіз показує, що ця умова не є обов'язковою.

**Означення 2.1.** Нехай  $n > 0$ ,  $f \in C^{[n]}[a, b]$  та  $a < x \leq b$ . Тоді

$$\tilde{D}_a^n f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{h_N}^n}{h_N^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{h_N^n} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh_N),$$

де  $h_N = (x - a)/N$ , називається дробовою похідною Грюнвальда–Летнікова порядку  $n$  функції  $f$ .

Наступний результат пояснює зв'язок між новим поняттям дробової похідної та вже відомим нам.

**Теорема 2.2.** Нехай  $n > 0$ ,  $m = [n]$  та  $f \in C^m[a, b]$ . Тоді для  $x \in (a, b)$ ,

$$\tilde{D}_a^n f(x) = D_a^n f(x).$$

В силу цієї теореми та співвідношення

$$\begin{aligned} (-1)^k \binom{-n}{k} &= (-1)^k \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} = \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} \\ &= \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots n}{k!} = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)\Gamma(k+1)}. \end{aligned}$$

є справедливим наступне означення.

**Означення 2.2.** Нехай  $n > 0$ ,  $f \in C[a, b]$  та  $a < x \leq b$ . Тоді

$$\tilde{J}_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \lim_{N \rightarrow \infty} h_N^n \sum_{k=0}^N \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(k+1)} f(x - kh_N),$$

де  $h_N = (x - a)/N$ , називається дробним інтегралом Грюнвальда-Летнікова порядку  $n$  функції  $f$ .

## РОЗДІЛ 3

### СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВА АПРОКСИМАЦІЯ ДРОБОВОГО РІВНЯННЯ АДВЕКЦІЇ-ДИСПЕРСІЇ

Задамо дробовий оператор  $\nabla_\gamma^\alpha$

$$2\nabla_\gamma^\alpha = (1 + \gamma) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + (1 - \gamma) \frac{\partial^\alpha u}{\partial (-x)^\alpha}, \quad (3.1)$$

тоді, рівняння (1.1) можемо записати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Z \frac{\partial u}{\partial x} = d\nabla_\gamma^\alpha u. \quad (3.2)$$

Представимо дробові похідні за допомогою схеми Грюнвальда-Летнікова, яка має наступний вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}(x, t) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x^\alpha} \sum_{\tau=0}^{\left[\frac{x-a}{\Delta x}\right]} (-1)^\tau \binom{\alpha}{\tau} u(x - \tau\Delta x, t), \\ \frac{\partial^\alpha u}{\partial (-x)^\alpha}(x, t) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x^\alpha} \sum_{\tau=0}^{\left[\frac{b-x}{\Delta x}\right]} (-1)^\tau \binom{\alpha}{\tau} u(x + \tau\Delta x, t), \end{aligned} \quad (3.3)$$

де  $[a]$  є ціла частина числа  $a$ .

Для визначення явних схем ми використаємо варіант методу Грюнвальда-Летнікова, в якому оцінки функції зсуваються вліво або вправо, і отримуємо те, що відомо як зсунута формула Грюнвальда-Летнікова. Зсув вище відповідає заміні відповідних компонент  $u(x - \tau\Delta x, t)$  та  $u(x + \tau\Delta x, t)$  на  $u(x - \tau\Delta x + \Delta x, t)$  та  $u(x + \tau\Delta x - \Delta x, t)$ , що не впливає на межу при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Вибір зсунутої формули Грюнвальда-Летнікова має дві причини:

- шлях отримання узагальнень наявних схем, а саме: при дробовому порядку  $\alpha = 2$  ми отримуємо стандартне рівняння переносу-дифузії.
- апроксимації похідних, отримані за допомогою класичного методу

Грюнвальда-Летнікова, досить часто призводять до нестабільних числових схем, що може ускладнити розрахунки.

Для отримання схеми дробової скінченно-різницевої апроксимації ми припускаємо, що існують апроксимації  $U = \{U_j^n\}$  значень  $U(x_j, t_n)$  в точках сітки

$$x_j = j\Delta x, \quad j = -N, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N$$

та

$$t_n = n\Delta t, \quad n \geq 0,$$

де  $\Delta x$  - це рівномірний крок по простору, а  $\Delta t$  - рівномірний крок по часу.

Нехай для  $\Delta x$  та  $\Delta t$

$$\nu = \frac{Z\Delta t}{\Delta x} \quad \text{та} \quad \omega_\alpha = \frac{d\Delta t}{\Delta x^\alpha}.$$

Величина  $\nu$  відома як число Куранта-Фрідрікса-Леві (КФЛ), а параметр  $\omega_\alpha$  пов'язаний з коефіцієнтом дифузії.

Схема скінченних різниць опишемо на основі оператора центрального порядку, що відповідно визначається

$$\Delta_0 U_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2}$$

За допомогою апроксимації на основі зсунутих формул Грюнвальда-Летнікова ми визначаємо дискретні наближення до дробових похідних

$$\left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right)_j^n \simeq \frac{1}{\Delta x^\alpha} \sum_{\tau=0}^{N+j+1} p_\tau U_{j+1-\tau}^n, \quad \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial (-x)^\alpha}\right)_j^n \simeq \frac{1}{\Delta x^\alpha} \sum_{\tau=0}^{N-j+1} p_\tau U_{j-1+\tau}^n, \quad (3.4)$$

для

$$p_\tau = (-1)^\tau \binom{\alpha}{\tau} = (-1)^\tau \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-\tau+1)}{\tau!} = \frac{\Gamma(\tau-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(\tau+1)}. \quad (3.5)$$

Дробовий оператор  $\nabla_\gamma^\alpha$ , заданий у (3.1), апроксимується на  $\xi_\gamma^\alpha/2\Delta x^\alpha$ , де  $\xi_\gamma^\alpha$  визначається як

$$\xi_\gamma^\alpha U_j^n = (1 + \gamma) \sum_{\tau=0}^{N+j+1} p_\tau U_{j+1-\tau}^n + (1 - \gamma) \sum_{\tau=0}^{N-j+1} p_\tau U_{j-1+\tau}^n. \quad (3.6)$$

Отже, запишемо схему скінченних різниць для апроксимації рівняння (1.1) у формі

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \nu \Delta_0 U_j^n + \frac{1}{2} \omega_\alpha \xi_\gamma^\alpha U_j^n. \quad (3.7)$$

Згідно з дискретизацією адвективної частини, ми називаємо вищенаведену схему центральною.

### 3.1 Матричне представлення схеми скінченних різниць

Запишемо розглянуту вище явну схему у вигляді матриці.

Припустимо, що вузлові точки мають вигляд

$U_j^n = -N, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N$ , також припустимо, що граничні умови відомі, тобто функції  $U_{-N}^n$  та  $U_N^n$  відомі для  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Запровадивши вектор  $\mathbf{U}^n = [U_{-N+1}^n, \dots, U_{-1}^n, U_0^n, U_1^n, U_2^n, \dots, U_{N-1}^n]^T$ , ми можемо записати схеми у вигляді матричного рівняння

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{G}\mathbf{U}^n + \mathbf{z}^n, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.8)$$

де  $\mathbf{G}$  - матриця ітерації розміром  $(2N - 1) \times (2N - 1)$ , а  $\mathbf{z}^n$  - вектор, що містить граничні значення.

Матрицю  $\mathbf{G}$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} + \frac{1}{2} \omega_\alpha \mathbf{B}, \quad (3.9)$$

де  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$  - матриці однакового розміру  $(2N - 1) \times (2N - 1)$ , і  $\mathbf{A}$  відповідає дискретизації адвекції, тоді як  $\mathbf{B}$  пов'язана з дискретизацією дифузії. Для

вищезгаданої схеми матриця  $\mathbf{B}$  визначається таким чином

$$\mathbf{B} = (1 + \gamma) \mathbf{L} + (1 - \gamma) \mathbf{L}^T,$$

де

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} p_1 & p_0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_2 & & & & \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & p_0 \\ p_{2N-1} & \cdots & p_2 & p_1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Вектор  $\mathbf{z}^n$  складається з двох частин

$$\mathbf{z}^n = \mathbf{z}_A^n + \mathbf{z}_B^n,$$

де вектор  $\mathbf{z}_A^n$  містить граничні значення, які відповідають матриці  $\mathbf{A}$ , а вектор  $\mathbf{z}_B^n$  - граничні значення, які відносяться до матриці  $\mathbf{B}$ . Для  $\mathbf{z}_B^n$  маємо

$$\mathbf{z}_B^n = \mathbf{z}_{B+}^n + \mathbf{z}_{B-}^n,$$

де

$$\mathbf{z}_{B+}^n = \frac{\omega_\alpha(1 + \gamma)}{2} \begin{pmatrix} p_2 \\ \vdots \\ p_{2N-1} \\ p_{2N} \end{pmatrix} U_{-N}^n + \frac{\omega_\alpha(1 + \gamma)}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p_0 \end{pmatrix} U_N^n$$

та

$$\mathbf{z}_{B-}^n = \frac{\omega_\alpha(1-\gamma)}{2} \begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} U_{-N}^n + \frac{\omega_\alpha(1-\gamma)}{2} \begin{pmatrix} p_{2N} \\ p_{2N-1} \\ \vdots \\ p_2 \end{pmatrix} U_N^n$$

Для даної схеми матриця  $\mathbf{A}$  та вектор  $\mathbf{z}_A^n$  мають відповідно такий вигляд

$$\mathbf{A}_{**} = \begin{pmatrix} 1 & -\nu/2 & & \\ \nu/2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & -\nu/2 \\ & & \nu/2 & 1 \end{pmatrix} \text{ та } \mathbf{z}_{**}^n = \begin{pmatrix} \nu/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} U_{-N}^n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\nu/2 \end{pmatrix} U_N^n.$$

Тепер ми отримали матричне представлення центральної схеми скінчених різниць.

## РОЗДІЛ 4

### ПЕРЕНОС ЗАБРУДНЮЮЧИХ РЕЧОВИН У РІКАХ

Теоретичний підхід до побудови моделей перенесення забруднюючих речовин у поверхневих та підземних водах передбачає опис їхньої динаміки мовою фізичноінтерпретованих рівнянь [19]. Основним математичним апаратом для теоретичних моделей є системи диференціальних рівнянь адвекції-дисперсії (ADE), які зазвичай виражають собою рівняння балансу речовини та енергії розглянутої системи. Такий підхід не потребує надлишкового набору експериментальних даних для визначення необхідних залежностей [20].

Опис перенесення забруднюючих речовин у поверхневих та підземних водах за допомогою рівнянь ADE передбачає два основні механізми перенесення:

- Адвективне перенесення – відбувається внаслідок пасивного руху разом із водним потоком.
- Дисперсійне/дифузійне перенесення – враховує дифузію, дрібномасштабні зміни швидкості потоку, а також будь-які інші процеси, що сприяють поширенню розчиненої речовини.

Для опису перенесення розчинених речовин у пористих середовищах зазвичай використовується рівняння конвективної дифузії. Для одномірного перенесення потік розчиненої речовини  $J_S$  можна записати як:

$$J_S = uC - D_x \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (4.1)$$

де  $u$  – поздовжна швидкість потоку рідини,  $C$  – концентрація розчиненої речовини, виражена як маса на одиницю об'єму води,  $D_x$  – коефіцієнт поздовжньої дисперсії,  $x$  – поздовжна координата.

У рівнянні (4.1) другий член визначає внесок дифузійного потоку речовини під дією градієнта концентрації, а перший – конвективне перенесення розчинених речовин.

Рівняння балансу маси можна сформулювати в загальному вигляді,

розглядаючи накопичення або виснаження розчиненої речовини в контрольному об'ємі з плином часу внаслідок розбіжності потоку, можливих реакцій та нагнітання або вилучення розчиненої речовини разом із рідкою фазою:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla J_S + \gamma - R_w - \mu C, \quad (4.2)$$

де  $t$ — час,  $\gamma$  — член, що характеризує джерела рідкої фази,  $R_w$  — характеризує довільні стоки ( $<0$ ) або джерела ( $>0$ ) розчиненої речовини, останній член позначає нагнітання ( $>0$ ) або закачування ( $<0$ ) води з концентрацією  $C$  і коефіцієнтом  $\mu$ .

У своїх розв'язках будемо використовувати сталі значення для  $u$  і  $D_x$  відносно часу і положення, приймаючи початкові та граничні умови, що описують сорбцію розчинених речовин річковими відкладами. Підставивши (4.1) у рівняння (4.2), отримаємо рівняння адвекції-дисперсії (ADE), яке для одномірного перенесення має вигляд:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} - R_w - \mu C + \gamma, \quad (4.3)$$

Один із можливих процесів під час транспортування річками — це сорбція забруднюючих речовин насосами вздовж основного русла. У такому випадку джерело/поглинач для сорбції може бути записано як [21]:

$$R_w = \rho_x \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (4.4)$$

де  $S$  — сорбована концентрація, виражена як маса розчиненої речовини на масу осаду, легкодоступного для сорбції, а  $\rho_x$  — об'ємна густина пористого середовища. У системі з постійною загальною концентрацією розчинених речовин лінійний рівноважний обмін визначається виразом

$$S = K_d C, \quad (4.5)$$

у якому коефіцієнт розподілу  $K_d$  можна розглядати як відношення концентрацій для сорбованої фази (осаду) та рідкої фази (потoku) при рівновазі [21]. Залежність від об'ємного вмісту вологи  $\theta$  вважається обернено пропорційною:  $K_d = k/\theta$ . Підстановка (4.1), (4.4) та (4.5) у (4.2) дозволяє

сформулювати ADE (рівняння адвекції-дисперсії) в термінах однієї залежної змінної (тобто концентрації розчиненої речовини в потоці) згідно з

$$R \frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} - \mu C + \gamma, \quad (4.6)$$

у якому коефіцієнт затримки  $R$  та коефіцієнт  $\mu$  визначаються виразом:

$$R = 1 + \rho_s K_d, \quad \mu = (\alpha + \beta) \rho_s K_d, \quad (4.7)$$

де  $\alpha$  — константа розпаду рідкої фази першого порядку, а  $\beta$  — константа розпаду твердої фази першого порядку.

Сорбція на відкладеннях зменшує адвективний і дисперсійний потоки на коефіцієнт, рівний  $R$ . Цю сорбцію часто вважають незначною, і в такому випадку  $K_d = 0$ , а значення  $R$  стає практично рівним одиниці. Аналітичні вирази для концентрації зазвичай можна отримати лише для лінійної сорбції. Багато інших процесів, таких як біорозклад, можуть впливати на концентрацію забруднюючих речовин.

У нашому дослідженні ми припускаємо, що  $\mu$  і  $\gamma$  або дорівнюють нулю, або завжди додатні й значно менші за одиницю ( $\ll 1$ ). Додаткові процеси, такі як нелінійний обмін, осадження/розчинення та сорбція компонентів рухомих осадами, нами не розглядалися. Початкову умову можна сформулювати як:

$$C(x,0) = f(x), \quad (4.8)$$

де  $f(x)$  — довільна функція, що залежить від відстані, найпростішим випадком є ситуація, коли потік має постійну концентрацію. Часто припускається для одномірного потокового переносу умова Дірака, яка визначає миттєве вивільнення заданої маси.

Ця умова передбачає, що маса забруднення  $m$  може бути миттєво розподілена по нескінченно малій області, наприклад, тонкій площині області поперек площі потоку  $S_c$  у певному поздовжньому напрямку  $x_0$ , тобто:

$$f(x) = (m/S_c)\delta(x - x_0), \quad (4.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)dx = 1, x \neq x_0 \quad (4.10)$$

Вибору граничних умов приділяється значна увага в літературі з переносу в пористих середовищах [22]. Граничні умови є найпростішими для транспортних задач, визначених у нескінченних областях ( $-\infty < x < +\infty$ ). Щоб гарантувати постійність концентрації, умови на вході та виході можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial C}{\partial x}(\pm\infty, 0) = 0 \quad (4.11)$$

На вході напівнескінченного середовища ( $0 \leq x \leq +\infty$ ) або скінченного середовища ( $0 \leq x \leq L$ ) часто використовуються два типи умов. Ці умови ґрунтуються на безперервності концентрації або потоку розчиненої речовини через вхідну межу. Граничні умови на вході, також звані умовами Діріхле, вимагають, щоб концентрація була безперервною на межі поділу в будь-який час, тобто:

$$C(0, t) = g(t), \quad t > 0 \quad (4.12)$$

Недоліком цієї умови є те, що (макроскопічна) концентрація на межі поділу всередині річкової системи насправді не буде миттєво реагувати на зміни у вхідній концентрації [20]. Збереження маси може бути забезпечене за рахунок використання умови потоку на вході (умова Коші):

$$\left( uC - D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) \Big|_{x=0^+} = ug(t) \quad (4.13)$$

де  $0^+$  вказує на позицію всередині розглядуваної системи.

Деякі часто використовувані функції для вхідної концентрації  $g(t)$  у (4.12) або ((4.13) — це дельта-функція Дірака, скінченний прямокутний імпульс і функція Хевісайда, або ступенева функція.

Миттєве нанесення кількості розчиненої речовини  $m$  на вході  $x = 0$  у довільний момент часу через область площею  $S_c$  визначається виразом:

$$g(t) = (m/uS_c)\delta(t - t_0), \quad (4.14)$$

де  $\delta(t - t_0)$  — дельта-функція Дірака у часі. Функцію  $g(t)$  при  $x = 0$  можна також описати за допомогою початкової умови (4.15), де  $t_0$  — тривалість прикладеного імпульсу, що має концентрацію  $C_0$ .

$$g(t) = \begin{cases} C_0, & 0 < t \leq t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Виконаємо аналітичні розв'язки рівняння ((4.6) для скінченного середовища, припускаючи, що дисперсія не відбувається при  $x > L$ , тоді умова для скінченної системи має вигляд:

$$\frac{\partial C}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (4.16)$$

Таким чином, у нашій роботі розглянуто рівняння ADE переносу забруднюючих речовин у поверхневих та підземних водах у наступному вигляді з урахуванням початкових і граничних умов:

$$R \frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} - \mu C + \gamma, \quad (4.17)$$

$$C(x, 0) = f(x), \quad \left( uC - \omega D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) \Big|_{x=0^+} = ug(t), \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}(\infty, t) = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = 1 \quad \text{і} \quad \frac{\partial C}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = 0 \quad (4.19)$$

$$R = 1 + \rho k / \theta \quad \text{і} \quad \mu = \alpha + \beta \cdot \rho k / \theta \quad (4.20)$$

У рівнянні ((4.17) явно не враховується вміст вологи пористого середовища та кінетика сорбції, але припускається, що коефіцієнти ефективної дифузії  $D_x$  і середня швидкість переносу речовини вологою  $u$  є емпіричними,

і їхні значення опосередковано враховують низку особливостей переносу в сорбуючому середовищі.

## РОЗДІЛ 5

### ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

#### 5.1 Скінченно-різницева апроксимація дробової початково-крайової задачі

Для побудови скінченно-різницевого розв'язку початково-крайової задачі дробового рівняння адвекції-дисперсії був складений програмний додаток мовою пакету Octave.

Нижче наведено деякі особливості даної програми.

Будуємо рівномірну сітку

$$x_j = j\Delta x, \quad j = -N, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N,$$

$$t_n = n\Delta t, \quad n \geq 0.$$

Визначаємо такі граничні

$$U_{-N}^n = 1 - n\Delta t, \quad U_N^n = 1 + n\Delta t$$

та початкові умови

$$U_j^0 = (j\Delta x)^2.$$

Спочатку побудуємо матриці  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{B}$ , та матрицю  $\mathbf{A}_{**}$  і вектор  $z^n$  для випадку коли похідна  $\frac{\partial u}{\partial x}$  апроксимується за центральною схемою. Знаючи скінченно-різницевий розв'язок  $U^n$  в момент часу  $t = n\Delta t$ , за формулою (3.8) знайдемо скінченно-різницевий в момент часу  $t = (n + 1)\Delta t$ :

```
L = zeros(2*N-1, 2*N-1);
```

```
v(1:2*N-2)=p(0);
```

```
L=diag(v,1);
```

```
for k=1:2*N-1
```

```
    v=[];
```

```
    v(1:2*N-k) = p(k);
```

```

    p_v(k) = p(k+1);
    L=L+diag(v,-k+1);
end
B = (1+gamma_val)*L + (1-gamma_val)*L';
v(1:2*N-2) = nu/2;
A = diag(v, -1) + diag(-v, 1)+diag(ones(1,2*N-1),0);
for i = 1:2*N-1
    U(i, 1)= U0(-1 + i*dx);
end
% матриця ітерацій
G = A + omega_alpha/2 * B;
for nt = 0:M-2
    v = zeros(2*N-1, 1);
    v(1) = nu;
    v_1 = zeros(2*N-1, 1);
    v_1(1) = nu/2;
    %central
    z_N_a = v_1 * U_m_N(nt) + -v_1(end:-1:1) * U_p_N(nt);
    v = zeros(2*N-1, 1);
    v(2*N-1) = p(0);
    z_N_b_m = p_v' * U_m_N(nt) + v* U_p_N(nt);
    z_N_b_m = omega_alpha * (1+gamma_val)/2 * z_N_b_m
    z_N_b_p = v(end:-1:1) * U_m_N(nt) + p_v'(end:-1:1) * U_p_N(nt);
    z_N_b_p = omega_alpha * (1-gamma_val)/2 * z_N_b_p
    z_b = z_N_b_m + z_N_b_p;
    z_n = z_N_a + z_b;
    U_n = U(:, nt+1);
    U_n_1 = G*U_n + z_n;
    U(:, nt+2) = U_n_1;
end

```

Побудуємо графік скінченно-різницевого розв'язку:

```

[X,Y]=meshgrid(dt:dt:T,-1+dx:dx:1-dx);
mesh(X,Y,U)

```

За теоремою центральна схема (3.7) є стійкою, якщо  $\omega_\alpha 2^{\alpha-1} \leq 1$ .

При  $\gamma = 0$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $Z = 0.5$ ,  $d = 0.2$  ми маємо  $\omega_\alpha 2^{\alpha-1} = 0.063246$ , тобто умова виконується, тож скінченно-різницева схема стійка. Бачимо скінченно-різницевий розв'язок на Рис. 5.8.

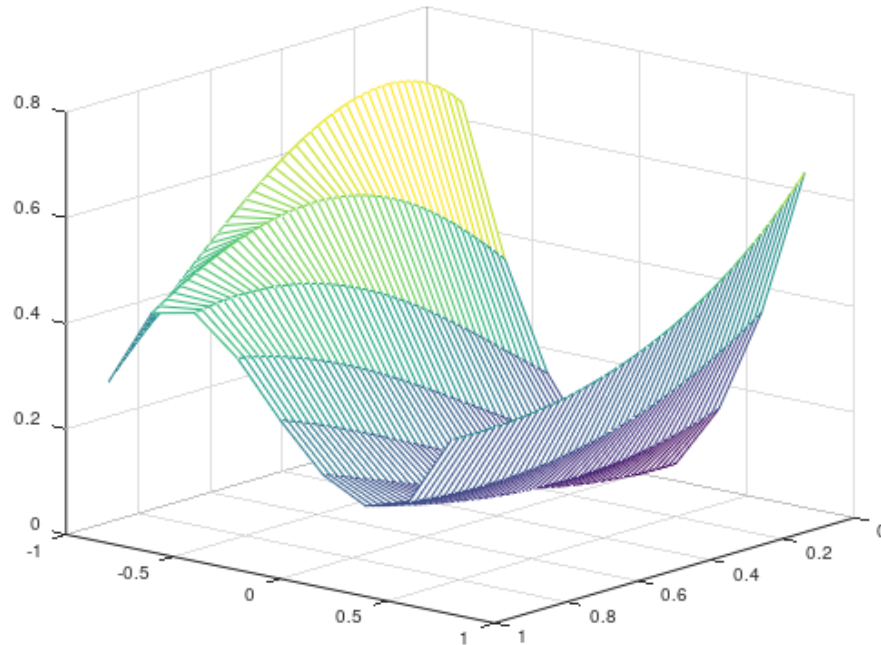


Рис. 5.1. Скінченно-різницевий розв'язок ( $N = 5$ ,  $n = 50$ )

Розглянемо, що відбувається при зміні значення параметра  $Z$ , коли  $\gamma = 0.5$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $d = 0.2$  (рис 4.2)

Збільшення швидкості руху води в порах призводить до швидшого переміщення речовини через систему та спричиняє більш різкі зміни у розподілі концентрації. У чисельному розв'язку це може проявлятися як більша зміна значень функції між сусідніми точками сітки за один крок часу.

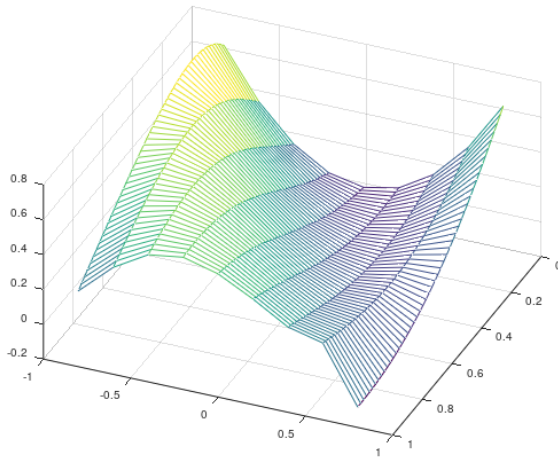
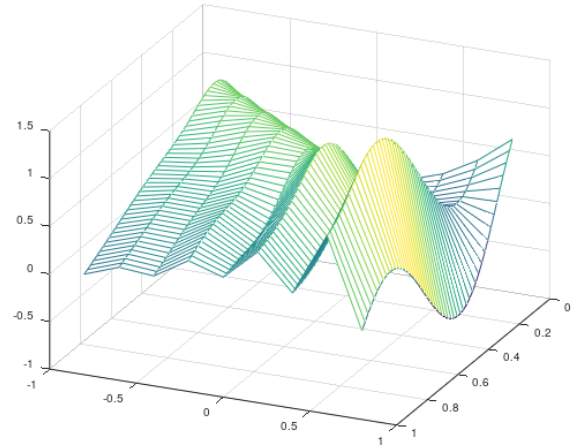
а)  $Z = 1$ б)  $Z = 3$ 

Рис. 5.2. Скінченно-різницеий розв'язок ( $\gamma = 0.5$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $d = 0.2$ ,  $N = 5$ ,  $n = 50$ )

Якщо  $\gamma = 0$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $Z = 1$ ,  $d = 1$ , то  $\omega_\alpha 2^{\alpha-1} = 2.7386$  і умова стійкості не виконується. Тобто, в цьому випадку скінченно-різницева схема не є стійкою. На Рис. 4.3 приведено результати роботи програми, з них видно, що задовільний розв'язок побудувати не вдалося.

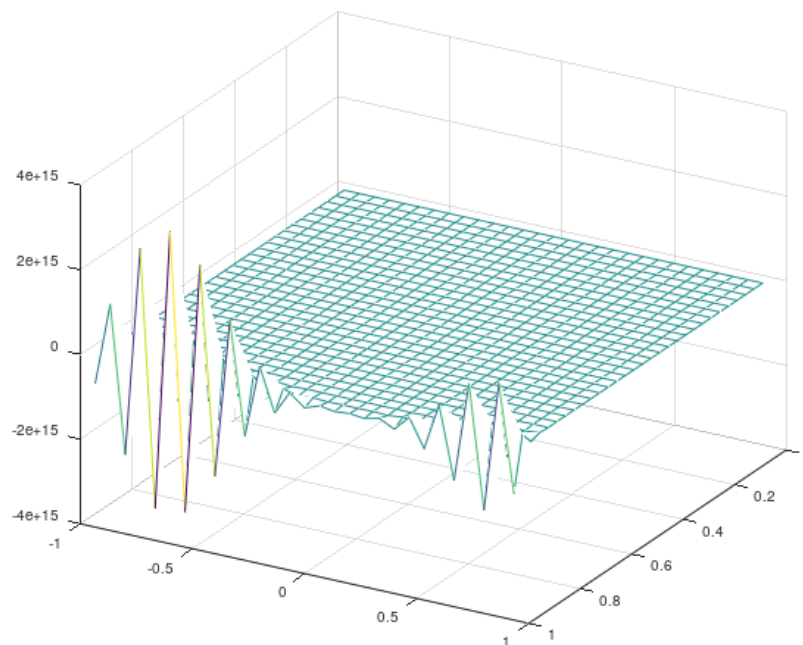
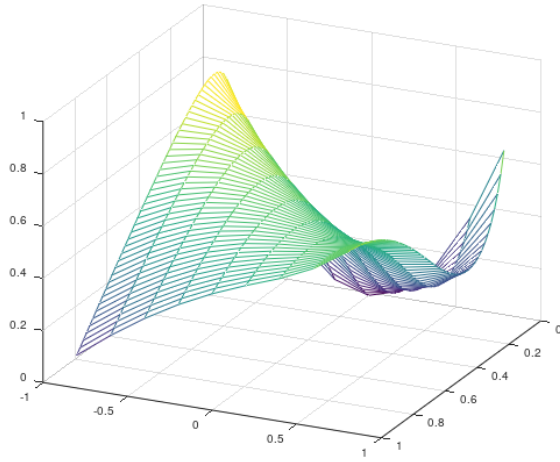
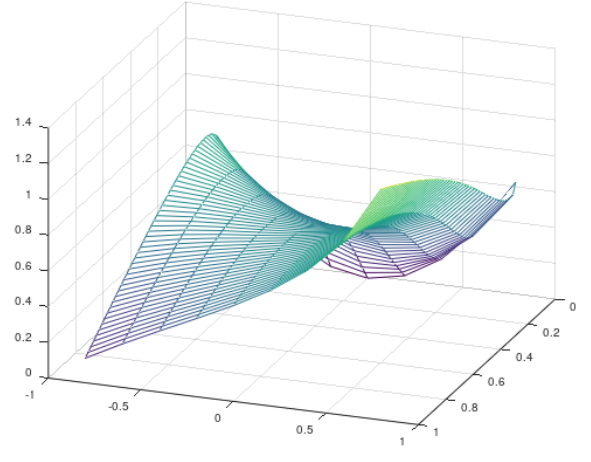
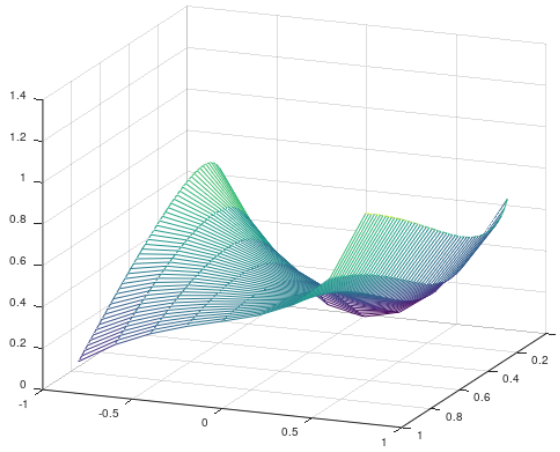
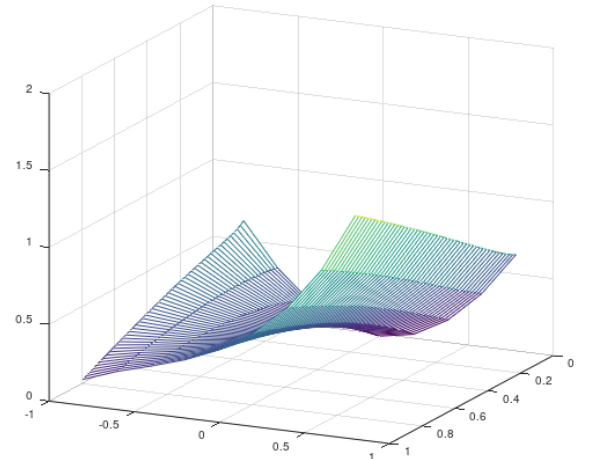


Рис. 5.3. Результати роботи програми ( $N = 15$ ,  $n = 30$ )

Якщо  $\alpha = 1.5$ ,  $Z = 1$ ,  $d = 1$ , умова стійкості також виконується. Зауважимо, що параметр  $\gamma$  не впливає на стійкість схеми (рис. 4.4, 4.5)

а)  $\gamma = -1$ б)  $\gamma = -0.5$ Рис. 5.4. Скінченно-різницевий розв'язок ( $\alpha = 1.5$ ,  $Z = 1$ ,  $d = 1$ ,  $N = 5$ ,  $n = 50$ )а)  $\gamma = 0$ б)  $\gamma = 1$ Рис. 5.5. Скінченно-різницевий розв'язок ( $\alpha = 1.5$ ,  $Z = 1$ ,  $d = 1$ ,  $N = 5$ ,  $n = 50$ )

## 5.2 Скінченно-різницева апроксимація дробової початково-крайової задачі щодо перенесення забруднення у ріках

Якщо  $\gamma = 0$ , то дробове рівняння адвекції-дисперсії (1.1) має такий вигляд:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + Z \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{d}{2} \left( \frac{\partial^{\alpha} C}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right), \quad (5.1)$$

У роботі [2] для моделювання перенесення забруднення у ріках використовується рівняння адвекції-дисперсії (4.6). Це рівняння запишемо у вигляді подібному до рівняння (5.1).

$$R \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{4D_x}{x^2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{2u}{x} \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (5.2)$$

де

$$\begin{aligned} & -1 < x < 1 \\ Z &= \frac{2u}{XR}, \quad d = 2 \frac{D_x 4}{X^2 R}, \quad X = 4000 \end{aligned}$$

$R$  — коефіцієнт накопичення (пористість середовища),  $D_x$  — коефіцієнт дифузії,  $u$  — швидкість потоку води (адвекції),  $X$  - довжина відрізка річки. Далі перенос забруднюючих речовин у ріках будемо моделювати дробовим рівнянням (5.1), у якому

$$Z = \frac{2u}{XR}, \quad D = \frac{8D_x}{X^2 R}$$

Тепер для рівняння (5.1) розглянемо початкову крайову задачу з початковою умоваю

$$C(X; 0) = 0$$

та крайовими умовами

$$C(-1; t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < T_v \\ 0, & T_v < t < T. \end{cases},$$

$$C(1; t) = 0,$$

де  $T_v$  — час впливу забруднення.

Результати обчислювального експерименту для дробових похідних різного порядку приведено на малюнках. Варто зазначити, що для всіх параметрів  $\alpha$  схема залишається стійкою.

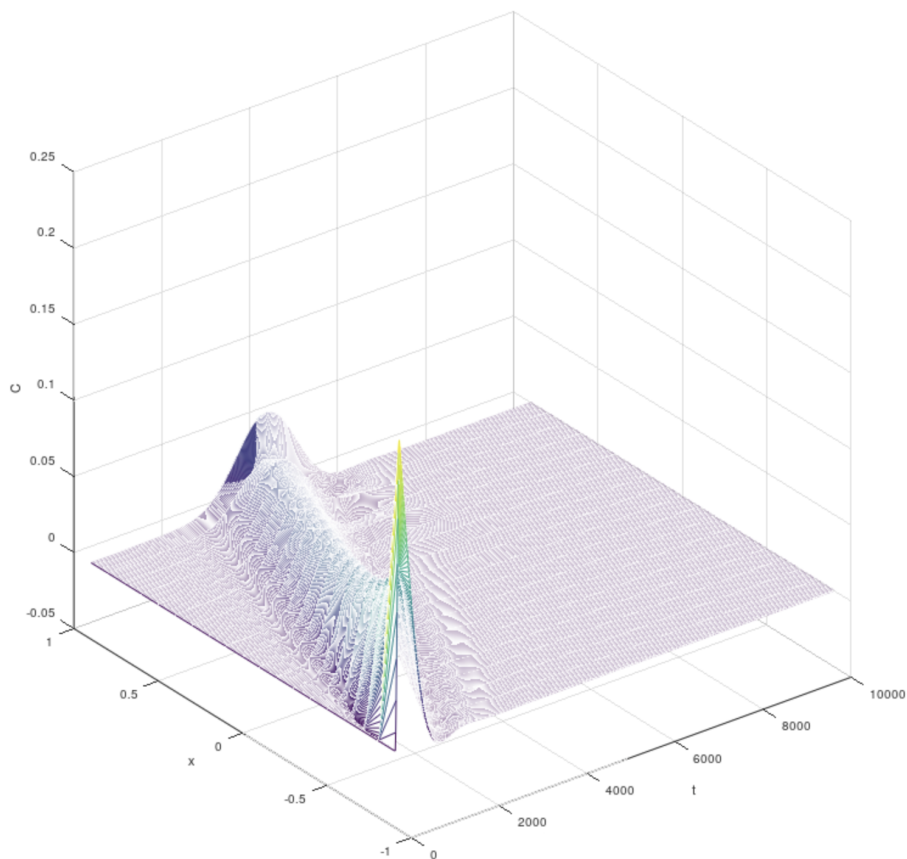


Рис. 5.6. Скінченно-різницевий розв'язок при  $\alpha = 1.5$  ( $\gamma = 0$ ,  $N = 10$ ,  $n = 1$ ,  $T = 10000$ ,  $X = 4000$ ,  $D_x = 70$ ,  $R = \sqrt{0.97}$ )

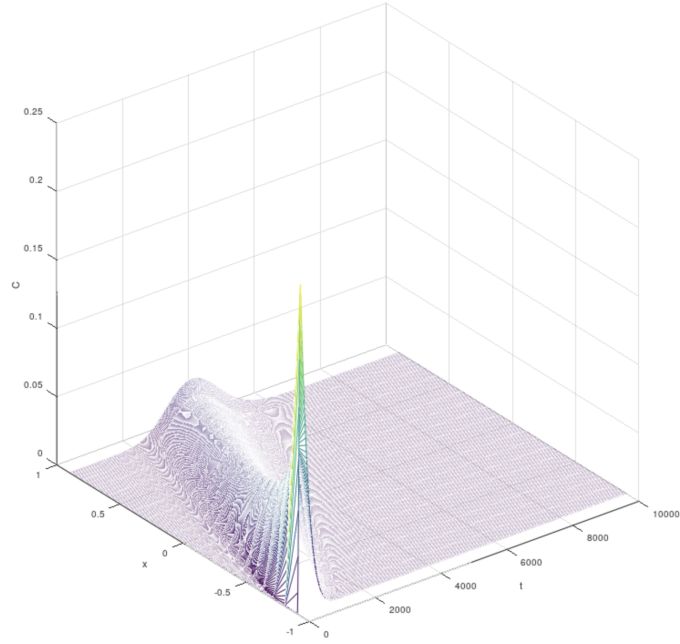


Рис. 5.7. Скінченно-різницевий розв'язок при  $\alpha = 1.75$  ( $\gamma = 0$ ,  $N = 10$ ,  $n = 1$ ,  $T = 10000$ ,  $X = 4000$ ,  $D_x = 70$ ,  $R = \sqrt{0.97}$ )

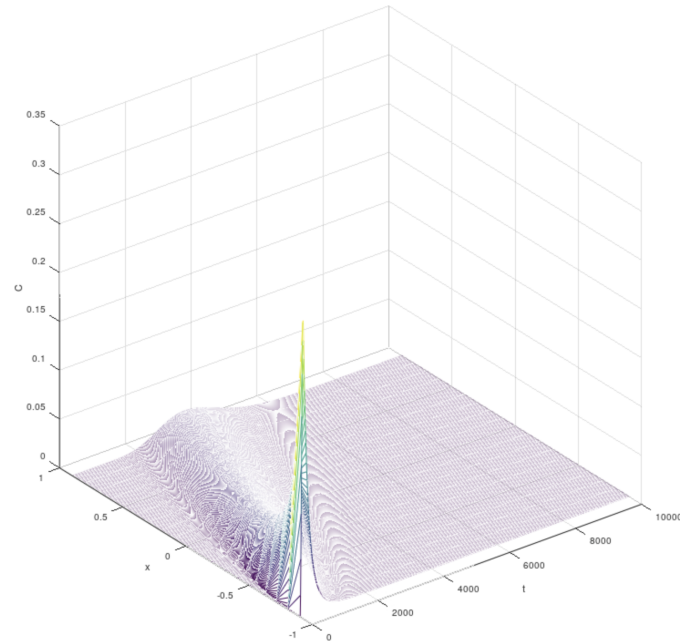


Рис. 5.8. Скінченно-різницевий розв'язок при  $\alpha = 1.99$  ( $\gamma = 0$ ,  $N = 10$ ,  $n = 1$ ,  $T = 10000$ ,  $X = 4000$ ,  $D_x = 70$ ,  $R = \sqrt{0.97}$ )

## ВИСНОВКИ

Розглянуто явну скінченно-різницеву апроксимацію початково-крайової задачі для дробового рівняння адвекції-дисперсії.

Створено програмний додаток мовою пакету Octave, який реалізує вказану схему, та знаходить скінченно-різницевий розв'язок для різних коефіцієнтів дробового рівняння та різних параметрів сітки.

Проведено серію обчислювальних експериментів щодо встановлення стійкості скінченно-різницевої схеми.

Результати експериментів узгоджуються з теоретичними результатами щодо умовної стійкості скінченно-різницевої схеми.

Побудована початково-крайова задача з дробовою похідною для просторової змінної щодо перенесення забруднення у ріках.

Побудована скінченно-різницева апроксимація дробової початково-крайової задачі щодо перенесення забруднення у ріках.

Результати проведених обчислювальних експериментів підтверджують, що схема залишається стійкою для широкого вибору параметрів моделювання забруднення.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вербіцький В. В., Реут В. В. Введення в чисельні методи аналізу і диференціальних рівнянь: навчальний посібник / Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2018. 116 с.
2. Вербіцький В.В., Юдіна С.М. ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕ-  
НЕСЕННЯ ЗАБРУДНЮЮЧИХ РЕЧОВИН У РІКАХ. / Інформаційні  
технології і автоматизація – 2024 / Матеріали XVII міжнародної науково-  
практичної конференції. Одеса, 31 жовтня - 1 листопада 2024 р. - Одеса,  
Видавництво ОНТУ, 2024. – с. 63.  
<https://ontu.edu.ua/download/konfi/2024/Collection-of-abstracts-of-the-conference-ITIA-2024.pdf>
3. Podlubny I. Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, 1999. — 340 p.
4. Owolabi K. M., Atangana A. Numerical Methods for Fractional Differentiation. Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2019. — 328 p.
5. Fry V. A., John D., Gunter R. B. Analytical solutions of the transport equation of the solute with limited desorption rate and decay. Water Resources Research, 29(9), 1993, 3201-3208.
6. Appu S., Knight G. D. Analytical solution of the advection equation and the advection-diffusion with spatially variable coefficients. J. Hydraulic Engineering, ASCE, 123(2), 1997, 144-148.
7. Zhou L. The Transfer of dissolved substances in heterogeneous and layered soils. Ph. D. thesis, Louisiana State University, 2002.
8. Zhou L., Selim H. M. Conceptual fractal model to describe the time-dependent dispersion. Soil Science, 167(3), 2002, 173-189.
9. Lowry T., Lee S. G. A finite analytical method for solving a two-dimensional time-dependent ad-vector-diffusion equation with time-invariant coefficients. Advances in Water Resources, 28(2), 2005, 117-133.
10. Huang G., Huang K., Zhang H. Proofs of one-dimensional scale-dependent fractional advection-dispersion. Journal of Pollutant Hydrology, 86(1/2), 2006, 53-71.
11. Karna S. A., Srivastava R. The influence of stationary water content on the

- transport of pollutants in an unsaturated zone. *Journal of Hydroenvironment Research*, 1(3-4), 2008, 206-215.
12. Kim S., Kavvas M. L. Generalized Fick's law and fractional ADE for pollutant transport in a river- a detailed conclusion. *Journal of Hydrological Engineering*, 11(1), 2006, 69-83.
  13. Huang Q., Huang G., Zhang H. Solutions of finite element equations for fractional advection-dispersion. *Advances in Water Resources*, 31(12), 2008, 1578-1589.
  14. Du R., Cao W. R., Sun Z. Z. A compact difference scheme for the fractional wave-diffusion equation. *Applied Mathematical Modelling*, 34(10), 2010, 2998-3007.
  15. Jaiswal D. K., Kumar A., Kumar N., Yadav R. R. An analytical solution for the temporal and spatial dependent dispersion of a solute concentration of the input pulse type in one-dimensional semi-infinite media. *Journal of Research of Hydrocracy*, 2(4), 2009, 254-263.
  16. Jaiswal D. K., Kumar A. Analytical solutions of the equations of the advection-dispersion point input AC pulse type in one dimension. *International Journal of Engineering Science and Technology*, 3(1), 2011, 22-29.
  17. Chen J. S., Liu C. W. Generalized analytical solution of the advection-dispersion equation in a finite spatial domain with an arbitrary time-dependent boundary condition of the input. *Hydrol. The Earth System*, 15(8), 2011, 2471-2479.
  18. Singh M. K., Ahamad S., Singh V. P. One-Dimensional uniform and time-varying dispersion of solutes along the transient groundwater flow in semi-infinite aquifer. *Acta Geophysica*, 62(4), 2014, 872-892.
  19. Stein E. V. *Course of Soil Physics: Textbook*. M.: Izd-vo MGU, 2005. — 472 p.
  20. Kundas S. P., Gishkeluk I. A., Grinchik N. N. Numerical simulation of migration of contaminants in soil. *Use of Natural Resources and Environment*. SB. Nauch. Art. — Minsk: Belnis "Environment", 2008. — P. 56-60.
  21. Gishkeluk I. A., Grinchik N. N., Kundas S. P. Mathematical modeling of convective diffusion of soluble compounds in soil under non-isothermal moisture transfer. *Engineering and Physics Journal*, 81(5), 2008, 924-935.

22. Betu V. van Genuchten I. M. Th., Parker J. C. The authors respond. *Ground Water*, 51, 1, 1-9.

**ДОДАТОК А. ТЕКСТ ПРОГРАМИ ДЛЯ  
СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВОЇ АПРОКСИМАЦІЇ  
ДРОБОВОЇ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ**

```
function fade
    global alpha
    global dt
    N = 50
    M = 100
    T = 1
    gamma_val = 0;
    alpha = 1.5
    Z = 0.5;
    d = 0.2;
    dx = 1/N
    dt = T/M

    nu = Z * dt/dx
    omega_alpha = d * dt/(dx^alpha)

    stab = omega_alpha*2^(alpha-1)

    L = zeros(2*N-1, 2*N-1);

    v(1:2*N-2)=p(0);
    L=diag(v,1);

    for k=1:2*N-1
        v=[];
        v(1:2*N-k) = p(k);
        p_v(k) = p(k+1);
        L=L+diag(v,-k+1);
    end
end
```

```

B = (1+gamma_val)*L + (1-gamma_val)*L';

v(1:2*N-2) = nu/2;
A = diag(v, -1) + diag(-v, 1)+diag(ones(1,2*N-1),0);

for i = 1:2*N-1
    U(i, 1)= U0(-1 + i*dx);
end

% матриця ітерацій
G = A + omega_alpha/2 * B;

for nt = 0:M-2
    v = zeros(2*N-1, 1);
    v(1) = nu;

    v_1 = zeros(2*N-1, 1);
    v_1(1) = nu/2;
    %central
    z_N_a = v_1 * U_m_N(nt) + -v_1(end:-1:1) * U_p_N(nt);

    v = zeros(2*N-1, 1);
    v(2*N-1) = p(0);

    z_N_b_m = p_v' * U_m_N(nt) + v* U_p_N(nt);

    z_N_b_m = omega_alpha * (1+gamma_val)/2 * z_N_b_m
    z_N_b_p = v(end:-1:1) * U_m_N(nt) + p_v'(end:-1:1) * U_p_N(nt);
    z_N_b_p = omega_alpha * (1-gamma_val)/2 * z_N_b_p
    z_b = z_N_b_m + z_N_b_p;

    z_n = z_N_a + z_b;

```

```

    U_n = U(:, nt+1);

    U_n_1 = G*U_n + z_n;

    U(:, nt+2) = U_n_1;
end
[X,Y]=meshgrid(dt:dt:T,-1+dx:dx:1-dx);
mesh(X,Y,U)
end

function y=U0(x)
    y=x^2;
endfunction

function y=U_m_N(n)
    global dt
    y = 1-n*dt;
endfunction

function y=U_p_N(n)
    global dt
    y = 1+n*dt;
endfunction

function y = p(tau)
    global alpha
    y=gamma(tau-alpha)/gamma(-alpha)/gamma(tau+1);
end

```

**ДОДАТОК Б. ТЕКСТ ПРОГРАМИ ДЛЯ  
СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВОЇ АПРОКСИМАЦІЇ  
ДРОБОВОЇ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ  
ЩОДО ПЕРЕНЕСЕННЯ ЗАБРУДНЕННЯ У РІКАХ**

```
function fade()
    global Tv
    global alpha
    global dt
    R=sqrt(0.97);
    Dx=70;
    X=4000;
    Z=2/R/X
    d=8*Dx/R/X/X
    alpha=1.5
    Gamma=0;
    n=1;
    N=10;
    Nt=1000;
    T=10000;
    Tv=T/100;
    dx=1/N;
    dt=T/Nt;
    nu=Z*dt/dx
    omega_a=d*dt/(dx^alpha)
    stab= omega_a*2^(alpha-1)
    v(1:2*N-2)=p(0);
    L=diag(v,1);
    for k=1:2*N-1
        v=[];
        v(1:2*N-k)=p(k);
        L=L+diag(v,-k+1);
    end
```

```

B = (1+Gamma)*L+(1-Gamma)*L';
v=[];
v(1:2*N-2)=nu/2;
A=diag(v,-1)+diag(-v,1)+diag(ones(1,2*N-1),0);

v=[];
for k=1:2*N-1
    v(k)=p(k+1);
end

for k=1:2*N-1
    v1(k)=v(2*N-k);
end
G=A+omega_a/2*B;

% Начальные условия
for j=1:2*N-1
    U(1,j)=U0(-1+j*dx);
end

for n=0:Nt-2
    ZnBp=v'*UmN(n);
    ZnBp(2*N-1)=ZnBp(2*N-1)+v(2*N-1)*UpN(n);
    ZnBp=ZnBp*omega_a*(1+Gamma)/2;
    ZnBm=v1'*UpN(n);
    ZnBm(1)=ZnBm(1)+p(0)*UmN(n);
    ZnBm=ZnBm*omega_a*(1-Gamma)/2;
    Znzz=zeros(2*N-1,1);
    Znzz(1)=Znzz(1)+nu/2*UmN(n);
    Znzz(2*N-1)=Znzz(2*N-1)-nu/2*UpN(n);

    U(n+2,:)=(G*(U(n+1,:))'+ZnBp+ZnBm+Znzz)';
end

```

```

U;
U1=U';
[X,Y]=meshgrid(dt:dt:T,-1+dx:dx:1-dx);
mesh(X,Y,U1)
xlabel ("t");
ylabel ("x");
zlabel ("C");
endfunction

```

```

function y=UmN(n)
    global dt
    global Tv
    % ліва крайова умова
    %y=1-n*dt;
    t=n*dt;
    if(t<=Tv)
        y=2/Tv*t-4/Tv/Tv*(t-Tv/2)*t;
    else
        y=0;
    endif
    %y=1;
endfunction

```

```

function y=UpN(n)
    global dt
    % права крайова умова
    %y=1+n*dt;
    y=0;
endfunction

```

```

function y=U0(x)

```

```
% прчаткова умова
%y=x*x;
y=0;

endfunction

function y=p(j)
    global alpha
    y=gamma(j-alpha)/gamma(-alpha)/gamma(j+1);
endfunction
```