Дослідження в математиці і механіці. — 2019. — Т. 24, вип. 2(34). — С. 7–30

УДК 517.925

А. В. Дрожжина
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

АСИМПТОТИКА НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Для дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$, где $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \dots \times \Delta_{Y_{n-1}} \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, Y_i равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_i} — некоторая односторонняя окрестность Y_i, $i = 0, 1, \dots, n-1$, иследуются при некоторых ограничениях на функцию f вопросы о существовании, асимптотике и количестве $P_\omega\left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$-решений для всех $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Такие решения относятся к особым случаям класса $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решений, где $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, который был введен в работах В. М. Евтухова, посвященных дифференциальным уравнениям типа Эмдена-Фаулера n-го порядка. Данные особые случаи требуют отдельного их рассмотрения в связи со специфическими априорными асимптотическими свойствами таких решений. Исследование поставленных задач осуществляется при предположении, что дифференциальное уравнение является в некотором смысле асимптотически близким к двучленному дифференциальному уравнению с правильно меняющимися нелинейностями.

MSC: 34D05, 34C11.
Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, правильно меняющиеся функции, асимптотика решений, $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решения.
DOI: 10.18524/2519-206x.2019.2(34).189938.

1. Введение

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}), \tag{1}$$

где $n \ge 2$, $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \dots \times \Delta_{Y_{n-1}} \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, Y_j равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_j} — некоторая односторонняя окрестность Y_j, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Определение 1. *Решение y дифференциального уравнения* (1) *называется $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решением, где $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет следующим условиям*

$$y^{(j)}(t) \in \Delta_{Y_j} \quad \textit{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(j)}(t) = Y_j \ (j = \overline{0, n-1}), \tag{2}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\left[y^{(n-1)}(t)\right]^2}{y^{(n-2)}(t) y^{(n)}(t)} = \lambda_0. \tag{3}$$

Получена 17.09.2019

Случаи, когда $\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i}$ $(i = \overline{1, n-1})$ являются особыми при изучении таких решений и требуют отдельного их рассмотрения. В силу результатов из [1] (Глава 3, §10) имеет место следующее утверждение об априорных асимптотических свойствах таких решений.

Лемма 1. *Если* $y : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ *является* $P_\omega\left(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$*-решением при некотором* $i \in \{1, \dots, n-1\}$ *дифференциального уравнения* (1), *то для этого решения имеют место при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические соотношения*

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{i-k}}{(i-k)!}\, y^{(i-1)}(t) \ (k = \overline{1, i-1}),^{*} \quad y^{(i)}(t) = o\left(\frac{y^{(i-1)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right), \quad (4)$$

$$y^{(k)}(t) \sim (-1)^{k-i} \frac{(k-i)!}{[\pi_\omega(t)]^{k-i}}\, y^{(i)}(t) \quad (k = \overline{i+1, n}), \quad (5)$$

где

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \textit{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \textit{якщо} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

причем в случае, когда $i = n-1$, *соотношение* (5) *имеет место при дополнительном условии существования конечного или равного* $\pm\infty$ *предела* $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$.

Асимптотическое поведение $P_\omega\left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$-решений при $i \in \{1, \dots, n-1\}$ в работах [2] и [3], [4] исследовалось для неавтономных дифференциальных уравнений n- го порядка, которые содержат в правой части одно или несколько слагаемых с правильно меняющимися нелинейностями, и в работе Л.И. Кусик [5] для уравнения (1) общего вида при $n = 2$, т.е. в случае дифференциального уравнения второго порядка. При этом в [5] предполагалось, что уравнение (1) является в некотором смысле асимптотически близким к дифференциальному уравнению

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y'),$$

где $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная и правильно меняющаяся при $y^{(j)} \longrightarrow Y_j$ функция порядка σ_j, Y_j равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_j} — некоторая односторонняя окрестность Y_j, $j = 0, 1$.

Теория правильно меняющихся функций подробно изложена в монографиях Е. Сенета [6] и N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels [7]. Согласно этой теории каждая правильно меняющаяся при $y \to Y$ функция

*При $i = 1$ эти соотношения отсутствуют.

$\varphi : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$ порядка σ, где Y равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_Y- некоторая односторонняя окрестность Y, допускает представление вида

$$\varphi(y) = |y|^\sigma L(y), \tag{6}$$

в котором $L : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$– медленно меняющаяся функция при $y \to Y$, т.е. такая, что

$$\lim_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_Y}} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1 \quad \text{для будь-якого} \quad \lambda > 0. \tag{7}$$

Среди свойств медленно меняющихся при $y \to Y$ функций $L : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$, где Y равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_Y- некоторая односторонняя окрестность Y, отметим следующие.

$\mathcal{M}_1$. Предельное соотношение (7) выполняется равномерно по λ на любом отрезке $[c, d] \subset]0, +\infty[$;

$\mathcal{M}_2$. $\lim\limits_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_Y}} \dfrac{\ln L(y)}{\ln|y|} = 0.$

$\mathcal{M}_3$. Существует непрерывно дифференцируемая функция $L_0 : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$, которая носит название нормализованная медленно меняющаяся функция при $y \to Y$, такая, что

$$\lim_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_Y}} \frac{L_0(y)}{L(y)} = 1, \qquad \lim_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_Y}} \frac{yL_0'(y)}{L_0(y)} = 0.$$

$\mathcal{M}_4$. При $\gamma \neq 0$

$$\int\limits_B^y \frac{|z|^{\gamma-1}\,dz}{L(z)} = \frac{\nu|y|^\gamma}{\gamma L(y)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y \quad (y \in \Delta_Y),$$

где

$$\nu = \operatorname{sign} y, \quad B = \begin{cases} y_0, & \text{если} \quad \left|\int\limits_{y_0}^{Y} \frac{|z|^{\gamma-1}\,dz}{L(z)}\right| = +\infty, \\ \\ Y, , & \text{если} \quad \left|\int\limits_{y_0}^{Y} \frac{|z|^{\gamma-1}\,dz}{L(z)}\right| < +\infty \end{cases} \qquad y_0 \in \Delta_Y.$$

Введем также для медленно меняющихся функций условие S_0.

Определение 2. *Будем говорить, что медленно меняющаяся при $y \to Y$ функция $L : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$, где Y равно либо нулю, либо $\pm\infty$, и Δ_Y- односторонняя окрестность Y, удовлетворяет условию S_0, если*

$$L\left(\nu e^{[1+o(1)]\ln|y|}\right) = L(y)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y \quad (y \in \Delta_Y),$$

где $\nu = \operatorname{sign} y$.

Условию S_0 заведомо удовлетворяют функции, которые имеют отличный от нуля конечный предел при $y \to Y$ и функции вида

$$|\ln|y||^{\gamma_1}, \quad \ln^{\gamma_2}|\ln|y||, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}.$$

Целью настоящей работы является распространение результатов из [5] на случай произвольного $n \geq 2$, а именно установление условий существования у дифференциального уравнения (1) $P_\omega\left(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$–решений при $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ и асимптотических представлений для таких решений и их производных до порядка $n-1$ включительно. Для таких решений $i-1$-я производная является медленно меняющейся функцией при $t \uparrow \omega$.

2. Основные результаты

Определение 3. *Будем говорить, что функция f в диференциальном уравнении (1) удовлетворяет условию $(RN)_{\lambda_0}$ при $\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i}$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, если существует число $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, непрерывная функция $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ и непрерывные правильно меняющиеся при $z_j \to Y_j$ $(j = \overline{0, n-1})$ функции $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ $(j = \overline{0, n-1})$ порядков σ_j $(j = \overline{0, n-1})$ такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций $z_j : [a, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_j}$ $(j = \overline{0, n-1})$, которые удовлетворяют условиям*

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_j(t) = Y_j, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z_j'(t)}{z_j(t)} = i - j - 1 \quad (j = \overline{0, n-1}), \tag{8}$$

имеет место асимптотическое представление

$$f(t, z_0(t), z_1(t), \ldots, z_{n-1}(t)) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(z_j(t))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{9}$$

Поскольку в (9) каждая из функций φ_j является правильно меняющейся функцией порядка σ_j при $z_j \to Y_j$, то согласно (6)

$$\varphi_j(z_j) = |z_j|^{\sigma_j} L_j(z_j) \quad (j = \overline{0, n-1}), \tag{10}$$

где каждая $L_j : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ $(j = \overline{0, n-1})$– непрерывная медленно меняющаяся функция при $z_j \to Y_j$.

При выполнении для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ условия $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$ наряду с (10) будем использовать следующие обозначения:

$$\nu_j = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad Y_j = +\infty, \quad \text{либо} \\ & Y_j = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_{Y_j} - \text{правая окрестность нуля}, \\ -1, & \text{если} \quad Y_j = -\infty, \quad \text{либо} \\ & Y_j = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_{Y_j} - \text{левая окрестность нуля} \end{cases} \quad (j = \overline{0, n-1}),$$

$$\gamma = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j, \quad \gamma_i = 1 - \sum_{j=i}^{n-1} \sigma_j,$$

$$\mu_i = n - i - 1 + \sum_{j=0}^{i-2} \sigma_j (i - j - 1) - \sum_{j=i+1}^{n-1} \sigma_j (j - i),$$

$$C_i = \frac{1}{(n-i)!} \prod_{j=0}^{i-1} [(i-j-1)!]^{-\sigma_j} \prod_{j=i+1}^{n-1} [(j-i)!]^{\sigma_j},$$

$$J_i(t) = \int\limits_{A_i}^{t} p(s) |\pi_\omega(s)|^{\mu_i} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} L_j \left(\nu_j |\pi_\omega(s)|^{i-j-1} \right) ds,$$

$$J_{ii}(t) = \int\limits_{A_{ii}}^{t} |J_i(s)|^{\frac{1}{\gamma_i}} ds,$$

где каждый из пределов интегрирования A_i, A_{ii} выбирается равным точке $a_0 \in [a, \omega[$ (справа от которой, т.е. при $t \in [a_0, \omega[$ подинтегральная функция непрерывна), если при этом значении предела интегрирования соответствующий интеграл стремится к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, и равным ω если при таком значении предела интегрирования он стремится к нулю при $t \uparrow \omega$.

Теорема 1. *Пусть $n > 2$, $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, функция f удовлетворяет условию $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$, выполняется неравенство $\gamma\gamma_i \neq 0$ и функции L_j при всех $j \in \{0, \ldots, n-1\} \setminus \{i-1\}$ удовлетворяют условию S_0. Тогда для существования у дифференциального уравнения (1) $P_\omega\left(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$-решений необходимо, а если алгебраическое относительно ρ уравнение*

$$\sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{(j-i)!} \prod_{m=1}^{j-i} (m - \rho) + \sigma_i = \frac{1}{(n-i)!} \prod_{m=1}^{n-i} (m - \rho) \tag{11}$$

не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы соблюдались неравенства

$$\nu_j \nu_{j-1} (i - j) \pi_\omega(t) > 0 \quad \text{при всех } j \in \{1, \ldots, n-1\} \setminus \{i\}, \tag{12}$$

$$\nu_i \nu_{i-1} \gamma\gamma_i J_{ii}(t) > 0, \quad \nu_i \alpha_0 \gamma_i (-1)^{n-i-1} \pi_\omega^{n-i-1}(t) J_i(t) > 0 \tag{13}$$

в некоторой левой окрестности ω, а также условия

$$\nu_{j-1} \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)|^{i-j} = Y_{j-1} \quad \text{при всех} \quad j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}, \tag{14}$$

$$\nu_{i-1}\lim_{t\uparrow\omega}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}}=Y_{i-1}, \tag{15}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_i'(t)}{J_i(t)}=-\gamma_i,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_{ii}'(t)}{J_{ii}(t)}=0. \tag{16}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления

$$y^{(j-1)}(t)=\frac{[\pi_\omega(t)]^{i-j}}{(i-j)!}\,y^{(i-1)}(t)[1+o(1)]\quad (j=1,\dots,i-1), \tag{17}$$

$$y^{(j)}(t)=(-1)^{j-i}\frac{(j-i)!}{[\pi_\omega(t)]^{j-i}}\cdot\frac{\gamma_i J_{ii}'(t)}{\gamma J_{ii}(t)}\,y^{(i-1)}(t)[1+o(1)]\quad (j=i,\dots,n-1), \tag{18}$$

$$\frac{|y^{(i-1)}(t)|^\gamma}{L_{i-1}(y^{(i-1)}(t))}=|\gamma_i C_i|\left|\frac{\gamma}{\gamma_i}J_{ii}(t)\right|^{\gamma_i}[1+o(1)], \tag{19}$$

причем таких решений в случае $\omega=+\infty$ существует $l+i$-параметрическое семейство при выполнении неравенства $\nu_i\nu_{i-1}\gamma<0$ и $l+i-1$-параметрическое семейство при выполнении неравенства $\nu_i\nu_{i-1}\gamma>0$, а в случае $\omega<+\infty$ существует $n-i-l+1$- параметрическое семейство таких решений при выполнении неравенства $\nu_i\nu_{i-1}\gamma<0$ и $n-i-l$- параметрическое семейство при выполнении неравенства $\nu_i\nu_{i-1}\gamma>0$, где l — число корней (с учетом кратных) уравнения (11) *с отрицательной действительной частью.*

Замечание 1. *Алгебраическое уравнение* (11) *заведомо не имеет корней с нулевой действительной частью, если* $\sum\limits_{j=i}^{n-1}|\sigma_j|\le 1$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y:[t_0,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}$– произвольное $P_\omega\left(Y_0,\dots,Y_{n-1},\frac{n-i-1}{n-i}\right)$- решение дифференциального уравнения (1). Тогда в силу условий (2) определения 1 существует $t_1\in[t_0,\omega[$ такое, что на промежутке $[t_1,\omega[$ это решение и его производные до порядка $n-1$ включительно сохраняют знаки, причем $\operatorname{sign} y^{(j)}(t)=\nu_j\quad (j=\overline{0,n-1})$ при $t\in[t_1,\omega[$. Кроме того, в силу леммы 1 имеют место при $t\uparrow\omega$ асимптотические соотношения (4), (5), из которых, в частности, вытекает справедливость асимптотических представлений (17). Кроме того, из (4) и (5) следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)}=i-j-1\quad (j=\overline{0,n-1}), \tag{20}$$

откуда вытекает справедливость неравенств (12) и условий (14). В силу (20) также ясно, что для функций $z_j(t)=y^{(j)}(t)$ $(j=\overline{0,n-1})$ выполняются условия (8) и поэтому согласно условию $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$ из (1) получим асимптотическое соотношение

$$y^{(n)}(t) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j \left(y^{(j)}(t) \right) [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

или с учетом представлений (10) – соотношение вида

$$y^{(n)}(t) = \alpha_0 p(t)[1 + o(1)] \prod_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}(t)|^{\sigma_j} L_j(y^{(j)}(t)) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{21}$$

Здесь согласно условиям теоремы функции L_j при всех $j \in \{0, 1, \ldots, n - 1\} \setminus \{i - 1\}$ удовлетворяют условию S_0 и в силу (20)

$$\ln |y^{(j)}(t)| = [i - j - 1 + o(1)] \ln |\pi_\omega(t)| \quad (j = \overline{0, n-1}) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому для всех $j \in \{0, 1, \ldots, n - 1\} \setminus \{i - 1\}$

$$L_j(y^{(j)}(t)) = L_j \left(\nu_j e^{[1+o(1)] \ln |\pi_\omega(t)|^{i-j-1}} \right) =$$

$$= L_j \left(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{i-j-1} \right) [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

С учетом (20) также находим, что

$$y^{(n)}(t) = \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \cdots \frac{y^{(i+2)}(t)}{y^{(i+1)}(t)} y^{(i+1)}(t) =$$

$$= \frac{(-1)^{n-i-1}(n-i)!}{\pi_\omega^{n-i-1}(t)} y^{(i+1)}(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Используя эти асимптотические соотношения, а также асимптотические соотношений (4), (5) и введенные обозначений μ_i, γ, γ_i и C_n из (21) получим соотношение вида

$$\frac{y^{(i+1)}(t)|y^{(i)}(t)|^{\gamma_i - 1}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{i-1}(y^{(i-1)}(t))} =$$

$$= \alpha_0 (-1)^{n-i-1} \left(\operatorname{sign} [\pi_\omega(t)]^{n-i-1} \right) C_i p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_i} \times$$

$$\times \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} L_j \left(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{i-j-1} \right) [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{22}$$

В силу свойства $\mathcal{M}_3$ медленно меняющихся функций существует непрерывно дифференцируемая нормализованная медленно меняющаяся при

$y^{(i-1)} \to Y_{i-1}$ функция $L_{0i-1} : \Delta_{Y_{i-1}} \longrightarrow]0, +\infty[$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{\substack{y^{(i-1)} \to Y_{i-1} \\ y^{(i-1)} \in \Delta_{Y_{i-1}}}} \frac{L_{i-1}(y^{(i-1)})}{L_{0i-1}(y^{(i-1)})} = 1, \qquad \lim_{\substack{y^{(i-1)} \to Y_{i-1} \\ y^{(i-1)} \in \Delta_{Y_{i-1}}}} \frac{y^{(i-1)} L'_{0i-1}(y^{(i-1)})}{L_{0i-1}(y^{(i-1)})} = 0. \tag{23}$$

С использованием этих условий, (2) и (20) находим

$$\left(\frac{|y^{(i)}(t)|^{\gamma_i}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} \right)' = \frac{\nu_i y^{(i+1)}(t) |y^{(i)}(t)|^{\gamma_i - 1}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} \times$$

$$\times \left(\gamma_i + (\gamma - \gamma_i) \frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i+1)}(t)} \cdot \frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i-1)}(t)} - \right.$$

$$\left. - \frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i+1)}(t)} \cdot \frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i-1)}(t)} \cdot \frac{y^{(i-1)}(t) L'_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))}{L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} \right) =$$

$$= \frac{y^{(i+1)}(t) |y^{(i)}(t)|^{\gamma_i - 1}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} \left[\nu_i \gamma_i + o(1) \right] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому (22) может быть записано в виде

$$\left(\frac{|y^{(i)}(t)|^{\gamma_i}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} \right)' =$$

$$= \nu_i \alpha_0 (-1)^{n-i-1} \gamma_i \left(\operatorname{sign} [\pi_\omega(t)]^{n-i-1} \right) C_i p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_i} \times$$

$$\times \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} L_j \left(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{i-j-1} \right) [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_1 до t и учитывая, что дробь под знаком производной в силу условия $\gamma_i \neq 0$ стремится либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, получим

$$\frac{|y^{(i)}(t)|^{\gamma_i}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} =$$

$$= \nu_i \alpha_0 (-1)^{n-i-1} \gamma_i \left(\operatorname{sign} [\pi_\omega(t)]^{n-i-1} \right) C_i J_i(t) [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда, прежде всего, следует, что выполняется второе из неравенств (13). Кроме того, отсюда и (22) ввиду эквивалентности функций L_{i-1} и L_{0i-1} при $y^{(i-1)} \to Y_{i-1}$ следует, что

$$\frac{y^{(i+1)}(t)}{y^{(i)}(t)} = \frac{J'_i(t)}{\gamma_i J_i(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

откуда с учетом (20) при $j = i$ вытекает справедливость первого из условий (16).

Из полученного соотношения также имеем

$$\frac{y^{(i)}(t)}{|y^{(i-1)}(t)|^{\frac{\gamma_i-\gamma}{\gamma_i}} L_{i-1}^{\frac{1}{\gamma_i}}(y^{(i-1)}(t))} = \nu_i \left|C_i \gamma_i J_i(t)\right|^{\frac{1}{\gamma_i}} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \quad (24)$$

Интегрируя теперь это соотношение на промежутке от t_1 до t, с учетом условия $\gamma\gamma_i \neq 0$ и использованием свойства $\mathcal{M}_3$ медлено меняющихся функций, находим, что

$$\frac{|y^{(i-1)}(t)|^{\frac{\gamma}{\gamma_i}}}{L_{i-1}^{\frac{1}{\gamma_i}}(y^{(i-1)}(t))} = \frac{\nu_i \nu_{i-1} \gamma}{\gamma_i} \left|\gamma_i C_i\right|^{\frac{1}{\gamma_i}} J_{ii}(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

т.е. справедливо асимптотическое представление (19) и первое из неравенств (13). Кроме того, из (24) и (19) следует, что

$$\frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i-1)}(t)} = \frac{\gamma_i J_{ii}'(t)}{\gamma J_{ii}(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \quad (25)$$

В силу этого соотношения соблюдается условие (15) и из (20) вытекает справедливость второго из условий (16), а также асимптотических представлений (18).

Достаточность. Пусть соблюдаются условия (12) – (16) и алгебраическое уравнение (11) не имеет корней с нулевой действительной частью. Покажем, что в этом случае у дифференциального уравнения (1) существуют решения, допускающие при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (17) - (19) и выясним вопрос об их количестве.

Сначала рассмотрим соотношение

$$\frac{|Y|^{\gamma}}{L_{0i-1}(Y)} = |\gamma_i C_i| \left|\frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t)\right|^{\gamma_i} [1 + v_n] \quad (26)$$

где $L_{0i} : \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0, +\infty[$ - непрерывно дифференцируемая медленно меняющаеся при $Y \to Y_{i-1}$ функции, удовлетворяющие условиям (23), существующая в силу свойства $\mathcal{M}_3$ медленно меняющихся функций.

Выбрав произвольным образом число $d \in \left]0, \left|\frac{\gamma_i}{\gamma}\right|\right[$, покажем, что при некотором $t_0 \in]a, \omega[$ соотношение (25) однозначно определяет, заданную на множестве $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$, где $\mathbb{R}_{\frac{1}{2}} = \left\{v \in \mathbb{R} : |v| \leq \frac{1}{2}\right\}$, непрерывно дифференцируемую неявную функцию $Y = Y(t, v_n)$ вида

$$Y(t, v_n) = \nu_{i-1} \left|J_{ii}(t)\right|^{\frac{\gamma_i}{\gamma} + z(t, v_n)}, \quad (27)$$

где функция z такова, что

$$|z(t,v_n)| \le d \quad \text{при} \quad (t,v_n) \in [t_0,\omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega} z(t,v_n) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}.$$

Полагая в (26)

$$Y = \nu_{i-1}\,|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}+z}, \tag{28}$$

находим после элементарных преобразований, что

$$z = a(t) + b(t,v_n) + Z(t,z), \tag{29}$$

где

$$a(t) = \frac{\gamma_i}{\gamma}\cdot\frac{\ln\left|\frac{\gamma}{\gamma_i}\right| + \frac{1}{\gamma_i}\ln|\gamma_i C_i|}{\ln|J_{ii}(t)|}, \quad b(t,v_n) = \frac{\gamma_i}{\gamma}\cdot\frac{\ln[1+v_n]}{\ln|J_{ii}(t)|},$$

$$Z(t,z) = \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\ln L_{0i-1}\left(\nu_{i-1}\,|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}+z}\right)}{\ln|J_{ii}(t)|}.$$

Здесь в силу условия (15) и свойства $\mathcal{M}_2$ медленно меняющихся функций

$$\nu_{i-1}\lim_{t\uparrow\omega}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}+z} = Y_{i-1} \quad \text{равномерно по} \quad z\in[-d,d],$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} a(t) = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} b(t,v_n) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}},$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} Z(t,z) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad z\in[-d,d].$$

Так как

$$\frac{\partial Z(t,z)}{\partial z} = \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\nu_{i-1}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}+z}L'_{0i-1}\left(\nu_{i-1}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}+z}\right)}{L_{0i-1}\left(\nu_{i-1}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}+z}\right)},$$

то ввиду (15) и второго из условий (23) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\partial Z(t,z)}{\partial z} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad z\in[-d,d].$$

Согласно этим условиям существует число $t_1 \in [a,\omega[$ такое, что

$$\nu_{i-1}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_s}{\gamma}+z} \in \Delta_{Y_{i-1}} \quad \text{при} \quad (t,z)\in[t_1,\omega[\times[-d,d],$$

$$|a(t)+b(t,v_1,v_2)+Z(t,z)| \le d \;\text{ при } (t,v_n,z)\in[t_1,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}\times[-d,d]$$

и

$$|Z(t,z_1)-Z(t,z_2)|\le\frac{1}{2}|z_1-z_2|\quad\text{при } t\in[t_1,\omega[\ \text{ и } z_1,z_2\in[-d,d].$$

Подобрав таким образом число t_1, обозначим через $\mathbf{B}$ банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $\Omega=[t_1,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ функций $z:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ с нормой

$$\|z\|=\sup\left\{|z(t,v_n)|:(t,v_n)\in\Omega\right\}.$$

Выделим из него подпространство $\mathbf{B}_0$ тех функций из $\mathbf{B}$, для которых $\|z\|\le d$, и рассмотрим на $\mathbf{B}_0$, выбрав предварительно произвольным образом число $\nu\in(0,1)$, оператор

$$\Phi(z)(t,v_n)=z(t,v_n)-\nu\left[z(t,v_n)-a(t)-b(t,v_n)-Z(t,z(t,v_n))\right]. \tag{30}$$

В силу указанных выше свойств функций $a,\ b$ и Z ясно, что $\Phi(\mathbf{B}_0)\subset\mathbf{B}_0$ и $\|\Phi(z_1)-\Phi(z_2)\|\le\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\|z_1-z_2\|$ для любых $z_1,\ z_2\in\mathbf{B}_0$.

Значит, оператор Φ отображает пространство $\mathbf{B}_0$ в себя и является на нем оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная функция $z\in\mathbf{B}_0$ такая, что $z=\Phi(z)$. В силу (30) эта непрерывная на множестве Ω функция является единственным решением уравнения (29), удовлетворяющим условию $\|z\|\le d$. Из (29) с учетом этого условия и свойств функций $a,\ b,\ Z$ следует, что данное решение стремится к нулю при $t\uparrow\omega$ равномерно по $v_n\in\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$. Непрерывная дифференцируемость этого решения на множестве $[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$, где t_0- некоторое число из промежутка $[t_1,\omega[$ непосредственно вытекает из известной локальной теоремы о существовании неявной функции, определяемой соотношением (29). В силу замены (28) полученной функции z соответствует непрерывно дифференцируемая на множестве $[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ функция Y вида (27), которая является решением уравнения (26) и удовлетворяет условиям

$$Y(t,v_n)\in\Delta_{Y_{i-1}}\quad\text{при}\quad(t,v_n)\in[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}, \tag{31}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}Y(t,v_n)=Y_{i-1}\quad\text{равномерно по}\quad v_n\in\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}, \tag{32}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\gamma J_{ii}(t)\frac{\partial Y(t,v_n)}{\partial t}}{\gamma_i J'_{ii}(t)Y(t,v_n)}=1\quad\text{равномерно по}\quad v_n\in\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \tag{33}$$

Теперь, применяя к дифференциальному уравнению (1) преобразование

$$
\begin{gathered}
y^{(j-1)}(t)=\frac{[\pi_\omega(t)]^{i-j}}{(i-j)!}\,y^{(i-1)}(t)[1+v_j(\tau)]\\
j=1,\dots,i-1,\\
y^{(j)}(t)=(-1)^{j-i}\frac{(j-i)!}{[\pi_\omega(t)]^{j-i}}\cdot\frac{\gamma_i J'_{ii}(t)}{\gamma J_{ii}(t)}\,y^{(i-1)}(t)[1+v_j(\tau)]\\
j=i,\dots,n-1,\\
y^{(i-1)}(t)=Y(t,v_n(\tau))
\end{gathered}
\tag{34}
$$

и учитывая, что функция $y^{(i-1)}(t)=Y(t,v_n(\tau))$ при $t\in[t_0,\omega[$ и $v_n(\tau)\in\mathbb{R}^{\frac{1}{2}}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{|y^{(i-1)}(t)|^\gamma}{L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))}=|\gamma_i C_i|\left|\frac{\gamma}{\gamma_i}J_{ii}(t)\right|^{\gamma_i}[1+v_n(\tau)],$$

получим с использованием знаковых условий (12), (13) систему дифференциальных уравнений вида

$$
\begin{cases}
v'_j=\frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[(i-j)(v_{j+1}-v_j)-\frac{\gamma_i}{\gamma}h_1(\tau)(1+v_j)(1+v_i)\right]\\
j=1,\dots,i-2,\\
v'_{i-1}=\frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[-v_{i-1}-\frac{\gamma_i}{\gamma}h_1(\tau)(1+v_{i-1})(1+v_i)\right],\\
v'_j=\frac{1}{\pi_\omega(t)}\Big[(j-i)(1+v_j)-(j+1-i)(1+v_{j+1})-\\
\qquad-\frac{1}{\gamma_i}h_2(\tau)(1+v_j)+\frac{1}{\gamma}h_1(\tau)(1+v_j)(\gamma-\gamma_i-\gamma_i v_i)\Big]\\
j=i,\dots,n-2,\\
v'_{n-1}=\frac{1}{\pi_\omega(t)}\Big[\frac{(-1)^{n-i-1}\gamma J_{ii}(t)[\pi_\omega(t)]^{n-i}G(t,v_1,\dots,v_n)}{(n-i-1)!\gamma_i J'_{ii}(t)Y(t,v_n)}+(n-i-1)(1+v_{n-1})-\\
\qquad-\frac{1}{\gamma_i}h_2(\tau)(1+v_{n-1})+\frac{1}{\gamma}h_1(\tau)(1+v_{n-1})(\gamma-\gamma_i-\gamma_i v_i)\Big],\\
v'_n=\frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)}\left[(1+v_n)(1+v_i)-(1+v_n)-\frac{1}{\gamma}H(\tau,v_n)(1+v_n)(1+v_i)\right],
\end{cases}
$$

в которой

$$h_1(\tau)=\frac{\pi_\omega(t)J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)},\quad h_2(\tau)=\frac{\pi_\omega(t)J'_i(t)}{J_i(t)},$$

$$H(\tau(t),v_n)=\frac{Y(t,v_n)L'_{0i-1}(Y(t,v_n))}{L_{0i-1}(Y(t,v_n))},\qquad G(\tau(t),v_1,\dots,v_n)=$$

$$= f(t, z_0(t, v_1, \dots, v_n), \dots, z_n(t, v_1, \dots, v_n)), \quad z_j(t, v_1, \dots, v_n) =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi_\omega^{i-j-1}(t)}{(i-j-1)!} Y(t, v_n)(1 + v_{j+1}) & \text{при} \quad j = \overline{0, i-2}, \\ Y(t, v_n) & \text{при} \quad j = i-1, \\ (-1)^{j-i} \frac{(j-i)!}{\pi_\omega^{j-i}(t)} \frac{\gamma_i}{\gamma} \frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)} Y(t, v_n)(1 + v_j) & \text{при} \quad j = \overline{i, n-1}. \end{cases}$$

Здесь в силу условий (16), (31), (32) и второго из условий (23)

$$\lim_{t \uparrow \omega} h_1(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} h_2(t) = -\frac{1}{\gamma_i} \tag{35}$$

и

$$\lim_{t \uparrow \omega} H(t, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \tag{36}$$

Кроме того, согласно условиям (31)–(33), (14)–(16)

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_j(t, v_1, \dots, v_n) = Y_j, \ \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \frac{\partial z_j(t, v_1, \dots, v_n)}{\partial t}}{z_j(t, v_1, \dots, v_n)} = i - j - 1 \ (j = \overline{0, n-1}) \tag{37}$$

равномерно по $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$, где

$$\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} = \left\{ (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R} \, : \, |v_j| \le \frac{1}{2} \ (j = \overline{1, n}) \right\}.$$

Поэтому ввиду выполнения условия $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$ имеет место представление

$$G(t, v_1, \dots, v_n) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(z_j(t, v_1, \dots, v_n))[1 + r_1(t, v_1, \dots, v_n)],$$

где функция $r_1 : [t_0, \omega[\times \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и такова, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_1(t, v_1, \dots, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда с учетом представлений (10) и вида функций z_j $(j = \overline{0, n-1})$ находим

$$G(t, v_1, \dots, v_n) = \alpha_0 C_i (n-i)! p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_i + i + 1 - n} \left| \frac{\gamma_i J'_{ii}(t)}{\gamma J_{ii}(t)} \right|^{1-\gamma_i} |Y(t, v_n)|^{1-\gamma} \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{i-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j} \prod_{j=i}^{n-1} |1 + v_j|^{\sigma_j} \prod_{j=0}^{n-1} L_j \left(z_j(t, v_1, \dots, v_n) \right) [1 + r_1(t, v_1, \dots, v_n)].$$

Так как в силу условий (37)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\ln|z_j(t,v_1,\dots,v_n)|}{\ln|\pi_\omega(t)|}=i-j-1\quad(j=\overline{0,n-1})$$

равномерно по $(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ и функции L_j $(j=\overline{0,n-1})$ при $j\neq i-1$ удовлетворяют условию S_0, то соотношение для G может быть записано в виде

$$G(t,v_1,\dots,v_n)=\frac{\alpha_0C_i(n-i)!p(t)|\pi_\omega(t)|^{\mu_i}}{|\pi_\omega(t)|^{n-i-1}\left|\frac{\gamma_iJ'_{ii}(t)}{\gamma J_{ii}(t)}\right|^{\gamma_i-1}}|Y(t,v_n)|^{1-\gamma}L_{i-1}(Y(t,v_n))\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{i-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_j}\prod_{j=i}^{n-1}|1+v_j|^{\sigma_j}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i-1}}^{n-1}L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{i-j-1}\right)[1+r_2(t,v_1,\dots,v_n)],$$

где функция $r_2:[t_0,\omega[\times\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}\longrightarrow\mathbb{R}$ непрерывна и такова, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}r_2(t,v_1,\dots,v_n)=0\quad\text{равномерно по}\quad(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}},$$

откуда с учетом вида функции J_i имеем

$$G(t,v_1,\dots,v_n)=\frac{\alpha_0C_i(n-i)!J'_i(t)}{|\pi_\omega(t)|^{n-i-1}\left|\frac{\gamma_iJ'_{ii}(t)}{\gamma J_{ii}(t)}\right|^{\gamma_i-1}}|Y(t,v_n)|^{1-\gamma}L_{i-1}(Y(t,v_n))\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{i-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_j}\prod_{j=i}^{n-1}|1+v_j|^{\sigma_j}[1+r_2(t,v_1,\dots,v_n].$$

Наконец, учитывая, что $Y(t,v_n)$ является решением уравнения (26) и соблюдаются условия (23), (31), (32), а также вид функций J_i и J_{ii}, находим

$$G(t,v_1,\dots,v_n)=\frac{\alpha_0\nu_{i-1}(n-i)!J'_i(t)Y(t,v_n)}{|\gamma_i||\pi_\omega(t)|^{n-i-1}\left|\frac{\gamma}{\gamma_i}J_{ii}(t)\right|^{\gamma_i}\left|\frac{\gamma_iJ'_{ii}(t)}{\gamma J_{ii}(t)}\right|^{\gamma_i-1}(1+v_n)}\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{i-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_j}\prod_{j=i}^{n-1}|1+v_j|^{\sigma_j}[1+r_3(t,v_1,\dots,v_n]=$$

$$=\frac{\alpha_0\nu_{i-1}(n-i)!J'_i(t)J'_{ii}(t)Y(t,v_n)}{|\gamma||\pi_\omega(t)|^{n-i-1}|J_i(t)||J_{ii}(t)|}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{j=0}^{i-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_j}\prod\limits_{j=i}^{n-1}|1+v_j|^{\sigma_j}}{1+v_n}[1+r_3(t,v_1,\dots,v_n],$$

где функция $r_3 : [t_0, \omega[\times \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и такова, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_3(t, v_1, \dots, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}.$$

Тогда с использованием неравенств (13) имеем

$$\frac{(-1)^{n-i-1}\gamma J_{ii}(t)[\pi_\omega(t)]^{n-i} G(t, v_1, \dots, v_n)}{(n-i-1)!\gamma_i J'_{ii}(t) Y(t, v_n)} =$$

$$= \frac{n-i}{\gamma_i} \frac{\pi_\omega(t) J'_i(t)}{J_i(t)} \frac{\prod\limits_{j=0}^{i-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_j} \prod\limits_{j=i}^{n-1} |1+v_j|^{\sigma_j}}{1+v_n} [1 + r_3(t, v_1, \dots, v_n)].$$

В силу этого представления, а также условий (35), (36), полученная выше система дифференциальных уравнений имеет следующий вид

$$\left\{\begin{array}{l} v'_j = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[f_j(t, v_1, \dots, v_n) + (i-j)(v_{j+1} - v_j)\right], \\ j = 1, \dots, i-2, \\ v'_{i-1} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[f_{i-1}(t, v_1, \dots, v_{n-1}) - v_{i-1}\right], \\ v'_j(t) = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[f_j(t, v_1, \dots, v_n) + (j-i+1)(v_j - v_{j+1})\right] \\ j = i, \dots, n-2, \\ v'_{n-1} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \Bigg[f_{n-1}(t, v_1, \dots, v_n) - (n-i)\left(\sum\limits_{k=1}^{i-1} \sigma_{k-1} v_k + \sum\limits_{k=i}^{n-2} \sigma_k v_k\right) \\ \qquad +(n-i)(1-\sigma_{n-1})v_{n-1} + (n-i)v_n + V_{n-1}(v_1, \dots, v_n)\Bigg], \\ v'_n = \frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)} \left[f_n(t, v_1, \dots, v_n) - v_i + V_n(v_1, \dots, v_n)\right], \end{array}\right. \tag{38}$$

где функции f_i $(i = \overline{1,n})$ непрерывны на множестве $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ и таковы, что

$$\lim_{\tau\to+\infty} f_i(\tau, \overline{v}) = 0 \quad (i = \overline{1,n}) \quad \text{равномерно по} \quad \overline{v} \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}},$$

$$V_{n-1}(v_1, \dots, v_n) = -(n-i)\left[\frac{\prod\limits_{k=0}^{i-2} |1+v_{k+1}|^{\sigma_k} \prod\limits_{k=i}^{n-1} |1+v_k|^{\sigma_k}}{1+v_n} - \right.$$

$$\left. -1 - \sum_{k=1}^{i-1} \sigma_{k-1} v_k - \sum_{k=i}^{n-1} \sigma_k v_k + v_n\right], \quad V_n(v_1, \dots, v_n) = v_i v_n.$$

Здесь

$$V_j(0, \dots, 0) = 0, \quad \lim_{|v_1|+\dots+|v_n|\to 0} \frac{\partial V_j(v_1, \dots, v_n)}{\partial v_k} = 0 \quad (k = \overline{1,n}) \quad \text{при} \quad j = n-1, n$$

и

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\pi_\omega(\tau)} = \ln|\pi_\omega(\tau)|\Bigg|_{t_0}^{t} \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{J'_{ii}(\tau)\,d\tau}{J_{ii}(\tau)} = \ln|J_{ii}(\tau)|\Bigg|_{t_0}^{t} \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому данная система дифференциальных уравнений принадлежит к классу систем, которые исследовались в работе [8]. При этом также заметим, что

$$\operatorname{sign} \pi_\omega(t) = \begin{cases} \ \ 1, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

и в силу условий (13), (16)

$$\operatorname{sign} \frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)} = \operatorname{sign} J_{ii}(t) = \nu_i \nu_{i-1} \operatorname{sign}(\gamma\gamma_i),$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left(\frac{\pi_\omega(t) J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)}\right)'}{\frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)}} = \lim_{t\uparrow\omega} \left[1 + \frac{\pi_\omega(t) J'_i(t)}{\gamma_i J_i(t)} + \frac{\pi_\omega(t) J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)}\right] = 0.$$

Обозначим через P_{n-1} матрицу коэффициентов при $v_1, \ldots, v_{n-1}$, стоящих в квадратных скобках первых $n-1$ уравнений системы, а через P_n– матрицу коэффициентов, стоящих в квадратных скобках всех уравнений системы.

Нетрудно проверить, что

$$\det P_{n-1} = (-1)^{i-1}(i-1)!(n-i)!\gamma_i, \quad \det P_n = (-1)^{i-1}(i-1)!(n-i)!$$

и

$$\det[P_{n-1} - \rho E_{n-1}] = (-1)^{i-1} \prod_{k=1}^{i-1}(k+\rho)\times$$

$$\times \left[\prod_{m=1}^{n-i}(m-\rho) - (n-i)! \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{(j-i)!} \prod_{m=1}^{j-i}(m-\rho) - (n-i)!\sigma_i\right],$$

где E_{n-1}– единичная матрица размерности $(n-1)\times(n-1)$.

Из вида характеристического многочлена матрицы P_{n-1} ясно, что он имеет $i-1$ корней вида $\rho_k = -k \quad (k = \overline{1, i-1})$, а остальные его $n-i$ корней являются корнями алгебраического уравнения (11), которое в силу условий теоремы не имеет корней с нулевой действительной частью. Поэтому матрица P_{n-1} не имеет собственных значений с нулевой действительной частью.

Тем самым показано, что для системы дифференциальных уравнений (38) выполнены все условия теоремы 2.6 из работы [8]. Согласно этой теореме у системы (38) существует хотя бы одно решение $(v_j)_{j=1}^n : [t_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(t_1 \in [t_0, \omega[)$, стремящееся к нулю при $t \uparrow \omega$. Более того, если l- число корней (с учетом кратных) уравнения (11) с отрицательной действительной частью, то согласно этой же теореме в случае $\omega = +\infty$ у данной системы существует $l+i$- параметрическое семейство таких решений при выполнении неравенства $\nu_i \nu_{i-1} \gamma < 0$ и $l+i-1$- параметрическое семейство при выполнении неравенства $\nu_i \nu_{i-1} \gamma > 0$, а в случае $\omega < +\infty$- существует $n-i-l+1$-параметрическое семейство в случае выполнения неравенства $\nu_i \nu_{i-1} \gamma < 0$ и $n-i-l$- параметрическое в случае, когда $\nu_i \nu_{i-1} \gamma > 0$.

Каждому такому решению системы (38) соответствует в силу замен (34) и первого из условий (23) решение $y : [t_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(t_1 \in [a, \omega[)$ уравнения (1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (17) - (19). Используя эти представления и условия (12) - (17) нетрудно убедиться в том, что оно является $P_\omega\left(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$- решением. Теорема полностью доказана.

Полученное в теореме асимптотическое представление для $i-1$-й производной $P_\omega\left(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$-решения записано в неявном виде. В следующей теореме приведены дополнительные условия, при выполнении которых асимптотические представления для любого такого решения и его производных до порядка $n-1$ включительно записываются в явном виде.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и, кроме того, функция* L_{i-1} *удовлетворяет условию* S_0.

Тогда для каждого $P_\omega\left(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$*-решения дифференциального уравнения* (1) *(в случае их существования) имеют место при* $t \uparrow \omega$ *наряду с асимптотическими представлениями* (17), (18) *следующее представление*

$$y^{(i-1)}(t) = \nu_{i-1} |\gamma_i C_i|^{\frac{1}{\gamma}} \left| \frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t) \right|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}} L_{i-1}^{\frac{1}{\gamma}} \left(\nu_{i-1} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}} \right) [1 + o(1)]. \qquad (39)$$

Доказательство. Пусть $y : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$- $P_\omega\left(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$-решение дифференциального уравнения (1). Тогда согласно необходимости теоремы 1 выполняются условия (12)–(16), (25) и для данного решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (17)–(19). В силу условия (25)

$$\ln |y^{(i-1)}(t)| = [1 + o(1)] \ln |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому, учитывая, что функция L_{i-1} удовлетворяет условию S_0, получим

$$L_{i-1}(y^{(i-1)}(t)) = L_{i-1}\left(\nu_{i-1} e^{[1+o(1)]\ln|J_{ii}(t)|}\right) =$$

$$= L_{i-1}\left(\nu_{i-1}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}}\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Принимая во внимание это представление, запишем (19) в виде

$$|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma} = |\gamma_i C_i| \left|\frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t)\right|^{\gamma_i} L_{i-1}\left(\nu_{i-1}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}}\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

откуда следует (39). Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 не охватывают случай, когда $i = n-1$. В этом случае при некотором дополнительном ограничении аналогично данным двум теоремам могут доказаны следующие две теоремы.

Теорема 3. *Пусть $n \geq 2$, функция f удовлетворяет условию $(RN)_0$, выполняется неравенство $\gamma\gamma_{n-1} \neq 0$ и функции L_j при всех $j \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{n-2\}$ удовлетворяют условию S_0. Тогда для существования у дифференциального уравнения (1) $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$- решений, для которых существует конечный или равный $\pm\infty$ предел $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$, необходимо и достаточно, чтобы соблюдались неравенства*

$$\nu_j \nu_{j-1}(n-j-1)\pi_\omega(t) > 0 \quad \textit{при всех } j \in \{1, \dots, n-2\},$$

$$\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma\gamma_{n-1} J_{n-1n-1}(t) > 0, \quad \nu_{n-1}\alpha_0\gamma_{n-1} J_{n-1}(t) > 0$$

в некоторой левой окрестности ω, а также условия

$$\nu_{j-1} \lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)|^{n-j-1} = Y_{j-1} \quad \textit{при всех} \quad j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{n-1\},$$

$$\nu_{n-2} \lim_{t\uparrow\omega} |J_{n-1n-1}(t)|^{\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma}} = Y_{n-2},$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{n-1}(t)}{J_{n-1}(t)} = -\gamma_{n-1}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{n-1n-1}(t)}{J_{n-1n-1}(t)} = 0.$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$y^{(j-1)}(t) = \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!} y^{(n-2)}(t)[1+o(1)] \quad (j = 1, \dots, n-2), \tag{40}$$

$$y^{(n-1)}(t) = \frac{\gamma_{n-1} J'_{n-1n-1}(t)}{\gamma J_{n-1n-1}(t)} y^{(n-2)}(t)[1+o(1)], \tag{41}$$

$$\frac{|y^{(n-2)}(t)|^{\gamma}}{L_{n-2}(y^{(n-2)}(t))} = |\gamma_{n-1}C_{n-1}| \left|\frac{\gamma}{\gamma_{n-1}} J_{n-1n-1}(t)\right|^{\gamma_{n-1}} [1+o(1)],$$

причем таких решений в случае $\omega = +\infty$ *существует* n*- параметрическое семейство при выполнении неравенства* $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma < 0$ *и* $n-1$*-параметрическое семейство при выполнении неравенства* $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma > 0$*, а в случае* $\omega < +\infty$ *- существует однопараметрическое семейство таких решений при выполнении неравенства* $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma < 0$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы 3 и, кроме того, функция* L_{n-2} *удовлетворяет условию* S_0*. Тогда для каждого* $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$*- решения дифференциального уравнения (1) (в случае их существования) имеют место при* $t \uparrow \omega$ *наряду с асимптотическими представлениями (40), (41) следующее представление*

$$y^{(n-2)}(t) = \nu_{n-2}|\gamma_{n-1}C_{n-1}|^{\frac{1}{\gamma}} \times$$
$$\times \left|\frac{\gamma}{\gamma_{n-1}} J_{n-1n-1}(t)\right|^{\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma}} L_{n-2}^{\frac{1}{\gamma}}\left(\nu_{n-2}|J_{n-1n-1}(t)|^{\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma}}\right)[1+o(1)].$$

3. Пример одного класса дифференциальных уравнений

В качестве примера, иллюстрирующего полученные результаты, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{l} \alpha_k p_k(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}\left(y^{(j)}\right)}{\sum\limits_{k=l+1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}\left(y^{(j)}\right)}, \tag{42}$$

в котором $\alpha_k \in \{-1, 1\}$, $p_k : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(\omega \le +\infty)$ - непрерывная функция, $\varphi_{kj} : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ - непрерывная и правильно меняющаяся при $y^j \to Y_j$ функция порядка σ_{kj}, Y_j равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_j}– некоторая односторонняя окрестность Y_j, $k = 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n-1$.

Допустим, что при $i \in \{1, \dots, n-1\}$ для некоторых $s \in \{1, \dots, l\}$ и $r \in \{l+1, \dots, m\}$ выполняются при $k \in \{1, \dots, l\} \setminus \{s\}$ неравенства

$$\limsup_{t\uparrow\omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} < \beta \sum_{\substack{j=0 \\ j\ne i-1}}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(i-j-1) \tag{43}$$

и при $k \in \{l+1, \dots, m\} \setminus \{r\}$ неравенства

$$\limsup_{t\uparrow\omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_r(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} < \beta \sum_{\substack{j=0 \\ j\ne i-1}}^{n-1} (\sigma_{rj} - \sigma_{kj})(i-j-1), \tag{44}$$

где

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Покажем, что при выполнении этих условий правая часть уравнения (42) удовлетворяет условию $RN_{\frac{n-i-1}{n-i}}$.

Пусть $z_j : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_j}$ $(j = 0, 1, \dots, n-1)$ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям (8). В силу этих условий

$$\ln|z_j(t)| = [i - j - 1 + o(1)] \ln|\pi_\omega(t)| \quad (j = \overline{0, n-1}) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Учитывая эти асимптотические соотношения, а также представления

$$\varphi_{kj}(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_{kj}} L_{kj}(y^{(j)}) \ \ (k = \overline{1, m}; j = \overline{0, n-1}),$$

где $L_{kj}(y^{(j)}) : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$– непрерывная медленно меняющаяся функция при $y^{(j)} \longrightarrow Y_j$, и свойство $\mathcal{M}_2$ медленно меняющихся функций (из введения), будем при $k \in \{1, \dots, l\} \setminus \{s\}$ иметь

$$\ln\left(\frac{p_k(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))}\right) = \ln p_k(t) - \ln p_s(t) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} (\ln \varphi_{kj}(z_j(t)) - \ln \varphi_{sj}(z_j(t))) = \ln p_k(t) - \ln p_s(t) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} ((\sigma_{kj} - \sigma_{sj}) \ln|z_j(t)| + \ln L_{kj}(z_j(t)) - L_{sj}(z_j(t))) = \ln p_k(t) -$$

$$- \ln p_s(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \ln|z_j(t)| \left(\sigma_{kj} - \sigma_{sj} + \frac{\ln L_{kj}(z_j(t))}{\ln|z_j(t)|} - \frac{\ln L_{sj}(z_j(t))}{\ln|z_j(t)|}\right) =$$

$$= \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \ln|\pi_\omega(t)| \left(\sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{kj} - \sigma_{sj})(i - j - 1) + o(1)\right) =$$

$$= |\ln|\pi_\omega(t)|| \left(\frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln|\pi_\omega(t)|} - \beta \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} (\sigma_{kj} - \sigma_{sj})(i - j - 1) + o(1)\right)$$

при $t \uparrow \omega$. Отсюда в силу выполнения условия (43) следует, что выражение, стоящее слева, стремится к $-\infty$ при $t \uparrow \omega$ и поэтому

$$\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{sj}(z_j(t))}\right)=0 \quad \text{при всех} \quad k\in\{1,\dots,l\}\setminus\{s\}.$$

Аналогично, с использованием условия (44) устанавливаем, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(z_j(t))}{p_r(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{rj}(z_j(t))}\right)=0 \quad \text{при всех} \quad k\in\{l+1,\dots,m\}\setminus\{r\}.$$

В силу этих предельных соотношений

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{l}\alpha_k p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}\left(z_j(t)\right)}{\sum\limits_{k=l+1}^{m}\alpha_k p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}\left(z_j(t)\right)}=\frac{\alpha_s p_s(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{sj}(z_j(t))}{\alpha_r p_r(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{rj}(z_j(t))}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

т.е. имеет место асимптотическое соотношение (9), в котором

$$\alpha_0=\alpha_s\alpha_r, \quad p(t)=\frac{p_s(t)}{p_r(t)}, \quad \varphi_j(z_j(t))=\frac{\varphi_{sj}(z_j(t))}{\varphi_{rj}(z_j(t)}\quad (j=0,1,\dots,n-1),$$

причем здесь φ_j – непрерывная правильно меняющаяся при $z_j \longrightarrow Y_j$ функция порядка $\sigma_j=\sigma_{sj}-\sigma_{rj}$ и ее медленно меняющаяся составляющая L_j равна отношению медленно меняющихся составляющих L_{sj} и L_{rj} функций φ_{sj} и φ_{rj}.

Следовательно, правая часть уравнения (42) удовлетворяет условию $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$. Поэтому в случае, когда при некоторых $s\in\{1,\dots,l\}$, $r\in\{l+1,\dots,m\}$ выполняются условия (43), (44) к уравнению (42) применимы теоремы 1–4 с заменой в условиях и утверждениях этих теорем постоянных α_0, σ_j $(j=0,1,\dots,n-1)$ и функций p, φ_j, L_j $(j=0,1,\dots,n-1)$ на указанные выше постоянные и функции.

4. Заключение

В настоящей статье впервые установлены условия существования и асимптотические представления $P_\omega\left(Y_0,\dots,Y_{n-1},\frac{n-i-1}{n-i}\right)$-решений для дифференциального уравнения вида (1) при $i=\overline{1,n-1}$. Эти результаты существенно дополняют результаты, полученные ранее в работах [3] и [4]. В частности, результаты из [3] и [4] не охватывают уравнения вида (42), которые рассмотрены здесь в качестве примера, допускающего применение теорем 1–4.

Список литературы

1. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Дисс.... д. физ.-мат. наук. — Киев, 1997. — 295 с.
2. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференциальные уравнения. — 2011. — т. 47, № 5. — С. 628–650.
3. *Evtukhov V. M., Klopot A. M.* Asymptotic Behavior of Solutions of Ordinary Differential Equations of n-th Order with Regularly Varying Nonlinearities // Mem. Differential Equations Math. Phys. — 2014. — v. 61. — P. 37–61.
4. *Клопот А. М.* Асимптотическое поведение решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n- го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех. — 2013. — т.18, вип. 3(19). — С. 16–34.
5. *Кусик Л. И.* Признаки существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка// Вiсник Одеського нац. ун-ту. — 2012. — т.17. — Вип. 1–2(13–14). — Матем. i механ. — С. 80–97.
6. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука. — 1985. — 144с.
7. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. — Cambridge university press. Cambridge. — 1987. — 494p.
8. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. Мат. Ж. — 2010. — Т.62, №1. — С. 52–80.

Дрожжина А. В.

Асимптотика деяких типів одного класу розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь вищих порядків

Резюме

Для диференціального рівняння $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$, де $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \dots \times \Delta_{Y_{n-1}} \longrightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, Y_i дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_i} — деякий односторонній окіл Y_i, $i = 0, 1, \dots, n-1$, досліджуються при деяких обмеженнях на функцію f питання про існування, асимптотику і кількість $P_\omega\left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$- розв'язків для всіх $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Такі розв'язки відносяться до особливих випадків класа $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$- розв'язків, де $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, який був уведений в роботах В. М. Евтухова, що присвячені диференціальним рівнянням типу Емдена-Фаулера n-го порядку. Дані особливі випадки потребують окремого їх розгляду у зв'язку зі специфічними апріорними асимптотичними властивостями таких розв'язків. Дослідження поставлених питань здійснюється при припущені, що диференціальне рівняння є у деякому сенсі асимптотично близьким до двочленого диференціального рівняння з правильно змінними нелінійностями.

Ключові слова: нелінійні диференціальні рівняння, правильно змінні функції, асимптотика розв'язків, $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язки.

Drozhzhina A. V.

Asymptotic of some types of one class of solutions of nonlinear differential equations of higher orders

Summary

For the differential equation $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$, where $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \dots \times \Delta_{Y_{n-1}} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, Y_i equals to zero or to $\pm\infty$, Δ_{Y_i}- is some one-sided neighborhood of Y_i, $i = 0, 1, \dots, n-1$, questions about the existence, asymptotics and about quantity of $P_\omega\left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$ — solutions for all $i \in \{1, \dots, n-1\}$ are investigated under certain restrictions on the function$f$. Such solutions refer to special cases of class of $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-solutions where $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, that was introduced in works of V. M. Evtukhov devoted to the differential equations of Emden-Fowler type of the n-th order. Such special cases require their separate consideration because of their specific a priori asymptotic properties. The study of the formulated problems is carried out under the assumption that the differential equation is in some sense asymptotically close to the two-term differential equation with regularly varying nonlinearities.

Key words: non-linear differential equationa, regularly varying functions, asymptotic of solutions, $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-solutions.

References

1. Evtuhov V. M. (1997) *Asimptoticheskie predstavleniya resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Asymptotic representations of solutions of non-autonomous ordinary differential equations]*. Disc.... d. fiz.-mat. nauk. Kiev, 295 p.

2. Evtuhov V. M., Samoylenko A. M. (2011) Asimptoticheskoe predstavlenie resheniy neavtonomnyih obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy pravilno menyayuschimisya nelineynostyami [Asymptotic representations of solutions of non-autonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities]. *Differentsialnyie uravneniya*, Vol. 47, № 5, P. 628–650.

3. Evtukhov V. M., Klopot A. M. (2014) Asymptotic Behavior of Solutions of Ordinary Differential Equations of n-th Order with Regularly Varying Nonlinearities, *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, Vol. 61, P. 37–61.

4. Klopot A. M. (2013) Asimptoticheskoe povedenie resheniy neavtonomnyih obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy n-go poryadka s pravilno menyayuschimisya nelineynostyami [Asymptotic behavior of solutions of non-autonomous ordinary differential equations of n-th order with regularly varying nonlinearities]. *Visnik Od. nats. un-ut. Mat. i meh.*, Vol. 18, № 3(19), P. 16–34.

5. Kusik L. I. (2012) Priznaki suschestvovaniya odnogo klassa resheniy suschestvenno nelineynyih differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka [Signs of the existence of one class of solutions of essentially nonlinear differential equations of the second order]. *Visnik Odeskogo nats. un-tu. Matem. i mehan.*, Vol. 17, № 1–2(13–14), P. 80–97.

6. Senata E. (1985) *Pravilno menyayuschiesya funktsii [Correctly Changing Functions].* M.: Nauka, 144 p.

7. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. (1987) *Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications.* Cambridge: Cambridge University Press, 494 p.

8. Evtuhov V. M., Samoylenko A. M. (2010) Usloviya suschestvovaniya ischezayuschih v osoboy tochke resheniy u veschestvennyih neavtonomnyih sistem kvazilineynyih differentsialnyih uravneniy [Conditions for the existence of solutions of quasilinear differential equations that disappear at a singular point in real non-autonomous systems]. *Ukr. Mat. Zh.*, Vol. 62, № 1, P. 52–80.