Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Факультет фізики, математики та інформаційних технологій

Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

Дипломна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

на тему: **«**Дослідження геодезичних відображень ріманових просторів зі збереженням е-структури**»**

« Investigation of geodetic mappings of Riemannian spaces with preserving the e-structure »

Виконала: студентка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика

Кісіль Олександра Ізатулловна

Керівник ___к.ф.- м.н. доцент Курбатова І.М.___
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент___к.ф.-м.н.,доцент Покась С.М.___
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№_____ від _________________ р.

Захищено на засіданні ЕК №_______
протокол №____ від _____________ р.
Оцінка_____________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

_________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Голова ЕК

_________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2019

ЗМІСТ

ВСТУП

Дифеоморфізми ріманових просторів викликають інтерес багатьох вітчизняних та іноземних математиків. Один з таких дифеоморфізмів - геодезичне відображення ріманових просторів - було впроваджено Леві-Чивіта в роботі [5] більше ста років тому. Різним питанням геодезичних відображень присвячені роботи А.С.Солодовникова, П.А.Широкова, Н.С.Синюкова, А.З.Петрова, А.В.Амінової, Й.Мікеша та ін..

Разом з цим в останні десятиліття особливий інтерес викликала теорія диффеоморфізмів афіннозв’язних і риманових просторів з афінорними структурами різних типів[1], [4]. Так, докладно досліджувалися HP-відображення келеровых просторів зі збереженням комплексної структури яким присвячені роботи К.Яно, С.Ісіхара, Й.Мікеша, В.Домашева.

Досліджувалися також геодезичні відображення многовидів з афінорними структурами. В роботах К.Яно[4] і В. Вестлейка доведено, що не існує нетривівальних геодезичних відображень келерових просторів зі збереженням комплексної структури. Тому ми будемо розглядати геодезичні відображення просторів з афінорною структурою, відмінною від келерової.

Відомо, що єдиними функціонально незалежними об’єктами, інваріантними відносно геодезичних відображень ріманових просторів, являються проективні параметри Томаса (нетензорний об’єкт) і тензор Вейля [2]. Ми розглядаємо випадок, коли на ріманових просторах, що знаходяться в геодезичному відображенні визначена афінорна структура, тобто тензор типу$\binom{1}{1}$ певного виду. Це дає можливість побудувати новий інваріантний об'єкт, функціонально не залежний від проективних параметрів Томаса і тензора Вейля. Такий об'єкт, по-перше, пов’язується з класами просторів з афінорною структурою класифікації А.Грея, а по-друге дозволяє виявити деякі класи просторів з е-структурою, які не допускають нетривіальних геодезичних відображень.

Дослідження проводиться локально, тензорними методами, в класі достатньо гладких функцій.

ВИСНОВКИ

З класичної теорії геодезичних відображень відомо, що інваріантними об'єктами відносно геодезичних відображень ріманових просторів **є проектні параметри Томаса**

$$T^h_{ij}=\Gamma^h_{ij} - \frac{1}{n+1}\left(\Gamma^\alpha_{i\alpha}\delta^h_j + \Gamma^\alpha_{j\alpha}\delta^h_i\right) \qquad (5.2)$$

і **тензор Вейля**

$$W^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \frac{1}{n-1}\left(\delta^h_j R_{ik} - \delta^h_k R_{ij}\right), \qquad (5.6)$$

де Γ^h_{ij} - компоненти об'єкту зв'язності ріманова простору, а R^h_{ijk} і R_{ik} – його тензори Рімана і Річчі.

Наявність на просторах, між якими встановлено геодезичне відображення, структури афінора дає можливість побудувати ще один геометричний об'єкт тензорного характеру за участю афінора також інваріантного відносно геодезичного відображення. Про це говоритися в теоремі 1.

Теорема 1. Геометричний об'єкт, визначений формулою (6.4), інваріантний відносно геодезичних відображень ріманових просторів із збереженням e-структурі при e=+-1 і функціонально незалежний від параметрів Томаса і тензора Вейля.

$$Q^h_{ij} = F^h_{i,j} - \frac{1}{n}\left(F^\alpha_{i,\alpha}\delta^h_j - eF^\alpha_{\bar{\imath}.\alpha}F^h_j\right). \qquad (6.4)$$

Далі, в роботі досліджений зв'язок між властивостями тензора (6.4) і типом e-структури по класифікації Грея. В результаті доведена

Теорема 2. Нехай V_n −рімановий простір з метричним тензором g_{ij} і e-структурою F_i^h (e=∓1), погодженою з метрикою таким чином:

$$F_{(hi)} = 0, \text{ де } F_{hi} = g_{h\alpha} F_i^{\alpha}.$$

Тоді зв'язок між тензором Q_{ij}^h , визначеним формулами (6.4), і типом простору з e-структурою F_i^h (e=∓1), виходить з тверджень:

2) $Q_{ij}^h = 0$ тоді і тільки тоді, коли V_n − келеровий простір, тобто $F_{i,j}^h = 0$;

2) $Q_{(ij)}^h = 0$ тоді і тільки тоді, коли V_n − K- пространство, т.е. $F_{(i,j)}^h = 0$;

3) $Q_{[ij]}^h = 0$ тоді і тільки тоді, коли V_n − келеровий простір, тобто $F_{i,j}^h = 0$;

4) $Q_{(ijh)} = 0$ тоді і тільки тоді, коли V_n − H- простір, тобто $F_{(hi,j)} = 0$.

5) $Q_{ij}^h + eQ_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}^h = 0$ тоді і тільки тоді, коли V_n − O-простір, тобто $F_{hi,j} + eF_{h\bar{\imath},\bar{\jmath}} = 0$.

6) $Q_{ij}^h - eQ_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}^h = 0$ тоді і тільки тоді, коли V_n − O* - простір, тобто $F_{hi,j} - eF_{h\bar{\imath},\bar{\jmath}} = 0$.

7) $Q^h_{(ij)} + eQ^h_{(\bar{\imath}\bar{\jmath})} = 0$ тоді і тільки тоді, коли V_n належить класу Z_1, тобто $F_{hi,j} + F_{hj,i} + eF_{h\bar{\imath},\bar{\jmath}} + eF_{h\bar{\jmath},\bar{\imath}} = 0$.

8) $Q_{(ijh)} + e(Q_{\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k}} + Q_{\bar{\jmath}\bar{k}\bar{\imath}} + Q_{\bar{k}\bar{\imath}\bar{\jmath}}) = 0$ коли V_n належить класу Z_2, тобто $F_{hi,j} + F_{ij,h} + F_{jh,i} + eF_{h\bar{\imath},\bar{\jmath}} + eF_{i\bar{\jmath},\bar{h}} + eF_{j\bar{h},\bar{\imath}} = 0$.

Нарешті, використовуючи теореми 1 і 2, доводимо теорему 3, яка включає відому теорему Яно-Вестлейка як окремий випадок:

<u>Теорема3.</u> Рімановий простір з e-структурою не допускає нетривіальних геодезичних відякображень, якщо задовольняється одна з умов :

$$1)\ Q^h_{ij} = F^h_{i,j} - \frac{1}{n}\left(F^{\alpha}_{i,\alpha}\delta^h_j - eF^{\alpha}_{\bar{\imath}.\alpha}F^h_j\right) = 0;$$

$$2)\ Q^h_{(ij)} = F^h_{i,j} - \frac{1}{n}\left(F^{\alpha}_{i,\alpha}\delta^h_j - eF^{\alpha}_{\bar{\imath},\alpha}F^h_j\right) + F^h_{j,i} - \frac{1}{n}\left(F^{\alpha}_{j,\alpha}\delta^h_i - -eF^{\alpha}_{\bar{\jmath},\alpha}F^h_i\right) = 0;$$

$$3)\ Q^h_{[i\ j]} = F^h_{i,j} - \frac{1}{n}\left(F^{\alpha}_{i,\alpha}\delta^h_j - eF^{\alpha}_{\bar{\imath},\alpha}F^h_j\right) - F^h_{j,i} + \frac{1}{n}\left(F^{\alpha}_{j,\alpha}\delta^h_i - -eF^{\alpha}_{\bar{\jmath},\alpha}F^h_i\right) = 0$$

4) $Q^h_{ij} - eQ^h_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} = F_{hi,j} - eF_{h\bar{\imath},\bar{\jmath}} = 0.$

З теорем 2,3 робимо висновок, що К-простір і O*-простір (і, зокрема, келерові простори) не допускають нетривіальних геодезичних відображень зі збереженням е- структури. *Яно та Вестлейк* довели це твердження для келерових многовидів, отже нами доведено узагальнення їх результата.

На закінчення**,** ми показали, що **теоретично** нетривіальні геодезичні відображення із збереженням е-структури можуть допускати **H**, **O- простори, локально конформно майже келерові, майже аптові** і простори **класу** $\boldsymbol{Z_1}, \boldsymbol{Z_2}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Беклемішев Д.В. Диференціальна геометрія просторів з майже комплексною структурою/ Підсумки науки : Геометрія, 1963. - М: ВИНИТИ 1965, - с.165-212.

2. Josef Mikes, Alena Vanzurova, Irina Hinterleitner. Geodesic Mappings and Some Generalizations. Palacky University Press, 2009.

3. Синюков Н.С. Геодезичні відображення ріманових просторів/ М : Наука, 1979. – 256с.

4. Yano K. Differential Geometry of Complex and Almost Complex Spaces / Pergamon Press, 1965.

5. Levi-Civita T. Sulle transformazioni delle equazioni dinamiche / Ann.diMat.,1896, ser.2, **24**. – p.255 – 300.

6. A.Grey, L.M.Hervella. The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariants. Annali di Matematica pura ed applicate (IV), Vol.CXXIII, 1980, pp.35-58.