ISSN 2519-206X. Дослідження в математиці і механіці.–2016.–Т.21, вип. 1(27).– С. 85–91

УДК 517.937

С. А. Щёголев, В. В. Джашитова
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

О СВЕДЕНИИ СЧЁТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ТИПА К ОДНОМУ СПЕЦИАЛЬНОМУ ВИДУ В РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

Для счётной линейной однородной дифференциальной системы, коэффициенты которой представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, построен алгоритм приведения её к системе, коэффициенты которой близки к медленно меняющимся, в резонансном случае.
MSC: 34G10.
Ключевые слова: счётная система, дифференциальный, линейный, осциллирующий.

Введение. Счётные системы дифференциальных уравнений занимают заметное место в современной теории дифференциальных уравнений, и им посвящены многочисленные исследования [1,2]. Как отмечается в монографии [2], счётные системы дифференциальных уравнений, несмотря на то, что они являются частным случаем дифференциальных уравнений в банаховых пространствах [3,4], имеют ряд специфических особенностей, что приводит к разработке теории таких уравнений.

Одной из известных проблем теории дифференциальных уравнений является проблема приводимости. Т. е. исследование возможности приведения линейной однородной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами с помощью невырожденного преобразования к системе с постоянными коэффициентами. В частности, для систем с периодическими коэффициентами хорошо известна теорема Флоке—Ляпунова [5], которая гласит, что для всякой линейной однородной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{1}$$

с непрерывными на $\mathbf{R}$ T-периодическими коэффициентами существует непрерывная и неособая для всех $t \in \mathbf{R}$ T-периодическая матрица-функция $\Phi(t)$ такая, что линейная замена

$$x = \Phi(t)y \tag{2}$$

приводит систему (1) к системе

$$\frac{dy}{dt} = By,$$

где B – постоянная матрица.

Аналоги этой теоремы получены для многих других классов систем – с почти периодическими коэфиициентами, систем с запаздывающим аргументом, а также и счётных систем [2].

Получена 15.01.2016

Вместе с тем явное построение преобразования (2) практически невозможно, поскольку оно строится с помощью матрицанта исходной системы (1), и поэтому его построение эквивалентно интегрированию самой этой системы. В связи с этим важное значение приобретает приближённое построение преобразования (2), которое позволяет свести систему (1) к системе хоть и не с постоянными коэффициентами, но близкими к постоянным. В частности, если система содержит малый параметр, то можно добиваться того, чтобы осциллирующие слагаемые в преобразованной системе имели порядок малости относительно этого параметра более высокий, чем постоянные слагаемые. И строить в явном виде такие преобразования, при которых этот порядок малости можно было бы сделать сколь угодно высоким.

В настоящей работе рассматривается счётная линейная однородная система дифференциальных уравнений с малым параметром, коэффициенты которой представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой. Целью статьи является построение преобразования, сводящего эту систему к такой, у которой слагаемые осциллирующего типа по сравнению с медленно меняющимися слагаемыми имеют более высокий порядок малости относительно этого параметра, чем в исходной системе. Причём изучается своеобразный резонансный случай (совпадение определённых частот в изучаемой системе). Для конечномерного случая такая задача была рассмотрена в работе [6].

Предварительные результаты. Пусть

$$G(\varepsilon_0) = \{t, \varepsilon:\ t \in \mathbf{R},\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],\ \varepsilon_0 \in \mathbf{R}^+\}.$$

Определение 1. *Скажем, что функция $p(t,\varepsilon)$ принадлежит классу $S(m;\varepsilon_0)$ ($m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$), если выполнены следующие условия:*
1) $p : G(\varepsilon_0) \to \mathbf{C}$, 2) $p(t,\varepsilon) \in C^m(G(\varepsilon_0))$ по t;
3) $d^k p(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k p_k^*(t,\varepsilon)$ $(0 \leqslant k \leqslant m)$, причём

$$\|p\|_{S(m,\varepsilon_0)} \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{m} \sup_{G(\varepsilon_0)} |p_k^*(t,\varepsilon)| < +\infty.$$

Определение 2. *Скажем, что функция $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ принадлежит классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, если эта функция представима в виде:*

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon) \exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),$$

причём
1) $f_n(t,\varepsilon) \in S(m,\varepsilon_0)$ $(n \in \mathbf{Z})$;
2)

$$\|f\|_{F(m;\varepsilon_0,\theta)} \stackrel{def}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|f_n\|_{S(m;\varepsilon_0)} < +\infty;$$

3) $\theta(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)d\tau$, $\varphi \in \mathbf{R}^+$, $\varphi \in S(m,\varepsilon_0)$, $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)} \varphi(t,\varepsilon) = \varphi_0 > 0$.

Множество функций класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ образует линейное пространство, превращающееся в полное нормированное пространство введением нормы $\|\cdot\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$. Имеет место цепочка включений: $F(0;\varepsilon_0;\theta) \supset F(1;\varepsilon_0;\theta) \supset \ldots \supset F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Пусть заданы две функции класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$:

$$u(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t,\varepsilon)\exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),\ v(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(t,\varepsilon)\exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right).$$

Произведение этих функций определим формулой [7]:

$$(uv)(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} u_{n-s}(t,\varepsilon)v_s(t,\varepsilon)\right)\exp(in\theta(t,\varepsilon)). \tag{3}$$

Очевидно, что $uv \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Сформулируем некоторые свойства нормы $\|\cdot\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$. Пусть $u, v \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $k = \text{const}$. Тогда:

1) $\|ku\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = |k|\cdot\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$;

2) $\|u+v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} + \|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$;

3)
$$\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = \sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{1}{\varepsilon^k}\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)};$$

4)
$$\|uv\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant 2^m\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Действительно, при $m = 0$ согласно формуле (3) имеем: $\|uv\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \|u\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\|v\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}$. Далее, на основании свойств 1)–3):

$$\|uv\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = \sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{1}{\varepsilon^k}\frac{\partial^k(uv)}{\partial t^k}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{\varepsilon^k}\sum_{j=0}^{k}C_k^j\left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\left\|\frac{\partial^{k-j}u}{\partial t^{k-j}}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant$$

$$\leqslant 2^m\left(\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{\varepsilon^j}\left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{\varepsilon^j}\left\|\frac{\partial^j v}{\partial t^j}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\right) = 2^m\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}.$$

В частности, если $u \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, то $\forall\ k \in \mathbf{N}$ выполнено: $u^k \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, причём

$$\|u^k\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant 2^{m(k-1)}\|u\|^k_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}.$$

На основании свойства 4) можно утверждать, что пространство $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ образует банахову алгебру [8].

Для любой функции $f(t,\varepsilon,\theta) \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ обозначим:

$$\Gamma_n[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t,\varepsilon,\theta)\exp(-in\theta)d\theta.$$

Определение 3. *Скажем, что бесконечномерный вектор*

$$x(t,\varepsilon)=\operatorname{col}(x_1(t,\varepsilon),x_2(t,\varepsilon),\ldots)$$

принадлежит классу $S_1(m;\varepsilon_0)$, *если* $x_j\in S(m;\varepsilon_0)$ $(j=1,2,\ldots)$, *причём*

$$\|x\|_{S_1(m;\varepsilon_0)}\stackrel{def}{=}\sup_j\|x_j\|_{S(m;\varepsilon_0)}<+\infty.$$

Определение 4. *Скажем, что бесконечная матрица* $A(t,\varepsilon)=(a_{jk}(t,\varepsilon))_{j,k=1,2,\ldots}$ *принадлежит классу* $S_2(m;\varepsilon_0)$, *если* $a_{jk}\in S(m;\varepsilon_0)$, *причём*

$$\|A\|_{S_2(m;\varepsilon_0)}\stackrel{def}{=}\sup_j\sum_{k=1}^{\infty}\|a_{jk}\|_{S(m;\varepsilon_0)}<+\infty.$$

Определение 5. *Скажем, что бесконечномерный вектор*

$$x(t,\varepsilon,\theta)=\operatorname{col}(x_1(t,\varepsilon,\theta),x_2(t,\varepsilon,\theta),\ldots)$$

принадлежит классу $F_1(m;\varepsilon_0,\theta)$, *если* $x_j\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(j=1,2,\ldots)$, *причём*

$$\|x\|_{F_1(m;\varepsilon_0,\theta)}\stackrel{def}{=}\sup_j\|x_j\|_{F(m;\varepsilon_0,\theta)}<+\infty.$$

Определение 6. *Скажем, что бесконечная матрица* $A(t,\varepsilon,\theta)=(a_{jk}(t,\varepsilon,\theta))_{j,k=1,2,\ldots}$ *притнадлежит классу* $F_2(m;\varepsilon_0,\theta)$, *если* $a_{jk}\in F(m;\varepsilon_0,\theta)$, *причём*

$$\|A\|_{F_2(m;\varepsilon_0,\theta)}\stackrel{def}{=}\sup_j\sum_{k=1}^{\infty}\|a_{jk}\|_{F(m;\varepsilon_0,\theta)}<+\infty.$$

Очевидно, что если $A\in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, $x\in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, то $Ax\in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, при этом $\|Ax\|_{F_1(m;\varepsilon_0;\theta)}\leqslant 2^m\|A\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\|x\|_{F_1(m;\varepsilon_0;\theta)}$.

Условие $\|A\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)}<1$ обеспечивает существование матрицы

$$(E+A)^{-1}=E+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kA^k,$$

где $E=\operatorname{diag}(1,1,...)$.

Обозначим $(A)_{jk}$ элемент a_{jk} бесконечной матрицы $A=(a_{jk})_{j,k=1,2,\ldots}$.

Основные результаты.

Теорема. *Пусть задана счётная линейная однородная система дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx}{dt}=\left(i\varphi(t,\varepsilon)\Lambda+\sum_{l=1}^{q}B_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)x,\tag{4}$$

где $x=\operatorname{col}(x_1,x_2,\ldots)$, $\Lambda=\operatorname{diag}(n_1,n_2,\ldots)$, $n_j\in\mathbf{Z}$, $\varphi(t,\varepsilon)$ – *функция, фигурирующая в определении класса* $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $B_l(t,\varepsilon,\theta)\in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(l=\overline{1,q})$,

$\mu \in (0, \mu_0) \subset \mathbf{R}^+$. *Тогда существует* $\mu_1 \in (0, \mu_0)$ *такое, что* $\forall\ \mu \in (0, \mu_1)$ *существует невырожденное преобразование*

$$x = \Phi(t, \varepsilon, \theta, \mu)y, \tag{5}$$

где $\Phi(t, \varepsilon, \theta, \mu) \in F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$, *приводящее систему (4) к виду:*

$$\frac{dy}{dt} = \left(\sum_{l=1}^{q} U_l(t, \varepsilon)\mu^l + \varepsilon \sum_{l=1}^{q} V_l(t, \varepsilon, \theta)\mu^l + \mu^{q+1}W(t, \varepsilon, \theta, \mu)\right) y, \tag{6}$$

где $U_l \in S_2(m; \varepsilon_0)$, $V_l, W \in F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)$ $(l = \overline{1, q})$.

Доказательство. Преобразованием

$$x = \exp(i\Lambda\theta)z, \tag{7}$$

где $\exp(i\Lambda\theta) = \operatorname{diag}\left(e^{in_1\theta}, e^{in_2\theta}, \ldots\right) \in F_2(m; \varepsilon; \theta)$, $z = \operatorname{col}(z_1, z_2, \ldots)$, приведём систему (4) к виду:

$$\frac{dz}{dt} = \left(\sum_{l=1}^{q} R_l(t, \varepsilon, \theta)\mu^l\right) z, \tag{8}$$

где $R_l(t, \varepsilon, \theta) = \exp(-i\Lambda\theta)B_l(t, \varepsilon, \theta)\exp(i\Lambda\theta) \in F_2(m; \varepsilon_0, \theta)$. Далее в системе (8) произведём подстановку

$$z = \left(E + \sum_{l=1}^{q} \Phi_l(t, \varepsilon, \theta)\mu^l\right) y, \tag{9}$$

где $E = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots)$, а бесконечные матрицы Φ_l, U_l, V_l определяются из уравнений:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = R_1(t, \varepsilon, \theta) - U_1(t, \varepsilon) - \varepsilon V_1(t, \varepsilon, \theta), \tag{10}$$

$$\frac{d\Phi_l}{dt} = R_l(t, \varepsilon, \theta) + \sum_{\nu=1}^{l-1} R_\nu(t, \varepsilon, \theta)\Phi_{l-\nu} - \sum_{\nu=1}^{l-1} \Phi_l U_{l-\nu}(t, \varepsilon) -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{l-1} \Phi_l V_{l-\nu}(t, \varepsilon, \theta) - U_l(t, \varepsilon) - \varepsilon V_l(t, \varepsilon, \theta),\ l = \overline{2, q}. \tag{11}$$

В соответствии с формулами (10), (11) определим матрицы Φ_l, U_l, V_l следующим образом:

$$(U_1)_{jk} = \Gamma_0((R_1)_{jk}),$$

$$(\Phi_1)_{jk} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n((R_1)_{jk})}{in\varphi}\ \exp(in\theta),$$

$$(V_1)jk = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n((R_1)_{jk})}{in\varphi}\right) \exp(in\theta),$$

$$(U_l)_{jk} = \Gamma_0((D_l)_{jk}),$$

$$(\Phi_l)_{jk} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n((D_l)_{jk})}{in\varphi}\ \exp(in\theta),$$

$$(V_l)_{jk} = -\left(\sum_{\nu=1}^{l-1} \Phi_\nu V_{l-\nu}\right)_{jk} - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n((D_l)_{jk})}{in\varphi}\right)\exp(in\theta),$$

где

$$D_l = R_l + \sum_{\nu=1}^{l-1}(R_\nu \Phi_{l-\nu} - \Phi_\nu U_{l-\nu}),\ j,k = 1,2,\ldots,\ l = \overline{2,q}.$$

Предположим, что параметр μ настолько мал, что выполнено:

$$\sum_{l=1}^{q} \|\Phi_l\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} < 1.$$

Тогда матрицу W определим формулой:

$$W = \left(E + \sum_{\nu=1}^{q} \Phi_l \mu^l\right)^{-1} \sum_{s=0}^{q-1}\left(\sum_{\nu+\delta=s+q+1}(R_\nu\Phi_\delta - \Phi_\nu U_\delta - \varepsilon\Phi_\nu V_\delta)\right)\mu^s.$$

Теорема доказана.

Заключение. Таким образом, для счётной линейной однородной системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которой представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, построено линейное преобразование неизвестных, приводящее её к системе, коэффициенты которой близки к медленно меняющимся, в резонансном случае.

1. **Валеев К. Г., Жаутыков О. А.** Бесконечные системы дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 415 с.
2. **Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.** Счётные системы дифференциальных уравнений. – К.: ИМ НАН Украины, 1993. – 308 с.
3. **Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравннеий в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
4. **Массера Х., Шеффер Х.** Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – М.: Мир, 1970. – 456 с.
5. **Якубович В. А., Старжинский В. М.** Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 720 с.
6. **Щоголев С. А.** Про деякі резонансні випадки в квазілінійних диференціальних системах із повільно змінними параметрами // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 3. – С. 85–92.
7. **Бари Н. К.** Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 935 с.
8. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.

Щоголев С. А., Джашитова В. В.

Про зведення зліченної лінійної системи з коефіцієнтами коливного типу до одного спеціального вигляду в резонансному випадку

Резюме

Для зліченної лінійної однорідної диференціальної системи, коефіцієнти якої зображувані у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотою, побудовано алгоритм зведення її до системи, коефіцієнти якої близькі до повільно змінних, в резонансному випадку.

Ключові слова: зліченна система, диференціальний, лінійний, коливний.

Shchogolev S. A., Jashitova V.

On the reduction of the countable linear differential system with coefficients of the oscillating type to the some special kind at the resonance case

Summary

For the countable linear homogeneous differential system, whose coefficients are represented as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency, the algorithm of the reduction it to the system, whose coefficients are close to the slowly varying at the resonance case, are constructed.

Key words: countable system, differential, linear, oscillating.

References

1. **Valeev, K. G. & Zhautyikov, O. A.** 1974, *Beskonechnyie sistemyi differentsialnyih uravneniy* [Infinite systems of differential equations], M.: Izd-vo 'Nauka', Kaz. SSR., Alma-Ata, 415 p.
2. **Samoylenko, A. M. & Teplinskiy, Yu. V.** 1993, *Schyotnyie sistemyi differentsialnyih uravneniy* [Countable systems of differential equations], K.: IM NAN Ukrainyi, 308 p.
3. **Daletskiy, Yu. L. & Kreyn, M. G.** 1970, *Ustoychivost resheniy differentsialnyih uravnneiy v banahovom prostranstve* [The stability of solutions of differential equations in Banach spaces], M.:Nauka, 536 p.
4. **Massera, H. & Sheffer, H.** 1970, *Lineynyie differentsialnyie uravneniya i funktsionalnyie prostranstva* [Linear differential equations and functional spaces], M.: Mir, 456 p.
5. **Yakubovich, V. A. & Starzhinskiy, V. M.** 1972, *Lineynyie differentsialnyie uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami i ih prilozheniya* [The linear differential equations with periodic coefficients and their applications], M.: Nauka, 720 p.
6. **Schogolev, S. A.** 2010, Pro deyakI rezonansnI vipadki v kvaziliniynih diferentsialnih sistemah iz povilno zminnymy parametrami [On some high-profile cases in quasi-linear differential systems with slowly varying parameters], *Matem. metodi ta fiz.-meh polya.*, vol. 53, no. 3, pp. 85–92.
7. **Bari, N. K.** 1961, *Trigonometricheskie ryadyi* [Trigonometric series], M.: Fizmatgiz, 935 p.
8. **Kolmogorov, A. N. & Fomin, S. V.** 1972, *Elementyi teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis], M.: Nauka, 496 p.