Ю. С. Процеров

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Ю. С. Процеров

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

для студентів
факультету математики, фізики та інформаційних технологій
спеціальностей 113 Прикладна математика та 111 Математика

ОДЕСА
ОНУ
2022

УДК 519.216(075.8)
П845

Автор:

Ю. С. Процеров, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри методів математичної фізики ОНУ імені І. І. Мечникова.

Рецензенти:

А. В. Усов, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики та моделювання систем Державного університету «Одеська політехніка»;

А. О. Кореновський, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу ОНУ імені І. І. Мечникова.

Відповідальний редактор:

Н. Д. Вайсфельд, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри методів математичної фізики ОНУ імені І. І. Мечникова.

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 5 від 21.10. 2021 року.

Процеров Ю. С.

П845 Випадкові процеси : навч.-метод. посіб. / Ю. С. Процеров. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2022. – 108 с.

ISBN 978-617-689-522-0

Викладені основи теорії випадкових процесів: ланцюги Маркова та марковські процеси, процеси з незалежними приростами, процеси розмноження і загибелі, процеси відновлення, процеси другого порядка та стаціонарні процеси. Наведено приклади застосування випадкових процесів до задач масового обслуговування та у страховій математиці.

Призначено для студентів вищих навчальних закладів, зокрема для студентів, які вивчаються за спеціальностю 113 Прикладна математика та 111 Математика.

УДК 519.216(075.8)

ISBN 978-617-689-522-0

Зміст

Вступ

Упродовж свого розвинення у фізиці, хімії, біології, економіці, техніці та інших науках виникали задачі, пов'язані з явищами, які протікають за часом та змінюються під дією різноманітних випадкових факторів. Прикладами таких задач є процеси дифузії в рідині або газі, процес протікання хімічних реакцій, процес радіоактивного розпаду, процес розмноження та загибелі біологічних популяцій та багато інших. Усе це спричинило появу в теорії ймовірностей нового розділу – теорії випадкових або стохастичних процесів, яка вивчає математичні моделі випадкових явищ, які залежать від одного або декількох мінливих параметрів, зокрема, часу.

Мета цього посібника – ознайомлення студентів з основами загальної теорії випадкових процесів, з їх многовиддям, з їх властивостями та основнми характеристиками. Також розглядаються приклади застосування теорії випадкових процесів до задач масового обслуговування та теорії ризиків у страховій математиці. До кожного розділу пропануються завдання для самостійного виконання.

Матеріал посібника розрахован на студентів спеціальності 113 Прикладна математика та 111 Математика, які вивчають курс «Випадкові процеси». Для його розуміння вимагаються певні знання з курсів «Теорія ймовірностей» та «Функціональний аналіз»

§ 1. Основні поняття теорії випадкових процесів

Нехай Ω– множина елементарних подій, $\langle \Omega, F, P \rangle$– відповідний ймовірнісний простір, а T – множина дійсних чисел. Кожному $t \in T$ відповідає певна випадкова величина $\xi(\omega, t)$, яка приймає значення на певній множені S (дійсній або комплексній). Сукупність таких випадкових величин називають випадковим процесом $\xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega, t \in T$. При цьому множену T називають областю визначення процесу, а множену S– фазовим простором процесу.

Звичайно, коли це не приводить до неясності, залежність $\xi(\omega,t)$ от ω не зазначається і випадковий процес позначують просто $\xi(t)$.

Якщо зафіксувати $\omega=\omega_0\in\Omega$, тобто задати елементарну подію, то ми одержимо функцію $\xi(t)$ одного дійсного аргументу $t\in T$, яка називається реалізацією або траєкторією випадкового процесу, відповідного елементарній події ω_0. Якщо зафіксувати параметр $t=t_0$, то ми отримуємо випадкову величину $\xi(t_0)=\xi(\omega,t_0),\ \omega\in\Omega$, яку називають перерізом випадкового процесу в точці $t_0\in T$. Таким чином, на випадковий процес можна дивиться, або як на сукупність траєкторій, або як на сукупність перерізів.

Далі ми, як правило, будемо розглядати дійсні процеси, для яких фазовий простір S дійсний, а параметр t будемо трактувати як час.

Приклад. Нехай випадковий процес $\xi(t)$ визначений наступним чином:

$$\xi(t)=X(\omega)t,\quad t\in[0,\infty),$$

де $X(\omega)$– випадкова величина, рівномірно розподілена на проміжку $[0,1]$.

Знайдемо множену траєкторій і перерізів цього процесу. При фіксованому ω_0 траєкторіями процесу $\xi(t)=X(\omega_0)t$ є прямі лінії, які виходять з початку координат, з випадковим кутовим коефіцієнтом, рівним $X(\omega_0)$. При фіксованому t_0 переріз $\xi(t_0)=X(\omega)t_0$ є випадкова величина, рівномірно розподілена на проміжку $[0,t_0]$.

Класифікація випадкових процесів в основному проводиться за такими трьома признаками:

1) *За характером області визначення процесу.* Наприклад, якщо $T=\{t_0,t_1,\ldots,t_n,\ldots\}$, то ми маємо послідовність випадкових величин $\xi_n=\xi(t_n)$, які задані на $\langle\Omega,F,P\rangle$, і випадковий процес

називають процесом з дискретним часом. Якщо T є деякий числовий проміжок $[a;b]$ або $[0;\infty)$, то випадковий процес називають процесом з неперервним часом.

2) *За характером фазового простору*. Якщо $S=\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ є скінченна або зчисленна множина, то випадковий процес $\xi(t)$ називають дискретним або із скінченним чи зчисленним числом станів. Якщо S є незчисленна множина, то говорять о процесі з незчисленною кількістю станів.
3) *За характером взаємозв'язку між випадковими величинами*, які визначають процес при різних значеннях $t \in T$.

Розглянемо переріз $\xi(t_1)$ випадкового процесу $\xi(t)$ у момент часу t_1. Функцію

$$F_\xi(x_1,t_1)=P\{\xi(t_1)<x_1\}$$

називають одновимірною функцією розподілу випадкового процесу у момент часу t_1.

Якщо зафіксувати два моменти часу t_1 та t_2, то функцію

$$F_\xi(x_1,t_1;x_2,t_2)=P\{\xi(t_1)<x_1,\xi(t_2)<x_2\}$$

називають двовимірною функцією розподілу випадкового процесу.

Для n перерізів випадкового процесу аналогічно визначається n-вимірна функція розподілу випадкового процесу

$$F_\xi(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n)=P\{\xi(t_1)<x_1,\xi(t_2)<x_2,...,\xi(t_n)<x_n\}.$$

Будемо вважати, що випадковий процес визначене, якщо для любого n задано сімейство n-вимірних функцій розподілу. Набір цих функцій $F_\xi(x_1,t_1;...;x_n,t_n)$ називають скінченновимірним розподілом випадкового процесу $\xi(t)$.

Скінченновимірний розподіл випадкового процесу $\xi(t)$ фактично є функцією розподілу випадкового вектора $(\xi(t_1),\xi(t_2),...,\xi(t_n))$.

Якщо функція розподілу $F_\xi\left(x_1,t_1;...;x_n,t_n\right)$ допускає подання у вигляді

$$F_\xi\left(x_1,t_1;...;x_n,t_n\right)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}...\int\limits_{-\infty}^{x_n}p_\xi\left(y_1,t_1;...;y_n,t_n\right)dy_1...dy_n\,,$$

то функцію $p_\xi\left(x_1,t_1;...;x_n,t_n\right)$ називають n-вимірною щільністю функції розподілу випадкового процесу $\xi(t)$.

Сімейство скінченовимірних розподілів випадкового процесу $\xi(t)$ визначає і різні числові характеристики цього процесу.

Означення. Математичним сподіванням випадкового процесу $\xi(t)$ або його середнім значенням називається невипадкова функція $a(t)$, яка визначається співвідношенням

$$a(t)=M\xi(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xdF_\xi(x,t).$$

Значення цієї функції при будь-якому t дорівнює математичному сподіванню відповідного перетину випадкового процесу.

Означення. Дисперсією випадкового процесу $\xi(t)$ називається невипадкова невід'ємна функція $D\xi(t)$, яка при будь-якому значенні аргументу t дорівнює дисперсії відповідного перетину випадкового процесу

$$D\xi(t)=M\left(\xi(t)-a(t)\right)^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x-a(t)\right)^2dF_\xi(x,t).$$

Дисперсія характеризує розкид реалізацій відносно середній траєкторії $a(t)$.

Центрованим випадковим процесом називають процес $\overset{\circ}{\xi}(t)=\xi(t)-a(t)$, у якого математичне сподівання дорівнює нулю. Звідси слідує, що дисперсія характеризує ступень розкиду реалізацій центрованого випадкового процесу.

Математичне сподівання та дисперсія важливі, але недостатні характеристики для опису основних властивостей випадкових процесів. Для опису динаміки змінювання випадкових процесів вводиться спеціальна характеристика – коваріація процесу. Вона характеризує ступень схожості між перетинами процесів $\xi(t_1)$ і $\xi(t_2)$.

Означення. Коваріацієй випадкового процесу $\xi(t)$ називають математичне сподівання добутку перетинів випадкового процесу в моменти часу t_1 і t_2

$$B(t_1,t_2)=M\xi(t_1)\xi(t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2dF(x_1,t_1;x_2,t_2).$$

Означення. Кореляційною функцією випадкового процесу $\xi(t)$ називають математичне сподівання добутку центрованих перетинів випадкового процесу у моменти часу t_1 і t_2

$$R(t_1,t_2)=M\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)=M\left(\xi(t_1)-a(t_1)\right)\left(\xi(t_2)-a(t_2)\right).$$

Кореляційна функція не тільки характеризує ступень лінійної стохастичної залежності між двома перетинами випадкового процесу, але і розкид цих перетинів відносно математичного сподівання.

Якщо випадкові величини $\xi(t_1)$ і $\xi(t_2)$ незалежні, то кореляційна функція дорівнює нулю. Дійсно, за властивістю математичного сподівання

$$R(t_1,t_2)=M\left(\xi(t_1)-a(t_1)\right)\left(\xi(t_2)-a(t_2)\right)=$$
$$=M\left(\xi(t_1)-a(t_1)\right)M\left(\xi(t_2)-a(t_2)\right)=0,$$

так як $M\left(\xi(t_k)-a(t_k)\right)=M\xi(t_k)-a(t_k)=a(t_k)-a(t_k)=0,\ k=1,2.$

В цьому випадку говорять, що випадкові величини $\xi(t_1)$ і $\xi(t_2)$ некорельовани. Обернено твердження, взагалі говорячи, невірно, з некорельованости випадкових величин не обов'язково слідує їх незалежність.

Кореляційна функція і коваріація пов'язані між собою простим співвідношенням

$$R(t_1,t_2)=B(t_1,t_2)-a(t_1)a(t_2).$$

Дійсно,

$$R(t_1,t_2)=M\left(\xi(t_1)-a(t_1)\right)\left(\xi(t_2)-a(t_2)\right)=$$
$$=M\left(\xi(t_1)\xi(t_2)-\xi(t_1)a(t_2)-a(t_1)\xi(t_2)+a(t_1)a(t_2)\right)=$$
$$=M\xi(t_1)\xi(t_2)-a(t_2)M\xi(t_1)-a(t_1)M\xi(t_2)+a(t_1)a(t_2)=$$
$$=B(t_1,t_2)-a(t_1)a(t_2)-a(t_1)a(t_2)+a(t_1)a(t_2)=B(t_1,t_2)-a(t_1)a(t_2)$$

Дисперсія випадкового процесу дуже просто знаходиться через Іі' кореляційну функцію

$$D\xi(t)=M\left(\xi(t)-a(t)\right)^2=R(t,t).$$

Зрозуміло, що для існування $M\xi(t), D\xi(t)$ та $R_\xi(t,s)$ при усіх $t,s\in T$ достатньо виконання умови $M\left|\xi(t)\right|^2<\infty\ \forall t\in T$. Процеси, які задовольняють цій умові, носять назву процесів з скінченими моментами другого порядку або простіше – процесами другого порядку.

Приклад. Нехай задано випадковий процес $\eta(t)=e^{-\xi t}$, де ξ випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром $\lambda>0$. Знайдемо для нього математичне сподівання, кореляційну функцію і дисперсію.

За умовою випадкова величина ξ має таку щільність функції розподілу

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}.$$

Знайдемо математичне сподівання процесу $\eta(t)$

$$a(t)=M\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x)e^{-xt}dx=\lambda\int_0^{\infty}e^{-x(\lambda+t)}dx=-\frac{\lambda}{\lambda+t}e^{-x(\lambda+t)}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{\lambda}{\lambda+t}$$

Аналогічно знаходимо коваріацію процесу

$$B(t,s)=M\eta(t)\eta(s)=\lambda\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}e^{-xt}e^{-xs}dx=\lambda\int_0^{\infty}e^{-x(\lambda+t+s)}dx=\frac{\lambda}{\lambda+t+s}$$

Тоді кореляційна функція має вигляд

$$R(t,s)=B(t,s)-a(t)a(s)=\frac{\lambda}{\lambda+t+s}-\frac{\lambda^2}{(\lambda+t)(\lambda+s)}=$$

$$=\frac{\lambda t s}{(\lambda+t)(\lambda+s)(\lambda+t+s)},$$

а дисперсія дорівнює $D\eta(t)=R(t,t)=\dfrac{\lambda t^2}{(\lambda+t)^2(\lambda+2t)}$.

Означення. Випадковий процес $\xi(t)$ називається стохастично неперервним, якщо для будь якого $\varepsilon>0$

$$\lim_{\Delta t\to 0}P\left\{\left|\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\right|\geq\varepsilon\right\}=0.$$

Означення. Два випадкових процеси $\xi(t), t\in T$ і $\eta(t), t\in T$ називаються стохастично еквівалентними, якщо для кожного $t\in T$

$$P\{\omega:\xi(t)\neq\eta(t)\}=0.$$

У стохастично еквівалентних процесів співпадають скінченновимірні розподіли.

В цьому випадку ще говорять, що один з процесів є модифікацією другого.

Завдання.

1) Нехай $\xi(t)=\eta\varphi(t), t\in T$, де $\eta-$ дійсна випадкова величина з математичним сподіванням a та дисперсією σ^2, а $\varphi(t)-$ невипадкова функція на T. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію та дисперсію випадкового процесу $\xi(t)$.

2) Нехай ξ и η некорельовани випадкові величини з нульовими математичними сподіваннями і скінченими дисперсіями σ_ξ^2 та σ_η^2. Для випадкового процесу $\varsigma(t)=\xi e^{-\alpha t}+\eta e^{-\beta t}$, де сталі $\alpha,\beta>0$, знайти математичне сподівання, коваріацію та дисперсію.

§ 2. Ланцюги Маркова

Вивчення випадкових процесів почнемо з процесу з дискретним часом і скінченним або зчисленним числом станів, якій зветься ланцюгом Маркова.

Нехай проводиться певний експеримент, у результаті якого може статися одна з несумісних подій $A_1, A_2, \ldots: \bigcup_i A_i = \Omega,\ A_i \bigcap A_j = \varnothing,\ i \neq j$, число яких може бути як скінченним, так і зчисленним. Випробування повторюються, і кожен раз має місце одна з цих подій. Якщо на n-ому випробуванні має місце подія A_k, то будемо казати, що деяка фізична система знаходиться у стані A_k, а самі події $A_1, A_2, \ldots$ описують стани цієї системи. Введемо послідовність випадкових величин $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$. Подія $\xi_n = k$ означає, що на n-ому кроці має місце подія A_k, тобто система перейшла у стан A_k.

Послідовність випадкових величин $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ називається ланцюгом Маркова, якщо умовна ймовірність переходу на n-ому кроці з стану A_i до стану A_j залежить тільки від того, у якому стані система знаходилась на $n-1$ кроці, і не залежить від того, у яких станах система знаходилась на перших $n-2$ кроках

$$P\{\xi_n = j / \xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, .., \xi_{n-1} = i\} = P\{\xi_n = j / \xi_{n-1} = i\} = p_{ij}^{(n)}.$$

Цю визначальну властивість ланцюга Маркова можна сформулювати так: при фіксованої теперішності ($n-1$ крок) майбутнє (n-ий крок) не залежить від минулого (від $1, 2, \ldots, n-2$ кроків).

В початковий момент часу система знаходилась в якомусь стані, причому в кожному з станів A_k вона може находися лише з певною ймовірністю p_k^0

$$P\{\xi_0 = k\} = p_k^0, \quad \sum_k p_k^0 = 1.$$

Означення. Ланцюг Маркова називається однорідним, якщо ймовірності переходу $p_{ij}^{(n)}$ не залежать від номеру випробування n $P\{\xi_n = j / \xi_{n-1} = i\} = p_{ij}$.

Для однорідних ланцюгів Маркова перехідні ймовірності p_{ij} утворюють так звану матрицю переходу

$$P = \{p_{ij}\} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

елементи якої, задовольняють умовам 1) $0 \le p_{ij} \le 1$; 2) $\sum_j p_{ij} = 1$. Остання умова слідує з того, що зі стану A_i система перейде в один і тільки один з станів A_j.

Якщо число станів скінченно, то P є звичайна квадратна матриця.

Приклад. Розглянемо задачу о випадковому блуканні частинці по цілочисельним точкам прямої. Припустимо, що на прямій відмічені точки с цілочисельними координатами $1, 2, ..., n$. Знаходженню частинці в точці m відповідає подія A_m. Під впливом випадкових поштовхів частинка переміщується на одиницю вправо з імовірністю p або вліво з імовірністю $q = 1 - p$. В точках 1 і n знаходяться стінки (екрани) і тут можливі два випадки: блукання з поглинанням (коли частинка доходить до однієї зі стінок, то вона до неї прилипає) та блукання з відбиттям (коли частинка доходить до однієї зі стінок, то вона відбивається від неї на одиницю усередину проміжку, тобто у точки 2 або $n-1$). Якщо тепер ξ_m випадкова величина, яка дорівнює координаті частинці, то послідовність $\{\xi_m\}$ утворює однорідний ланцюг Маркова. Матриці переходу для блукань з поглинанням та з відбиттям мають наступний вигляд

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу P описує зміну системи за один крок. Розглядаємо тепер, як знаходяться ймовірності переходу $p_{ij}(k)$ з стану A_i в стан A_j за k кроків, тобто знайдемо матрицю переходу $P(k)$. За формулою повної ймовірності

$p_{ij}(2)=\sum_s p_{is}\cdot p_{sj}$, звідки $P(2)=P\cdot P=P^2$, $p_{ij}(3)=\sum_s p_{is}(2)\cdot p_{sj}$ і $P(3)=P(2)\cdot P=P^3, \dots$

Таким чином, отримуємо, що $P(k)=P^k$ і матриця переходу P однозначно визначає перехідні ймовірності за будь-яке число кроків. Якщо ще задано початковий розподіл ймовірностей $P\{\xi_0=i\}=p_i^0$, то ймовірність знаходження в j-тому стані за k кроків дорівнює $p_j(k)=\sum_i p_i^0\cdot p_{ij}(k)$.

Класифікація станів *(А. Колмогоров, В. Деблін).*

Означення. Стан A_i називається неістотним, якщо існує такий стан A_j и таке ціле число $n>0$, що $p_{ij}(n)>0$, а $p_{ji}(m)=0, \forall m>0$. В протилежному випадку стан A_i називається істотним.

Іншими словами, стан неістотний, якщо існує хотя би один такій стан A_j, попав у якій уже неможливо повернуться назад у стан A_i. Для істотних станів існує ненульова ймовірність повернуться назад.

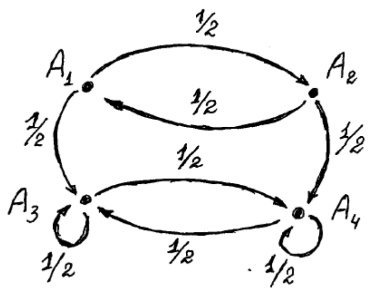
Означення. Істотні стани A_i та A_j називаються такими, що сполучаються, якщо існують такі цілі числа $n>0$ і $m>0$, що

$p_{ij}(n)>0$ і $p_{ji}(m)>0$. В протилежному випадку ці стани називаються такими, що не сполучаються.

У прикладі про випадкове блукання частинці по прямій з поглинанням, стани $2, 3, \ldots n-1$ будуть неістотними. Стани же 1 і n істотні, але не сполучаються (їх ще називають поглинаючими). У блуканні з відбиттям усі стани істотні та сполучаються.

Приклад. Нехай система може знаходиться в одному з чотирьох станів $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ з матрицею перехідних ймовірностей P.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



Дослідимо характер цих станів. Для цього зручніше представить цей ланцюг графічно.

Очевидно, що стани A_1 і A_2 неістотні – з A_1 або A_2 можливо попасти в A_3 або A_4, але повернутися назад уже неможливо. Стани A_3 і A_4 є істотними і сполучаються.

Нехай $\{\xi_n\}$– однорідний ланцюг Маркова. Виділимо у ньому клас S_0 усіх неістотних станів. Нехай тепер A_i який-небудь істотний стан. Позначимо через S_i клас станів, якій включає у себе стан A_i та всі стані, які з ним сполучаються. Тоді уся множина істотних станів розіб'ється на класи, які не перетинаються і які будемо позначати $S_1, S_2, \ldots$.

Так в розглянутому прикладі клас $S_0 = \{A_1, A_2\}$ і є один клас істотних станів $S_1 = \{A_3, A_4\}$, яки сполучаються.

Означення. Ланцюг Маркова, який містить один клас істотних станів, які сполучаються, називається нерозкладним. Якщо ланцюг містить більш одного класу таких станів, то він зветься розкладним.

Далі будемо розглядати нерозкладні ланцюги Маркова.

Введемо наступні означення:

$f_j(n) = P\{\xi_n = j / \xi_{n-1} \neq j, ..., \xi_1 \neq j, \xi_0 = j\}$ – ймовірність того, що система, яка вийшла з j-го стану, вперше повернеться до нього через n кроків.

$F_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n)$ – ймовірність того, що система, яка вийшла з j-го стану, знову коли-небудь повернеться до нього.

Означення. Стан A_j називається зворотнім, якщо $F_j = 1$ та незворотнім, якщо $F_j < 1$.

Означення. Стан A_j називається нульовим, якщо $\lim_{n\to\infty} p_{jj}(n) = 0$ и ненульовим в протилежному випадку.

Означення. Стан A_j називається періодичним з періодом $d_j > 1$, якщо повернення з додатною ймовірністю в A_j можливо, лише за число кроків, кратних d_j.

Приклад. Розглянемо задачу о випадковому блуканні частинці по цілочисельним точкам прямої, яке задається таким чином: частинка або з ймовірністю $\frac{1}{2}$ переміщується на одиницю вправо, або з той же ймовірністю $\frac{1}{2}$ залишається на місці.

У даному випадку $f_j(1) = \frac{1}{2}$ і $f_j(n) = 0, n > 1$. Тому $F_j = \frac{1}{2} < 1$ і усі стани незворотні. Крім того $p_{jj}(n) = \frac{1}{2^n}$, а отже усі стані нульові.

Якщо же частинка з ймовірністю $\frac{1}{2}$ переміщується на одиницю вправо і с той же ймовірністю $\frac{1}{2}$ на одиницю вліво, то ми одержимо ланцюг з періодом 2, так як повернуться у будь-яку точку можливо, лише за парне число кроків.

Теорема. Стан A_j буде зворотнім тоді і тільки тоді, коли $P_j = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = \infty$, та незворотнім, якщо $P_j < \infty$, в цьому випадку $F_j = \frac{P_j}{1+P_j}$.

Доведення. За формулою повної ймовірності маємо

$$p_{jj}(n) = f_j(1)\,p_{jj}(n-1) + f_j(2)\,p_{jj}(n-2) + \ldots + f_j(n-1)\,p_{jj}(1) + f_j(n)$$

Введемо функції $P_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) z^n; F_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n) z^n$,

при цьому обидва ряди є збіжними, коли $|z| < 1$. Використовуючи записану вище формулу повної ймовірності для $n=1, n=2,\ldots$, розглянемо

$$P_j(z) = p_{jj}(1)z + p_{jj}(2)z^2 + p_{jj}(3)z^3 + \ldots = f_j(1)\cdot z +$$
$$+\left(f_j(1)\,p_{jj}(1) + f_j(2)\right)\cdot z^2 + \left(f_j(1)\,p_{jj}(2) + f_j(2)\,p_{jj}(1) + f_j(3)\right)\cdot z^3 + \ldots =$$
$$= f_j(1)z\left(1 + p_{jj}(1)z + p_{jj}(2)z^2 + \ldots\right) + f_j(2)z^2\left(1 + p_{jj}(1)z + p_{jj}(2)z^2 + \ldots\right) + \ldots =$$
$$= \left(1 + P_j(z)\right)\left(f_j(1)\,z + f_j(2)z^2 + ..\right) = \left(1 + P_j(z)\right)F_j(z)$$

Таким чином, $P_j(z) = F_j(z)\left(1 + P_j(z)\right)$, звідки $F_j(z) = \frac{P_j(z)}{1+P_j(z)}$ і

$$P_j(z) = \frac{F_j(z)}{1-F_j(z)}.$$

Нехай $P_j = \infty$. Тоді $\lim\limits_{z\to 1} P_j(z) = \infty$, звідки $F_j = \lim\limits_{z\to 1} F_j(z) = \lim\limits_{z\to 1} \frac{P_j(z)}{1+P_j(z)} = 1$ і стан є зворотнім.

Навпаки, якщо $F_j = 1$, то $\lim\limits_{z\to 1} F_j(z) = 1$, а потому $P_j = \lim\limits_{z\to 1} P_j(z) = \lim\limits_{z\to 1} \frac{F_j(z)}{1-F_j(z)} = \infty$.

Якщо ж P_j скінченне число, то $F_j = \frac{P_j}{1+P_j} < 1$ і стан незворотній.

З доведеної теореми слідує, що якщо стан A_j незворотній, то збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n)$. Тоді в силу необхідного признака збіжності ряду $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}(n) = 0$, звідки слідує, що незворотній стан завжди буде нульовим.

Теорема *(солідарності)*. У нерозкладному ланцюгу Маркова всі стани належать одному типу: якщо хоч один зворотній, то усі зворотні; якщо хоч один нульовий, то усі нульові; якщо хоч один періодичний з періодом d, то і усі періодичні з періодом d.

Доведення. Нехай A_k і A_j два різних стани нерозкладного ланцюга Маркова. Тоді ці стани істотні та сполучаються, тобто існують цілі числа N і M таки, що $p_{kj}(N) = \alpha > 0$ і $p_{jk}(M) = \beta > 0$. Для довільного цілого n за формулою повної ймовірності $p_{kk}(N+M+n) = \sum\limits_{l,s} p_{kl}(N)\, p_{ls}(n)\, p_{sk}(M) \geq p_{kj}(N)\, p_{jj}(n)\, p_{jk}(M) = \alpha\beta\, p_{jj}(n)$

Аналогічно одержимо нерівність

$p_{jj}(N+M+n) \geq \alpha\beta\, p_{kk}(n)$, звідки $p_{jj}(n) \geq \alpha\beta\, p_{kk}(n-N-M)$.

Таким чином,

$$\alpha\beta\, p_{kk}(n-N-M) \leq p_{jj}(n) \leq \frac{1}{\alpha\beta}\, p_{kk}(n+N+M).$$

Тоді, якщо стан A_k нульовий, тобто $p_{kk}(n) \to 0, n \to \infty$, то і $p_{jj}(n) \to 0, n \to \infty$, а значить стан A_j також нульовий.

Якщо стан A_k зворотній, тобто $\sum_{n=1}^{\infty} p_{kk}(n) = \infty$, то і $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = \infty$, а значить стан A_j також зворотній.

Нехай тепер стан A_k періодичний з періодом d_k, тобто, якщо $p_{kk}(n) > 0$, то існує таке ціле $d_k > 1$, що $n \vdots d_k$. Так як $p_{kk}(N+M) = \sum_j p_{kj}(N) p_{jk}(M) \geq \alpha\beta > 0$, то $(N+M) \vdots d_k$.

Покажемо, що стан A_j також періодичний з періодом $d_j = d_k$. Оскільки $p_{jj}(N+M) \geq \alpha\beta > 0$, то існує ціле d_j, що $(N+M) \vdots d_j$, тобто стан A_j періодичний з періодом d_j.

Для будь-якого цілого m маємо $p_{jj}(N+M+md_k) \geq \alpha\beta\, p_{kk}(md_k) > 0$, звідки слідує, що $(N+M+md_k) \vdots d_j$. Тоді $md_k \vdots d_j$ і $d_k \vdots d_j$. Аналогічно доводиться, що $d_j \vdots d_k$, а це можливо тільки тоді, коли $d_j = d_k$.

Приклад. Розглянемо задачу про випадкове блукання по цілочисельним точкам в R^n.

Почнемо з одновимірного випадку блукання частинки по цілочисельним точкам $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ прямої. При кожному кроці частинка з точки k з додатною ймовірністю p може переміститися або у точку $k+1$, або з ймовірністю $q = 1-p$, у точку $k-1$. Цій задаче відповідає однорідний ланцюг Маркова $\xi_n = \xi_{n-1} + \eta_n = \xi_0 + S_n, S_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k$, де η_k приймає значення 1 або -1 з ймовірностями p і q.

Зрозуміло, що повернуться в будь-яку точку можливо лише за парне число кроків, при цьому $f_0(2)=2pq>0$, отже цей ланцюг періодичний с періодом 2.

Крім того, тому що $0<p<1$, цей ланцюг Маркова буде нерозкладний. Тоді за теоремою солідарності для вивчення всього ланцюга достатньо знайти тип однієї точки, наприклад, нуля.

Почнемо з дослідження збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n)$. Оскільки ланцюг є періодичним з періодом 2, то $p_{00}(2n+1)=0$ і залишається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(2n)$. Так як сума $S_n=\sum_{k=1}^{n}\eta_k$ є координатою частинці після n кроків ($\xi_0=0$), то $p_{00}(2n)=P\{S_{2n}=0\}$.

Для того, щоб $S_{2n}=0$ необхідно, щоб у сумі з $2n$ доданків n з них дорівнювали $+1$, а решта n доданків дорівнювали -1. За формулою Бернуллі маємо

$$P\{S_{2n}=0\}=C_{2n}^{n}\,p^n q^n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\,p^n q^n.$$

З використанням формули Стірлінга $n!\cong\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}$, отримаємо

$$P\{S_{2n}=0\}\cong\frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\,(2n)^{2n}e^{-2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}\right)^2}\,p^n q^n=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}2^{2n}p^n q^n=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n.$$

Функція $\varphi(p)=4pq=4p(1-p)$ на проміжку $(0;1)$ досягає максимуму коли $p=\frac{1}{2}$, при цьому $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=1$. В інших точках цього проміжку $\varphi(p)<1$.

Таким чином, $4pq<1$ коли $p\neq\frac{1}{2}$, але тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n$ збігається, і ланцюг Маркова буде незворотнім.

Якщо $p=\frac{1}{2}$, то $p_{00}(2n)\cong\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ розбіжний і тоді ланцюг Маркова буде зворотнім.

Перейдемо тепер до двовимірного випадку. Якщо частинка знаходиться у точці з цілочисельними координатами (x_0, y_0), то при кожному кроці вона з ймовірністю $\frac{1}{4}$ може переміститися в одну з точок з координатами $(x_0 \pm 1, y_0 \pm 1)$. Таке блукання зветься симетричним. Якщо позначати через ξ_n положення точці після n-го кроку, то ми отримуємо послідовність двовимірних випадкових величин, пов'язаних в однорідний нерозкладний ланцюг Маркова. Величину ξ_n можна представити у вигляді $\xi_n=(\xi_n^1,\xi_n^2)=(\xi_n^1,0)+(0,\xi_n^2)$, де $\xi_n^i\ (i=1,2)$ вже одновимірні послідовності, які описують симетричне випадкове блукання на прямих, які були розглянути у попередньому пункті коли $p=q=\frac{1}{2}$. Нехай початковий стан співпадає з початком координат $(0,0)$. Тоді

$$p_{00}(2n)=P\{\xi_{2n}=(0,0)/\,\xi_0=(0,0)\}=P\{\xi_{2n}^1=0/\,\xi_0^1=0\}\cdot P\{\xi_{2n}^2=0/\,\xi_0^2=0\}\cong$$

$$\cong\left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^2=\frac{1}{\pi n}$$

Звідки слідує, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}(2n)$ розбіжний і усі стани у даному ланцюгу зворотні.

У тривимірному випадку для симетричного блукання аналогічно представимо

$\xi_n=(\xi_n^1,\xi_n^2,\xi_n^3)=(\xi_n^1,0,0)+(0,\xi_n^2,0)+(0,0,\xi_n^3)$, де ξ_n^i, як і раніше, симетричні випадкові блукання на прямій. Якщо взяти початковий стан $(0,0,0)$, то $p_{00}(2n)\cong\frac{1}{\left(\sqrt{\pi n}\right)^3}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}(2n)$ вже буде збіжним, а стани ланцюга будуть незворотними. На відміну від випадків прямої та площини, тут уже частинка, яка вийшла з початку координат, може з додатною ймовірністю ніколи туди не повернуться. Зрозуміло, що ця картина збережеться і для симетричного блукання у просторі розмірності більше трьох.

Теорема о граничних ймовірностях *(Маркова)*. Нехай ланцюг Маркова має скінчено число станів $A_1, A_2, \dots, A_m$. Якщо для деякого $s > 0$ усі елементи матриці переходу $P(s)$ додатні, то для будь-якого i існують границі

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = p_j .$$

Граничні ймовірності p_j не залежать від індексу i та є єдиним розв'язком системи

$$p_j = \sum_{k=1}^{m} p_k p_{kj} \quad (j = 1, 2, \dots, m); \quad \sum_{j=1}^{m} p_j = 1, \quad 0 \le p_j \le 1$$

Без доведення.

Приклад. Ланцюг Маркова задається перехідною матрицею P. Треба з'ясувати, чи можливо у даному випадку застосувати теорему Маркова і якщо можливо, то знайти граничні ймовірності.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Через те, що не усі елементи матриці P додатні, то знайдемо

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Отже усі елементи додатні і можливо застосування теореми Маркова. Граничні ймовірності знаходимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} p_1 = p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot \dfrac{1}{2} + p_3 \cdot \dfrac{1}{2} \\ p_2 = p_1 \cdot \dfrac{1}{2} + p_2 \cdot 0 + p_3 \cdot \dfrac{1}{2} \\ p_3 = p_1 \cdot \dfrac{1}{2} + p_2 \cdot \dfrac{1}{2} + p_3 \cdot 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Її розв’язком будуть граничні ймовірності $p_1 = \dfrac{1}{3},\ p_2 = \dfrac{1}{3},\ p_3 = \dfrac{1}{3}.$

Граничні ймовірності p_j (їх ще називають стаціонарними або фінальними) є по суті ймовірностями попадання системи в стан A_j через великий проміжок часу. Суть теореми у тому, що ці ймовірності не залежать від початкового стану системи, тобто система як би не пам'ятає звідкіля почався рух і прямує до усталеному стану, який визначається стаціонарним розв’язком. Цю теорему ще називають ергодичною. Ергодичні теореми грають важливу роль у застосуваннях теорії ймовірностей до задач фізики, біології, техніці, коли система, яка описується відповідним ланцюгом Маркова, переходить у певний стаціонарний режим функціонування.

Завдання.

1) Частинка здійснює випадкове блукання по цілочисельним точкам $1, 2, \ldots, N$ прямої. Знаходженню частинці у точці m відповідає подія A_m. Знайти матрицю перехідних ймовірностей та визначати тип станів, якщо:

а) на кожному кроці частинка може переміститеся на одиницю вправо з ймовірністю p або на одиницю вліво з ймовірністю q або залишиться на місці з ймовірністю $r \left(p + q + r = 1 \right)$. У точках 1 і N знаходяться поглинаючі екрани.

б) на кожному кроці частинка може переміститеся на одиницю вправо з ймовірністю p або з ймовірністю $q = 1 - p$ повернутися у початкову точку 1 проміжку. В точці N знаходиться екран з відбиттям.

2) Навести приклад ланцюга Маркова: а) всі стани якого неістотні; б) який має як істотні, так і неістотні стани.

3) В урні знаходиться 5 куль, білих та чорних. Випробування становить у тому, що кожен раз з урни наугад виймається одна куля і взамін в урну кладеться куля іншого кольору (замість білого чорний і навпаки). Знайти матрицю перехідних ймовірностей для ланцюга Маркова, станами якого є кількість білих куль в урні. Визначити тип цих станів.

4) Розглянемо послідовні кидання грального кубика і нехай випадкова величина $\xi_n,\ n=1,2,...$ є число очок, які випали при n-ом киданні. Введемо послідовність випадкових величин $\eta_n = \max\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$. Довести, що послідовність $\{\eta_n\}$ утворює ланцюг Маркова та знайти для неї матрицю перехідних ймовірностей.

5) Нехай система може знаходитись у одному з п'яти станів $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ з матрицею перехідних ймовірностей P. Визначати тип цих станів, якщо:

а) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ б) $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6) Ланцюг Маркова з множиною станів $\{A_1, A_2, A_3\}$ описується матрицею перехідних ймовірностей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Зазначати істотні, неістотні, періодичні стани.

§ 3. Марковськи випадкові процеси із зчисленною кількістю станів

При розгляданні ланцюгів Маркова ми припускали, що перехід системи з одного стану в інший відбувається в дискретні моменти часу. Тут же буде йти річ о процесах переходів з одного стану в другий, які протікають за течею неперервного часу $t \geq 0$.

Розглянемо випадковий процес $\xi(t)$, у якого множина станів (фазовий простір) не більш чім зчислена. Нехай $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ послідовність станів (подій). Подія $\xi(t) = i$ означає, що в момент часу t мало місце подія A_i.

Означення. Процес $\xi(t)$ називається марковським або процесом без післядії, якщо для будь-якої зростаючої послідовності моментів часу $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n < ...$ послідовність випадкових величин $\xi(t_1), \xi(t_2), ..., \xi(t_n), ...$ утворює ланцюг Маркова, тобто

$$P\{\xi(t_n) = j / \xi(t_1) = i_1, \xi(t_2) = i_2, ..., \xi(t_{n-2}) = i_{n-2}, \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}\} =$$
$$= P\{\xi(t_n) = j / \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}\}$$

Означення. Марковський процес називається однорідним, якщо для будь-яких t і sймовірність $P\{\xi(t+s) = j / \xi(s) = i\}$ залежить тільки от t і не залежить від s.

Згідно з марковською властивостю процесу при заданому поточному стані $\xi(s)=i$ поведінка процесу $\xi(t)$ в майбутньому $(t \geq s)$ не залежить від поведінки процесу в минулому $(t \leq s)$, а цілком визначається поточним станом. Картина поведінці процесу $\xi(t+s)$ при поточному стані $\xi(s)=i$ така ж, якби момент s був початковим.

Ймовірності $p_{ij}(t)=P\{\xi(t+s)=j/\xi(s)=i\}$ називають перехідними ймовірностями з стану A_i в стан A_j за час t. Вони залежать від довжини проміжку $(s, s+t)$ і не залежать від його розташування на часовій осі (в цьому виявляється однорідність за часом цього процесу). Перехідні ймовірності утворюють матрицю ймовірностей переходу $\Pi(t)=\{\, p_{ij}(t)\}$.

Якщо задано початковий розподіл ймовірностей $p_i^0 = P\{\xi(0)=i\}$, то ймовірність того, що система в момент часу $t>0$ буде знаходиться в стані A_j дорівнює $p_j(t)=\sum_i p_i^0 p_{ij}(t)$. Залежність же перехідних ймовірностей від часу виражаються формулою $p_{ij}(s+t)=\sum_k p_{ik}(s)\, p_{kj}(t)$ при усіх $s,t \geq 0$.

Ці дві формули одержуються безпосередньо з формули повної ймовірності.

Означення. Однорідний марковський процес із зчисленною кількістю станів називається стохастично неперервним, якщо $\lim\limits_{h\to 0} p_{ij}(h)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}$.

Теорема. Якщо $\xi(t)$ – однорідний стохастично неперервний марковський процес із зчисленною кількістю станів, то ймовірності $p_{ij}(t)$ рівномірно неперервні на $[0,+\infty)$.

Доведення. За формулою повної ймовірності

$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}p_{ik}(h)p_{kj}(t)-p_{ij}(t)=p_{ii}(h)p_{ij}(t)-p_{ij}(t)+$$

$$+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\infty}p_{ik}(h)p_{kj}(t)=\left[p_{ii}(h)-1\right]p_{ij}(t)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\infty}p_{ik}(h)p_{kj}(t)$$

Оскільки $\left|p_{ij}(t)\right|\leq 1$, то

$$\left|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\right|\leq 1-p_{ii}(h)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\infty}p_{ik}(h)=1-p_{ii}(h)+1-p_{ii}(h)=2\left[1-p_{ii}(h)\right]$$

Тому що процес стохастично неперервний, то для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon)>0$, що $1-p_{ii}(h)<\dfrac{\varepsilon}{2}$ коли $h<\delta(\varepsilon)$.

Таким чином, $\left|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\right|<\varepsilon$ коли $h<\delta(\varepsilon)$ для усіх t, а це і означає рівномірну неперервність перехідних ймовірностей.

Означення. Однорідний марковський процес із зчисленною кількістю станів та стохастично неперервний, називається локально регулярним, якщо

1) у кожному стані він проводить деякий час, перше ніж вийти з нього;

2) з кожного стану процес безпосередньо переходить у деякий другий стан.

Пояснимо ці умови. Якщо процес $\xi(t)$ у момент часу τ переходить з стану A_i в стан A_j, то існує як завгодно мале $\varepsilon>0$, що $\xi(\tau+\varepsilon)\neq i$, та знайдеться $\delta>0$ таке, що $\xi(t)=j$ коли $\tau<t<\tau+\delta$, тобто існує $\xi(\tau+0)$.

Теорема. Якщо $\xi(t)$ однорідний, стохастично неперервний і локально регулярний марковський процес, то існують границі $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{p_{ij}(h)-\delta_{ij}}{h}=a_{ij}$ і $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}=0$.

Доведення. Нехай $\xi(0)=i$ і τ момент виходу з начального стану. Нехай $t<\tau$. Візьмемо мале $h>0$ и розіб'ємо проміжок $(0,t)$ на $m=\left[\dfrac{t}{h}\right]$ частин, де $\left[\dfrac{t}{h}\right]$ є ціла частина дробу $\dfrac{t}{h}$. Тоді $\xi(kh)=i,\ k=1,...m$.

Розглянемо $P\{t<\tau\}=\lim\limits_{h\to 0}P\left\{\bigcap\limits_{k=1}^{m}\left(\xi(kh)=i\right)\right\}$. В силу однорідності процесу $P\{\xi(kh)=i\}=p_{ii}(h)$ і

$$P\{t<\tau\}=\lim_{h\to 0}\left(p_{ii}(h)\right)^{m}=\lim_{h\to 0}\left(1+\left(p_{ii}(h)-1\right)\right)^{\frac{1}{p_{ii}(h)-1}\cdot\frac{p_{ii}(h)-1}{h}\cdot mh}.$$

Так як коли $h\to 0$: $p_{ii}(h)\to p_{ii}(0)=1$, а $mh\to t$, то існує $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{p_{ii}(h)-1}{h}=a_{ii}<0$ (тому що $0<p_{ii}(h)<1$) і $P\{t<\tau\}=e^{a_{ii}t}$, тобто ймовірність перебування у стані A_i має показниковий розподіл.

Нехай в момент τ система з стану A_i перейшла у стан A_j (подія B_j). Візьмемо достатньо мале $h>0$ таке, що $nh<\tau$, а $(n+1)h>\tau$. Тоді ймовірність

$$P\{B_j\}=\lim_{h\to 0}P\left\{\left(\bigcup_{k=0}^{n}\xi(kh)=i\right)\bigcap\xi\left((n+1)h\right)=j\right\}\cong$$

$$\cong\lim_{h\to 0}p_{ij}(h)\sum_{k=0}^{\infty}\left(p_{ii}(h)\right)^{k}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)}{1-p_{ii}(h)}$$

Через те що $p_{ii}(h)<1$, була використана формула суми нескінченної геометричної прогресії. Запишемо цю ймовірність у вигляді $P\{B_j\}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{1-p_{ii}(h)}\cdot\frac{p_{ij}(h)}{h}$.

Так як границя першого дробу існує та дорівнює $-\frac{1}{a_{ii}}$, то існує іграниця другого дробу $\lim\limits_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)}{h}=a_{ij}>0$. Таким чином, ймовірність переходу з стану A_i в стан A_j дорівнює $P\{B_j\}=-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$.

Якщо урахувати усі стани, у які може перейти система з стану A_i, то $P\{\tau<t<\tau+\delta\}=\sum\limits_{j,j\neq i}P\{B_j\}=-\frac{1}{a_{ii}}\sum\limits_{j,j\neq i}a_{ij}=1$, отже $\sum\limits_{j,j\neq i}a_{ij}=-a_{ii}$ і $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}=0$.

З доведеної теореми слідує, що перехідні ймовірності диференційовані і $p'_{ij}(0)=a_{ij}$. Одержимо тепер систему диференційних рівнянь відносно перехідних ймовірностей.

Теорема *(Рівняння Колмогорова)*. Якщо однорідний марковський процес з перехідними ймовірностями $p_{ij}(t)$ стохастично неперервний і локально регулярний, то існують похідні від $p_{ij}(t)$ та справедлива перша система рівнянь Колмогорова $\frac{dp_{ij}(t)}{dt}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{ik}p_{kj}(t)$.

Доведення. Використаємо формули

$p_{ij}(t+h)=\sum\limits_{k}p_{ik}(h)p_{kj}(t)$ і $p_{ij}(t)=\sum\limits_{k}\delta_{ik}p_{kj}(t)$, де $\delta_{ik}=\begin{cases}1, i=k\\ 0, i\neq k\end{cases}$.

Тоді $\dfrac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}-\sum_k a_{ik}p_{kj}(t)=\sum_k\left[\dfrac{p_{ik}(h)-\delta_{ik}}{h}-a_{ik}\right]p_{kj}(t).$

Візьмемо $n>i$ і запишемо останню суму у вигляді

$$\sum_k\left[\frac{p_{ik}(h)-\delta_{ik}}{h}-a_{ik}\right]p_{kj}(t)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{p_{ik}(h)-\delta_{ik}}{h}-a_{ik}\right]p_{kj}(t)+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{p_{ik}(h)p_{kj}(t)}{h}-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_{ik}p_{kj}(t)$$

де враховано, що $\delta_{ik}=0$ коли $i<k$. Якщо ще врахувати, що

$\left|p_{kj}(t)\right|\le 1$, то ми одержимо

$$\left|\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}-\sum_k a_{ik}p_{kj}(t)\right|\le\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{p_{ik}(h)-\delta_{ik}}{h}-a_{ik}\right|+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{p_{ik}(h)}{h}+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_{ik}$$

Задамо довільне $\varepsilon>0$. У правої частині останнього виразу перший доданок є скінченна сума і за попередньою теоремою $\dfrac{p_{ik}(h)-\delta_{ik}}{h}\to a_{ik}$ коли $h\to 0$, тоді за $\varepsilon>0$ знайдеться $\delta_1>0$ таке, що цій доданок буде менше,ніж $\varepsilon/3$ коли $h<\delta_1$.

В другому доданку члени ряду $\dfrac{p_{ik}(h)}{h}\to a_{ik}$ коли $h\to 0$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}$ є збіжним, тобто за тому же ε знайдеться $\delta_2>0$ і натуральне N_1 такі, що цей доданок менш, чим $\varepsilon/3$, коли $h<\delta_2$ і $n>N_1$.

Одже для останнього доданку за ε знайдеться натуральне N_2 таке, що цей доданок буде менше, чим $\varepsilon/3$ коли $n>N_2$. Таким чином, якщо $h<\min\{\delta_1,\delta_2\}$ і $n>\max\{N_1,N_2\}$, то

$$\left|\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}-\sum_k a_{ik}p_{kj}(t)\right|<\varepsilon,$$

що означає, що існують похідні від перехідних ймовірностей та вони задовольняють першій системі рівнянь Колмогорова

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}p_{kj}(t).$$

Це система звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і вона розв'язується при начальних умовах $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$.

Якщо число станів скінчено, наприклад, m, то має місце друга система рівнянь Колмогорова

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt}=\sum_{k=1}^{m}p_{ik}(t)a_{kj}.$$

Ця система зручна тім, що позволяє знаходити безумовні ймовірності $P_k(t)-$ ймовірності того, що в момент часу t система знаходиться у стані A_k (неважливо з якого стану вона потрапила туди).

Нехай $P_i(0)=P\{\xi(0)=i\}=p_i^0-$ початковий розподіл процесу. Умножимо другу систему рівнянь Колмогорова на p_i^0 та просумуємо за i

$$\sum_{i=1}^{m}p_i^0\frac{dp_{ij}(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{m}p_i^0\sum_{k=1}^{m}p_{ik}(t)a_{kj}.$$

Оскільки p_i^0 сталі, то $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{m}p_i^0p_{ij}(t)=\sum_{k=1}^{m}a_{kj}\sum_{i=1}^{m}p_i^0p_{ik}(t).$

Ураховуючи, що $P_k(t)=\sum_{i=1}^{m}p_i^0p_{ik}(t)$, одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь $\frac{dP_j(t)}{dt}=\sum_{k=1}^{m}a_{kj}P_k(t)$, яка розв'язується при початкових умовах $P_j(0) = p_j^0$.

§ 4. Застосування теорії марковських процесів до задач масового обслуговування

Розглянемо систему обслуговування, яка має m однакових обслуговуючих приладів. В систему у випадкові моменти часу надходять вимоги (об'єкти), які потребують обслуговування. Якщо в момент надходження вимоги є вільний прилад, то вона починає обслуговуватися, якщо вільних приладів немає, то вимога або губиться (система з відмовою), або вони вишикуються у чергу в очікуванні обслуговування. Охарактеризуємо стан системи числом наявних вимог – тих, які обслуговуються або чекають обслуговування.

Припустимо, що надходження вимог не залежать від стану системи. Якщо $\tau_1, \tau_2, ...$– час надходження вимог, то будемо вважати, що інтервали між ними $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, ...$ є послідовність незалежних однаково розподілених величин, які мають показниковий розподіл з параметром $\mu : P\{\eta = \tau_i - \tau_{i-1} > t\} = e^{-\mu t}$.

Час обслуговування вимог не залежить ні від стану системи, ні від часу надходження, ні від конкретного приладу. Якщо ς є час обслуговування деякої вимоги, то він має показниковий розподіл з параметром λ: $P\{\varsigma > t\} = e^{-\lambda t}$.

Розглянемо три можливих випадки поведінки вимог у черзі:

а) вимоги очікують обслуговування незалежно від довжини черги;

б) існує таке число $n > m$, що якщо у системі знаходиться n вимог, то $n+1$ вимога губиться (не поступає у систему);

в) тож саме трапляється коли $n = m$, тобто якщо вільних приладів немає, то вимога губиться.

Покажемо, що в кожному з цих випадків процес, який описує стан системи в момент часу t, є однорідним марковським процесом. Нехай в момент часу t у системі було k вимог. Якщо з них обслуговувалось j вимог, то час до завершення обслуговування кожної з цих вимог не залежить від часу їх надходження і має показник розподілу такий же, як і величина ς

$$P\{\varsigma - t > h / \varsigma > t\} = P\{\varsigma > t + h / \varsigma > t\} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h},$$

тобто різниця $\varsigma - t$ при умові $\varsigma > t$ має теж самий розподіл, що і ς. Аналогічно доводиться, що час надходження чергової вимоги також не залежить від того, як давно надійшло попередня вимога.

Таким чином, незалежно від того. як надходили вимоги до системи до моменту часу t і як вони обслуговувались (це визначає стан систем до моменту t), її подальша еволюція така, як би у початковий момент було k вимог, з котрих j обслуговувались. Згідно зі зробленими допущеннями , $j = k$, коли $k \le m$ та $j = m$ коли $k > m$. Отже, подальша еволюція системи залежить тільки від стану системи k. Це і означає, що система описується однорідним марковським процесом.

Получимо для поставленої задачі систему рівнянь Колмогорова відносно перехідних ймовірностей. Об’єднаємо усі три випадки а), б) та в) в один, якщо покладемо в першому з них $n = \infty$, а у третьому $n = m$.

Нехай система знаходиться у стані A_k. Будемо вважати, що дві або більш вимог не можуть надійти одночасно та два або більш приладів також одночасно не можуть закінчити роботу. Тоді система може перейти або в стан A_{k+1} (надійшла ще одна вимога), або в стан A_{k-1} (одну вимогу обробили), або залишитись у том ж стані A_k.

Розглянемо спочатку випадок, коли система залишилась у стані A_k, тобто знайдемо a_{kk}. Нехай в момент часу t обслуговується $j = \begin{cases} k, k < m \\ m, k \ge m \end{cases}$ вимог і до моменту часу τ система все ще знаходиться у стані A_k. Якщо $\varsigma_1, \varsigma_2, ..., \varsigma_j$ тривалість обслуговування приладами цих вимог, а η час до надходження чергової вимоги, то через те, що це незалежні випадкові величини та процес марковський

$$P\{t<\tau\}=P\{\varsigma_1>t,\varsigma_2>t,...,\varsigma_j>t;\eta>t\}=\left(P\{\varsigma_1>t\}\right)^j\cdot P\{\eta>t\}=$$
$$=\left(e^{-\lambda t}\right)^j\cdot e^{-\mu t}=e^{-(\mu+\lambda j)t}=e^{a_{kk}t}$$

тобто $a_{kk}=-(\mu+\lambda j)=\begin{cases}-(\mu+\lambda k), k<m\\ -(\mu+\lambda m), k\ge m\end{cases}.$

Розглянемо тепер випадок, коли система зі стану A_k в момент часу τ перейшла в стан A_{k+1} – подія B_{k+1} (надійшла ще одна вимога, а попередні все ще обробляються)

$$P(B_{k+1})\cong\sum_i P\left\{\min_j\left(\varsigma_1,...,\varsigma_j\right)>\tau/\tau=s\right\}\cdot P\{s_i<\eta<s_{i+1}\}$$

$$P\{s_i<\eta<s_{i+1}\}=P\{\eta<s_{i+1}\}-P\{\eta<s_i\}=1-P\{\eta\ge s_{i+1}\}-\left(1-P\{\eta\ge s_i\}\right)=$$
$$=P\{\eta\ge s_i\}-P\{\eta\ge s_{i+1}\}$$

так як $P\{\eta=s_i\}=P\{\eta=s_{i+1}\}=0$, то

$$P\{s_i<\eta<s_{i+1}\}=P\{\eta>s_i\}-P\{\eta>s_{i+1}\}=e^{-\mu s_i}-e^{-\mu s_{i+1}}\approx\mu e^{-\mu s}\left(s_{i+1}-s_i\right)$$

і $P(B_{k+1})\approx\mu\sum_i e^{-\lambda js}\cdot e^{-\mu s}\left(s_{i+1}-s_i\right)=\mu\sum_i e^{-(\mu+\lambda j)s}\left(s_{i+1}-s_i\right)$

Якщо тепер спрямувати ранг розбиття по s до нуля, то отримана сума буде прямувати до визначеного інтегралу

$$P(B_{k+1})=\mu\int_0^\infty e^{-(\mu+\lambda j)s}ds=-\frac{\mu}{\mu+\lambda j}e^{-(\mu+\lambda j)s}\Big|_0^\infty=\frac{\mu}{\mu+\lambda j}.$$

З іншого боку, як ми знаємо з попереднього параграфу, що для марковського процесу $P(B_{k+1})=-\dfrac{a_{k\,k+1}}{a_{k\,k}}$, звідки

$$a_{k\,k+1}=-a_{k\,k}\cdot P(B_{k+1})=(\mu+\lambda j)\frac{\mu}{\mu+\lambda j}=\mu.$$

Розглянемо останній випадок, коли система зі стану A_k переходить до стану A_{k-1} (одна вимога уже обслугована, а нові не надійшли).

Використаємо те, що $\sum_i a_{ki} = 0$. У нашому випадку $a_{k\,k-1} + a_{k\,k} + a_{k\,k+1} = 0$, звідки

$$a_{k\,k-1} = -a_{k\,k} - a_{k\,k+1} = \mu + \lambda\, j - \mu = \lambda\, j = \begin{cases} \lambda k,\ k < m \\ \lambda m,\ k \geq m \end{cases}.$$

Решта $a_{k\,j} = 0$, коли $|k - j| > 1$. Крім того, неможливий перехід в -1 стан і при $k = n < \infty$ неможливий перехід в $n+1$ стан.

Запишемо тепер другу систему рівнянь Колмогорова для безумовних ймовірностей $\frac{dP_k(t)}{dt} = P_{k-1}a_{k-1k} + P_k a_{k\,k} + P_{k+1}a_{k+1k}$, тобто

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\mu P_0(t) + \lambda P_1(t)$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \begin{cases} \mu P_{k-1}(t) - (\mu + \lambda k) P_k(t) + \lambda(k+1) P_{k+1}(t), 1 \leq k < m \\ \mu P_{k-1}(t) - (\mu + \lambda m) P_k(t) + \lambda m P_{k+1}(t), \quad m \leq k < n \end{cases}$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \mu P_{n-1}(t) - (\mu + \lambda m) P_n(t)$$

Знайдемо стаціонарні ймовірності, тобто розв’яжемо цю систему для випадку, коли ймовірності $P_k(t)$ не залежать від часу t. Розглянемо спочатку випадок в), тобто коли усі прилади зайняті та нова вимога губиться $(n = m)$:

$$\begin{cases} -\mu P_0 + \lambda P_1 = 0 \\ \mu P_{k-1} - (\mu + \lambda k) P_k + \lambda(k+1) P_{k+1} = 0, \quad 1 \leq k < m \\ \mu P_{m-1} - \lambda m P_m = 0 \end{cases}$$

З першого рівняння знайдемо $P_1 = \frac{\mu}{\lambda} P_0$ та підставимо у друге рівняння при $k = 1$

$\mu P_0 - (\mu + \lambda) P_1 + 2\lambda P_2 = 0$, тоді $2\lambda P_2 = (\mu + \lambda) \frac{\mu}{\lambda} P_0 - \mu P_0$ і

$P_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^2 P_0$.

З третього рівняння $(k = 2)$ $\mu P_1 - (\mu + 2\lambda) P_2 + 3\lambda P_3 = 0$ знайдемо

$$P_3 = \frac{1}{3\lambda}\left((\mu + 2\lambda) P_2 - \mu P_1\right) = \frac{1}{3\lambda}\left(\frac{1}{2}(\mu + 2\lambda)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 - \mu \frac{\mu}{\lambda}\right) P_0 = \frac{1}{3!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3 P_0$$

і так далі. Таким чином, $P_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^k P_0, \quad k = 1, 2, ..., m.$

Для знаходження P_0 використаємо те, що $\sum_{j=0}^{m} P_j = 1$:

$P_0 \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^j = 1$, звідки $P_0 = \left[\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^j \right]^{-1}$ і $P_k = \dfrac{\frac{1}{k!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k}{\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j}, \quad k = \overline{1, m}$

Ці формули вперше були отримані Єрлангом і носять назву формул Єрланга. Коли $k = m$, вони дають ймовірність того, що усі прилади зайняти і нова вимога губиться.

Якщо позначати через $a = \frac{\mu}{\lambda}$- відношення швидкості надходження вимог у систему до швидкості їх обслуговування, то $P_k = \frac{1}{k!} a^k \left[\sum_{j=0}^{m} \frac{a^j}{j!} \right]^{-1}$ Якщо тепер спрямувати m до нескінченності і врахувати, що $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a^j}{j!}=e^a$, то ми отримаємо, що $P_k=\frac{a^k}{k!}e^{-a}$, тобто, получимо розподіл Пуассона.

Розглянемо тепер випадок а), коли черга може рости до нескінченності. В цьому випадку система рівнянь Колмогорова для безумовних ймовірностей має вигляд

$$\begin{cases}-\mu P_0+\lambda P_1=0\\ \mu P_{k-1}-(\mu+\lambda k)P_k+\lambda(k+1)P_{k+1}=0, \quad 1\le k<m\\ \mu P_{k-1}-(\mu+\lambda m)P_k+\lambda m P_{k+1}=0, \quad k\ge m\end{cases}$$

Як і в попередньому випадку, з перших m рівнянь послідовно знаходимо

$$P_1=\frac{\mu}{\lambda}P_0,\, P_2=\frac{1}{2!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 P_0, \ldots, P_m=\frac{1}{m!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^m P_0.$$

Тепер з останнього рівняння при $k=m$ знайдемо

$$\lambda m P_{m+1}=(\mu+\lambda m)P_m-\mu P_{m-1}=(\mu+\lambda m)\frac{1}{m!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^m P_0-\mu\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{m-1}P_0=$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{m-1}\left(\frac{\mu+\lambda m}{m}\cdot\frac{\mu}{\lambda}-\mu\right)P_0=\frac{\mu}{m!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^m P_0.$$

Звідки $P_{m+1}=\frac{1}{m!\cdot m}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{m+1}P_0=\frac{m^m}{m!}\left(\frac{\mu}{m\lambda}\right)^{m+1}P_0$.

Аналогічно знаходимо $P_{m+2}=\frac{m^m}{m!}\left(\frac{\mu}{m\lambda}\right)^{m+2}P_0, \ldots, P_{m+j}=\frac{m^m}{m!}\left(\frac{\mu}{m\lambda}\right)^{m+j}P_0$.

Ймовірність P_0 визначимо з рівності $\sum_{j=0}^{\infty}P_j=1$.

Маємо $P_0\left[\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j+\frac{m^m}{m!}\sum_{j=m+1}^{\infty}\left(\frac{\mu}{m\lambda}\right)^j\right]=1.$

Для того, щоб ряд у отриманому виразу був збіжним, необхідно, щоб $\mu < m\lambda$. Ця умова має простий сенс – швидкість надходження вимог у систему повинна бути менше швидкості їх обслуговування усіма приладами системи, інакше черга буде зростати до нескінченності. Якщо ця умова виконана, то даний ряд можна просумувати

$$\sum_{j=m+1}^{\infty}\left(\frac{\mu}{m\lambda}\right)^{j}=\frac{\left(\frac{\mu}{m\lambda}\right)^{m+1}}{1-\frac{\mu}{m\lambda}}=\frac{m\lambda}{m\lambda-\mu}\left(\frac{\mu}{m\lambda}\right)^{m+1}$$ і тоді

$$P_0=\left[\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{j}+\frac{1}{m!}\cdot\frac{1}{m\lambda-\mu}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{m+1}\right]^{-1}.$$

Завдання. Отримати розв'язок системи рівнянь Колмогорова для випадку б), тобто коли існує таке число $n > m$, що якщо в системі маємо n вимог, то $n+1$ вимога губиться.

§ 5. Марковськи процеси з незчисленною кількістю станів (процеси без післядії)

Дотепер ми розглядали марковськи процеси або з дискретним часом та дискретною кількістю станів (ланцюги Маркова), або с неперервним часом та зчисленною кількістю станів. Розглянемо тепер марковський процес з неперервним часом та з незчисленною кількістю станів.

Марковськи випадкові процеси мають важливу властивість незалежності майбутньої поведінки від минулого. Цю властивість називають ще відсутністю післядії. Інакше кажучи, якщо розглядати поточний стан процесу $\xi(t)$ у момент часу $t \in T$ як «теперішність», сукупність усіх можливих станів $\{\xi(s), s < t\}$ як «минуле», а сукупність можливих станів $\{\xi(u), u > t\}$ як «майбутнє», то для марковського процесу при фіксованій «теперішності» «майбутнє» не залежить від «минулого». При цьому сімейство розподілів для $u > t$ залежить лише від стану процесу в момент часу t.

Нехай $\xi(t)$ дійсний процес з областю визначення $T = [0, \infty)$ і фазовим простором $S = (-\infty, \infty)$.

Означення. Процес $\xi(t)$ зветься марковським процесом або процесом Маркова, якщо для довільного $k > 1$ и будь-яких $t_1 < t_2 < ... < t_k$ з T виконується рівність

$$P\{\xi(t_k) \in S / \xi(t_1) = x_1, \xi(t_2) = x_2, ..., \xi(t_{k-1}) = x_{k-1}\} = \\ = P\{\xi(t_k) \in S / \xi(t_{k-1}) = x_{k-1}\}.$$

Таким чином, ймовірнісний розподіл процесу в момент часу t_k залежить лише від того, в якому стані був процес у близькому минулому, тобто при $t = t_{k-1}$, і не залежить від його станів, які передували моменту часу t_{k-1}. Це і є марковська властивість випадкового процесу.

Введемо умовну функцію розподілу марковського процесу (функцію розподілу переходу з одного стану в друге за проміжок часу (s,t))

$$F(s,x,t,y) = P\{\xi(t) < y / \xi(s) = x\}, \text{ де } s < t.$$

Вона має звичайні властивості функції розподілу: є не спадною, неперервна зліва та $\lim\limits_{y \to -\infty} F(s,x,t,y) = 0$, $\lim\limits_{y \to +\infty} F(s,x,t,y) = 1$.

Якщо існує функція $f(s,x,t,y)$ така, що

$$F(s,x,t,y) = \int_{-\infty}^{y} f(s,x,t,z)dz \quad (s < t),$$

то процес називають абсолютно неперервним, а функцію $f(s,x,t,y)$ називають щільністю функції розподілу або щільністю функції розподілу переходу.

Процес Маркова повністю визначається функцією розподілу переходу $F(s,x,t,y)$ і функцією розподілу $F(t_1,x_1)$ в початковий момент часу t_1. При цьому

$$F(t_1,x_1,t_2,x_2,...,t_n,x_n) = F(t_1,x_1)\prod_{i=2}^{n} F(t_i,x_i,t_{i-1},x_{i-1}).$$

Аналогічна формула має місце і для щільності функції розподілу переходу.

Нехай $s<u<t,\quad s,u,t \in T$. За формулою повної ймовірності

$$P\{\xi(t)<y/\xi(s)=x\} \cong \sum_i P\{\xi(t)<y/\xi(u)=z\}\times$$

$$\times P\{z_{i-1} \le \xi(u) < z_i / \xi(s)=x\},\ z \in (z_{i-1},z_i)$$

$$P\{\xi(t)<y/\xi(s)=x\} \cong \sum_i P\{\xi(t)<y/\xi(u)=z\}\times$$

$$\times\left[P\{\xi(u)<z_i/\xi(s)=x\} - P\{\xi(u)<z_{i-1}/\xi(s)=x\}\right]$$

тобто $F(s,x,t,y) = \sum_i F(u,z,t,y)\left[F(s,x,u,z_i) - F(s,x,u,z_{i-1})\right].$

Спрямував ранг розбиття по z до нуля, отримуємо

$$F(s,x,t,y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s,u,t,y)\,d_z F(s,x,u,z).$$

Отримане співвідношення називається рівнянням Колмогорова – Чепмена, і воно виконується при усіх $s,u,t \in T$ таких, що $s<u<t$.

Якщо існує щільність $f(s,x,t,y)$, то $f(s,x,t,y) = \frac{\partial}{\partial y}F(s,x,t,y)$ і рівняння Колмогорова – Чепмена запишеться у вигляді

$$f(s,x,t,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s,u,t,y)\,f(s,x,u,z)\,dz.$$

Це рівняння визначає щільність функції розподілу переходу для проміжку часу (s,t) по відомій щільності функції розподілу переходу для менших проміжків часу (s,u) і (u,t).

§ 6. Випадкові процеси з незалежними приростами

Розглянемо тепер один важливий клас випадкових процесів, а саме, процесів з незалежними приростам.

Означення. Випадковий процес $\xi(t)$ на множені $T=[0,\infty)$ зветься процесом з незалежними приростами, якщо для будь-якого натурального значення $n>1$ та для будь-яких значень $t_1<t_2<...<t_n$ з множені T випадкові величини $\xi(t_1), \xi(t_2)-\xi(t_1),..., \xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$ незалежні.

У випадку дискретного часу процес з незалежними приростами є послідовністю незалежних випадкових величин.

Для завдання процесу з незалежними приростами достатньо задати функції розподілу значень процесу у одній точці $\xi(s)$ і розподіл приростів $\xi(t)-\xi(s)$ при $t>s$.

Відзначимо, що випадковий процес $\tilde{\xi}(t)=\xi(t)-\xi(0)$ також є процесом з незалежними приростами, оскільки прирости не змінюються $\tilde{\xi}(t)-\tilde{\xi}(s)=\xi(t)-\xi(s)$. Тому без утрати спільності можна прийняти, що $\xi(0)=0$ і при міркуванні покладати, що $\xi(s)=\xi(s)-\xi(0)$ є приростом. В цьому випадку говорять, що процес виходить з нуля.

Покажемо, що всякий процес з незалежними приростами є марковським процесом. Розглянемо незалежні випадкові величини

$$\eta_1=\xi(t_1), \eta_2=\xi(t_2)-\xi(t_1),...,\eta_n=\xi(t_n)-\xi(t_{n-1}),$$

де $t_1<t_2<...<t_n$.

Тоді $\xi(t_1)=\eta_1, \xi(t_2)=\eta_1+\eta_2,...,\xi(t_n)=\eta_1+\eta_2+...+\eta_n$.

Позначимо через p_ξ – щільність розподілу вектору $\xi=(\xi(t_1),\xi(t_2),...,\xi(t_n))$, через p_η – щільність розподілу вектору

$\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$, а через p_{η_k} – щільності розподілу його компонент. Тоді має місце рівність

$$p_\xi(x_1, t_1, ..., x_n, t_n) = p_\eta(x_1, x_2 - x_1, ..., x_n - x_{n-1}) =$$
$$= p_{\eta_1}(x_1) p_{\eta_2}(x_2 - x_1) ... p_{\eta_n}(x_n - x_{n-1})$$

Тут перша рівність слідує з того, що якобіан $\left\{\dfrac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j}\right\}$ перетворення $\eta \to \xi$ дорівнює по модулю одиниці, а друга рівність одержана з урахуванням незалежності випадкових величин $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$. Розглянемо щільність умовного розподілу

$$p_\xi(x_n, t_n / \xi(t_1) = x_1, ..., \xi(t_{n-1}) = x_{n-1}) = \frac{p_\xi(x_1, t_1, ..., x_n, t_n)}{p_\xi(x_1, t_1, ..., x_{n-1}, t_{n-1})} =$$

$$= \frac{p_{\eta_1}(x_1) p_{\eta_2}(x_2 - x_1) ... p_{\eta_n}(x_n - x_{n-1})}{p_{\eta_1}(x_1) p_{\eta_2}(x_2 - x_1) ... p_{\eta_n}(x_{n-1} - x_{n-2})} = p_{\eta_n}(x_n - x_{n-1}).$$

В одержаній рівності права частина залежить тільки від x_n та x_{n-1}, але тоді лева частина також повинна залежить тільки від цих величин, тобто

$$p_\xi(x_n, t_n / \xi(t_1) = x_1, ..., \xi(t_{n-1}) = x_{n-1}) = p_\xi(x_n, t_n / \xi(t_{n-1}) = x_{n-1}),$$

а це і означає, що процес, який розглядається, є марковським процесом.

Означення. Процес $\xi(t)$ називається однорідним, якщо розподіл приростів $\xi(t+s) - \xi(s)$ не залежить від s(залежить тільки від довжини проміжку часу t, але не від його розташування на вісі часу).

Покажемо, що якщо дійсний процес $\xi(t)$ є однорідним, неперервним і з незалежними приростами, то він є процесом с математичним сподіванням $M\xi(t) = at$ та дисперсією $D\xi(t) = \sigma^2 t$.

Дійсно, в силу незалежності приростів

$$M\xi(t+s)=M\left(\left(\xi(t+s)-\xi(s)\right)+\xi(s)\right)=M\left(\xi(t+s)-\xi(s)\right)+M\xi(s)$$

$$D\xi(t+s)=D\left(\left(\xi(t+s)-\xi(s)\right)+\xi(s)\right)=D\left(\xi(t+s)-\xi(s)\right)+D\xi(s)$$

Тому, що процес однорідний, випадкові величини $\xi(t+s)-\xi(s)$ і $\xi(t)$ мають одне і теж математичне сподівання та одну і ту ж дисперсію, тобто

$$M\xi(t+s)=M\xi(t)+M\xi(s) \text{ та } D\xi(t+s)=D\xi(t)+D\xi(s).$$

Таким чином, ми прийшли до функціонального рівняння $f(x+y)=f(x)+f(y)$, яке на множині неперервних функції має єдиний розв'язок – лінійну функцію $f(x)=kx$.

Отже, $M\xi(t)=at$ і $D\xi(t)=\sigma^2 t$ (враховуючи, що дисперсія невід'ємна).

Враховуючи отриманий результат, знайдемо загальний вигляд кореляційної функції однорідного процесу з незалежними приростами $\xi(t)$: нехай $t>s$, тоді

$$R(t,s)=M\left(\xi(t)-M\xi(t)\right)\left(\xi(s)-M\xi(s)\right)=$$
$$=M\left(\xi(t)\xi(s)-\xi(t)M\xi(s)-\xi(s)M\xi(t)+M\xi(t)M\xi(s)\right)=$$

$$=M\xi(t)\xi(s)-M\xi(t)M\xi(s)-M\xi(s)M\xi(t)+M\xi(t)M\xi(s)=$$
$$=M\xi(t)\xi(s)-a^2ts=M\left(\xi(t)-\xi(s)+\xi(s)\right)\xi(s)-a^2ts=$$

$$=M\left(\xi(t)-\xi(s)\right)\xi(s)+M\xi^2(s)-a^2ts=M\left(\xi(t)-\xi(s)\right)M\xi(s)+$$
$$+M\xi^2(s)-a^2ts=M\xi(t-s)\cdot as+M\xi^2(s)-a^2ts=$$
$$=a^2(t-s)s+M\xi^2(s)-a^2ts=M\xi^2(s)-a^2s^2$$

Врахуємо, що $M\xi^2(s)=D\xi(s)+\left(M\xi(s)\right)^2=\sigma^2 s+a^2s^2$. Отже

$$R(t,s)=\sigma^2 s+a^2s^2-a^2s^2=\sigma^2 s.$$

Через те, що вираз для кореляційної функції є симетричним відносно t і s, то коли $s > t$ отримуємо, що $R(t,s) = \sigma^2 t$. Таким чином, остаточно отримуємо

$$R(t,s) = \sigma^2 \min\{t,s\}.$$

Далі ми докладніше розглянемо два конкретних процесу – процес Пуассона та вінерів процес, які відносяться до класу випадкових процесів з незалежними приростами.

§ 7. Процес Пуассона

Назвемо потоком подій послідовність однорідних подій, які з'являються одне за одним у випадкові моменти часу. Наприклад, надходження викликів на станцію швидкої допомоги, випромінювання ядром частинці при радіоактивним розпаді і т. п.

Розглянемо цілочисельну випадкову величину $\xi(t)$– число появ події A за проміжок часу $[0;t]$, при цьому вважаємо, що $\xi(0) = 0$. Якщо за цей проміжок часу подія A відбулася k разів, то будемо говорити, що система знаходиться у стані A_k. Позначимо через $P_k(t) = P\{\xi(t) = k\}$ ймовірність появи k подій за проміжок часу $[0;t]$.

Відносно процесу появи події A зробимо наступні природні припущення:

– значення $\xi(t)$ на проміжках часу, які не перетинаються, є незалежні випадкові величини;
– ймовірність появи k подій за проміжок часу $(t, t+\tau)$ залежить тільки від k і от довжини τ цього проміжку і не залежить від його розтушування на вісі часу. Ця ймовірність не залежить також від того, скільки разів и як з'являлись події раніше;
– будемо також припускати, що даний процес має властивість ординарності, яке полягає у тому, що практично неможлива

поява двох або більш подій за малий проміжок часу Δt. Якщо позначати через $P_{>1}(\Delta t)$ ймовірність появи більш чим одної події за проміжок часу Δt, то умова ординарності може бути записана у вигляді $P_{>1}(\Delta t) = o(\Delta t)$.

Процес, якій має дані властивості, називають процесом Пуассона або пуассоновим процесом. З приведених вище допущень слідує, що процес Пуассона є однорідним марковськім процесом з незалежними приростами.

Нашою задачею є знаходження ймовірностей $P_k(t)$ того, що на момент часу t відбудеться k подій. Візьмемо $t=1$ і позначимо через p ймовірність того, що за цей час не наступило жодної події $P_0(1) = p$. Розіб'ємо цей проміжок часу на n рівних частин.

Так як процес Пуассона є однорідним марковськім процесом, то $P_0(1) = \left(P_0\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = p$ і $P_0\left(\frac{1}{n}\right) = p^{\frac{1}{n}}$. Тоді для любого цілого m маємо $P_0\left(\frac{m}{n}\right) = p^{\frac{m}{n}}$.

Нехай $t>0$, тоді для будь-якого n знайдеться m таке, що $\frac{m}{n} \le t < \frac{m+1}{n}$. Оскільки ймовірність $P_0(t)$ є не зростаюча функція, то $P_0\left(\frac{m}{n}\right) \ge P_0(t) > P_0\left(\frac{m+1}{n}\right)$, отже $p^{\frac{m}{n}} \ge P_0(t) > p^{\frac{m+1}{n}}$. Нехай тепер n і m прямують до нескінченності так, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n} = t$. Тоді в силу отриманої подвійної нерівності $P_0(t) = p^t$.

Якщо $p=0$, то для любого t $P_0(t) = 0$, але тоді ймовірність того, що за проміжок часу будь-якої довжини відбудеться хоч одна подія A, дорівнює 1. Іншими словами, з ймовірністю 1 за проміжок часу будь-якої довжини відбувається безліч подій, а це суперечить умові ординарності процесу Пуассона. Якщо ж $p=1$, то події не відбуваються, отже, процесу взагалі немає. Тому ці два випадки не цікаві. Залишається випадок, коли $0<p<1$. Але тоді існує таке $\lambda>0$, що $p=e^{-\lambda}$ і $P_0(t)=e^{-\lambda t}$, при цьому $P_0(0)=1$.

Отримуємо тепер рівняння для знаходження $P_k(t)$. Для будь-якого Δt має місце рівність $P_0(\Delta t)+P_1(\Delta t)+P_{>1}(\Delta t)=1$.

Якщо Δt мало, то в силу умови ординарності $P_{>1}(\Delta t)=o(\Delta t)$, а $P_0(\Delta t)=e^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$. Тоді

$1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)+P_1(\Delta t)+o(\Delta t)=1$, звідки $P_1(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$.

Знайдемо ймовірність того, що за час $t+\Delta t$ подія A наступить рівно k разів. Це може здійснитися $k+1$ різними способами: за проміжок часу довжини t відбудуться усі k подій, а за час Δt жодної; за час t відбудуться $k-1$ подія, а за час Δt одна і так далі.

За формулою повної ймовірності отримаємо

$$P_k(t+\Delta t)=\sum_{j=0}^{k}P_j(\Delta t)P_{k-j}(t)=P_0(\Delta t)P_k(t)+P_1(\Delta t)P_{k-1}(t)+\sum_{j=2}^{k}P_j(\Delta t)P_{k-j}(t)$$

Так як $\sum_{j=2}^{k}P_j(\Delta t)P_{k-j}(t)\le\sum_{j=2}^{k}P_j(\Delta t)\le\sum_{j=2}^{\infty}P_j(\Delta t)=P_{>1}(\Delta t)=o(\Delta t)$, то

$$\begin{aligned}P_k(t+\Delta t)&=\left(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right)P_k(t)+\left(\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right)P_{k-1}(t)+o(\Delta t)=\\&=(1-\lambda\Delta t)P_k(t)+\lambda\Delta t\,P_{k-1}(t)+o(\Delta t)\end{aligned}$$

Звідки $\dfrac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=-\lambda P_k(t)+\lambda P_{k-1}(t)+\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}$.

При $\Delta t\to 0$ існує границя правої частини цей рівності, але тоді існує і границя лівої частини і ми отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$P_k'(t)=-\lambda P_k(t)+\lambda P_{k-1}(t),\ k=1,2,\ldots$ і $P_0(t)=e^{-\lambda t}$.

Початкові умови візьмемо наступні $P_0(0)=1,\ P_k(0)=0, k=1,2,...$

Для розв'язку отриманої системи рівнянь зробимо в ній заміну $P_k(t)=e^{-\lambda t}V_k(t)$, де $V_k(t)$ нова шукана функція. Тоді

$$P_k'(t)=-\lambda e^{-\lambda t}V_k(t)+e^{-\lambda t}V_k'(t),$$
$$-\lambda e^{-\lambda t}V_k(t)+e^{-\lambda t}V_k'(t)=-\lambda e^{-\lambda t}V_k(t)+\lambda e^{-\lambda t}V_{k-1}(t)$$

і отримана система диференціальних рівнянь перейде у наступну

$$V_k'(t)=\lambda V_{k-1}(t), k=1,2,...V_0(t)=1, V_0(0)=1, V_k(0)=0, k=1,2,...$$

Розв'яжемо ці рівняння послідовно

$$V_1'(t)=\lambda \Rightarrow V_1(t)=\lambda t+C_1, V_1(0)=C_1=0 \Rightarrow V_1(t)=\lambda t$$

$$V_2'(t)=\lambda V_1(t) \Rightarrow V_2'(t)=\lambda^2 t \Rightarrow V_2(t)=\frac{\lambda^2 t^2}{2}+C_2,$$

$$V_2(0)=C_2=0 \Rightarrow V_2(t)=\frac{\lambda^2 t^2}{2}$$

продовжуючи цій процес, отримуємо $V_k(t)=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$.

Тоді $P_k(t)=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$.

Таким чином, випадкова величина $\xi(t)$ розподілена за законом Пуассона $P\{\xi(t)=k\}=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$, у якого математичне сподівання $M\xi(t)=\lambda t$, а дисперсія $D\xi(t)=\lambda t$. Це узгоджується з тим, що ми отримали при розгляді процесів з незалежними приростами.

Параметр λ є інтенсивність процесу, тобто середня кількість подій за одиницю часу.

В силу однорідності процесу Пуассона ймовірність того, що за проміжок часу $(s,t), t>s$ відбудеться k подій, дорівнює

$$P\{\xi(t)-\xi(s)=k\}=P\{\xi(t-s)=k\}=\frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}$$

Проміжок часу θ між двома послідовними появами події A є випадкова величина. Знайдемо її закон розподілу. Через те, що подія $\theta>t$ еквівалентна тому, що за проміжок часу t подія A не відбулася ні разу, то $P\{\theta>t\}=P_0(t)=e^{-\lambda t}$. Тоді шукана функція розподілу є $F_\theta(t)=P\{\theta<t\}=1-e^{-\lambda t}$, тобто проміжки між двома послідовними появами подій мають показниковий розподіл з параметром λ.

Знайдемо тепер закон розподілу незалежних випадкових величин $\tau_1,\tau_2,...,\tau_n$– моментами появи події A у процесі Пуассона. Для цього позначимо через $\theta_1=\tau_1,\theta_2=\tau_2-\tau_1,...,\theta_n=\tau_n-\tau_{n-1}$ проміжки часу між послідовними появами подій. Враховуючи, що $\tau_n=\theta_1+\theta_2+...+\theta_n$, задача зводиться до знаходження закону розподілу суми незалежних випадкових величин, які мають показниковий розподіл.

У курсі теорії ймовірностей була отримана слідуюча формула для обчислення щільності суми двох незалежних випадкових величин через щільності доданків

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_1}(x-y)p_{\xi_2}(y)dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_2}(x-y)p_{\xi_1}(y)dy.$$

У нашому випадку $p_{\theta_k}(x)=\begin{Bmatrix}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{Bmatrix}$ і, оскільки щільності дорівнюють нулю при від'ємних значеннях аргументу, формула прийме вид

$$p_{\theta_1+\theta_2}(t)=\int\limits_0^t p_{\theta_1}(t-y)p_{\theta_2}(y)dy=\int\limits_0^t p_{\theta_2}(t-y)p_{\theta_1}(y)dy.$$

Послідовно знайдемо

$$p_{\theta_1+\theta_2}(t)=\int_0^t p_{\theta_1}(t-y)\,p_{\theta_2}(y)\,dy=\int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-y)}\lambda e^{-\lambda y}dy=\lambda^2e^{-\lambda t}\int_0^t dy=\lambda^2te^{-\lambda t}$$

$$p_{\theta_1+\theta_2+\theta_3}(t)=\int_0^t p_{\theta_1+\theta_2}(t-y)\,p_{\theta_3}(y)\,dy=\int_0^t \lambda^2(t-y)e^{-\lambda(t-y)}\lambda e^{-\lambda y}dy=$$

$$=\lambda^3e^{-\lambda t}\int_0^t (t-y)\,dy=-\lambda^3e^{-\lambda t}\left.\frac{(t-y)^2}{2}\right|_0^t=\frac{\lambda^3t^2}{2}e^{-\lambda t},\dots,p_{\theta_1+\dots+\theta_n}(t)=\frac{\lambda^nt^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}$$

Таким чином, розподіл випадкової величини τ_n має щільність

$$p_{\tau_n}(t)=\begin{cases}\lambda\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$$

Такій розподіл має назву розподіл Єрланга.

Знайдемо тепер кореляційну функцію та коваріацію для процесу Пуассона. У попередньому параграфі, коли були розглянути процеси з незалежними приростами, ми отримали вираз для кореляційної функції таких процесів

$$R(t,s)=\sigma^2\min\{t,s\}.$$

Враховуючи, що для процесу Пуассона $\sigma^2=\lambda$, отримуемо, що

$$R(t,s)=\lambda\min\{t,s\}.$$

Через те що коваріація пов’язана з кореляційною функцією співвідношенням $B(t,s)=R(t,s)+M\xi(t)M\xi(s)$, то для процесу Пуассона маємо $B(t,s)=\lambda\min(t,s)+\lambda^2ts$.

Завдання.

1) Середня кількість замовлень таксі, які надходять до диспетчерського пункту за одну хвилину, дорівнює трьом. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини надійдуть: а) чотири замовлення; б) жодного замовлення.

2) Показати, що для пуассонового процесу розподіл часу від поточного моменту часу до моменту появи чергової події не залежить от того, скільки пройшло часу від моменту появи останньої події до поточного моменту.

§ 8. Процес броунівського руху. Вінерів процес

Математична модель цього процесу зобов'язана своїм походженням добре відомому фізичному явищу броунівського руху. Розглянемо рух достатньо малої частинки, яка знаходиться в рідині (або газі), під впливом хаотичних зіткнень з молекулами рідини, які знаходяться в постійному русі. Якщо середовище однорідне, то рух частинки з кожної точки середовища, в який би момент часу ми не розглядували, буде однаковим у ймовірнісному сенсі в будь-якому напрямку. Якщо ввести вектор переміщень $\overline{\xi(t)} = \left(\xi_x(t), \xi_y(t), \xi_z(t)\right)$, то його координати незалежні і однаково розподілені. Отже, достатньо розглянути лише одну з цих компонент $\xi(t)$, умовившись говорити о броунівськім русі вздовж прямої. При цьому будемо вважати, що в момент часу $t=0$ частинка знаходилась у початку координат, тобто $\xi(0)=0$.

При ймовірнісному вивченні броунівського руху природно вважати, що швидкості молекул, з якими зштовхується частинка, випадкові і незалежні між собою. За малий проміжок часу частинка практично має дуже велику кількість незалежних один від одного зіткнень з молекулами і її швидкість так часто змінює свій напрямок та величину, що вона встигає «забути» значення швидкості у початковий момент часу. Тоді зміщення частинки $\xi(t+\tau)-\xi(t)$ за час τ не буде залежить ні від положення частинки, ні від її поведінки до моменту t (процес буде марковським). Крім того, з цих самих фізичних міркувань слідує, що даний процес буде: неперервним – траєкторія $\xi(t)$ руху частинці неперервна; однорідним за часом – зміщення $\xi(t+\tau)-\xi(t)$ частинки за час τ залежить тільки від довжини проміжку, але не від його розташування на вісі часу та процесом з незалежними приростами: якщо $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, то випадкові величини $\xi(t_1), \xi(t_2) - \xi(t_1), ..., \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ незалежні.

Завдяки тому, що рух частинці у рідині є результат великої кількості малих впливів зіткнень з молекулами, то у відповідності з центральною граничною теоремою, розумно полягати, що випадкова величина $\xi(t)$ має нормальний розподіл (гауссів розподіл).

Таким чином, можна визначати процес броунівського руху так:

Означення. Процесом броунівського руху називається випадковий процес $\xi(t)$, який має слідуючи властивості:

1) $\xi(0) = 0$

2) $\xi(t)$ однорідний процес з незалежними приростами

3) $\xi(t)$ нормальний (гауссовий) випадковий процес.

Через те, що процес броунівського руху є процесом з незалежними приростами, то для нього математичне сподівання дорівнює at, а дисперсія дорівнює $\sigma^2 t$. Стала a зветься коефіцієнтом зносу, а стала σ^2– коефіцієнтом дифузії. Таким чином, щільність функції розподілу процесу броунівського руху має вигляд

$$p(t,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-at)^2}{2\sigma^2 t}}$$

Слід зазначати, що у деяких авторів в означенні процесу броунівського руху міститься умова рівності нулю його математичного сподівання, що не є принциповим. Ми завжди можемо перейти до розгляду процесу $\eta(t) = \xi(t) - at$ з нульовим математичним сподіванням.

Якщо в означенні процесу броунівського руху прийняти $a = 0$, а $\sigma = 1$, то такий процес називають вінерівим процесом або ще стандартним вінерівим процесом.

Зокрема, одновимірний вінерів процес $w(t)$ – це однорідний процес з незалежним приростом, якій виходить з нуля і має нормальний розподіл з параметрами $a=0$ і $\sigma=1$.

У відповідності з результатами, отриманими при розгляді однорідних процесів з незалежним приростом, його кореляційна функція має вигляд $R(t,s)=\min(t,s)$.

Приклад. Нехай $w(t)$ вінерів процес. Доведемо, що випадковий процес $\xi(t)=t\,w\left(\frac{1}{t}\right)$ також є вінерівим процесом.

Доведемо спочатку, що процес $\xi(t)$ є гауссовим. Для будь-якого набору значень $t_1<t_2<...<t_n$ вектор $\left(\xi(t_1),\xi(t_2),...,\xi(t_n)\right)$ є лінійним перетворенням гауссового вектору $\left(w\left(\frac{1}{t_1}\right),w\left(\frac{1}{t_2}\right),...,w\left(\frac{1}{t_n}\right)\right)$, отже сам є гауссовим. Таким чином, $\xi(t)$– гауссів процес. Далі $\xi(0)=0$ і $M\xi(t)=t\,Mw\left(\frac{1}{t}\right)=0$ для будь-якого t.

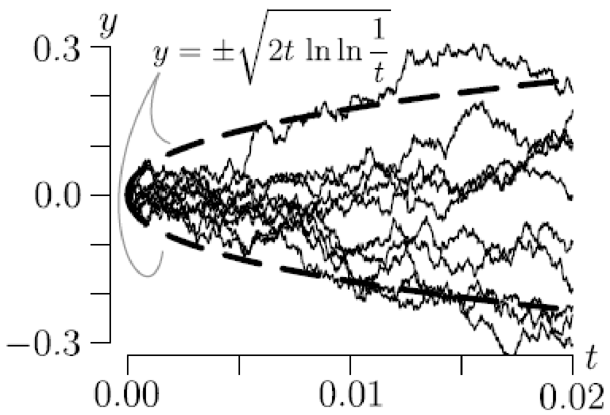
Знайдемо кореляційну функцію цього процесу

$$R_\xi(t,s)=tsMw\left(\frac{1}{t}\right)w\left(\frac{1}{s}\right)=ts\min\left(\frac{1}{t},\frac{1}{s}\right)=\begin{cases} ts\cdot\frac{1}{t}=s, t>s \\ ts\cdot\frac{1}{s}=t, s>t \end{cases}=\min(t,s).$$

Через те, що процес $\xi(t)$ гауссовий, то він повністю визначається своїм математичним сподіванням та кореляційною функцією. Отримана кореляційна функція таж сама, як і для однорідних процесів з незалежними приростами, тобто даний процес є вінерів.

Розглянемо тепер поведінку траєкторій вінерівого процесу, який моделює хаотичний рух. Траєкторії неперервні, але їх характер такій, як би вони були накреслені хаотично тремтячим пером, при цьому зовсім не гладкі.

Можна довести, що траєкторії вінерівого процесу неперервні з ймовірністю 1, точніше, у нього існує модифікація, усі траєкторії якої неперервні (так звана неперервна модифікація). Також можна довести, і ми це зробимо трохи пізніше, що з ймовірністю 1 траєкторії $w(t), t \geq 0$ не диференційовані ні в одній точці.



Поведінка траєкторій в околі точки $t = 0$ та при $t \to \infty$ описується законами повторного логарифма. Якщо накреслити криві $y = \pm\sqrt{2t \ln\ln \frac{1}{t}}$, то траєкторії вінерівого процесу «заповняють» область між цими кривими, але не виходять за їх межи в околі точки $t = 0$. При $t \to \infty$ траєкторії будуть обмежені кривими $y = \pm\sqrt{2t \ln\ln t}$.

Розглянемо тепер наступну властивість траєкторій вінерівого процесу. Вінерів процес описує симетричний рух частинки по дійсній прямій: так як $w(t)$ є координата частинки у момент часу $t \geq 0$, то

$$P\{w(t) > 0\} = P\{w(t) < 0\} = \frac{1}{2} \text{ коли } t > 0.$$

Більш того, якщо $a-$ задане число і τ_a- випадковий момент часу першого перетину траєкторією $w(t)$ рівня a, то подальший рух також симетричний

$$P\{w(t) > a / \tau_a \leq t\} = P\{w(t) < a / \tau_a \leq t\} = \frac{1}{2}.$$

Нехай $a > 0$. Знайдемо закон розподілу випадкової величини

$$\tau_a = \inf\{t \ge 0 : w(t) \ge a\},$$

тобто моменту першого перетину траєкторією рівня a. Нехай $t > 0$ таке, що $w(t) > a > 0$. Тому що траєкторії $w(t)$ неперервні, це можливо тільки якщо до моменту t траєкторія вже переткнула рівень a, тобто відбулася подія $\{\tau_a \le t\}$. Таким чином, з випадкової події $\{w(t) > a\}$ випливає подія $\{\tau_a \le t\}$, тому $\{w(t) > a\} \cap \{\tau_a \le t\} = \{w(t) > a\}$.

Отже, за формулою множення ймовірностей, отримуємо

$$P\{w(t) > a\} = P\{w(t) > a, \tau_a \le t\} = P\{w(t) > a / \tau_a \le t\} \cdot P\{\tau_a \le t\}.$$

Отож, $P\{w(t) > a / \tau_a \le t\} = P\{w(t) > a\} / P\{\tau_a \le t\}$.

За властивістю симетрії вінерівому процесу та отриманій при цьому рівності слідує, що ліва частина останнього співвідношення дорівнює $\frac{1}{2}$. Тому $P\{\tau_a \le t\} = 2P\{w(t) > a\}$,

тобто функція розподілу випадкової величин τ_a дорівнює

$$F_{\tau_a}(t) = P\{\tau_a \le t\} = 2P\{w(t) > a\} = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

При цьому було взято до уваги, що випадкова величина $w(t)$ має нормальний розподіл з нульовим математичним сподіванням і дисперсією, рівній t.

Таким чином, випадкова величина τ_a абсолютно неперервна і має розподіл зі щільністю

$$p_{\tau_a}(t) = F'_{\tau_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{2t}}, \quad t > 0.$$

Отриманий результат позволяє зробити слідуючі виводи:

а) $P\{\tau_a < \infty\} = 1$ для будь-якого скінченного $a > 0$, тобто траєкторія вінерівого процесу рано або пізніше перетне який завгодно високий рівень a;

б) $M\tau_a = \int_0^\infty t\, p_{\tau_a}(t)\,dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{a}{2t}} dt = \infty$, тобто середнє очікування цього перетину нескінченно велике.

Якщо ми знаємо розподіл випадкової величин τ_a, то можемо знайти і розподіл випадкової величини максимального зміщення траєкторії за фіксований час t

$$P\left\{\max_{0\le s\le t} w(s) \ge x\right\} = P\{\tau_x \le t\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_x^\infty e^{-\frac{z^2}{2t}} dz$$

Звідки функція розподілу величини $\xi = \max_{0\le s\le t} w(s)$ буде мати вигляд

$$F_\xi(x) = 1 - P\left\{\max_{0\le s\le t} w(s) \ge x\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2t}} dz .$$

Неперервна траєкторія вінерівого процесу $w(s), 0 \le s \le t$ досягає свого абсолютного максимуму у деякий точці $\tau, 0 \le \tau \le t$ (будемо мати у виду першу точку максимуму, якщо їх декілька). Можна довести, що спільна щільність розподілу випадкових величин τ і ξ має вигляд

$$p_{\tau,\xi}(s,x) = \frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}} \frac{x}{s} e^{-\frac{x^2}{2s}}, \quad 0 < s < t, 0 \le x < \infty .$$

Щільність же випадкової величини τ – точки максимуму вінерівої траєкторії на відрізку часу $[0,t]$ дорівнює

$$p_\tau(s) = \int_0^\infty p_{\tau,\xi}(s,x)\,dx = \frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}} \int_0^\infty \frac{x}{s} e^{-\frac{x^2}{2s}} dx = \frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}}, \quad 0 < s < t .$$

Звідки відповідна функція розподілу ймовірностей має виглял

$$F_{\tau}(s) = P\{\tau \le s\} = \int_0^s \frac{dz}{\pi\sqrt{z(t-z)}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{s}{t}}, \quad 0 \le s \le t.$$

Цій закон розподілу ймовірностей носить назву закону арксинуса. Такий же розподіл ймовірностей має, звичайно, и точка мінімуму траєкторії вінерівого процесу.

Вінерові процеси використовуються як при побудові математичних моделей явищ, які протікають у системах управління при випадкових впливах, так і при моделюванні коливань курсів акцій та інших цінних паперів на бірже. Крім того, вінерові процеси використовуються у теорії стохастичних інтегралів від випадкових функцій.

***Завдання*.**

1) Нехай $w(t)$ вінерів процес. Розглянемо на проміжку $[0,1]$ випадковий процес $\eta(t) = w(t) - t\,w(1)$. Знайти кореляційну функцію цього процесу.

2) Нехай $w(t)$ вінерів процес. Довести, що процеси

$$w_1(t) = w(t+s) - w(s) \quad \text{і} \quad w_2(t) = c\,w\left(\frac{t}{c^2}\right), c - const$$

також будуть вінерівими.

§ 9. Процеси розмноження та загибелі

У зв'язку з задачами біології виникла проста, але дуже корисна схема, яка отримала назву процесу розмноження та загибелі. Незважаючи на простоту початкових положень, ця схема знайшла широке застосування не тільки в біології, але і в чималій низці прикладних задач, зокрема, в задачах масового обслуговування.

Припустимо, що ми розглядаємо систему, яка може знаходитись в одному з станів $A_0, A_1, A_2, \ldots,$ множина яких скінченна або зчисленна. З часом стани системи змінюються, причому за проміжок часу тривалістю Δt система зі стану A_k переходить в стан A_{k+1} з ймовірністю $\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$ або в стан A_{k-1} з ймовірністю $\mu_k \Delta t + o(\Delta t)$. Ймовірність того, що за проміжок часу $(t, t+\Delta t)$ система перейде в стани $A_{k\pm i}, i>1$ незрівнянно мала по зрівнянню з Δt, тобто процес є ординарним. Звідси слідує, що ймовірність залишиться в тому ж стані A_k за проміжок часу Δt дорівнює $1-\lambda_k \Delta t - \mu_k \Delta t + o(\Delta t)$. Сталі λ_k і μ_k припускаються залежними від k, але ні від t і ні від того, яким шляхом система перейшла у цій стан. Останнє означає, що процес, якій розглядається, є марковським.

Випадковий процес, про який йде річ, носить назву процесу розмноження та загибелі. Якщо під A_k розуміти подію, яка полягає у тому, що чисельність деякої популяції дорівнює k, то перехід $A_k \to A_{k+1}$ означає, що чисельність популяції зросла на одиницю. Точно також перехід $A_k \to A_{k-1}$ слідує розглядати як загибель одного члена популяції. При цьому під λ_k розуміється інтенсивність народження при умові, що чисельність популяції дорівнює $k-1$, а під μ_k– інтенсивність загибелі при умові, що чисельність популяції дорівнює k.

Якщо при будь-якому k має місце рівність $\mu_k = 0$, тобто можливі тільки переходи $A_k \to A_k$ і $A_k \to A_{k+1}$ у момент зміни стану системи, то процес називають процесом чистого розмноження (саме таким є процес Пуассона). Якщо же усі $\lambda_k = 0$, тобто можливі тільки переходи $A_k \to A_k$ і $A_k \to A_{k-1}$, то говорять, що має місце процес загибелі.

Будемо також вважати, що процес, який розглядається, є стохастично неперервним та локально регулярним. Якщо позначати через $P_k(t)$ ймовірність того, що система в момент часу t знаходиться у стані A_k, и провести міркування, аналогічні проведеним при дослідженні процесу Пуассона, то ми прийдемо до наступній системі звичайних диференціальних рівнянь

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t)$$
$$P_k'(t) = -(\lambda_k + \mu_k) P_k(t) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t) + \mu_{k+1} P_{k+1}(t),\ k \ge 1$$

Крім того, треба вказати, з якого стану A_j почала змінюватися система, тобто, скільки членів популяції було у початковий момент часу. Візьмемо $P_j(0) = 1,\ P_k(0) = 0$ коли $k \ne j$ (для процесу Пуассона ми припускали, що в початковий момент часу система находилась у стані A_0).

Отримана система приймає особливо простій вид для процесів чистого розмноження $(\mu_k = 0)$ або чистої загибелі $(\lambda_k = 0)$. Наприклад, для першого випадку ми маємо рекурентну систему

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t)$$
$$P_k'(t) = -\lambda_k P_k(t) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t),\ k \ge 1$$

з початковими умовами $P_0(0) = 1,\ P_k(0) = 0,\ k \ge 1.$

Припускаючи, що усі λ_k різні, послідовно знаходимо

$$P_0(t) = C_0 e^{-\lambda_0 t},\ P_0(0) = C_0 = 1 \text{ і } P_0(t) = e^{-\lambda_0 t}.$$

При $k = 1$ маємо $P_1'(t) + \lambda_1 P_1(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $P_1(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t}$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $P_1(t) = A e^{-\lambda_0 t}$. Підставив його в рівняння, отримаємо $-\lambda_0 A e^{-\lambda_0 t} + \lambda_1 A e^{-\lambda_0 t} = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$, звідки $A = \dfrac{\lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0}$. Таким чином, $P_1(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t} + \dfrac{\lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0} e^{-\lambda_0 t}$. З початкової умови $P_1(0) = C_1 + \dfrac{\lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0} = 0$ знайдемо $C_1 = -\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0}$, тоді $P_1(t) = \dfrac{\lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0}\left(e^{-\lambda_0 t} - e^{-\lambda_1 t}\right)$.

Продовжує цій процес, знайдемо

$$P_2(t)=\frac{\lambda_0\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_0}\left[\frac{1}{\lambda_2-\lambda_0}\left(e^{-\lambda_0 t}-e^{-\lambda_2 t}\right)+\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}\right)\right]$$ і так далі.

З отриманих формул видно, що $P_k(t)\geq 0$. Залишається відкритим питання – чи виконується умова $\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)=1$. Виявляється, що вона вірна не завжди: якщо коефіцієнти λ_k зростають достатньо швидко, то може опиниться, що $\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)<1$. Відповідь на це запитання дає наступна теорема.

Теорема Феллера. Для того, щоб при усіх значеннях t розв'язок $P_k(t)$ рівняння чистого розмноження задовольняв умові $\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)=1$, необхідно і достатньо, щоб розбігався ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}$.

Без доведення.

Пояснимо цей результат. На суму $\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)$ можна дивитись як на ймовірність того, що за час t відбудеться лише скінченне число змін станів системи. Таким чином, різницю $1-\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)$ слідує інтерпретувати як ймовірність нескінченного числа змін станів системи за час t (свого роду лавиноподібний зріст або вибух). Так, для процесу Пуассона $\lambda_k=\lambda$, ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda}$ розбігається і має місце рівність $\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)=1$.

У загальному випадку ($\lambda_k\geq 0, \mu_k\geq 0$) система отриманих рівнянь має іншу структуру і послідовне знаходження $P_k(t)$ вже неможливо. Для її розв'язку використається більш складний математичний апарат, який ми тут розглядати не будемо. Зупинимося тільки на умовах існування та єдності розв’язку цієї системи.

Рівність $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1$ має місце при усіх t, якщо розбігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$. Якщо крім того збігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$, то існує граничний розподіл ймовірностей $p_k = \lim_{t \to \infty} P_k(t)$. Ця умова, зокрема, виконується, якщо починаючи з деякого k_0, справедлива нерівність $\frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} \le \delta < 1$. Інтуїтивно ця умова ясна: вона означає, що швидкість загибелі членів популяції не повинна перевершити швидкості їх народження.

Розглянемо ще питання щодо знаходження безумовних ймовірностей для стаціонарного випадку. Запишемо систему рівнянь Колмогорова для безумовних ймовірностей для випадків, коли вони не залежать від часу $P_k(t) = P_k$

$$-\lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1 = 0$$
$$-(\lambda_k + \mu_k) P_k + \lambda_{k-1} P_{k-1} + \mu_{k+1} P_{k+1} = 0, \ k \ge 1$$

З першого рівняння знайдемо $P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$. При $k = 1$ з другого рівняння знаходимо

$$\mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1) P_1 - \lambda_0 P_0 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1} P_0 \Rightarrow P_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} P_0$$

Продовжуючи цей процес, отримуємо $P_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} P_0$.

Будемо вважати, що виконана умова існування граничного розподілу – збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$. Тоді ми можемо використати умову $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ для знаходження ймовірності P_0 $P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 ... \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 ... \mu_k}\right)^{-1}$

Таким чином, $P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 ... \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 ... \mu_n} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 ... \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 ... \mu_k}\right)^{-1}$.

Розглянутий процес народження та загибелі може служити як при опису та вивченні чисто технічних задач (наприклад, задач масового обслуговування), так і при моделюванні деяких задач в економіці, страхуванні, а також ряду інших.

Наприклад, процес народження та загибелі у випадку $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda$ і $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu$ являє собою математичну модель одноканальної системи масового обслуговування з пуассоновим вхідним потоком інтенсивності λ и показниковим розподілом тривалості обслуговування з інтенсивністю μ. Довжина черги не обмежена.

Якщо ввести позначення $\rho = \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} = \frac{\lambda}{\mu}$, то умова існування граничного розподілу – збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$ – буде виконана при $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, тобто коли швидкість надходжень вимог менша швидкості їх обслуговування (інакше черга буде зростати до нескінченності). В цьому випадку для безумовних ймовірностей отримаємо вираз

$$P_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n\right)^{-1} = \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^{-1} = 1 - \rho \text{ і } P_k = \rho^k P_0 = \rho^k (1-\rho), k = 1, 2, ...,$$

тобто має місце геометричний розподіл ймовірностей для числа замовлень ξ у системі. Знайдемо тепер середнє число замовлень у системі

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-\rho)\rho^k = (1-\rho)\rho \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1} = (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k =$$

$$= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho}\frac{\rho}{1-\rho} = (1-\rho)\rho\frac{1-\rho+\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda},$$

а ймовірність того, що в системі буде не менше m замовлень дорівнює

$$P\{\xi \ge m\} = \sum_{k=m}^{\infty} \rho^k (1-\rho) = \rho^m.$$

Довжина черги визначається рівністю $\eta = \begin{cases} \xi, & \xi = 0 \\ \xi - 1, & \xi > 0 \end{cases}$. При цьому середня довжина черги буде дорівнювати

$$M\eta = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)(1-\rho)\rho^k = (1-\rho)\rho\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^{k-1} - (1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k =$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} - (1-\rho)\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}.$$

Завдання.

1) Отримати приведену систему диференціальних рівнянь, яка описує процес розмноження та загибелі.

2) Розв'язати систему диференціальних рівнянь відносно ймовірностей $P_k(t)$ для процесу чистої загибелі, зважаючи, що в початковий момент часу популяція складалася з n членів.

3) Розв'язати систему диференціальних рівнянь відносно ймовірностей $P_k(t)$ для процесу чистої загибелі для випадку, коли усі $\mu_k = \mu$, зважаючи, що в початковий момент часу популяція складалася з n членів.

§ 10. Процеси відновлення

Назва цього виду процесів пов'язана з наступною прикладною задачею. Нехай маємо деякий прилад, який містить змінний елемент. Припустимо, що після початку роботи приладу цей елемент, попрацювавши випадковий час ξ_1, вийшов з ладу і потрібує заміни або ремонту (відновлення). Замінений елемент, у свою чергу, попрацювавши випадковий час ξ_2, виходить з ладу і замінюється наступним новим елементом и так далі. Випадкові величини ξ_k будемо вважати незалежними, однаково розподіленими з функцією розподілу $F(t)=P\{\xi_k<t\}$ такою, що $F(0)=0$, та мають математичне сподівання $M\xi_k=a$. Розглянемо величини

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k,\quad S_0=0,$$

які мають значення моменту n-го відновлення приладу, тобто S_n є момент закінчення роботи n-го елементу і заміни його на $n+1$ елемент. Ми відносимо до моментів відновлення і момент S_0 включення першого елементу.

Означення. Процесом відновлення будемо називати сукупність випадкових величин $\eta(t)$, які залежать від параметру t і визначені на $\langle\Omega,F,P\rangle$ рівністю

$$\eta(t)=\min\{n:S_n\ge t\},\quad t\ge 0.$$

Таким чином, $\eta(t)$ – це число відновлень, які відбулися на проміжку часу $[0,t]$. Інакше кажучи $\eta(t)=n$, якщо $S_{n-1}\le t<S_n$.Якщо на дійсній осі нанести точки $S_0=0, S_1, S_2, \ldots$, то $\eta(0)=1$ на пів інтервалі $[0,S_1)$, $\eta(t)=2$ на пів інтервалі $[S_1,S_2)$ и так далі. Зрозуміло, що $\eta(t)$ є марковською випадковою величиною, тому що термін служби відновленого елементу не залежить від того, скільки разів цей елемент замінювався і рахується від останньої заміни.

Означення. Функцією відновлення називають математичне сподівання випадкової величин $\eta(t)$

$$H(t)=M\eta(t),\quad t\ge 0.$$

Функція відновлення $H(t)$ має простий зміст – це є середнє число відновлень до моменту часу t. Покажемо, що функція відновлення існує при усіх t.

Лема. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P\{S_n \le \varepsilon\} = 0$.

Доведення. Розглянемо

$$P\{S_n \le \varepsilon\} = P\left\{\sum_{k=1}^{n}\xi_k \le \varepsilon\right\} = P\left\{-\sum_{k=1}^{n}\xi_k \ge -\varepsilon\right\} = P\left\{e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k} \ge e^{-\varepsilon}\right\}$$

За першою нерівністю Чебишева

$$P\{S_n \le \varepsilon\} = P\left\{e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k} \ge e^{-\varepsilon}\right\} \le \frac{Me^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k}}{e^{-\varepsilon}} = M\left(e^{-\xi_1}\cdot e^{-\xi_2}\cdot\ldots\cdot e^{-\xi_n}\right)\cdot e^{\varepsilon}$$

Враховуючи, що випадкові величини ξ_k незалежні і однаково розподілені, отримуємо

$P\{S_n \le \varepsilon\} \le \left(Me^{-\xi_1}\right)^n \cdot e^{\varepsilon} = \delta^n e^{\varepsilon}$, де $\delta = Me^{-\xi_1} < 1$. Звідки $P\{S_n \le \varepsilon\} \to 0$ коли $n \to \infty$.

Позначимо через $F_n(t) = P\{S_n < t\}$ функцію розподілу випадкової величини S_n.

Теорема. $H(t) = M\eta(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} F_k(t)$. Даний ряд збігається рівномірно на любому скінченному проміжку $[0, T]$.

Доведення. Фазовим простором для випадкової величини $\eta(t)$ є множина натуральних чисел, тому $H(t) = M\eta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kP\{\eta(t) = k\}$.

Знайдемо ймовірність події

$$P\{\eta(t) = k\} = P\{S_{k-1} < t \le S_k\} = P\{t \le S_k\} - P\{t \le S_{k-1}\} =$$
$$= 1 - P\{S_k < t\} - 1 + P\{S_{k-1} < t\} = P\{S_{k-1} < t\} - P\{S_k < t\} = F_{k-1}(t) - F_k(t)$$

Тоді

$$H(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k\left[F_{k-1}(t)-F_k(t)\right]=F_0(t)-F_1(t)+2\big(F_1(t)-F_2(t)\big)+$$

$$+3\big(F_2(t)-F_3(t)\big)+\ldots=F_0(t)+F_1(t)+F_2(t)+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}F_k(t),$$

при цьому $F_0(t)=P\{S_0<t\}=\theta(t)=\begin{cases}1, t>0\\0, t\le 0\end{cases}$.

За доведеною вище лемою при $t\in[0,T]$ $F_k(t)=P\{S_k<t\}\le\delta^k e^T$, тому ряд з таким загальним членом збігається рівномірно, так як його член мажорується членами збіжного числового ряду.

Поведінку функції відновлення при $t\to\infty$ дає наступна

Теорема відновлення. $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{H(t)}{t}=\dfrac{1}{a}$.

Без доведення.

Зміст цей теореми інтуїтивно ясен: середнє число відновлень за одиницю часу дорівнює величині, яка обернена середньому часу неперервної роботи елементу.

Для процесів відновлення також виконується і закон великих чисел

Теорема. Для будь-якого $\varepsilon>0$ $\lim\limits_{t\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{\eta(t)}{t}-\dfrac{1}{a}\right|>\varepsilon\right\}=0$.

Без доведення.

При розгляданні процесів відновлення інтерес представляють дві випадкові величини:

$\chi(t)=S_{\eta(t)}-t$ – ексцес рівня процесу відновлення, тобто час, який ще буде працювати елемент, якій працює у момент часу t;

$\gamma(t)=t-S_{\eta(t)-1}$ – дефект рівня процесу відновлення, тобто час, якій цей елемент працює після останнього відновлення.

Не слід думати, що сума $\chi(t)+\gamma(t)$ розподілена так саме як і ξ_k. Справа в тому, що ця сума дорівнює значенню ξ з випадковим індексом $\eta(t)$. Зокрема, може виявитися, що $M\chi(t)>M\xi_k$ при великих значеннях t.

З цією обставиною пов'язано уявний парадокс в наступному прикладі.

Пасажир, який прийшов на автобусну зупинку, через яку проходять автобуси з інтервалами $\xi_1>0,\xi_2>0,...\left(M\xi_k=a\right)$, буде чекати приходу чергового автобуса час χ, середнє значення якого $M\chi$, може виявитися більше, ніж a.

Для подальших міркувань нам потрібні деякі додаткові знання, які хоч і були розглянути у курсі теорії ймовірностей, але нагадаємо їх ще раз.

Нехай ξ_1 і ξ_2 дві незалежні випадкові величин, а $F_{\xi_1}(t)$ і $F_{\xi_2}(t)$ їх функції розподілу. Знайдемо функцію розподілу $F_{\xi_1+\xi_2}(t)$ їх суми.

Нехай ці випадкові величини абсолютно неперервні, тоді їх спільна щільність розподілу дорівнює добутку їх щільності розподілу $p_{\xi_1+\xi_2}(t_1,t_2)=p_{\xi_1}(t_1)\,p_{\xi_2}(t_2)$. Розглянемо

$$F_{\xi_1+\xi_2}(t)=\iint\limits_{t_1+t_2<t} p_{\xi_1}(t_1)\,p_{\xi_2}(t_2)\,dt_1dt_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(t_1)\,dt_1\int\limits_{-\infty}^{t-t_1} p_{\xi_2}(t_2)\,dt_2=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(t_1)\,F_{\xi_2}(t-t_1)\,dt_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_2}(t-t_1)\,dF_{\xi_1}(t_1).$$

Якщо кожна з функцій $F_{\xi_i}(t)=0$ для від'ємних значень аргументу, то

$$F_{\xi_1+\xi_2}(t)=\int\limits_0^t F_{\xi_2}(t-t_1)\,dF_{\xi_1}(t_1)=\int\limits_0^t F_{\xi_1}(t-t_1)\,dF_{\xi_2}(t_1)=\left(F_{\xi_1}*F_{\xi_2}\right)(t)$$

Отриманий вираз називають згорткою функцій $F_{\xi_1}(t)$ і $F_{\xi_2}(t)$.

Аналогічна формула справедлива і для щільності їх функцій розподілу

$$p_{\xi_1+\xi_2}(t) = \int_0^t p_{\xi_2}(t-t_1)\,p_{\xi_1}(t_1)\,dt_1 = \int_0^t p_{\xi_1}(t-t_1)\,p_{\xi_2}(t_1)\,dt_1 = \left(p_{\xi_1} * p_{\xi_2}\right)(t).$$

Повернемось до розгляду процесу відновлення, для якого $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ є послідовність незалежних випадкових величин, які мають однаковий розподіл з функцією розподілу $F(t) = P\{\xi_k < t\}$. Випадкові величини $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ мають функцію розподілу $F_n(t) = P\{S_n < t\}$. Тоді, у відповідність з отриманими вище формулами

$F_1(t) = P\{\xi_1 < t\} = F(t),\ F_2(t) = P\{\xi_1 + \xi_2 < t\} = (F_1 * F)(t),$

$F_3(t) = P\{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 < t\} = (F_2 * F)(t), \ldots,$

$F_{n+1}(t) = P\{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{n+1} < t\} = (F_n * F)(t) = \int_0^t F_n(t-u)\,dF(u)$.

Раніше ми отримали формулу, що

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) = \theta(t) + \sum_{m=0}^{\infty} F_{m+1}(t) = \theta(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t F_m(t-u)\,dF(u).$$

В силу рівномірної збіжності ряду на любому скінченному проміжку $[0, T]$, можна змінити місцями операції підсумовування та інтегрування, тоді

$H(t) = \theta(t) + \int_0^t \left[\sum_{m=0}^{\infty} F_m(t-u)\right] dF(u)$, тобто

$H(t) = \theta(t) + \int_0^t H(t-u)\,dF(u).$

Таким чином, функція відновлення $H(t)$ є розв'язком рівняння

$$H(t) = \theta(t) + \int_0^t H(t-u)\,dF(u).$$

Нехай $z(t)$ довільна неперервна при $0 \le t < \infty$ функція, яка дорівнює нулю при $t < 0$. Розглянемо рівняння відносно функції $Z(t)$

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-u)\,dF(u),$$

яке називається рівнянням відновлення.

Покажемо, що його розв'язком є функція

$$Z(t) = \int_0^t z(t-s)\,dH(s) = (z * H)(t).$$

Підставимо в нього отримане вище подання для

$$H(s) = \theta(s) + \int_0^s H(s-u)\,dF(u):$$

$$Z(t) = \int_0^t z(t-s)\,d\left[\theta(s) + \int_0^s H(s-u)\,dF(u)\right] = I_1(t) + I_2(t),$$ де

$$I_1(t) = \int_0^t z(t-s)\,d\theta(s) = z(t),$$ через те що $\theta'(s) = \delta(s)$, де

δ - функція Дірака.

$$I_2(t) = \int_0^t z(t-s)\left[\frac{\partial}{\partial s}\int_0^s H(s-u)\,dF(u)\right]ds =$$

$$= \int_0^t z(t-s)\left[H(0)F'(s) + \int_0^s H'(s-u)\,dF(u)\right]ds$$

Так як $H(0) = 0$, то в останньому повторному інтегралі змінимо порядок інтегрування та зробимо заміну змінної інтегрування $s - u = y$

$$I_2(t) = \int_0^t\left[\int_0^{t-u} H'(y)z(t-u-y)\,dy\right]dF(u) = \int_0^t\left[\int_0^{t-u} z(t-u-y)\,dH(y)\right]dF(u) =$$

$$= \int_0^t Z(t-u)\,dF(u)$$

Таким чином, $Z(t)=z(t)+\int\limits_0^t Z(t-u)dF(u)$, отже рівняння задовольняється.

Покажемо тепер, що на множені локально обмежених функцій (тобто обмежених на будь-якому скінченному проміжку) розв'язок рівняння відновлення єдиний. Нехай $Z_1(t)$ і $Z_2(t)$ два розв'язки цього рівняння. Тоді їх різниця $Z_0(t)=Z_1(t)-Z_2(t)$ задовольняє однорідному рівнянню

$Z_0(t)=\int\limits_0^t Z_0(t-u)dF(u)=(Z_0*F)(t)$, звідки

$$Z_0(t)=(Z_0*F)(t)=((Z_0*F)*F)(t)=(Z_0*(F*F))(t)=(Z_0*F_2)(t),$$

$$Z_0(t)=(Z_0*F_2)(t)=((Z_0*F_2)*F)(t)=(Z_0*(F_2*F))(t)=(Z_0*F_3)(t),...,$$
$$Z_0(t)=(Z_0*F_n)(t).$$

Ми отримали, що $Z_0(t)=\int\limits_0^t Z_0(t-u)dF_n(u), n\geq 1$. За умовою

$\sup\limits_{0\leq t\leq T}|Z_0(t)|=M$. Тоді

$$|Z_0(t)|\leq\int\limits_0^t|Z_0(t-u)|dF_n(u)\leq M\int\limits_0^t dF_n(u)=MF_n(t).$$

Раніше ми показали, що $F_n(t)\leq\delta^n e^T$, де $0<\delta<1$. Таким чином, $|Z_0(t)|\leq M\delta^n e^T$.

Переходячи до границі коли $n\to\infty$, отримуємо, що $Z_0(t)=0$, тобто $Z_1(t)=Z_2(t)$ і розв'язок єдиний.

Приклад. Нехай усі випадкові величини ξ_k мають показниковий розподіл

$F(t)=P\{\xi_k<t\}=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, t>0\\ 0, \quad t\leq 0\end{cases}$, $\lambda>0$ з щільністю $p_{\xi_k}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, t>0\\ 0, \quad t\leq 0\end{cases}$.

Знайдемо щільність розподілу випадкових величин
$S_n(t)=\xi_1+\xi_2+...+\xi_n$ коли $t>0$.

$$p_{S_2}(t)=\int_0^t p_{\xi_1}(t-u)\,p_{\xi_2}(u)\,du=\int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-u)}\lambda e^{-\lambda u}du=\lambda^2e^{-\lambda t}\int_0^t du=\lambda^2te^{-\lambda t}$$

$$p_{S_3}(t)=\int_0^t p_{S_2}(t-u)\,p_{\xi_3}(u)\,du=\int_0^t \lambda^2(t-u)e^{-\lambda(t-u)}\lambda e^{-\lambda u}du=$$

$$=\lambda^3e^{-\lambda t}\int_0^t (t-u)\,du=-\lambda^3e^{-\lambda t}\left.\frac{(t-u)^2}{2}\right|_0^t=\frac{\lambda^3t^2}{2}e^{-\lambda t},\ ...,\ p_{S_n}(t)=\frac{\lambda^nt^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}.$$

Таким чином, $p_{S_n}(t)=\begin{cases}\lambda\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t},\ t>0\\ 0,\quad t\le 0\end{cases}.$

Такий розподіл зветься розподілом Єрланга і ми вже раніше його отримали коли розглядалі процес Пуассона.

Знайдемо тепер функцію відновлення. Нехай $t>0$

$$H(t)=\theta(t)+\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t p_{S_n}(x)\,dx=1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \lambda\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}dx=$$

$$=1+\lambda\int_0^t e^{-\lambda x}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1!)}\right]dx=1+\lambda\int_0^t e^{-\lambda x}e^{\lambda x}dx=1+\lambda\int_0^t dx=1+\lambda t.$$

Таким чином, для даного випадку $H(t)=1+\lambda t$ при $t>0$.

Можна також показати, що випадкова величина $\eta(t)-1$ розподілена по закону Пуассона

$$P\{\eta(t)-1=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}.$$

Аналізуючи отриманий у даному прикладі результат, можна зробити висновок, що процес відновлення з показниковим розподілом часу роботи ξ_k елементів, які заміняються, є процесом Пуассона. Дійсно, моменти S_n n-го відновлення мають теж самий розподіл Єрланга, що і момент часу τ_n появи n-ої події в процесі Пуассона, в обох процесах проміжки часу ξ_k між заміною елементів і θ між двома послідовними появами подій у процесі Пуассона мають однаковий показниковий розподіл. Нарешті, число відновлень $\eta(t)$ за проміжок часу $[0,t]$ має такий самий розподіл, що і число $P_n(t)$ подій, які відбулись за цей проміжок часу (точніше вони відрізняються на одиницю за рахунок того, що для процесу відновлення $t=0$ є моментом першого відновлення, а для процесу Пуассона в цій момент часу подія ще не відбулася).

Завдання. Для випадку, коли усі випадові величини ξ_k мають показниковий розподіл, знайти закон розподілу випадкової величини $\eta(t)$.

§ 11. Застосування теорії випадкових процесів в страховій математиці

Крім застосування у природничих науках, теорія випадкових процесів широко застосовується і в соціальних науках – економіці, соціології, психології. Так, в економіці в якості окремого направлення розглядається актуарна (страхова) математика. Розглянемо тут класичну модель теорії ризику, яку використовують у страхуванні.

Нехай розміри виплат, що проводить деяка страхова компанія, утворюють послідовність незалежних випадкових величин $\xi_k, k=1,2,\ldots$, однаково розподілених з функцією розподілу $F(x)=P\{\xi_k<x\}$. Будемо припускати, що $F(0)=0$ (це означає, що усі $\xi_k>0$) і існує математичне сподівання $M\xi_k=a$ та дисперсія $D\xi_k=\sigma^2$.

Припустимо, що число N_t страхових виплат на відрізку $[0,t]$ є процесом Пуассона з інтенсивністю λ, математичне сподівання якого

$MN_t = \lambda t$. Припускаємо також, що послідовність випадкових величин $\{\xi_k\}$ і процес N_t є взаємно незалежні. Таким чином, в момент часу t_k до страхової компанії надходить чергова вимога і в цей момент вона виплачує суму ξ_k, а N_{t_k} збільшується на одиницю.

Випадковий процес

$$S_t = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k, \quad S_0 = 0$$

це є загальна сума виплат, здійснених компанією на відрізку часу $[0, t]$.

Врахуємо, що математичне сподівання суми випадкового числа випадкових величин визначається формулою

$$MS_t = MN_t \cdot M\xi_k = \lambda t \cdot a = a\lambda t$$

Нехай c – стала, яка характеризує інтенсивність надходження страхових внесків. Тоді прибуток компанії за проміжок часу $[0, t]$ дорівнює

$$Q_t = ct - S_t,$$

а математичне сподівання цього прибутку дорівнює

$$MQ_t = ct - a\lambda t = (c - a\lambda)t.$$

Відносна страхова надбавка визначається як

$$\rho = \frac{MQ_t}{MS_t} = \frac{c - a\lambda}{a\lambda} = \frac{c}{a\lambda} - 1.$$

Зрозуміло, що $\rho > 0$ якщо $c > a\lambda$, тобто інтенсивність надходження страхових внесків більше інтенсивності розміру страхових виплат.

Означення. Процесом ризику називають випадковий процес

$$U_t = u + ct - S_t,$$

де u – початковий капітал компанії, а U_t – сумарний капітал компанії в момент часу t.

Природно розглянути питання о ймовірності банкрутства цієї компанії з початковим капіталом u на проміжку часу $[0,+\infty)$. Позначимо цю ймовірність через $\psi(u)$. Ясно, що

$$\psi(u)=P\{U_t<0 \text{ при деякому } t>0\}.$$

Розглянемо також функцію

$$\varphi(u)=1-\psi(u),$$

яка виражає ймовірність того, що на проміжку часу $[0,+\infty)$ банкрутства не відбувається.

Теорема. Функція $\varphi(u)$ диференційована і задовольняє інтегро-диференціальне рівняння

$$\varphi'(u)=\frac{\lambda}{c}\varphi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u\varphi(u-z)dF(z) \qquad \text{(I)}$$

Доведення. Нехай перша виплата у розмірі ξ_1 відбулась в момент часу $t_1=s$. Щоб банкрутство не відбулось, необхідно, щоб $\xi_1\le u+cs$ і щоб банкрутство не відбулось на проміжку часу $[s,+\infty)$ при початковому капіталі $u+cs$.

З означення процесу Пуассона слідує, що випадкова величина t_1 має показниковий розподіл з параметром λ. Дійсно, при $s>0$

$$P\{t_1\le s\}=1-P\{t_1>s\}=1-e^{-\lambda s}$$

так як подія $t_1>s$ відбувається тоді і тільки тоді, коли на проміжку $[0,s]$ не було жодної виплати, то ймовірність цієї події $P_0(s)=e^{-\lambda s}$. Таким чином, ймовірність того, що банкрутств не відбулось, дорівнює

$$\varphi(u)=\int_0^{+\infty}d\left(1-e^{-\lambda s}\right)\left[\int_0^{u+cs}\varphi(u+cs-z)dF(z)\right]ds=$$

$$=\lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}\left[\int_0^{u+cs}\varphi(u+cs-z)\,dF(z)\right]ds$$

Перейдемо в цьому інтегралі до нової змінної $x=u+cs$. Тоді

$$s=\frac{x-u}{c},\ ds=\frac{1}{c}dx,\quad e^{-\lambda s}=e^{\frac{\lambda}{c}u}\cdot e^{-\frac{\lambda}{c}x}\ \text{і}$$

$$\varphi(u)=\frac{\lambda}{c}e^{\frac{\lambda}{c}u}\int_u^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{c}x}\left[\int_0^{x}\varphi(x-z)\,dF(z)\right]dx.$$

З отриманого виразу видно, що функція $\varphi(u)$ буде диференційованою (за властивістю інтегралу зі змінною границею). Знайдемо тепер похідну від цієї функції, використовуючи правило диференціювання інтегралу зі змінною нижньою границею

$$\varphi'(u)=\frac{\lambda}{c}\cdot\frac{\lambda}{c}e^{\frac{\lambda}{c}u}\int_u^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{c}x}\left[\int_0^{x}\varphi(x-z)\,dF(z)\right]dx-\frac{\lambda}{c}e^{\frac{\lambda}{c}u}e^{-\frac{\lambda}{c}u}\int_0^{u}\varphi(u-z)\,dF(z)=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\varphi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^{u}\varphi(u-z)\,dF(z).$$

Таким чином, для функції $\varphi(u)$ справедливо рівняння (I) и теорема доведена.

Отримуємо ще одне інтегральне рівняння для функції $\varphi(u)$. Для цього інтегруємо рівняння (I) за змінною u на проміжку $[0,t]$:

$$\varphi(t)-\varphi(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^{t}\varphi(u)\,du+\frac{\lambda}{c}\int_0^{t}\left\{\int_0^{u}\varphi(u-z)\,d\left[1-F(z)\right]\right\}du=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\int_0^{t}\left\{\varphi(u)+\int_0^{u}\varphi(u-z)\,d\left[1-F(z)\right]\right\}du$$

Внутрішній інтеграл інтегруємо частинами. Тоді

$$\varphi(t)-\varphi(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^{t}\left\{\varphi(u)+\varphi(u-z)\left[1-F(z)\right]\Big|_0^u+\int_0^{u}\varphi'(u-z)\left[1-F(z)\right]dz\right\}du=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\int_0^t\left\{\varphi(u)+\varphi(0)\left[1-F(u)\right]-\varphi(u)+\int_0^u\varphi'(u-z)\left[1-F(z)\right]dz\right\}du=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\varphi(0)\int_0^t\left[1-F(u)\right]du+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\left\{\int_0^u\varphi'(u-z)\left[1-F(z)\right]dz\right\}du$$

Змінимо в другому інтегралі порядок інтегрування

$$\varphi(t)-\varphi(0)=\frac{\lambda}{c}\varphi(0)\int_0^t\left[1-F(u)\right]du+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\left\{\left[1-F(z)\right]\int_z^t\varphi'(u-z)du\right\}dz=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\varphi(0)\int_0^t\left[1-F(u)\right]du+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\left[1-F(z)\right]\left[\varphi(t-z)-\varphi(0)\right]dz=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\int_0^t\varphi(t-z)\left[1-F(z)\right]dz$$

Замінюючи тепер t на u, отримаємо інтегральне рівняння відносно функції $\varphi(u)$

$$\varphi(u)=\varphi(0)+\frac{\lambda}{c}\int_0^u\varphi(u-z)\left[1-F(z)\right]dz \qquad \text{(II)}$$

Функція $\varphi(u)$ обмежена (це ймовірність) и монотонно не спадає (при збільшенні початкового капіталу ймовірність не банкрутства збільшується). Тому існує $\lim\limits_{u\to\infty}\varphi(u)=\varphi(+\infty)$. Перейдемо в рівнянні (II) до границі коли $u\to\infty$

$$\varphi(+\infty)=\varphi(0)+\frac{\lambda}{c}\varphi(+\infty)\int_0^\infty\left[1-F(z)\right]dz$$

Через те, що $\int_0^\infty\left[1-F(z)\right]dz=a$, отримуємо $\varphi(0)=\left(1-\frac{a\lambda}{c}\right)\varphi(+\infty)$.

Якщо існує ненульовий розв'язок рівняння (II), то, спираючись на теоретико-ймовірносний зміст $\varphi(u)$, природно вважати, що $\varphi(+\infty)=1$ (при нескінченному початковому капіталі банкрутство не відбудеться). Таким чином, $\varphi(0)=1-\frac{a\lambda}{c}$. Якщо $\varphi(0)\geq 0$, то $a\lambda\leq c$. Якщо $a\lambda>c$, то при будь-якому u з ймовірністю одиниця відбудеться банкрутство (рівняння (II) не має обмеженого розв’язку) і в цьому випадку $\varphi(u)\equiv 0$. Якщо $a\lambda=c$, то рівняння має лише нульовий розв’язок $\varphi(u)=0$. Тому будемо вважати, що $a\lambda<c$.

Використовуючи рівняння (II), отримуємо рівняння відносно ймовірності банкрутства $\psi(u)$. Враховуючи, що $\varphi(0)=1-\frac{a\lambda}{c}$ і $\varphi(u)=1-\psi(u)$, отримаємо

$$1-\psi(u)=1-\frac{a\lambda}{c}+\frac{\lambda}{c}\int_0^u\left[1-\psi(u-z)\right]\left[1-F(z)\right]dz,$$ звідки

$$\psi(u)=\frac{\lambda}{c}\left[a-\int_0^u\left[1-F(z)\right]dz+\int_0^u\psi(u-z)\left[1-F(z)\right]dz\right].$$

Так як $\int_0^\infty\left[1-F(z)\right]dz=a$, то $a-\int_0^u\left[1-F(z)\right]dz=\int_u^\infty\left[1-F(z)\right]dz$ і ми отримуємо рівняння

$$\psi(u)=\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty\left[1-F(z)\right]dz+\frac{\lambda}{c}\int_0^u\psi(u-z)\left[1-F(z)\right]dz.$$

Приклад. Розв’яжемо інтегро-диференціальне рівняння (I) для випадку, коли страхові виплати ξ_k мають показниковий закон розподілу з математичним сподіванням a, тобто

$$F(z)=\begin{cases}1-e^{-\frac{z}{a}}, & z>0\\ 0, & z\leq 0\end{cases} \quad \text{і} \quad F'(z)=\begin{cases}\frac{1}{a}e^{-\frac{z}{a}}, & z>0\\ 0, & z\leq 0\end{cases}$$

Тоді $\varphi'(u)=\frac{\lambda}{c}\varphi(u)-\frac{\lambda}{ac}\int_0^u\varphi(u-z)e^{-\frac{z}{a}}dz.$

Обчислимо похідну від обох частин останнього рівняння

$$\varphi''(u)=\frac{\lambda}{c}\varphi'(u)-\frac{\lambda}{ac}\varphi(0)e^{-\frac{u}{a}}-\frac{\lambda}{ac}\int_0^u\varphi'(u-z)e^{-\frac{z}{a}}dz=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\varphi'(u)-\frac{\lambda}{ac}\varphi(0)e^{-\frac{u}{a}}+\frac{\lambda}{ac}\int_0^u e^{-\frac{z}{a}}d\varphi(u-z)$$

Останній інтеграл інтегруємо частинами

$$\varphi''(u)=\frac{\lambda}{c}\varphi'(u)-\frac{\lambda}{ac}\varphi(0)e^{-\frac{u}{a}}+\frac{\lambda}{ac}\varphi(0)e^{-\frac{u}{a}}-\frac{\lambda}{ac}\varphi(u)+$$

$$+\frac{\lambda}{a^2c}\int_0^u\varphi(u-z)e^{-\frac{z}{a}}dz=\frac{\lambda}{c}\varphi'(u)-\frac{1}{a}\left[\frac{\lambda}{c}\varphi(u)-\frac{\lambda}{ac}\int_0^u\varphi(u-z)e^{-\frac{z}{a}}dz\right]=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\varphi'(u)-\frac{1}{a}\varphi'(u)=-\frac{c-\lambda a}{ac}\varphi'(u)=-\frac{\rho}{a(1+\rho)}\varphi'(u).$$

Таким чином, функція $\varphi(u)$ мусить задовольняти диференціальному рівнянню

$$\varphi''(u)=-\frac{\rho}{a(1+\rho)}\varphi'(u).$$

Його загальний розв'язок має вигляд $\varphi(u)=C_1+C_2e^{-\frac{\rho}{a(1+\rho)}u}$.

Оскільки $c>a\lambda$, то $\rho>0$ і з умов $\varphi(+\infty)=1$ та $\varphi(0)=1-\frac{a\lambda}{c}=\frac{\rho}{1+\rho}$ знайдемо $C_1=1, C_2=-\frac{1}{1+\rho}$. Таким чином, $\varphi(u)=1-\frac{1}{1+\rho}e^{-\frac{\rho}{a(1+\rho)}u}$.

Звідки слідує, що ймовірність банкрутства при початковому капіталі u дорівнює

$$\psi(u)=1-\varphi(u)=\begin{cases}\frac{1}{1+\rho}e^{-\frac{\rho}{a(1+\rho)}u}, & c>a\lambda\\ 1, & c\le a\lambda\end{cases}.$$

Фактично формулу для находження ймовірності банкрутства $\psi(u)$ в класичній моделі ризику можна вказати лише для того випадку, коли виплати страхової компанії розподілені за показниковим законом. Для інших законів розподілу розв'язання відповідного рівняння має значні труднощі і його розв'язок є складним для практичного використання. Тому було розглянуто питання про отримання асимптотичної оцінки для ймовірності банкрутства $\psi(u)$ коли $u \to +\infty$. Має місце наступна

Теорема Крамера-Лундберга. Якщо $a\lambda < c$, то рівняння

$$h(r) = \frac{c}{\lambda} r \text{, де } h(r) = \int_0^\infty e^{rz} dF(z) - 1$$

має єдиний корінь R та справедлива оцінка

$$\psi(u) \approx \frac{a\rho}{h'(R) - \frac{c}{\lambda}} e^{-Ru} \text{ коли } u \to +\infty.$$

Праву частину цього виразу називають апроксимацією Крамера-Лундберга.

Наприклад, якщо страхові виплати мають показниковий закон розподілу з математичним сподіванням a (як у розглянутому вище прикладі), то

$$h(r) = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{rz} \cdot e^{-\frac{z}{a}} dz - 1 = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{a} - r\right)z} dz - 1 = \frac{1}{a\left(\frac{1}{a} - r\right)} - 1 = \frac{ar}{1 - ar}, \text{ звідки}$$

$\dfrac{ar}{1-ar} = \dfrac{c}{\lambda} r$ і корінь цього рівняння є $R = \dfrac{1}{a}\left(1 - \dfrac{a\lambda}{c}\right) = \dfrac{\rho}{a(1+\rho)}$.

Маючі не увазі, що $h'(r)=\dfrac{a}{(1-ar)^2}$ знайдемо

$$h'(R)=\frac{a}{\left(1-\dfrac{a\rho}{a(1+\rho)}\right)^2}=a(1+\rho)^2.$$

Тоді

$$\frac{a\rho}{h'(R)-\dfrac{c}{\lambda}}=\frac{a\rho}{a(1+\rho)^2-\dfrac{c}{\lambda}}=\frac{\rho}{(1+\rho)^2-\dfrac{c}{a\lambda}}=\frac{\rho}{(1+\rho)^2-(1+\rho)}=\frac{1}{1+\rho}$$

і ми отримуємо оцінку $\psi(u)\approx\dfrac{1}{1+\rho}e^{-\frac{\rho}{a(1+\rho)}u}$ коли $u\to+\infty$.

Порівнює отриману оцінку з результатом попереднього прикладу, бачимо, що для випадку показникового розподілу апроксимація Крамера- Лундберга є точною.

Приклад. Нехай в моменти часу $t_1,t_2,...$ виплачується одна й таж сума d, тоді $a=M\xi_k=d$. В цьому випадку $h(r)=\int\limits_0^\infty e^{rz}dF(z)-1=e^{dr}-1$ і $h'(r)=d\,e^{dr}$.

Нехай R корінь трансцендентного рівняння $e^{dr}-1=\dfrac{c}{\lambda}r$. Знайдемо

$$\frac{a\rho}{h'(R)-\dfrac{c}{\lambda}}=\frac{d\rho}{de^{dR}-\dfrac{c}{\lambda}}=\frac{\rho}{e^{dR}-\dfrac{c}{\lambda d}}=\left[e^{dR}=1+\frac{c}{\lambda}R\right]=\frac{\rho}{1+\dfrac{c}{\lambda}R-\dfrac{c}{\lambda d}}$$

Таким чином $\psi(u)\approx\dfrac{\rho}{1+\dfrac{c}{\lambda}R-\dfrac{c}{\lambda d}}e^{-Ru}$ коли $u\to+\infty$.

Нехай $a\lambda<c$ (для випадку $a\lambda\ge c$ банкрутство буде з ймовірністю одиниця). В цьому випадку можна отримати оцінку

зверху для ймовірності банкрутства, яка буде справедливою при усіх $u > 0$. А саме, має місце наступне твердження:

Якщо рівняння $h(r) = \frac{c}{\lambda} r$ має додатній корінь R, то тоді для усіх $u > 0$ виконується нерівність Крамера-Лундберга

$$\psi(u) \le e^{-Ru}.$$

Ми розглянули модель теорії ризику, використовуючи процес Пуассона. Розглянемо тепер модель теорії ризику, яка базується на процесі відновлення.

Як і раніше, будемо вважати, що розміри страхових виплат, які проводить компанія, утворюють послідовність незалежних випадкових величин $\{\xi_k\}$ з функцією розподілу $F(x) = P\{\xi_k < x\}$, які мають математичне сподівання $M\xi_k = a$ і дисперсію $D\xi_k = \sigma^2$.

Припустимо, що вимоги на страхові виплати надходять в моменти часу $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n, ...$. Нехай випадкові величини $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, ..., \tau_n - \tau_{n-1}, ...$ незалежні, мають одну і ту ж функцію розподілу $K(x) = \{\tau_n - \tau_{n-1} < x\}$ та існує математичне сподівання $M(\tau_n - \tau_{n-1}) = \mu$. Тоді послідовність $\{\tau_n\}$ утворює процес відновлення і τ_n це моменти відновлення (в § 10 при вивченні процесів відновлення розглядались незалежні випадкові величини $\xi_n = \tau_n - \tau_{n-1}$– час роботи замінного елементу). Процес відновлення – це сукупність випадкових величин $N_t = n$, якщо $\tau_n \le t < \tau_{n+1}$. Математичне сподівання числа відновлень за проміжокчасу $[0, t]$ дорівнює $H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(t)$, де $K_n(t)$ є n-кратною згорткою функції розподілу $K(x): K_0(t) = K(t); K_n(t) = (K_{n-1} * K)(t)$.

Також припускаємо, що послідовності випадкових величин $\{\xi_n\}$ и $\{\tau_n\}$ взаємно незалежні.

Нехай, як і раніше, u – початковий капітал компанії, а c – інтенсивність надходження страхових внесків. Прибуток компанії за проміжок часу $\left(\tau_{i-1}, \tau_i\right]$ між $(i-1)$-шою та i-тою виплатами дорівнює $y_i = c\left(\tau_i - \tau_{i-1}\right) - \xi_i$. Його математичне сподівання дорівнює $My_i = c\mu - a$. Відносна страхова надбавка визначається як $\rho = \frac{c\mu - a}{a} = \frac{c\mu}{a} - 1$. Будемо вважати, що $\rho > 0$, тобто $c\mu > a$ (інтенсивність надходження страхових внесків більше інтенсивності страхових виплат).

Позначимо через $\psi(u)$ ймовірність банкрутства страхової компанії з початковим капіталом u на проміжку часу $[0, \infty)$.

На n-ої виплаті відбудеться банкрутство, якщо

$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n > u + c\tau_1 + c\left(\tau_2 - \tau_1\right) + \ldots + c\left(\tau_n - \tau_{n-1}\right)$, тобто $\sum_{i=1}^{n}\left(-y_i\right) > u$.

Тоді $\psi(u) = P\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(-y_i\right) > u \ \ \textit{при деякому} \ \ n\right\}$.

Ми не будемо виводити рівняння відносно ймовірності $\varphi(u) = 1 - \psi(u)$ того, що банкрутство не відбудеться, як це було зроблено при розгляданні класичної моделі ризику. Обмежуємось тільки нерівністю Крамера-Лундберга для оцінки зверху ймовірності банкрутства

$$\psi(u) \le e^{-Ru}$$

Тут R додатній корінь рівняння $\left[h(r) + 1\right]k(cr) = 1$, де

$$h(r) = \int_0^\infty e^{rz}dF(z) - 1; \quad k(r) = \int_0^\infty e^{-rz}dK(z).$$

Зокрема, якщо довжини проміжків між послідовними моментами відновлення мають показниковий розподіл з математичним сподіванням μ

$$K(z)=\begin{cases}1-e^{-\frac{z}{\mu}}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}, \text{ то}$$

$$k(r)=\int_0^\infty e^{-rz}\cdot\frac{1}{\mu}e^{-\frac{z}{\mu}}dz=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-\left(r+\frac{1}{\mu}\right)z}dz=\frac{1}{\mu\left(r+\frac{1}{\mu}\right)}=\frac{1}{r\mu+1}$$

і для знаходження R приходимо до рівняння $\dfrac{h(r)+1}{cr\mu+1}=1$, тобто $h(r)=c\mu r$.

В цьому випадку ми отримали таке ж рівняння, що і в класичній моделі ризику, коли моменти виплат визначались процесом Пуассона (з урахуванням позначень для математичних сподівань цих розподілів). В цьому факті немає нічого дивного, так як ми вже відмічали, що процес відновлення з показниковим розподілом між моментами відновлення є процесом Пуассона.

Як ми бачимо, явну формулу для ймовірності банкрутства можна отримати лише для випадку, коли виплати страхової компанії мають показниковий розподіл. У зв'язку з цим існує багато робіт, присвячених побудові різних наближених формул для обчислення ймовірності $\psi(u)$. Справа в тому, що реальні закони розподілу, взагалі говорячи, не відомі і слідує виходити з наявних статистичних спостережень. На їх основі підбираються параметри, звичайно це моменти різних порядків, і на їх основі будують апроксимації гіпотетичних законів розподілу.

§ 12. Випадкові процеси зі скінченними моментами другого порядку. Неперервність, диференційованість та інтегрованість випадкових процесів

В попередніх параграфах були розглянуті приклади різних випадкових процесів: марківські процеси, процеси з незалежними приростами та інші. Тут ми розглянемо деякі загальні поняття для випадкових процесів, які мають скінчені моменти другого порядку.

Нехай $\xi(t)$ випадковий процес з областю визначення $T=[a,b]$ і фазовим простором S, який взагалі є комплексним. Будемо також вважати, що для будь-якого $t\in T$ існує і скінченно математичне сподівання $M\left|\xi(t)\right|^2$, тобто момент другого порядку. Очевидно, що в цьому випадку існують і скінченні математичні сподівання $M\xi(t)$ та дисперсія $D\xi(t)$ при усіх $t\in T$.Значення процесу в момент часу t інтерпретується як елемент гільбертову простору $L_2=L_2\langle\Omega,F,P\rangle$. Такі процеси прийнято називати L_2-процесами або процесами другого порядку.

Ми на початку курсу вже вводили поняття коваріації процесу и кореляційної функції для дійсних процесів. Введемо їх ще раз, але вже для випадку, коли фазовий простір процесу є комплексним.

Означення. Функція $B(t,s)=M\xi(t)\overline{\xi(s)}$

називається коваріацией процесу $\xi(t)$.

Коваріація має наступні властивості

1. $B(t,t)=M\left|\xi(t)\right|^2$
2. $B(t,s)=\overline{B(s,t)}$
3. $M\left[\xi(t_1)+\xi(t_2)\right]\overline{\xi(s)}=M\xi(t_1)\overline{\xi(s)}+M\xi(t_2)\overline{\xi(s)}=B(t_1,s)+B(t_2,s)$
4. $\left|B(t,s)\right|^2\le B(t,t)B(s,s)$ - нерівність Коши – Буняковского

5. Нехай $t_1, t_2, ..., t_n \in T$, тоді

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_k \overline{C_j} B(t_k, t_j) = M\left(\sum_{k=1}^{n} C_k \xi(t_k) \sum_{j=1}^{n} \overline{C_j}\, \overline{\xi(t_j)}\right) = M\left|\sum_{k=1}^{n} C_k \xi(t_k)\right|^2$$

Легко бачити, що простір L_2 випадкових процесів є лінійним, величина $B(t,t)$ грає роль квадрату норми, а коваріація $B(t,s)$ роль скалярного добутку.

Означення. Кореляційною функцією випадкового процесу $\xi(t)$ називають функцію

$$R(t,s) = M\left(\xi(t) - M\xi(t)\right)\overline{\left(\xi(s) - M\xi(s)\right)}.$$

Кореляційна функція характеризує силу лінійної стохастическої залежності між значенням випадкового процесу в моменти часу t і s. Якщо величини $\xi(t)$ і $\xi(s)$ незалежні, то кореляційна функція дорівнює нулю. Дійсно, за властивістю математичного сподівання незалежних випадкових величин

$R(t,s) = M\left(\xi(t) - M\xi(t)\right) \cdot \overline{M\left(\xi(s) - M\xi(s)\right)}$ і так як $M\left(\xi(t) - M\xi(t)\right) = M\xi(t) - M\xi(t) = 0, \overline{M\left(\xi(s) - M\xi(s)\right)} = \overline{M\xi(s)} - \overline{M\xi(s)} = 0,$ то $R(t,s) = 0$.

В цьому випадку говорять, що ці величини некорельовані. Обернено твердження, взагалі кажучи, невірно, з некорельованості не обов'язково слідує незалежність, за винятком гауссових величин.

Дисперсія випадкового процесу дуже легко виражається через її кореляційну функцію

$$D\xi(t) = M\left|\xi(t) - M\xi(t)\right|^2 = R(t,t).$$

Кореляційна функція і коваріація пов'язані між собою простим співвідношенням

$$R(t,s) = B(t,s) - a(t) \cdot \overline{a(s)},$$

де $a(t) = M\xi(t)$, $a(s) = M\xi(s)$ – математичні сподівання.

Дійсно,

$$R(t,s)=M\left(\xi(t)-a(t)\right)\overline{\left(\xi(s)-a(s)\right)}=M\left(\xi(t)\overline{\xi(s)}-\overline{a(s)}\xi(t)-\right.$$
$$\left.-a(t)\overline{\xi(s)}+a(t)\overline{a(s)}\right)=M\xi(t)\overline{\xi(s)}-\overline{a(s)}a(t)-a(t)\overline{a(s)}+a(t)\overline{a(s)}=$$
$$=B(t,s)-a(t)\overline{a(s)}.$$

Розглянемо тепер означення та умови неперервності, диференційованості та інтегрованості випадкового процесу, які виражаються за допомогою коваріації процесу.

Так як усі ці поняття базуються на понятті збіжності, то почнемо з нього.

Означення. Границею в середньоквадратичному випадкового процесу $\xi(t)\in L_2$ коли $t\to t_0$ називається випадкова величина $\eta\in L_2$ така, що для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що $M\left|\xi(t)-\eta\right|^2<\varepsilon$ для усіх t, для яких $\left|t-t_0\right|<\delta$.

Границю в середньоквадратичному позначають $\underset{t\to t_0}{l.i.m.}\xi(t)=\eta$.

В просторі L_2 збіжність в середньоквадратичному є не що інше, як збіжність за нормою даного простору. З повноти гільбертову простору L_2 слідує, що для існування границі в середньоквадратичному випадкового процесу $\xi(t)$, коли $t\to t_0$, необхідно і достатньо, щоб $M\left|\xi(t)-\xi(s)\right|^2\to 0$, коли $t\to t_0$ і $s\to t_0$.

Приведемо ще рівносильне означення границі в середньоквадратичному по Гейне: для будь-якої послідовності $\{t_n\}$, збіжній до t_0, $M\left|\xi(t_n)-\eta\right|^2\to 0$ коли $n\to\infty$.

У курсі теорії ймовірностей було введено поняття збіжності за ймовірністю $\xi_n\xrightarrow{P}\eta$, якщо $P\left\{\left|\xi_n-\eta\right|\ge\varepsilon\right\}\to 0$, коли $n\to\infty$.

З нерівності Чебишева

$$P\left\{\left|\xi_n-\eta\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{M\left|\xi_n-\eta\right|^2}{\varepsilon^2}$$

слідує, що із збіжності в середньоквадратичному слідує збіжність за ймовірністю.

Лема. Для існування середньоквадратичної границі η випадкового процесу $\xi(t)$ необхідно і достатньо, щоби існувала границя

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ s\to t_0}} B(t,s) = B_0 .$$

Якщо ця границя існує, то $B_0 = M|\eta|^2$.

Доведення. *Необхідність*. Нехай $\eta = \underset{t\to t_0}{l.i.m.}\xi(t)$. Тоді

$$B(t,s) - M|\eta|^2 = M\xi(t)\overline{\xi(s)} - M\eta\overline{\eta} = M\left(\xi(t)\overline{\xi(s)} - \eta\overline{\eta}\right) =$$

$$= M\left(\left(\xi(t)-\eta\right)\left(\overline{\xi(s)}-\overline{\eta}\right) + \eta\left(\overline{\xi(s)}-\overline{\eta}\right) + \left(\xi(t)-\eta\right)\overline{\eta}\right) =$$

$$= M\left(\xi(t)-\eta\right)\overline{\left(\xi(s)-\eta\right)} + M\eta\overline{\left(\xi(s)-\eta\right)} + M\left(\xi(t)-\eta\right)\overline{\eta}.$$

Звідки за нерівностю Коші – Буняковського слідує, що

$$\left|B(t,s) - M|\eta|^2\right| \le$$

$$\le \sqrt{M|\xi(t)-\eta|^2 M|\xi(s)-\eta|^2} + \sqrt{M|\eta|^2 M|\xi(s)-\eta|^2} + \sqrt{M|\xi(t)-\eta|^2 M|\eta|^2} \to 0$$

коли $t\to t_0$ і $s \to t_0$.

Достатність. Нехай існує границя $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ s\to t_0}} B(t,s) = B_0$. Розглянемо

$$\left|\xi(t)-\xi(s)\right|^2 = \left(\xi(t)-\xi(s)\right)\overline{\left(\xi(t)-\xi(s)\right)} = \xi(t)\overline{\xi(t)} - \xi(s)\overline{\xi(t)} - \\ -\xi(t)\overline{\xi(s)} + \xi(s)\overline{\xi(s)}.$$

Тоді $M\left|\xi(t)-\xi(s)\right|^2 = B(t,t) - B(s,t) - B(t,s) + B(s,s)$,

звідки слідує, що

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ s\to t_0}} M\left|\xi(t)-\xi(s)\right|^2 = B_0 - B_0 - B_0 + B_0 = 0.$$

Таким чином, існує $\underset{t\to t_0}{l.i.m.}\xi(t)=\eta$. З першої частині леми отримуємо $M|\eta|^2=B_0$.

Означення. Випадковий процес $\xi(t)$ називається неперервним в середньоквадратичному у точці t_0, якщо $\underset{t\to t_0}{l.i.m.}\xi(t)=\xi(t_0),\ t,t_0\in T$.

Неперервність в середньоквадратичному в точці t_0 означає, що $\lim\limits_{t\to t_0}M|\xi(t)-\xi(t_0)|^2=0$. Тоді, згідно з лемою (коли $s=t_0$), для неперервності в середньоквадратичному випадкового процесу $\xi(t)$ необхідно і достатньо, щоб
$\lim\limits_{t\to t_0}\left[B(t,t)-B(t_0,t)-B(t,t_0)+B(t_0,t_0)\right]=0$,

а це виконується, якщо коваріація $B(t,s)$ неперервна у точці (t_0,t_0).

Говорять, що випадковий процес другого порядку $\xi(t), t\in T$ неперервний в середньоквадратичному на T, якщо він неперервний в середньоквадратичному в кожній точці $t\in T$.

Зрозуміло, що з неперервності в середньоквадратичному випадковому процесі слідує його стохастична неперервність $\lim\limits_{t\to t_0}P\left\{\left|\xi(t)-\xi(t_0)\geq\varepsilon\right|\right\}=0, \forall\varepsilon>0$.

Умову неперервності в середньоквадратичному випадковому процесі $\xi(t)$ у точці t_0 можна сформулювати і так: для цього необхідно і достатньо, щоб його математичне сподівання $a(t)=M\xi(t)$ було неперервним у точці t_0, а кореляційна функція $R(t,s)$ була неперервною у точці (t_0,t_0). Це безпосередньо слідує з співвідношення, яке пов'язує коваріацію з кореляційною функцією та математичним сподіванням

$$B(t,s)=R(t,s)+a(t)a(s).$$

Означення. Випадковий процес $\xi(t)$ має похідну в точці $t \in T$ (похідну у середньоквадратичному сенсі), якщо існує границя

$$\underset{|\Delta t| \to 0}{l.i.m.} \frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t} = \xi'(t).$$

Іншими словами, існує $\lim\limits_{|\Delta t| \to 0} M \left| \frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t} - \xi'(t) \right|^2 = 0$.

Теорема. Для того, щоб випадковий процес $\xi(t)$ мав похідну

в точці t, необхідно і достатньо, щоб існувала границя

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta s \to 0}} \frac{B(t+\Delta t, s+\Delta s) - B(t, s+\Delta s) - B(t+\Delta t, s) + B(t,s)}{\Delta t\, \Delta s}.$$

Це твердження безпосередньо випливає з леми з урахуванням того, що

$$M \frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t} \frac{\xi(s+\Delta s)-\xi(s)}{\Delta s} =$$

$$= \frac{B(t+\Delta t, s+\Delta s) - B(t, s+\Delta s) - B(t+\Delta t, s) + B(t,s)}{\Delta t\, \Delta s}$$

Якщо в деякому околі точці (t,t) існує змішана похідна $\frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t \partial s}$, то

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta s \to 0}} \frac{B(t+\Delta t, s+\Delta s) - B(t, s+\Delta s) - B(t+\Delta t, s) + B(t,s)}{\Delta t\, \Delta s} = \left. \frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t \partial s} \right|_{s=t}$$

і процес диференційований.

Кажуть, що випадковий процес другого порядку $\xi(t), t \in T$

диференційований у середньоквадратичному на T, якщо він має середньоквадратичну похідну в кожній точці $t \in T$.

Умову існування середньоквадратичної похідної в точці t можна сформулювати і так: для цього необхідно і достатньо, щоб у точці t

існувала похідна його математичного сподівання $a(t) = M\xi(t)$ і в деякому околі точці (t,t) існувала змішана похідна другого порядку кореляційної функції $\left.\dfrac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t\, \partial s}\right|_{s=t}$.

Приклад. Розглянемо процес Пуассона. Для нього, як ми показали раніше,

$$B(t,s) = \lambda \min(t,s) + \lambda^2 t\, s = \lambda^2 t\, s + \begin{cases} \lambda t, & t < s \\ \lambda s, & t > s \end{cases}$$

Цей вираз неперервній у кожної точці (t_0, t_0), отже процес Пуассона неперервний.

Розглянемо першу похідну, наприклад, за змінною t

$$\frac{\partial B(t,s)}{\partial t} = \lambda^2 s + \begin{cases} \lambda, & t < s \\ 0, & t > s \end{cases}.$$

Вона має розрив коли $t = s$, але тоді не існує друга змішана похідна. Отже, процес Пуассона не диференційований.

Зауваження. Процес Пуассона, реалізації якого кусково-сталі, є прикладом того, що стохастична неперервність і неперервність в середньоквадратичному не означають, що реалізації випадкового процесу неперервні.

Мають місце наступні формули, які пов'язують математичне сподівання та кореляційну функцію випадкового процесу $\xi(t)$ з відповідними характеристиками її похідної $\xi'(t)$

$$M\xi'(t) = \frac{d}{dt} M\xi(t), \quad R_{\xi'}(t,s) = \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial s} R_{\xi}(t,s).$$

Доведемо спочатку перше з цих тверджень:

$$M\xi'(t) = M\left(\underset{|\Delta t| \to 0}{l.i.m.} \frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \right) = \lim_{|\Delta t| \to 0} M\left(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \right) =$$

$$= \lim_{|\Delta t|\to 0}\left(\frac{M\xi(t+\Delta t)-M\xi(t)}{\Delta t}\right)=\frac{d}{dt}M\xi(t).$$

З отриманого результату слідує, що операції математичного сподівання і диференціювання у середньоквадратичному перестановочні. Тоді

$$R_{\xi'}(t,s)=M\left(\left(\xi'(t)-M\xi'(t)\right)\overline{\left(\xi'(s)-M\xi'(s)\right)}\right)=$$

$$=M\left(\frac{d}{dt}\left(\xi(t)-M\xi(t)\right)\frac{d}{ds}\overline{\left(\xi(s)-M\xi(s)\right)}\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}M\left(\xi(t)-M\xi(t)\right)\overline{\left(\xi(s)-M\xi(s)\right)}=\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial s}R_{\xi}(t,s).$$

Приклад. Знаючи кореляційну функцію $R(t,s)=e^{-ts}$ випадкового процесу $\xi(t)$, знайти дисперсію її похідної $\xi'(t)$.

Знайдемо спочатку

$$R_{\xi'}(t,s)=\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial s}R_{\xi}(t,s)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial s}e^{-ts}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(-te^{-ts}\right)=-e^{-ts}+tse^{-ts}=(ts-1)e^{-ts}.$$

Тоді $D\xi'(t)=R_{\xi'}(t,t)=\left(t^2-1\right)e^{-t^2}$.

Поняття інтегралу від випадкового процесу також будемо розглядати у середньоквадратичному сенсі.

Означення. Інтегралом $\int_a^b \xi(t)\,dt$ від випадкового процесу $\xi(t)$ називають границю інтегральних сум $\underset{\lambda\to 0}{l.i.m.}S_{\lambda}$, де $S_{\lambda}=\sum_{k=0}^{n-1}\xi(\tau_k)\Delta t_k$, а $a=t_0<t_1<...<t_n=b,\ \Delta t_k=t_{k+1}-t_k,\ \lambda=\max_k \Delta t_k,\ \tau_k\in\left[t_k,t_{k+1}\right]$, якщо ця границя не залежить ні від способу розбиття проміжку $[a,b]$ на часткові проміжки, ні від вибору точок τ_k на них.

З доведеної вище леми слідує, що для існування інтегралу достатньо, щоби коваріація $B(t,s)$ була інтегрована за Ріманом у квадраті $a \le t,s \le b$. При цьому

$$M\left|\int_a^b \xi(t)\,dt\right|^2 = \int_a^b\int_a^b B(t,s)\,dtds.$$

Дійсно, $M\left|S_\lambda\right|^2 = MS_\lambda \overline{S_\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} B\left(t_k,t_j\right)\Delta t_k \Delta t_j$ є інтегральною сумою Рімана для подвійного інтегралу. Переходячи до границі коли $\lambda \to 0$, отримаємо потрібне твердження.

Якщо процес задано на нескінченому інтервалі $T = [a,\infty)$, то невласний інтеграл визначається як $\int_a^\infty \xi(t)\,dt = \underset{b\to\infty}{l.i.m.}\int_a^b \xi(t)\,dt$. Для його існування достатньо щоб існував подвійний невласний інтеграл $\int_a^\infty\int_a^\infty B(t,s)\,dtds$.

Розглянемо ще інтеграл зі змінною верхньою границею $\eta(t) = \int_a^t \xi(u)\,du,\, u \in [a,b]$, який також є випадковим процесом.

Отримаємо формули для обчислення його характеристик. Знайдемо спочатку його математичне сподівання

$$M\eta(t) = M\left(\underset{\lambda\to 0}{l.i.m.}\sum_{k=0}^{n-1}\xi(u_k)\Delta u_k\right) = \lim_{\lambda\to 0} M\left(\sum_{k=0}^{n-1}\xi(u_k)\Delta u_k\right) =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} M\xi(u_k)\cdot\Delta u_k = \int_a^t M\xi(u)\,du,$$

звідки слідує, що операції математичного сподівання і інтегрування можна міняти місцями.

Розглянемо тепер коваріацію цього процесу

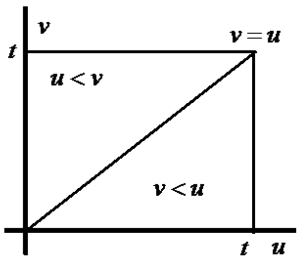
$$B_\eta(t,s) = M\eta(t)\overline{\eta(s)} = M\left(\int_a^t \xi(u)du \cdot \int_a^s \overline{\xi(v)}dv\right) =$$

$$= \int_a^t\int_a^s M\left(\xi(u)\overline{\xi(v)}\right)dudv = \int_a^t\int_a^s B_\xi(u,v)dudv$$

Аналогічно отримується вираз для його кореляційної функції $R_\eta(t,s) = \int_a^t\int_a^s R_\xi(u,v)dudv$, звідки випливає формула для дисперсії $D\eta(t) = R_\eta(t,t) = \int_a^t\int_a^t R_\xi(u,v)dudv$.

Наприклад, якщо $\xi(t)$ процес Пуассона і $\eta(t) = \int_0^t \xi(u)du$, то

$$D\eta(t) = \int_0^t\int_0^t R_\xi(u,v)dudv = \lambda\int_0^t\int_0^t \min\{u,v\}dudv = \lambda\int_0^t du\int_0^u vdv + \lambda\int_0^t udu\int_u^t dv =$$



$$= \lambda\int_0^t \frac{v^2}{2}\Bigg|_0^u du + \lambda\int_0^t u(t-u)du = \lambda\int_0^t \frac{u^2}{2}du + \lambda\int_0^t\left(ut - u^2\right)du =$$

$$= \lambda\frac{u^3}{6}\Bigg|_0^t + \lambda\left(\frac{u^2}{2}t - \frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_0^t = \lambda\frac{t^3}{6} + \lambda\left(\frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{3}\right) = \lambda\frac{t^3}{3}.$$

Можна також показати, що процес $\eta(t)$ неперервний в середньоквадратичному. Більш того, в кожній точці t, у якій функція $B(t,t)$ неперервна, процес $\eta(t)$ має похіднуу середньоквадратичному сенсі і $\eta'(t) = \xi(t)$.

Розглянемо тепер на $L_2 = L_2\langle\Omega, F, P\rangle$ два випадкових процеси $\xi(t)$ та $\eta(t)$, які мають спільну область визначення $T = [a,b]$.

Означення. Взаємною коваріаційною функцією двох процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ називається функція $B_{\xi\eta}(t,s)=M\xi(t)\overline{\eta(s)}$.

Означення. Взаємною кореляційною функцією двох процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ називається функція

$$R_{\xi\eta}(t,s)=M\left(\xi(t)-M\xi(t)\right)\overline{\left(\eta(s)-M\eta(s)\right)}.$$

Якщо $M\xi(t)=M\eta(t)=0$, то $R_{\xi\eta}(t,s)=B_{\xi\eta}(t,s)$.

Припустимо, що існує похідна випадкового процесу $\xi'(t)$. Тоді, використовуючи доведену раніше перестановочну властивість операцій диференціювання та математичного сподівання, отримуємо

$$R_{\xi'\eta}(t,s)=M\xi'(t)\overline{\eta(s)}=\frac{\partial}{\partial t}M\xi(t)\overline{\eta(s)}=\frac{\partial}{\partial t}R_{\xi\eta}(t,s).$$

Аналогічно доводиться, що $R_{\xi\eta'}(t,s)=\frac{\partial}{\partial s}R_{\xi\eta}(t,s)$.

З отриманих формул слідує, що взаємна кореляційна функція випадкового процесу $\xi(t)$ та його похідної $\xi'(t)$ визначається формулами $R_{\xi\xi'}(t,s)=\frac{\partial}{\partial s}R_{\xi}(t,s)$, $\quad R_{\xi'\xi}(t,s)=\frac{\partial}{\partial t}R_{\xi}(t,s)$.

Завдання.

1. Нехай $w(t)$ вінерів процес. Знайти його коваріацію та дослідити цей процес на неперервність і диференційованість.

2. Нехай випадковий процес $\xi(t)$ має кореляційну функцію $R(t,s)=e^{-\alpha(t-s)^2}$, $\alpha>0$. Знайти дисперсію його похідної.

3. Нехай випадковий процес $\xi(t)$ має математичне сподівання $M\xi(t)=at$ і кореляційну функцію $R(t,s)=\sigma^2 ts$. Знайти

математичне сподівання, кореляційну функцію та дисперсію випадкового процесу $\eta(t)=\int_0^t \xi(u)\,du$.

4. Випадковий процес $\xi(t)$ має кореляційну функцію $R(t,s)=e^{-\alpha|t-s|}$. Знайти дисперсію випадкового процесу $\eta(t)=\int_0^t \xi(u)\,du$.

5. Нехай $\xi(t)$ процес Пуассона. Знайти коваріацію процесу $\eta(t)=\int_0^t \xi(u)\,du$ та дослідити його на неперервність і диференційованість.

6. Випадковий процес $\xi(t)$ має кореляційну функцію $R(t,s)=(1+ts)e^{-(t+s)}$. Знайти взаємну кореляційну функцію процесу $\xi(t)$ та його похідної $\xi'(t)$.

§ 13. Випадкові процеси з ортогональними приростами

Розглянемо у просторі випадкових процесів із скінченними моментами другого порядку один клас випадкових процесів – процесів з ортогональними приростами.

Нехай випадковий процес $\xi(t), t\ge 0$ є L_2-процесом.

Означення. Процес $\xi(t)$ називається процесом з ортогональними приростам, якщо для довільних моментів часу $0\le t_1<t_2<t_3<t_4$ виконується співвідношення

$$M\left(\xi(t_2)-\xi(t_1)\right)\overline{\left(\xi(t_4)-\xi(t_3)\right)}=0.$$

Як ми вже відмічали, коваріація двох випадкових величин має сенс скалярного добутку. Тому дану умову називають умовою ортогональності приростів, тобто рівності нулю їх скалярного добутку.

Зрозуміло, що будь-який випадковий процес другого порядку з незалежними приростами буде процесом з ортогональними приростами, наприклад, процес Пуассона або вінерів процес. Обернене твердження в загальному випадку несправедливо, проте, всякий гауссовськiй процес з ортогональними приростами також є і процесом з незалежними приростами (з припущенням, що $\xi(0)=0$).

Очевидно, що випадковий процес $\tilde{\xi}(t)=\xi(t)-\xi(0)$ також буде процесом з ортогональними приростам. Тому, не обмежуючи, будемо далі вважати, що $\xi(0)=0$, тобто що випадковий процес $\xi(t)$ виходить з нуля.

Нехай $0<s<t$. Розглянемо коваріацію

$$B(t,s)=M\xi(t)\overline{\xi(s)}=M\left(\xi(t)-\xi(s)+\xi(s)\right)\overline{\left(\xi(s)-\xi(0)+\xi(0)\right)}=$$

$$=M\left(\xi(t)-\xi(s)\right)\overline{\left(\xi(s)-\xi(0)\right)}+\overline{\xi(0)}M\left(\xi(t)-\xi(s)\right)+M\xi(s)\overline{\xi(s)}+$$

$$+\overline{\xi(0)}M\xi(s)=M\xi(s)\overline{\xi(s)}=M\left|\xi(s)\right|^2=B(s,s)$$

враховуючі ортогональність і те, що $\xi(0)=0$.

Таким чином, коваріація буде дійсною функцією одного аргументу, тобто при любому $t>0$ $B(t,t)=B(t)=M\left|\xi(t)\right|^2$.

Покажемо, що функція $B(t)$ не спадна. Дійсно, коли $t>s$

$$B(t)=M\left|\xi(t)\right|^2=M\left|\left(\xi(t)-\xi(s)\right)+\left(\xi(s)-\xi(0)\right)\right|^2=$$

$$=M\left[\left(\xi(t)-\xi(s)\right)+\left(\xi(s)-\xi(0)\right)\right]\overline{\left[\left(\xi(t)-\xi(s)\right)+\left(\xi(s)-\xi(0)\right)\right]}=$$

$$=M\left(\xi(t)-\xi(s)\right)\overline{\left(\xi(t)-\xi(s)\right)}+M\left(\xi(t)-\xi(s)\right)\overline{\left(\xi(s)-\xi(0)\right)}+$$
$$+M\left(\xi(s)-\xi(0)\right)\overline{\left(\xi(t)-\xi(s)\right)}+M\left(\xi(s)-\xi(0)\right)\overline{\left(\xi(s)-\xi(0)\right)}=$$

$$=M\left|\xi(t)-\xi(s)\right|^2+M\left|\xi(s)\right|^2=M\left|\xi(t)-\xi(s)\right|^2+B(s)$$

звідки $B(t)-B(s)=M\left|\xi(t)-\xi(s)\right|^2 \geq 0$, тобто $B(t)\geq B(s)$.

Записав отриману рівність у вигляді

$$M\left|\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\right|^2 = B(t+\Delta t)-B(t),$$

отримаємо, що випадковий процес $\xi(t)$ буде неперервним у середньоквадратичному тоді і тільки тоді, коли неперервна функція $B(t)$. Переписав ту ж рівність у вигляді

$$\frac{B(t+\Delta t)-B(t)}{\Delta t} = \Delta t \cdot M\left|\frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t}\right|^2$$

отримаємо, що випадковий процес $\xi(t)$ буде диференційованим в середньоквадратичному в точці t тоді і тільки тоді, коли функція $B(t)$ має похідну і $B'(t)=0$. Звідки слідує, що, взагалі говорячи, процес з ортогональними приростами є не диференційованим в середньоквадратичному.

Наприклад, нехай $\xi(t)$ вінерів процес, у якого $M\xi(t)=0$, а $D\xi(t)=t$. Для нього $B(t)=M\left|\xi(t)\right|^2 = D\xi(t)=t$. Цій процес неперервний в середньоквадратичному, але не диференційованим в середньоквадратичному, так як $B'(t)=1\neq 0$.

§ 14 Стаціонарні випадкові процеси

На практиці дуже часто зустрічаються випадкові процеси, які протікають за часом достатньо однорідно, тобто має місце неперервне випадкове коливання в околі деякого середнього значення, при цьому ні середня амплітуда, ні характер цих коливань суттєво не змінюються за часом. Такі випадкові процеси прийнято назвати стаціонарними.

Стаціонарні випадкові процеси найчастіше зустрічаються у фізичних та технічних задачах. Прикладами стаціонарних процесів є:

коливання напруги в електричній мережі; коливання літака в усталеному режимі польоту; випадкові шуми при прийомі радіосигналу та багато інші.

Розрізняють два види стаціонарних випадкових процесів – стаціонарні в узькому сенсі та стаціонарні в широкому сенсі. Нехай T скінченний або нескінченний проміжок часу. Для спрощення обмежуємось випадком дійсних процесів.

Означення. Випадковий процес $\xi(t), t \in T$ називають стаціонарним в узькому сенсі, якщо для будь-якого натурального n і будь-яких $t_1, t_2, ..., t_n, \tau \in T$ розподіли випадкових векторів $\xi(t_1), \xi(t_2), ..., \xi(t_n)$ та $\xi(t_1+\tau), \xi(t_2+\tau), ..., \xi(t_n+\tau)$ співпадають.

Сенс означення в тому, що процес один і той же для будь-якого $\tau \in T$. Якщо ми почнемо вивчати процес з моменту часу τ, то його властивості такі самі, як би ми почали вивчати його з початкового моменту часу (процес не залежить від зсуву по осі часу).

З означення випливає, що функція розподілу процесу $\xi(t)$ не залежить від t.

Дійсно, якщо у рівності $P\{\xi(t) < u\} = P\{\xi(t+\tau) < u\}$ покласти $\tau = -t$, то ми отримаємо $F_{\xi(t)}(u) = P\{\xi(t) < u\} = P\{\xi(0) < u\} = F_0(u)$– не залежить від t.

Звідки випливає, що для стаціонарного в узькому сенсі процесу математичне сподівання і дисперсія сталі. Дійсно,

$$M\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u dF_0(u) = a; \quad D\xi(t) = M\left(\xi(t) - a\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (u-a)^2 dF_0(u) = \sigma^2$$

не залежать від t.

Розглянемо тепер розподіл випадкового вектору $\bar{\xi} = \left(\xi_1(t), \xi_2(s)\right)$. Для нього з означення слідує, що

$$P\{\xi_1(t) < u_1; \xi_2(s) < u_2\} = P\{\xi_1(t+\tau) < u_1; \xi_2(s+\tau) < u_2\}$$

Поклавши тут $\tau = -s$, отримуємо

$$F_{\bar{\xi}}(u_1,u_2) = P\{\xi_1(t) < u_1; \xi_2(s) < u_2\} = P\{\xi_1(t-s) < u_1; \xi_2(0) < u_2\} =$$
$$= F(t-s,u_1,u_2)$$

тобто функція розподілу залежить тільки від різниці $t-s$.

Тоді і вираз для кореляційної функції

$$R(t,s) = M\left(\xi(t)-a\right)\left(\xi(s)-a\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(u_1-a)(u_2-a)\,dF(t-s,u_1,u_2) =$$
$$= R(t-s)$$

також залежить тільки від різниці $t-s$.

Означення. Випадковий процес $\xi(t), t \in T$ називають стаціонарним у широкому сенсі, якщо:

1. $\xi(t)$ є L_2-процесом, тобто існує і скінченно математичне сподівання $M\left|\xi(t)\right|^2, t \in T$;
2. $M\xi(t) = a$ не залежить від t;
3. кореляційна функція залежить тільки від різниці своїх аргументів $R(t,s) = R(t-s), t,s \in T$.

З проведених вище міркувань видно, що з стаціонарності в узькому сенсі слідує стаціонарність у широкому сенсі. Обернене твердження в загальному випадку хибне. Обернене твердження вірно лише у випадку, коли процес $\xi(t)$ є нормальним (гауссовськім).

Приклад. Нехай η и $\varphi-$ незалежні випадкові величини, при цьому випадкова величина φ рівномірно розподілена на проміжку $[0;2\pi]$, а випадкова величина η має момент другого порядку $M\eta^2 = \mu^2$.
Розглянемо випадковий процес

$$\xi(t) = \eta\cos(\lambda t + \varphi),$$

де λ стала – частота гармонійних коливань з випадковою амплітудою $|\eta|$ і випадковою фазою φ.

Покажемо, що цей процес є стаціонарним у широкому сенсі. Знайдемо спочатку

$$M\xi(t)=M\left(\eta\cos(\lambda t+\varphi)\right)=M\eta\cdot M\cos(\lambda t+\varphi)=$$
$$=M\eta\cdot M\left(\cos\lambda t\cos\varphi-\sin\lambda t\sin\varphi\right)=M\eta\cdot\left(\cos\lambda t\cdot M\cos\varphi-\sin\lambda t\cdot M\sin\varphi\right)=0$$

так як

$$M\cos\phi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos u\,du=\frac{1}{2\pi}\sin u\Big|_0^{2\pi}=0,\quad M\sin\phi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin u\,du=-\frac{1}{2\pi}\cos u\Big|_0^{2\pi}=0$$

та враховано, що випадкова величина φ розподілена рівномірно з щільністю $\frac{1}{2\pi}$.

Знайдемо тепер кореляційну функцію

$$R(t,s)=M\xi(t)\xi(s)=M\left(\eta\cos(\lambda t+\varphi)\cdot\eta\cos(\lambda s+\varphi)\right)=$$
$$=M\eta^2\cdot M\cos(\lambda t+\varphi)\cos(\lambda s+\varphi)=\frac{\mu^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\lambda t+u)\cos(\lambda s+u)\,du=$$
$$=\frac{\mu^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\lambda(t-s)+\cos\left(\lambda(t+s)+2u\right)du\right)=\frac{\mu^2}{4\pi}\cos\lambda(t-s)\int_0^{2\pi}du+$$
$$+\frac{\mu^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left(\lambda(t+s)+2u\right)du=\frac{\mu^2}{2}\cos\lambda(t-s)$$

враховуючі, що останній інтеграл дорівнює нулю.

Таким чином, виконані всі умови і даний процес є стаціонарним у широкому сенсі.

Розглянемо деякі властивості кореляційної функції $R(t-s)=R(\tau)$ стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$.

1. $R(\tau)$ є парна функція.

Так як кореляційна функція є симетричною функцією своїх аргументів $R(t,s)=R(s,t)$, то для стаціонарних процесів $R(\tau)=R(-\tau)$, тобто вона буде парною.

2. $R(0)=D\xi(t)=\sigma^2$

Дійсно, так як $R(\tau)=M\xi(t+\tau)\xi(t)-M\xi(t+\tau)M\xi(t)$, то при $\tau=0$ отримуємо, що $R(0)=M\xi^2(t)-\left(M\xi(t)\right)^2=D\xi(t)=\sigma^2$

3. Якщо стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ неперервний в середньоквадратичному, то кореляційна функція $R(\tau)$ неперервна.

Розглянемо $R(\tau)=M\xi(\tau)\xi(0)$ та $R(\tau+\Delta\tau)=M\xi(\tau+\Delta\tau)\xi(0)$.

Для них

$$\left|R(\tau+\Delta\tau)-R(\tau)\right|=\left|M\left(\xi(\tau+\Delta\tau)-\xi(\tau)\right)\xi(0)\right|\le M\left|\xi(\tau+\Delta\tau)-\xi(\tau)\right|\left|\xi(0)\right|$$

і за нерівністю Коши-Буняковського

$$\left|R(\tau+\Delta\tau)-R(\tau)\right|\le\sqrt{M\left(\xi(\tau+\Delta\tau)-\xi(\tau)\right)^2}\cdot\sqrt{M\xi^2(0)}.$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta=\delta(\varepsilon)$, що коли $|\Delta\tau|<\delta$ $\left|R(\tau+\Delta\tau)-R(\tau)\right|<\varepsilon$.

4. Для того щоб стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ мав похідну (в середньоквадратичному сенсі) у точці $t\in T$ необхідно і достатньо існування другої похідної від кореляційної функції в нулі $R''(0)$.

Ми раніше показали, що для існування похідної від випадкового процесу $\xi(t)$ необхідно і достатньо, щоб існувала змішана похідна від коваріації $\left.\frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t\,\partial s}\right|_{s=t}$. Враховуючи співвідношення між кореляційною функцією та коваріацією $R(t,s)=B(t,s)-a(t)a(s)$ і то, що для стаціонарного процесу $a(t)=a(s)=a$, отримаємо

$$\frac{\partial^2 B(t-s)}{\partial t\,\partial s}=\frac{\partial^2 R(t-s)}{\partial t\,\partial s}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R(t-s)}{\partial s}\right)=\left[\tau=t-s\right]=$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial R(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial s} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\partial^2 R(\tau)}{\partial \tau^2} = -R''(\tau).$$

При $s = t$ приходимо до умови існування другої похідної $R''(0)$.

5. З проведених у кінці 12 параграфу міркувань та отриманих формул випливають наступні формули для кореляційної функції похідної стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$ та для взаемної кореляційної функції самого процесу і його похідної
$$R_{\xi'}(\tau) = -R''_{\xi}(\tau), \quad R_{\xi\xi'}(\tau) = R'_{\xi}(\tau), \quad R_{\xi'\xi}(\tau) = -R'_{\xi}(\tau).$$

Нехай $\xi(t)$ випадковий стаціонарний процес з неперервним часом. Тоді справедлива наступна теорема

Теорема Хінчина. Нехай $\xi(t)$ стаціонарний процес, а $R(\tau)$ його кореляційна функція.Тоді існує дійсна, не спадна, неперервна зліва і обмежена функція $F(\lambda)$ така, що

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda \tau \, dF(\lambda).$$

Без доведення.

Функція $F(\lambda)$ називається спектральною функцією даного процесу.

Якщо спектральна функція $F(\lambda)$ є абсолютно неперервна функція, тобто $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f(x)dx$, то $F'(\lambda) = f(\lambda)$ і твердження теореми можна записати у вигляді

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cos \lambda \tau \, d\lambda.$$

Функцію $f(\lambda)$ називають спектральною щільністю процесу $\xi(t)$. Отриманий вираз є ні чим іншим як перетворенням Фур'є функції $f(\lambda)$, а сама кореляційна функція є її трансформантою Фур'є.

В цьому випадку за формулою оберненого перетворення Фур'є ми можемо знайти спектральну щільність по кореляційній функції, враховуючи що кореляційна функція є парною

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\cos\lambda\tau\, d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} R(\tau)\cos\lambda\tau\, d\tau$$

звідки також слідує, що спектральна щільність є парною функцією.

Зауваження. Розглянемо

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(\lambda) = F(+\infty) - F(-\infty) = D\xi(t) = \sigma^2.$$

Вважаючи, що $F(-\infty) = 0$, отримаємо, що $F(+\infty) = \sigma^2$. Тоді $\frac{1}{\sigma^2}F(\lambda)$ буде функцією розподілу деякої випадкової величини.

Приклад. Ми раніше розглянули випадковий процес $\xi(t) = \eta\cos(\lambda t + \phi)$ і показали, що він є стаціонарним процесом з кореляційною функцією $R(\tau) = \frac{\mu^2}{2}\cos\lambda\tau$. Знайдемо його спектральну функцію. Розглянемо функцію

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le \lambda \\ \frac{\mu^2}{2}, & x > \lambda \end{cases}$$

і знайдемо інтеграл Стілтьесу за нею, враховуючі, що вона кусково-стала і має стрибок у точці $x = \lambda$

$$\int_{0}^{\infty} \cos x\tau\, dF(x) = \frac{\mu^2}{2}\cos\lambda\tau = R(\tau),$$

тобто функція $F(x)$ є спектральною функцією для процесу $\xi(t)$.

Приклад. Дійсний стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ з неперервним часом має кореляційну функцію $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \alpha > 0$. Знайдемо його спектральну щільність.

$$f(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty R(\tau)\cos\lambda\tau\,d\tau=\frac{\sigma^2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\cos\lambda\tau\,d\tau=\frac{\sigma^2}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\left(e^{i\lambda\tau}+e^{-i\lambda\tau}\right)d\tau=$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\pi}\int_0^\infty\left(e^{-(\alpha-i\lambda)\tau}+e^{-(\alpha+i\lambda)\tau}\right)d\tau=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left(-\frac{e^{-(\alpha-i\lambda)\tau}}{\alpha-i\lambda}-\frac{e^{-(\alpha+i\lambda)\tau}}{\alpha+i\lambda}\right)\Bigg|_0^\infty=$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha-i\lambda}+\frac{1}{\alpha+i\lambda}\right)=\frac{\alpha\sigma^2}{\pi\left(\alpha^2+\lambda^2\right)}.$$

Приклад. Білим шумом називають стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ з нульовим математичним сподіванням і постійною спектральною щільністю $f(\lambda)=\sigma^2$.

Його кореляційна функція $R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\cos\lambda\tau\,d\lambda=\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda\tau\,d\lambda$.

Обчислимо цей інтеграл, використовуючи поняття узагальненої δ-функції Дірака, яка визначається співвідношенням $(f,\delta)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx=f(0)$.

Розглянемо перетворення Фур'є від δ-функції $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\lambda)\cos\lambda\tau\,d\lambda=1$,

тоді за формулою обернення отримуємо $\delta(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda\tau\,d\lambda$. Таким

чином, $\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda\tau\,d\lambda=2\pi\delta(\tau)$ і $R(\tau)=2\pi\sigma^2\delta(\tau)=2\pi\sigma^2\delta(t-s)$.

Звідси слідує, що $R(t,s)=0$ коли $t\neq s$, тобто перерізи цього процесу, навіть при дуже близьких t і s, некорельовани. Крім того, дисперсія цього процесу $D\xi(t)=R(0)$ дорівнює нескінченності. Зрозуміло, що такий процес фізично не реалізуємий, проте це зручна математична модель для опису динамічних систем, функціонуючих в умовах постійно діючих випадкових збурень, наприклад, в радіофізиці.

Як приклад розглянемо винерів процес $w(t)$, який має кореляційну функцію $R(t,s)=\min\{t,s\}=\begin{cases} t, t<s \\ s, t>s \end{cases}$. Він неперервний та не має похідної у середньоквадратичному сенсі, так як похідна $\frac{\partial R(t,s)}{\partial s}=\begin{cases} 0, t<s \\ 1, t>s \end{cases}$ є розривною коли $t=s$, звідки не існує змішана похідна $\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t \partial s}$. Проте, якщо ми перейдемо до розгляду узагальнених функцій та візмемо до уваги, що похідна від функції Хевісайда $\theta(x)=\begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x<0 \end{cases}$ є δ - функція Дірака $\delta(x)$, то ми отримуємо, що $\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t \partial s}=\theta'(t-s)=\delta(t-s)$. Таким чином, випадковий процес $w'(t)$ буде мати кореляційну функцію $R_{w'}(t,s)=\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t \partial s}=\delta(t-s)$, тобто буде білим шумом.

Розглянемо тепер стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ з дискретним часом. Нехай через рівні проміжки часу розглядаються значення процесу $\xi_k=\xi(t_k)$, де $t_k=kT, k=0,1,2,\ldots$. Послідовність $\{\xi_k\}$ називають стаціонарною випадковою послідовністю.
Вона має наступні властивості: математичне сподівання і дисперсія її членів постійні $M\xi_k=a, D\xi_k=\sigma^2$ при усіх k. Кореляційна функція залежить тільки від різниці індексів $R(\xi_k,\xi_j)=R(k-j)=R(n)$ і парна.
Як і у випадку неперервного часу, для кореляційної функції справедливо подання

$$R(n)=\int_0^T \cos\omega_n x\,dF(x),\ \ \omega_n=\frac{\pi n}{T},$$

де $F(x)$ – дійсна, не спадна, неперервна зліва та обмежена функція.

Функцію $F(x)$ називають спектральною функцією стаціонарної випадкової послідовності. Якщо спектральна функція є абсолютно неперервною $F(x)=\int\limits_0^x f(u)du$, то її похідна $F'(x)=f(x)$ називається спектральною щільністю.

В цьому випадку подання для кореляційної функції приймає вигляд

$$R(n)=\int\limits_0^T f(x)\cos\omega_n x\,dx.$$

Останній вираз є коефіцієнтом Фур'є розкладання щільності $f(x)$ у тригонометричний ряд Фур'є за косинусами на проміжку $[0,T]$. Тому щільність може бути записана у вигляді ряду Фур'є

$$f(x)=\frac{1}{2T}R(0)+\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}R(n)\cos\omega_n x.$$

Що стосується терміну «спектральний» в нашому викладенні, то він обумовлен тим, що сукупність частот $\{\omega_n\}$ гармонійних коливань, які складають процес $\xi(t)$ з дискретним часом, прийнято називати спектром. Для процесів з неперервним часом параметр λ має сенс частоти, а спектральне розкладання кореляційної функції є розподіл енергії стаціонарного процесу за частотами спектру.

Приклад. Для випадку дискретного часу білий шум визначається як послідовність некорельованих випадкових величин $\{\xi_n\}$ з нульовим математичним сподіванням і постійною дисперсією

$M\xi_n=0,\quad D\xi_n=\sigma^2\quad\forall n$. В цьому випадку коваріація процесу

$M\xi_n\xi_m=\sigma^2\delta_{nm},\ \delta_{nm}=\begin{cases}1, n=m\\ 0, n\neq m\end{cases}$, а кореляційна функція

$R(n)=\begin{cases}\sigma^2, n=0\\ 0, \quad n\neq 0\end{cases}$. Спектральна щільність цього процесу стала

$f(x)=\dfrac{\sigma^2}{T}$.

Дійсно, коли $n=0$ маємо $R(0)=\int\limits_0^T f(x)dx=\dfrac{\sigma^2}{T}\int\limits_0^T dx=\sigma^2$, а коли $n\neq 0$

маємо $R(n)=\int\limits_9^T f(x)\cos\omega_n x dx=\dfrac{\sigma^2}{T}\int\limits_0^T \cos\omega_n x dx=\dfrac{\sigma^2}{T}\dfrac{1}{\omega_n}\sin\omega_n x\Big|_0^T=0$.

Тоді спектральна функція $F(x)=\int\limits_0^x f(u)du=\dfrac{\sigma^2}{T}\int\limits_0^x du=\dfrac{\sigma^2}{T}x$, а це є функція рівномірного розподілу на проміжку $[0,T]$, яка помножена на σ^2.

Завдання.

1. Нехай X і Y незалежні однаково розподілені випадкові величини, які приймають значення $+1$ и -1 з однаковими ймовірностями $1/2$. Дослідити на стаціонарність випадковий процес $\xi(t)=X\cos\lambda t+Y\sin\lambda t$, де λ невипадкова величина.
2. Випадковий процес $\xi(t)=Ue^{-\alpha t}+Ve^{-\beta t}$, де U і V некорельовані випадкові величин з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією, α,β – невипадкові величини. Знайти математичне сподівання, дисперсію та кореляційну функцію процесу $\xi(t)$. Визначити, буде даний процес стаціонарним, по крайній мірі, у широкому сенсі.
3. Нехай відома кореляційна функція $R(\tau)=2e^{-0,5\tau^2}$ стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$. Знайти кореляційну функцію та дисперсію її похідної $\xi'(t)$.

4. Задано кореляційну функцію $R(\tau)=(1+|\tau|)e^{-|\tau|}$ стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$. Знайти взаємну кореляційну функцію цього процесу та його похідної $\xi'(t)$.
5. Кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу має вигляд $R(\tau)=\sigma^2\cos\beta\tau\, e^{-\alpha|\tau|}, \alpha>0$. Знайти його спектральну щільність.

Список літератури

Основна

1. Гнеденко Б.В. Курс теорії ймовірностей. К.: ВПЦ Київський університет, 2010. – 464 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. – 567 с.
3. Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й. Теоретико-ймовірнісні методи в економетриці та фінансовій математиці. К.: Інформтехніка, 1995. – 380 с.
4. Дороговцев А.Я., Сільвестров Д.С., Скороход А.В., Ядренко М. Й. Теорія ймовірностей. Сбірник задач. К.: Вища школа, 1976. – 384с.
5. Лободзинська І. Г., Вайсфельд Н. Д., Процеров Ю. С., РеутО. В. Навчальне видання «Теорія стохастичних процесів». Одеса, 2008. – 59 с.
6. Вайсфельд Н. Д., Круглов В. Є., Лободзинська І.Г. Методичні вказівки до курсу «Теоретико – ймовірнісні методи в страховій математиці». Одеса, АстроПринт, 1999. – 40 с.

Додаткова

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 472 с.
2. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1985. – 320 с.
3. Муха В.С. Случайные процессы. Учебно-методическое пособие. Минск: БГУИР, 2013. – 188 с.
4. . Миллер Б.Н., Панков А.Р.Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.
5. Д.А. Коршунов, С.Г. Фосс. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей: учебное пособие. Новосибирск: Новосибирский університет, 2003. – 119 с.
6. Галажинская О.Н., Моисеева С.П. Теория случайных процессов: учебное пособие. Томск: Томский университет, 2015. – 128 с.

Навчальне видання

Процеров Юрій Сергійович

Випадкові процеси

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
для студентів
факультету математики, фізики та інформаційних технологій
спеціальностей 113 Прикладна математика та 111 Математика

В авторській редакції

Підп. до друку 02.04.2022. Формат 60х84/16.
Ум.-друк. арк. 6,29. Наклад 15 пр.
Зам. № 2429.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12, Україна
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua