ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА. 2005. Вып. 41. С. 198–202

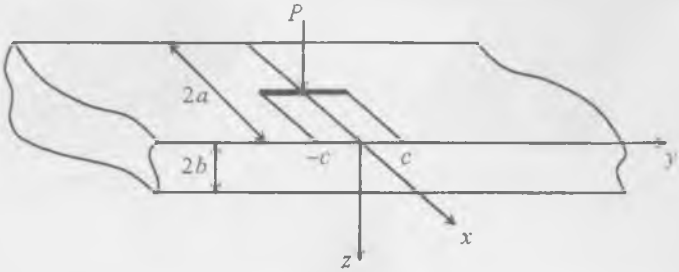
УДК 539.3

В. А. ГРИШИН, канд. физ.-мат.наук,
В. В. РЕУТ, канд. физ.-мат.наук

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСАДОК ВКЛЮЧЕНИЙ В КОРОБЧАТОЙ ОБОЛОЧКЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

Коробчатые оболочки широко применяются в строительстве, кораблестроении и машиностроении. В статье [1] предложен метод расчета коробчатых оболочек, сводящийся к совместному плоско-изгибному напряженному состоянию пластин с дефектами, роль которых выполняют ребра оболочки. Методы решения задач с дефектами изложены в монографии [2]. Предложенный метод расчета коробчатых оболочек получил дальнейшее развитие в работах [3-5]. В настоящей работе исследуются осадки включений при вдавливании их в коробчатую оболочку прямоугольного профиля.

Постановка задачи и построение решения. Рассмотрим задачу о напряженном состоянии коробчатой оболочки бесконечной длины прямоугольного профиля при вдавливании в нее двух тонких жестких включений, симметрично расположенных на противоположных гранях (рисунок). Нагрузку, действующую на оболочку, будем полагать симметричной относительно плоскостей симметрии оболочки.



Методом расчета коробчатых оболочек [1] рассматриваемая задача сводится к отысканию решения системы дифференциальных уравнений

$$D\Delta^2 w(x, y) = Z(x, y), \quad \Delta^2 \sigma_x(x, y) =$$

$$= \Phi(x, y), \quad -a < x < b, \quad x \neq 0, \quad |y| < l,$$

$$\Phi(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\Delta + (1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]X + \frac{\partial}{\partial y}\left[\Delta - (1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]Y, \tag{1}$$

удовлетворяющих условиям на ребре оболочки

 © Гришин В. А., Реут В. В., 2005

$$\langle v\rangle = \langle \tau_{xy}\rangle = \langle \varphi_{xy}\rangle = \langle M_{xy}\rangle = 0\,, \quad \langle u\rangle = -(w_+ + w_-)\,, \quad \langle w\rangle = u_+ + u_-\,,$$

$$\langle \sigma_x\rangle = -h^{-1}\left[(V_x)_+ + (V_y)_-\right], \quad \langle V_x\rangle = h\left[(\sigma_x)_+ + (\sigma_y)_-\right], \tag{2}$$

симметрии

$$V_y = \varphi_y = v = \tau_{xy} = 0 \quad \left(y = 0,\ -a < x < b\right),$$

$$V_x = \varphi_x = u = \tau_{xy} = 0 \quad \left(|y| > c,\ x = -a,\ b\right), \tag{3}$$

на краях включения

$$u(-a,\ y) = \varphi_x(-a,\ y) = 0\,, \quad w(-a,\ y) = \delta \quad |y| < c\,, \tag{4}$$

и равновесия включения

$$\int_{-c}^{c} V_x(-a,\ y)\,dy = -P/2\,. \tag{5}$$

В силу симметрии условия равновесия для касательных напряжений выполняются автоматически, а смещение включения δ – заранее неизвестно. Здесь использованы обозначения работы [1].

Введем функции

$$\chi(y) = V_x(-a,\ y)\,; \quad \mu(y) = \tau_{xy}(-a,\ y)\,, \tag{6}$$

которые отличаются от нуля в силу (4) только во включении $|y| < c$, применим обобщенный метод интегральных преобразований [2]. Приходим к одномерной разрывной краевой задаче [1]:

$$L^2 f_\alpha^{\pm}(x) = q_\alpha^{\pm}(x)\,, \quad -a < x < 0 \vee 0 < x < b \tag{7}$$

с однородными граничными условиями

$$U_{1j}^{\pm}\left[f_\alpha^{\pm}\right] = U_{2j}^{\pm}\left[f_\alpha^{\pm}\right] = 0 \quad (j = 1,\ 2)\,,$$

$$S_2^{+} f_\alpha^{+} = S_1^{+} f_\alpha^{+} = S_2^{-} f_\alpha^{-} = S_1^{-} f_\alpha^{-} = 0\,,$$

$$S_0^{+} f_\alpha^{+} = H_3^{-} f_\alpha^{-}\,, \quad S_3^{-} f_\alpha^{-} = -H_3^{+} f_\alpha^{+}\,,$$

$$\left[S_3^{+} f_\alpha^{+}\right]\varepsilon^2 D_1 = \alpha^4\left[H_0^{-} f_\alpha^{-}\right], \quad \left[H_3^{+} f_\alpha^{+}\right]\varepsilon^2 D_1 = \alpha^4\left[S_0^{-} f_\alpha^{-}\right], \tag{8}$$

где

$$f_\alpha^{+}(x) = \sigma_{x\alpha}(x)\,, \quad f_\alpha^{-}(x) = w_\alpha(x)\,,$$

$$q_\alpha^{+}(x) = -R_3^{+} X_\alpha - i\alpha R_2^{+} Y_\alpha\,, \quad q_\alpha^{-}(x) = Z_\alpha\,;$$

$$R_k^{\pm} f = \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \quad (k = 1, 2), \quad R_2^{\pm} f = \left[L + (1 \pm \nu)\alpha^2 \right] f ,$$

$$R_3^{\pm} = \frac{\partial}{\partial x}\left[L - (1 \pm \nu)\alpha^2 \right] f , \quad Lf = \frac{d^2 f}{dx^2} - \alpha^2 f ,$$

$$Sf = (T^- - T^+) f , \quad Hf = (T^- + T^+) f , \quad T^{\pm} f = f(\pm 0) ,$$

$$S_k^{\pm} f = S\left[R_k^{\pm} f \right], \quad H_k^{\pm} f = H\left[R_k^{\pm} f \right], \quad T_k^{\pm} f = T\left[R_k^{\pm} f \right].$$

Краевая задача (7), (8) соответствует задаче о нагружении оболочки без включений нагрузками $\chi(y)$ и $\mu(y)$ такими, что выполняются условия (4), (5), где трансформанта нагрузок $f_p^{\pm}(x)$ выражена через трансформанты неизвестных функций

$$f_p^-(x) = -D^{-1}\chi_\alpha G_\alpha(x, -a) , \quad f_p^+(x) = -\mu_\alpha \alpha R_2^+ G_\alpha(x, -a) ; \tag{9}$$

$G(x, \xi)$ функция Грина краевой задачи

$$L^2 u(x) = 0 , \quad u' = u''' = 0 , \quad x = -a, b \tag{10}$$

и α – параметр косинус-преобразования Фурье. Если в соответствующей системе работы [1] обозначить через A, F и H матрицу коэффициентов системы, вектора скачков и правых частей, то систему можно переписать в виде

$$AF = \mu_\alpha H_\mu + \chi_\alpha H_\chi , \tag{11}$$

где вектора H_μ и H_χ получаются в результате применения функционалов $H_j^{\pm}$ $(j = 0, 3)$ к частным решениям (9)

$$H_\mu = \left\| 0, 0, \alpha H_3^+ R_2^+ G_\alpha(x, -a), -\alpha H_3^+ R_2^+ G_\alpha(x, -a) \right\|^T ,$$

$$H_\chi = \left\| D^{-1} H_3^- G_\alpha(x, -a), D^{-1} H_\sigma^- G_\alpha(x, -a), 0, 0 \right\|^T . \tag{12}$$

Для отыскания неизвестных функций $\chi(y)$ и $\mu(y)$, воспользуемся условиями (5) и обратим трансформанты $w_\alpha(x)$ и $v_\alpha(x)$, выделив слабосходящиеся части ядер.

В результате приходим к системе интегральных уравнений вида

$$\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix}(y-\eta)^2 ln|y-\eta| & 0\\ 0 & -ln|y-\eta|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\chi(\eta)\\ \mu(\eta)\end{bmatrix}d\eta+$$

$$+\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\chi(\eta)\\ \mu(\eta)\end{bmatrix}d\eta=\begin{bmatrix}\delta_\chi(y)\\ \delta_\mu(y)\end{bmatrix}, \qquad (13)$$

где $K_{ij}(y,\eta)$ – бесконечно дифференцируемые функции

Как было показано в [2], первое из интегральных уравнений (13) не имеет решения в классе интегрируемых функций и его решение следует искать в пространстве функций, имеющих неинтегрируемые особенности вида $(1-y^2)^{-3/2}$, с применением аппарата регуляризации расходящихся интегралов.

Для решения системы (13) воспользуемся методом ортогональных многочленов и будем разыскивать решение в виде разложения в ряд по многочленам Чебышева первого рода для $\mu(y)$ и специального вида многочленов $\pi_k(y)$ [2] для $\chi(y)$:

$$\mu(s)=\delta\left(1-s^2\right)^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\mu_{2m+1}T_{2m+1}(s), \quad \chi(s)=\delta\sum_{m=0}^{\infty}\chi_{2m}\pi_{2m}(s). \quad (14)$$

С учетом спектральных соотношений

$$\int_{-1}^{1}(t-\tau)^2 ln|t-\tau|\pi_{2n}(\tau)d\tau=2\pi P_{2n}(t) \quad (-1\le t\le 1),$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_{2l+1}(s)}{\sqrt{1-s^2}}ln\frac{1}{|y-s|}ds=\pi(2l+1)^{-1}T_{2l+1}(y) \quad (-1\le t\le 1), \qquad (15)$$

приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения $\{\chi_{2k},\mu_{2k+1}\}$. Решение системы при подстановке в условие равновесия (5) с учетом линейной зависимости осадки от нагрузки позволяет определить величину осадки $\delta=P\left(2\pi\chi_0\right)^{-1}$.

Анализ результатов численных исследований. Были проведены расчеты в случае когда оболочка загружена силами, приложенными к серединам включений. Вычислялись значения безразмерного аналога осадки δ^0, связанного с физическим соотношением $\delta=\delta^0\cdot P/Eh$. Расчеты проводились для ряда значений a/b и c/a при $\nu=0,3$; $h/a=0,01$. При этом система линейных алгебраических уравнений решалась методом редукции

с сохранением пяти членов разложения, обеспечившего точность не менее трех значащих цифр.

В таблице приведены безразмерные значения осадки $\delta^0 \times 10^{-4}$ для различных значений отношений a/b и c/a.

a/b	c/a								
	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
0,5	5,33	3,68	2,63	2,07	1,72	1,43	1,24	1,06	0,96
1,0	4,75	3,30	2,37	1,82	1,45	1,19	1,01	0,88	0,76
2,0	4,28	2,77	1,95	1,48	1,20	1,02	0,85	0,77	0,67
4,0	3,80	2,38	1,64	1,24	1,00	0,84	0,73	0,66	0,55

Отметим, что при $c \to 0$ значения осадки совпадают со значениями прогиба под точкой приложения сосредоточенной силы в задаче о нагружении оболочки двумя симметрично расположенными силами. При росте соотношения c/a, что соответствует увеличению размера включений при неизменном соотношении a/b, значения осадок уменьшаются и приближаются к значению прогибов в задаче о нагружении оболочки равномерно распределенной нагрузкой по линии параллельной ребру. При росте соотношения a/b при неизменном соотношении c/a, значения осадок включений уменьшаются и приближаются к соответствующим значениям в задаче о защемленной полосе.

РЕЗЮМЕ. Досліджена задача про знаходження опадів тонких абсолютно жорстких включень, вдавлюваних в нескінчену коробчату оболонку прямокутного профелю. Результати обчислень зведені в таблицю.

SUMMARY. The problem of defining deposits of thin absolutely stiff inclusions pressed into infinite boxed shell of right-angeled structure is concerned. the results of the calculations are tabulated.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Гришин В. А., Реут В. В., Попов Г. Я.* Расчет коробчатых оболочек прямоугольного сечения // Прикладная математика и механика. 1990. Т. 54, вып. 4. С. 605–612. 2. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М., 1982. 342 с. 3. *Migdalski V. I, Reut V. V.* An arbitrary oriented crack in the box shell // Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 117. 2000. P. 261–266. 4. *Воробель В. М., Реут В. В.* Периодическая задача о колебаниях коробчатой конструкции // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Т. 8, вип. 2. 2003. Фіз.-мат. науки. С. 150–155. 5. *Гришин В. В., Гришина В. А., Реут В. В.* Исследование осадки системы штампов параллельных ребру коробчатой оболочки // Тр. Одесск. политехн. ун-та. Вып. 2 (22). 2004. С. 227–231.

Одесский национальный университет

Поступила 15.04.2005