Вісник Одеськ. держ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат.науки.– 1999.– Т.4, вип.4.– С.148–153.

УДК 539.371

О. В. Онищук, А. В. Толкачев
Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Одержано нове зображення вектора переміщень, який задовольняє диференціальним рівнянням просторової теорії пружності. Вказане зображення містить три довільні гармонічні функції. Підстановка замість довільних функцій гармонічних поліномів дає систему поліноміальних розв'язків диференціальних рівнянь. Доведено повноту цієї системи.

Получено новое представление вектора перемещений, удовлетворяющего дифференциальным уравнениям пространственной теории упругости. Указанное представление содержит три произвольные гармонические функции. Подстановка вместо произвольных функций гармонических многочленов дает систему полиномиальных решений дифференциальных уравнений. Доказана полнота этой системы.

The new presentation for the displacement vector, which satisfying for the differential equations of the space elasticity, is constructed. The mentioned presentation contains the three arbitrary harmonic functions. The change of the arbitrary functions by the harmonic polynomials gives the polynomial solution system for the differential equations. The completeness of this system is proved.

Введение. В работе [1] изложен метод построения приближенного решения краевых задач теории упругости, основанный на использовании систем вектор-функций, удовлетворяющих уравнению Ламе ([2], гл.IV, ф.(1.3.2)):

$$(1-2\nu)\nabla^2\vec{u}+\nabla\nabla\cdot\vec{u}=0,\quad (x_1,x_2,x_3)\in V\subset R^3 . \tag{0.1}$$

В работах [3,4] изучен вопрос о полноте таких систем, построенных на основе представления Папковича-Нейбера. Ниже получено новое представление вектора перемещений $\vec{u}$ и доказана полнота системы, построенной на основе этого представления.

1.Построение представления вектора перемещений. В работе [1] были введены обозначения для гармонических полиномов:

$$U_n^m=\rho\exp im\lambda=C_n^m+iS_n^m,\ C_n^m=\rho\cos m\lambda,\ S_n^m=\rho\sin m\lambda \tag{1.1}$$

$$\rho=\frac{2^n n!(-1)^m}{\Gamma(n+1+m)}R^n P_n^m(p),\ p=\cos\theta,\ n=0,1,2,\ldots,\ m=\theta,\pm1,\pm2,\ldots,$$

и доказаны формулы дифференцирования:

$$\frac{\partial U_n^m}{\partial z_r}=nU_{n-1}^{m+r-2},\quad \frac{\partial}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial z_1}-\frac{\partial}{\partial z_3},\ \frac{\partial}{\partial x_2}=i\frac{\partial}{\partial z_1}+i\frac{\partial}{\partial z_3},\ \frac{\partial}{\partial x_3}=2\frac{\partial}{\partial z_2} \tag{1.2}$$

$$z_1=re^{i\lambda}=x_1+ix_2, z_2=2x_3, z_3=-x_1+ix_2=-\bar{z}_1 .$$

Применим их для решения следующей **вспомогательной задачи:** *требуется найти гармонический вектор* $\vec{B}$, *если задана его дивергенция* $\nabla\cdot\vec{B}=h$.

Для частного случая $h=2nU_{n-1}^m$ легко выписать следующие три линейно независимых вектора $\vec{B}$:

$$\text{а)}\ \vec{B}=H\vec{i}_1-iH\vec{i}_2, \nabla\cdot\vec{B}=2\frac{\partial H}{\partial z_1},\quad H=U_n^{m+1}; \tag{1.3}$$

$$\text{б)}\ \vec{B}=H\vec{i}_3,\qquad \nabla\cdot\vec{B}=2\frac{\partial H}{\partial z_2},\quad H=U_n^m; \tag{1.4}$$

$$\text{в)}\ \vec{B}=-H\vec{i}_1-iH\vec{i}_2, \nabla\cdot\vec{B}=2\frac{\partial H}{\partial z_3},\quad H=U_n^{m-1}. \tag{1.5}$$

В данной работе рассматривается случай, когда область V в уравнении (0.1) – ограниченная односвязная, а ее граница $\partial V = S$ – поверхность Ляпунова. В этом случае, согласно [5], можно аппроксимировать функцию h гармоническими полиномами (1.1) и потом воспользоваться (1.3),(1.4),(1.5).

Решение вспомогательной задачи позволяет перейти к доказательству следующего утверждения:

Теорема 1. *Для любого решения уравнения* (0.1) *существуют три гармонические функции* H_2, H_1, H_0 *такие, что*

$$\vec{u} = \kappa H_2 \vec{i}_3 - x_3 \nabla H_2 + \nabla \times \left(H_1 \vec{i}_3\right) + \nabla H_0, \quad \kappa = 3 - 4\nu. \tag{1.6}$$

Доказательство: Вычисляя дивергенцию от обеих частей уравнения (0.1), получаем:

$$(1-2\nu)\nabla^2(\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla^2(\nabla \cdot \vec{u}) = 0, \quad (x_1, x_2, x_3) \in V \subset R^3$$

откуда следует, что $h_2 \equiv \nabla \cdot \vec{u}$ является гармонической функцией. Вычисляя дивергенцию решения в форме Папковича-Нейбера:

$$\vec{u}_2 = 4(1-\nu)\vec{B} - \nabla\left(\vec{R} \cdot \vec{B} + B_0\right), \quad \nabla \cdot \vec{u}_2 = 2(1-2\nu)\nabla \cdot \vec{B} = h_2,$$

получаем вспомогательную задачу для вектора $\vec{B}$. Полагая, например, $\vec{B} = H_2 \vec{i}_3$, $2(1-2\nu)\dfrac{\partial H_2}{\partial x_3} = h_2$, получаем $\vec{u}_2 = \kappa H_2 \vec{i}_3 - x_3 \nabla H_2$.

Далее воспользуемся некоторыми сведениями из векторного анализа, приведенными в [6](пп.664–672) и [7](пп.5.1–5.7), в частности, критериями того, что векторное поле $\vec{A}$ является потенциальным либо соленоидальным:

$$\operatorname{rot} \vec{A} \equiv \nabla \times \vec{A} = 0 \Leftrightarrow \exists U \quad \vec{A} = \operatorname{grad} U \equiv \nabla U$$

$$\operatorname{div} \vec{A} \equiv \nabla \cdot \vec{A} = 0 \Leftrightarrow \exists \vec{B} \quad \vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B} \equiv \nabla \times \vec{B}.$$

Разность $\vec{u}_{10} \equiv \vec{u} - \vec{u}_2$ удовлетворяет уравнению (0.1) и условию $\nabla \cdot \vec{u}_{10} = 0$. Переписывая уравнение (0.1) в виде [2]

$$2(1-\nu)\nabla\nabla \cdot \vec{u} - (1-2\nu)\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = 0, \quad (x_1, x_2, x_3) \in V \subset \mathrm{R}^3, \tag{1.7}$$

получаем $\nabla \times (\nabla \times \vec{u}_{10}) = 0$. Следовательно, существует функция h_1 такая, что $\nabla \times \vec{u}_{10} = \nabla h_1$, причем $\nabla^2 h_1 = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}_{10}) = 0$. Построим вектор $\vec{u}_1$, удовлетворяющий условиям $\nabla \cdot \vec{u}_1 = 0$,. $\nabla \times \vec{u}_1 = \nabla h_1$ Из условия $\nabla \cdot \vec{u}_1 = 0$ следует существование вектора $\vec{b}$ такого, что $\vec{u}_1 = \nabla \times \vec{b}$ и условие $\nabla \times \vec{u}_1 = \nabla h_1$ преобразуется к виду $\nabla\left(\nabla \cdot \vec{b}\right) - \nabla^2 \vec{b} = \nabla h_1$.Отсюда следует, что достаточно подчинить вектор $\vec{b}$ условиям $\nabla^2 \vec{b} = 0$, $\nabla \cdot \vec{b} = h_1$, то есть решить для него вспомогательную задачу. Полагая, например, $\vec{b} = H_1 \vec{i}_3$, $2\frac{\partial H_1}{\partial z_2} = h_1$, получаем $\vec{u}_1 = \nabla \times \left(H_1 \vec{i}_3\right)$.

Разность $\vec{u}_0 \equiv \vec{u}_{10} - \vec{u}_1$ удовлетворяет уравнению (0.1) и условиям $\nabla \cdot \vec{u}_0 = 0$, $\nabla \times \vec{u}_0 = 0$. Из условия $\nabla \times \vec{u}_0 = 0$ следует существование функции H_0 такой, что $\vec{u}_0 = \nabla H_0$, а из условия $\nabla \cdot \vec{u}_0 = 0$ – что $\nabla^2 H_0 = 0$, причем уравнения (0.1),(1.7) удовлетворяются автоматически.

Теорема доказана.

Легко проверить, что для любых гармонических функций H_2, H_1, H_0 вектор (1.6) удовлетворяет уравнению (0.1). Следовательно. (1.6) является общим решением уравнения (0.1). При этом (1.6) не следует рассматривать как представление вектора перемещений в виде суммы потенциального и соленоидального [6]: $\vec{u}=\vec{u}'+\vec{u}''$ $(\nabla\times\vec{u}'=0,\ \nabla\cdot\vec{u}''=0)$, так как $\vec{u}'$ и $\vec{u}''$, вообще говоря, могут не удовлетворять уравнению (0.1).

2.Построение системы полиномиальных решений уравнения (0.1). Приближенное решение уравнения (0.1), удовлетворяющее некоторым краевым условиям, можно отыскивать, заменяя функции H_2,H_1,H_0 в (1.6) линейными комбинациями полиномов (1.1). Выпишем явные выражения вектор-функций, которые получаются, если одна из функций равна полиному, а две другие – нулю.

$$H_2=U_n^m\Rightarrow\vec{u}_{n2}^m=\kappa\begin{Vmatrix}0\\0\\U_n^m\end{Vmatrix}-x_3n\begin{Vmatrix}U_{n-1}^{m-1}-U_{n-1}^{m+1}\\iU_{n-1}^{m-1}+iU_{n-1}^{m+1}\\2U_{n-1}^m\end{Vmatrix}=\vec{u}_{n21}^m+i\vec{u}_{n22}^m \tag{2.1}$$

$$\vec{u}_{n21}^m=\kappa\begin{Vmatrix}0\\0\\C_n^m\end{Vmatrix}-x_3n\begin{Vmatrix}C_{n-1}^{m-1}-C_{n-1}^{m+1}\\-S_{n-1}^{m-1}-S_{n-1}^{m+1}\\2C_{n-1}^m\end{Vmatrix};\quad \vec{u}_{n22}^m=\kappa\begin{Vmatrix}0\\0\\S_n^m\end{Vmatrix}-x_3n\begin{Vmatrix}S_{n-1}^{m-1}-S_{n-1}^{m+1}\\C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^{m+1}\\2S_{n-1}^m\end{Vmatrix}.$$

$$H_1=-\frac{iU_{n+1}^m}{n+1}\Rightarrow\vec{u}_{n1}^m=\begin{Vmatrix}U_n^{m-1}+U_n^{m+1}\\iU_n^{m-1}-iU_n^{m+1}\\0\end{Vmatrix}=\vec{u}_{n11}^m+i\vec{u}_{n12}^m \tag{2.2}$$

$$\vec{u}_{n11}^m=\begin{Vmatrix}C_n^{m-1}+C_n^{m+1}\\-S_n^{m-1}+S_n^{m+1}\\0\end{Vmatrix};\quad \vec{u}_{n12}^m=\begin{Vmatrix}S_n^{m-1}+S_n^{m+1}\\C_n^{m-1}-C_n^{m+1}\\0\end{Vmatrix}$$

$$H_0=\frac{U_{n+1}^m}{n+1}\Rightarrow\vec{u}_{n0}^m=\begin{Vmatrix}U_n^{m-1}-U_n^{m+1}\\iU_n^{m-1}+iU_n^{m+1}\\2U_n^m\end{Vmatrix}=\vec{u}_{n01}^m+i\vec{u}_{n02}^m \tag{2.3}$$

$$\vec{u}_{n01}^m=\begin{Vmatrix}C_n^{m-1}-C_n^{m+1}\\-S_n^{m-1}-S_n^{m+1}\\2C_n^m\end{Vmatrix};\quad \vec{u}_{n02}^m=\begin{Vmatrix}S_n^{m-1}-S_n^{m+1}\\C_n^{m-1}+C_n^{m+1}\\2S_n^m\end{Vmatrix}.$$

Зафиксируем n и учтем свойства симметрии по m [1]: $C_n^{-m}=(-1)^mC_n^m$, $S_n^{-m}=-(-1)^mS_n^m$. В результате получим $3(2n+1)$ линейно независимых вектор-функций, компонентами которых являются полиномы степени n:

$\vec{u}_{n21}^m$ $(m=0,1,\ldots,n-1)-n$ решений; $\vec{u}_{n22}^m$ $(m=1,\ldots,n-1)-n-1$ решений;

$\vec{u}_{n11}^m$ $(m=1,2,\ldots,n)-n$ решений; $\vec{u}_{n12}^m$ $(m=0,1,\ldots,n)-n+1$ решений;

$\vec{u}_{n01}^m$ $(m=0,1,\ldots,n+1)-n+2$ решений; $\vec{u}_{n02}^m$ $(m=1,\ldots,n+1)-n+1$ решений.

Вычисляя

$$\vec{u}_{n31}^{m} = \frac{\vec{u}_{n01}^{m} + \vec{u}_{n11}^{m}}{2} = \begin{Vmatrix} C_n^{m-1} \\ -S_n^{m-1} \\ C_n^m \end{Vmatrix}, \vec{u}_{n32}^{m} = \frac{\vec{u}_{n02}^{m} + \vec{u}_{n12}^{m}}{2} = \begin{Vmatrix} S_n^{m-1} \\ C_n^{m-1} \\ S_n^m \end{Vmatrix}, \tag{2.4}$$

$(m = 0,1,\dots,n+1)$, $\vec{u}_{n11}^{0} = 0, \vec{u}_{n11}^{n+1} = \vec{u}_{n01}^{n+1}, \vec{u}_{n02}^{0} = 0, \vec{u}_{n12}^{n+1} = \vec{u}_{n02}^{n+1}$,

$$\vec{u}_{n41}^{m} = \frac{\vec{u}_{n01}^{m} - \vec{u}_{n11}^{m}}{2} = \begin{Vmatrix} -C_n^{m+1} \\ -S_n^{m+1} \\ C_n^m \end{Vmatrix}, \vec{u}_{n42}^{m} = \frac{\vec{u}_{n02}^{m} - \vec{u}_{n12}^{m}}{2} = \begin{Vmatrix} -S_n^{m+1} \\ C_n^{m+1} \\ S_n^m \end{Vmatrix},$$

$(m = 1,2,\dots,n)$.

получаем решения в более простом виде. Эти вектор-фунции были использованы в [8, 9] для построения точного решения задачи для шара. Заметим, что именно анализ использованных в [8, 9] разложений явился исходным пунктом проведенных выше построений.

Следует также отметить, что в отличие от рассмотренной в [3,4] системы полиномиальных решений, получаемой из представления Папковича-Нейбера, для построенной выше системы автоматически получается линейная независимость вектор-функций.

3.Полнота системы полиномиальных решений. Будем считать, что выполнен переход к безразмерным величинам, в частности что x_j – безразмерные координаты, полученные из размерных делением на некоторый характерный размер так, что $|x_j| \le 1$. Используя (1.6), вычислим компоненты тензора деформаций

$$\varepsilon_{sk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_s}\right) = F_2(H_2) + F_1(H_1) + F_0(H_0), \tag{3.1}$$

$$F_2(H_2) = (1-2\nu)\left(\frac{\partial H_2}{\partial x_k}\delta_{3s} + \frac{\partial H_2}{\partial x_s}\delta_{3k}\right) - x_3\frac{\partial^2 H_2}{\partial x_s \partial x_k},$$

$$F_1(H_1) = \frac{1}{2}\left(e_{sr3}\frac{\partial^2 H_1}{\partial x_r \partial x_k} + e_{kr3}\frac{\partial^2 H_1}{\partial x_r \partial x_s}\right), \quad F_0(H_0) = \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_s \partial x_k}.$$

Для сходимости интеграла энергии

$$E(\vec{u}) = \iiint_V 2\mu\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta^2 + \varepsilon_{sk}\varepsilon_{ks}\right)dV \tag{3.2}$$

достаточно потребовать $\varepsilon_{sk} \in L_2(V)$. Однако эффективные численные методы, основанные на аппроксимации полиномами, получаются, как правило, если $\varepsilon_{sk} \in C(\bar{V})$, $H_i \in C^2(\bar{V})$. В дальнейшем рассматриваются решения уравнения (0.1), удовлетворяющие этим условиям.

Введем следующие обозначения:

$$H_{ic} = \sum_{p=0}^{N} c_{ip} H_{ip} \; (i = 0,1,2), \quad \vec{u}_c = \kappa H_{2c}\vec{i}_3 - x_3 \nabla H_{2c} + \nabla \times \left(H_{1c}\vec{i}_3\right) + \nabla H_{0c} \tag{3.3}$$

H_{ip} – полиномы C_n^m и S_n^m из (1.1).

Теорема 2. *Пусть $\vec{u}$ – некоторое решение уравнения* (0.1). *Тогда* $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \vec{u}_c$ *такое, что*

$$E(\vec{u}-\vec{u}_c) < \varepsilon . \tag{3.4}$$

Доказательство: Используя неравенство

$$(\theta-\theta_c)^2 \le 3\left((\varepsilon_{11}-\varepsilon_{11,c})^2+(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{22,c})^2+(\varepsilon_{33}-\varepsilon_{33,c})^2\right),$$

получим следующую оценку для энергии погрешности

$$E(\vec{u}-\vec{u}_c) \le \iiint\limits_V 2\mu\frac{3\nu}{1-2\nu}\left((\varepsilon_{11}-\varepsilon_{11,c})^2+(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{22,c})^2+(\varepsilon_{33}-\varepsilon_{33,c})^2\right)dV+$$

$$+\iiint\limits_V 2\mu(\varepsilon_{sk}-\varepsilon_{sk,c})(\varepsilon_{ks}-\varepsilon_{ks,c})dV .$$

Следовательно, для доказательства неравенства (3.4) достаточно доказать, что

$$\forall\, s,k \quad \iiint\limits_V (\varepsilon_{sk}-\varepsilon_{sk,c})^2\, dV < \varepsilon_* = \frac{\varepsilon}{36\mu} . \tag{3.5}$$

Имеем

$$\iiint\limits_V (\varepsilon_{sk}-\varepsilon_{sk,c})^2\, dV = \iiint\limits_V \left(F_2(H_2-H_{2c})+F_1(H_1-H_{1c})+F_0(H_0-H_{0c})\right)^2 dV \le$$

$$\le 3\iiint\limits_V \left(F_2(H_2-H_{2c})\right)^2 dV + 3\iiint\limits_V \left(F_1(H_1-H_{1c})\right)^2 dV + 3\iiint\limits_V \left(F_0(H_0-H_{0c})\right)^2 dV .$$

Согласно работе [5], если $H_i \in C^2(\bar{V})$, то $\forall \varepsilon_i > 0$ $\exists\, H_{ic}$ такие, что $\forall (x_1,x_2,x_3) \in V$ выполняются неравенства

$$|H_i - H_{ic}| + \sum_{j=1}^{3}\left|\frac{\partial (H_i-H_{ic})}{\partial x_j}\right| + \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left|\frac{\partial^2 (H_i-H_{ic})}{\partial x_k \partial x_j}\right| < \varepsilon_i \tag{3.6}$$

Задавая следующие значения ε_i :

$\varepsilon_2 = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_*}{18|V|}}, \varepsilon_1 = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_*}{9|V|}}, \varepsilon_0 = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_*}{9|V|}}$ ($|V|$ – объем области V), получаем оценки

$\iiint\limits_V \left(F_i(H_i-H_{ic})\right)^2 dV < \dfrac{\varepsilon_*}{9}$ $(i=0,1,2)$, из которых вытекает неравенство (3.5).

Теорема доказана.

В описанном в работе [1] методе решения задач при фиксированном наборе H_{ip} в (3.3) коэффициенты c_{ip} выбираются так, чтобы энергия погрешности $E(\vec{u}-\vec{u}_c)$ была минимальной. Из теоремы 2 следует, что получаемая при этом последовательность приближенных решений будет сходиться по энергии к точному решению задачи.

Заключение. Таким образом, построенная система вектор-функций является полной, а получаемая на ее основе последовательность приближенных решений сходится к точному решению задачи.

1. **Решение** пространственных задач теории упругости на основе новых соотношений для гармонических многочленов. / Оницук О.В., Попов Г.Я., Толкачев А.В., Чумаченко К.И. // Прикл. механика. -1999. - Т.35. №4. - С.11-18.
2. **Лурье А.И.** Теория упругости. - М.:Наука, 1970. 940 с.

3. **Слободянский М.Г.** Общие формы решений уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции // Прикл. математика и механика. – 1954. – Т.18, вып.1. – С.55–74.
4. **Слободянский М.Г.** Об общих и полных формах решения уравнений упругости // Прикл. математика и механика. – 1959. – Т.23, вып.3. – С.468–482.
5. **Векуа Н.И.** О полноте системы гармонических полиномов в пространстве // ДАН СССР. – 1953. – Т.90, №4. – с.495–498.
6. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т.– М.:Нау ка, 1970. – Т.3. – 656 с.
7. **Кори Г., Кори Т.** Справочник по математике. – М.:Наука, 1984. – 832 с.
8. **Подильчук Ю.Н**. Трехмерные задачи теории упругости. – К.:Наук. думка, 1979. – 240 с.
9. **Пространственные** задачи теории упругости и пластичности: В 6 т. – К.:Наук. думка, 1984. – Т.1: Подильчук Ю.Н. Граничные задачи статики упругих тел. – 304 с.