Вiсник Одеськ. нац. ун-ту. - 2007. - Т.12, вип. 7. Матем. i мех. - С. 130–139

УДК 517.9

В. А. Плотников, О. Д. Кичмаренко
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ, МНОГОЗНАЧНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Плотнiков В. О., Кiчмаренко О. Д. Усереднення рiвнянь з похiдною Хукухари, многозначним керуванням i запiзненням. У статтi наводиться обґрунтування методу усереднення для керованих лiнiйних диференцiальних рiвнянь iз запiзненням з похiдною Хукухари.
Ключовi слова: оптимальне керування, метод усереднення, керовнi диференцiальнi рiвняння, диференцiальнi рiвняння з похiдною Хукухари.

Плотников В. А., Кичмаренко О. Д. Усреднение уравнений с производной Хукухары, многозначным управлением и запаздыванием. В статье приводится обоснование метода усреднения для управляемых линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием с производной Хукухары.
Ключевые слова: оптимальное управление, метод усреднения, управляемые дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с производной Хукухары.

Plotnikov V. A., Kichmarenko O. D. Averaging of the equation with Hukuhara derivative, setvalue control and delay. We obtained substantiation of the averaging method for the controlled linear differential equations with Hukuhara derivative with delay.
Key words: optimal control, averaging method, controlled differential equations, differential equations with Hukuhara derivative.

Введение. Изучение свойств пучка траекторий и построение множества достижимости для систем управления играет важную роль при исследовании задач оптимального управления.

Дифференциальные уравнения с производной Хукухары [10] были введены в работах [7, 8], в которых также исследованы основные свойства их решений.

В [6] было показано, что решение уравнения с производной Хукухары аппроксимирует сверху множество достижимости, а в [9, 11, 14, 15, 16] уравнения с производной Хукухары применяются для исследования нечетких дифференциальных уравнений. В [3, 5] было проведено обоснование метода усреднения для дифференциальных уравнений и дифференциальных включений с производной Хукухары без запаздывания, а в [13, 12, 17] — с запаздыванием. В данной статье приводится обоснование метода частичного усреднения управляемых уравнений с производной Хукухары с переменным запаздыванием.

Определение 1. [10] *Пусть множества $A, B \in conv(\mathrm{R}^n)$. Разностью Хукухары $A \overset{H}{-} B$ множеств A и B называется такое множество $C \in conv(\mathrm{R}^n)$, что $A = B + C$; $conv(\mathrm{R}^n)$ — пространство непустых выпуклых компактных подмножеств в R^n.*

Разность Хукухары, если она существует, определяется единственным образом. Операция разности непрерывна относительно метрики Хаусдорфа.

Определение 2. [10] *Многозначное отображение $X:\mathrm{R}^1\to conv(\mathrm{R}^n)$ дифференцируемо по Хукухаре в точке $t_0\in\mathrm{R}^1$, если существуют разности $X(t_0+\Delta t)\overset{H}{-}X(t_0)$ и $X(t_0)\overset{H}{-}X(t_0-\Delta t)$ для всех достаточно малых $\Delta t>0$ и существует элемент $D_HX(t_0)\in conv(\mathrm{R}^n)$, такой, что*

$$\lim_{\Delta t\to 0_+} h\left(\frac{X(t_0+\Delta t)\overset{H}{-}X(t_0)}{\Delta t}, D_HX(t_0)\right)=\lim_{\Delta t\to 0_+} h\left(\frac{X(t_0)\overset{H}{-}X(t_0-\Delta t)}{\Delta t}, D_HX(t_0)\right),$$

где $h(A,B)$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами A и B, причем $h(A,B)=\min\{d>0\ |A\subset S_d(B),\ B\subset S_d(A)\}$, $A,B\in comp(\mathrm{R}^n)$, $S_d(A)$ – замкнутая d-окрестность множества A. Модуль $|A|$ множества $A\in conv(\mathrm{R}^n)$ равен $h(A,\{0\})$.

В работе [10] определяется интеграл от непрерывного многозначного отображения $X\ :[a,b]\to conv(\mathrm{R}^n)$ и показывается, что $D_H\int\limits_a^t X(s)ds=X(t)$.

Основные результаты.

1. Обоснование метода усреднения для управляемых линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары.

1.1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую линейную систему, описываемую дифференциальным уравнением с производной Хукухары и запаздыванием:

$$D_HX(t)=\varepsilon\left[A(t)X(t)+A_1(t)X(\alpha(t))+F(t)+b(t)U(t)\right], \tag{1}$$

где $t\in I=\left[0,L\varepsilon^{-1}\right]$; ε — малый параметр; $X:\mathrm{R}^1\to conv(\mathrm{R}^n)$; $A(t),\ A_1(t)$ — матрицы $n\times n$; $F:\mathrm{R}^1\to conv(\mathrm{R}^n)$; $\alpha(t)$ — переменное запаздывание; $b(t)$ — известная функция; управление $U(t)\in U^*\in conv(conv(R^n))$.

Запаздывание $0\le\alpha(t)\le t$ – неотрицательная непрерывная функция. Для уравнения (1) задаем начальное условие $X(0)=X_0$. Если $\alpha(t)\le t$ и существует $t_*=\inf\limits_{t\ge 0}\alpha(t)>-\infty$, то на $[t_*,0]$ задаем начальную функцию $\Phi:\mathrm{R}^1\to conv(\mathrm{R}^n)$. Далее будем считать, что $0\le\alpha(t)\le t$.

Воспользуемся схемой частичного усреднения [4].

Предположим, что существуют

$$\overline{A}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T}A(s)ds,\quad \overline{A}_1=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T}A_1(s)ds,\quad \overline{F}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T}F(s)ds \tag{2}$$

и

$$W=\left\{V=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T}b(s)U(s)ds,\middle|\,U(s)\in U^*\right\}. \tag{3}$$

Тогда уравнению (1) поставим в соответствие следующее частично усредненное уравнение:

$$D_HY(t)=\varepsilon\left[\,\overline{A}Y(t)+\overline{A}_1Y(\alpha(t))+\overline{F}+V\right],\quad Y(0)=X_0; \tag{4}$$

где $Y : \mathrm{R}^1 \to conv(\mathrm{R}^n)$; новое управление $V(t)$ выбирается из множества $W \in conv(conv(\mathrm{R}^n))$.

Интеграл в (2) от многозначного отображения понимается в смысле Римана-Хукухары [10], а в (3) – в смысле Аумана, сходимость в $conv(\mathrm{R}^n)$ понимается смысле метрики Хаусдорфа [1].

1.2. Алгоритм соответствия управлений исходной и усредненной систем. Соответствие между управлением $U(t)$ и управлением $V(t)$ установим по следующему алгоритму ступенчатого усреднения:

1. Управлению $V(t) \in W$ поставим в соответствие управление $U(t) \in U^*$ следующим образом:

а) вычисляем $V_i = \frac{1}{T_0} \int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0} V(t)dt \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$ (здесь T_0 – произвольно выбранная константа);

б) зададим управление $U(t) = \{U_i(t),\ iT_0 \le t < (i+1)T_0\}$, где $U_i(t)$ находим из условия:

$$\min_{U(t)\in U} h\left(\frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0} b(s)U(s)ds,\ V_i\right) = h\left(\frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0} b(s)U_i(s)ds,\ V_i\right). \tag{5}$$

Очевидно, что управление $U(t)$ в (5) существует, но может определяться неоднозначно.

2. Управлению $U(t) \in U$ поставим в соответствие управление $V(\varepsilon t) \in V$ следующим образом:

а) вычислим $W_i = \frac{1}{T_0} \int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0} b(s)U(s)ds, \quad i = 0, 1, 2, \ldots; W_i \in V_{T_0}^i =$ $= \frac{1}{T_0} \int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0} b(t)U dt$. Согласно (3) имеем

$$\lim_{T_0\to\infty} V_{T_0}^i = V, \tag{6}$$

т.е. условие $W_i \in V$ может не выполняться;

б) зададим управление $V(t) = \{V_i,\ iT_0 \le t < (i+1)T_0,\ i = 0, 1, \ldots\}$, где V_i находим из условия

$$\min_{V\in W} h(W_i,\ V) = h(W_i,\ V_i). \tag{7}$$

В силу выпуклости и компактности множества W, а также выпуклости функции $h(W_i,\ V)$ значение V_i в (7) определяется однозначно.

В качестве управления $V(t)$ можно выбрать ступенчатую функцию:

$$\tilde{V}(t) = \left\{ V_i(t) \in V \,\middle|\, \frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0} V_i(t)dt = v_i,\ \ iT_0 \le t < (i+1)T_0,\ \ i = 0, 1, \ldots \right\}.$$

1.3. Обоснование схемы ступенчатого усреднения.

Теорема 1. *Пусть в области $Q = \{t \geq 0;\, X \in D \subset conv(\mathrm{R}^n)\}$ выполнены следующие условия:*

1) $A(t), A_1(t), F(t)$ и $b(t)$ – непрерывны и ограничены, т.е. $\|A(t)\| \leq M$, $\|A_1(t)\| \leq M$, $\|b(t)\| \leq M$, $|F(t)| \leq M$; $|U^*| \leq 1$;

2) функция $\alpha(t)$ равномерно непрерывна при $t \geq 0$ и $0 \leq \alpha(t) \leq t$;

3) пределы (2),(3) существуют равномерно относительно $t \geq 0$;

4) решения $Y(t)$ усредненной системы (4) при любом измеримом управлении $V(t) \in W$, $\varepsilon \in (0, \sigma]$, $t \geq 0$, $Y(0) = X_0 \subset D' \subset D$ вместе с ρ-окрестностью принадлежат области D.

Тогда для любого $\eta>0$, $L>0$ существует $\varepsilon(\eta, L) \in (0, \sigma]$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ справедливы следующие утверждения:

1. Для любого допустимого управления $U(t) \in U^*$ системы (1) существует допустимое управление $V(t) \in W$ системы (4) такое, что справедлива оценка

$$h(X(t), Y(t)) \leq \eta, \tag{8}$$

где $X(t), Y(t)$ — решения уравнений (1) и (4) соответственно, при этом $X(0) = Y(0) = X_0 \in D'$.

2. Для любого допустимого управления $V(t) \in W$ системы (4) существует допустимое управление $U(t) \in U^*$ системы (1) такое, что справедлива оценка (8).

Доказательство. Пусть $U(t)$ — некоторое допустимое управление в (1), а $V(t)$ соответствующее ему по алгоритму (п. 1.2) управление в (4). Представив решения уравнений (1) и (4) в интегральной форме [6, 7], оценим $|X(t)|$ и $|Y(t)|$:

$$X(t) = X_0 + \varepsilon \int_0^t \left[A(s)\, X(s) + A_1(s)\, X(\alpha(s)) + F(s) + b(s)U(s)\right] ds,$$

$$Y(t) = X_0 + \varepsilon \int_0^t \left[\overline{A}\, Y(s) + \overline{A_1}\, Y(\alpha(s)) + \overline{F} + V\right] ds.$$

Обозначим $m_X(s) = \max\limits_{0 \leq \tau \leq s} |X(\tau)|$, $m_Y(s) = \max\limits_{0 \leq \tau \leq s} |Y(\tau)|$.

Тогда

$$m_X(t) \leq |X_0| + \varepsilon \int_0^t \left[\|A(s)\|\, m_X(s) + \|A_1(s)\|\, m_X(s) + |F(s)| + \|b(s)\|\, |U^*|\right] ds \leq$$

$$\leq |X_0| + 2ML + 2\varepsilon M \int_0^t m_X(s) ds \leq \left(|X_0| + 2ML\right) e^{2\varepsilon M t} \leq \left(|X_0| + 2ML\right) e^{2ML}.$$

Аналогично получаем, что

$$m_Y(s) \leq \left(|X_0| + 2ML\right) e^{2ML}.$$

Таким образом,

$$|X(t)| \le \big(|X_0| + 2ML\big)e^{2ML} \quad \text{и} \quad |Y(t)| \le \big(|X_0| + 2ML\big)e^{2ML}.$$

С учетом вышеизложенного оценим

$$h(X(t), Y(t)) \le$$

$$\le \varepsilon h\left(\int_0^t [A(s)X(s) + A_1(s)X(\alpha(s)) + F(s) + b(s)U(s)]ds;\right.$$

$$\left.\int_0^t \big[\overline{A}Y(s) + \overline{A}_1 Y(\alpha(s)) + \overline{F} + V(s)\big]ds\right) \le$$

$$\le \varepsilon \left[h\left(\int_0^t A(s)X(s)ds, \int_0^t \overline{A}Y(s)ds\right) + h\left(\int_0^t A_1(s)X(\alpha(s))ds, \int_0^t \overline{A}_1 Y(\alpha(s))ds\right) + \right.$$

$$\left. + h\left(\int_0^t F(s)ds, \int_0^t \overline{F}\,ds\right) + h\left(\int_0^t b(s)U(s)ds, \int_0^t V(s)ds\right)\right]. \tag{9}$$

Каждое слагаемое в (9) оценим отдельно с учетом (2), (3).

Сегмент $\big[0, L\varepsilon^{-1}\big]$ разобьем на части точками $t_i = i\Delta(\varepsilon)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, причем $m\Delta(\varepsilon) \le L\varepsilon < (m+1)\Delta(\varepsilon)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \Delta(\varepsilon) = \infty$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\Delta(\varepsilon) = 0$.

Пусть $t \in [t_k, t_{k+1})$, тогда

$$h\left(\int_0^t A(s)X(s)ds, \int_0^t \overline{A}Y(s)ds\right) \le$$

$$\le h\left(\sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s)ds + \int_{t_k}^{t} A(s)X(s)ds, \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X(s)ds + \int_{t_k}^{t} \overline{A}X(s)ds\right) +$$

$$+ h\left(\int_0^t \overline{A}\, X(s)ds, \int_0^t \overline{A}Y(s)ds\right) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{k-1} h\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s)ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X(s)ds\right) + h\left(\int_{t_k}^{t} A(s)X(s)ds, \int_{t_k}^{t} \overline{A}X(s)ds\right) +$$

$$+ h\left(\int_0^t \overline{A}\, X(s)ds, \int_0^t \overline{A}Y(s)ds\right); \tag{10}$$

$$h\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s)ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X(s)ds\right) \le$$

$$\leq h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s)ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X_i ds\right) + h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X_i ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X_i ds\right) +$$

$$+h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X_i ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X(s)ds\right).$$

В силу равномерной сходимости к среднему в (2), (3) существует монотонно убывающая функция $\Theta(t) \to 0$ при $t \to \infty$ такая, что

$$h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X_i ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X_i ds\right) \leq \Delta(\varepsilon)\Theta\left(\Delta(\varepsilon)\right),$$

$$h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} b(s)U(s)ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} V(s)ds\right) \leq \Delta(\varepsilon)\Theta\left(\Delta(\varepsilon)\right).$$

Тогда

$$h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s)ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X(s)ds\right) \leq$$

$$\leq h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X_i ds + \varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)\int\limits_{t_i}^{s}[A(\tau)X(\tau)+A_1(\tau)X(\alpha(\tau))+F(\tau)+b(\tau)U(\tau)]d\tau ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X_i ds\right)+$$

$$+h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X_i ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X_i ds + \varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}\int\limits_{t_i}^{s}[A(\tau)X(\tau) + A_1(\tau)X(\alpha(\tau)) + F(\tau) + V(\tau)]d\tau ds\right) +$$

$$+\Delta(\varepsilon)\Theta\left(\Delta(\varepsilon)\right) \leq \varepsilon\left|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)\int\limits_{t_i}^{s}[A(\tau)X(\tau) + A_1(\tau)X(\alpha(\tau)) + F(\tau) + b(\tau)U(\tau)]d\tau ds\right| +$$

$$+\varepsilon\left|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}\int\limits_{t_i}^{s}[A(\tau)X(\tau) + A_1(\tau)X(\alpha(\tau)) + F(\tau) + b(\tau)U(\tau)]d\tau ds\right| + \Delta(\varepsilon)\Theta\left(\Delta(\varepsilon)\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon(\Delta(\varepsilon))^2 4M^2\left(1 + (\|X_0\| + 2ML)e^{2ML}\right) + \Delta(\varepsilon)\Theta\left(\Delta(\varepsilon)\right). \tag{11}$$

$$h\left(\int\limits_{t_k}^{t} A(s)X(s)ds, \int\limits_{t_k}^{t} \overline{A}X(s)ds\right) \leq \int\limits_{t_k}^{t} h\left(A(s)X(s), \overline{A}X(s)\right)ds \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_k}^{t} \max_{\psi\in S_1} \left| C(A(s)X(s),\psi) - C(\overline{A}X(s),\psi) \right| ds \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_k}^{t} |X(s)| \max_{\psi\in S_1} \left| A^T(s)\psi - \overline{A}^T\psi \right| ds \leq \int\limits_{t_k}^{t} |X(s)| \left\| A^T(s) - \overline{A}^T \right\| ds \leq$$

$$\leq 2M\Delta(\varepsilon)\left(|X_0| + 2ML\right)e^{2ML}, \tag{12}$$

где $C(A,\psi) = \max\limits_{a\in A}(a,\psi)$ – опорная функция множества $A \in comp(\mathrm{R}^n)$, $\psi \in \mathrm{R}^n$, S_1 – сфера единичного радиуса.

$$h\left(\int\limits_0^t \overline{A}\,X(s)ds, \int\limits_0^t \overline{A}\,Y(s)ds\right) \leq \int\limits_0^t h\left(\overline{A}\,X(s), \overline{A}\,Y(s)\right) ds =$$

$$= \int\limits_0^t \max_{\psi\in S_1} \left| C(\overline{A}\,X(s),\psi) - C(\overline{A}\,Y(s),\psi) \right| ds = \int\limits_0^t \max_{\psi\in S_1} \left| C(X(s),\overline{A}^T\psi) - C(Y(s),\overline{A}^T\psi) \right| ds \leq$$

$$\leq \int\limits_0^t \max_{\psi\in S_1} \left\| \overline{A}^T\psi \right\| h(X(s),Y(s))ds \leq \left\| \overline{A}^T \right\| \int\limits_0^t h(X(s),Y(s))ds \leq M \int\limits_0^t \delta(s)ds, \tag{13}$$

где $\delta(t) = \max\limits_{0\leq x\leq t} h\left(X(s),Y(s)\right)$.

Таким образом, из (10), (11), (12) и (13) следует, что

$$h\left(\int\limits_0^t A(s)X(s)ds, \int\limits_0^t \overline{A}\,Y(s)ds\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k-1} \left[\varepsilon(\Delta(\varepsilon))^2 4M^2\left(1 + (\|X_0\| + 2ML)e^{2ML}\right) + \Delta(\varepsilon)\Theta(\Delta(\varepsilon))\right] +$$

$$+ 2M\Delta(\varepsilon)(|X_0| + 2ML)e^{2ML} + M\int\limits_0^t \delta(s)ds \leq$$

$$\leq 2M\Delta(\varepsilon)\left(2ML + (2ML+1)(|X_0| + 2ML)e^{2ML}\right) + \frac{L}{\varepsilon}\Theta(\Delta(\varepsilon)) + M\int\limits_0^t \delta(s)ds. \tag{14}$$

Аналогично получаем:

$$h\left(\int\limits_0^t A_1(s)X(\alpha(s))ds, \int\limits_0^t \overline{A}_1 Y(\alpha(s))ds\right) \leq$$

$$\leq 2M\Delta(\varepsilon)(2ML+(2ML+1)(|X_0|+2ML)e^{2ML})+\frac{L}{\varepsilon}\Theta(\Delta(\varepsilon))+M\int\limits_0^t\delta(s)ds. \quad (15)$$

Оценим третье слагаемое в (9):

$$h\left(\int\limits_0^t F(s)ds, \int\limits_0^t \overline{F}ds\right)\leq$$

$$\leq h\left(\sum_{i=1}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s)ds+\int\limits_{t_k}^{t} F(s)ds, \sum_{i=1}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}ds+\int\limits_{t_k}^{t} \overline{F}\,ds\right)\leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k-1} h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s)ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}ds\right)+h\left(\int\limits_{t_k}^{t} F(s)ds, \int\limits_{t_k}^{t} \overline{F}\,ds\right).$$

В силу равномерной сходимости к среднему в (2) существует монотонно убывающая функция $\Theta(t)\to 0$ при $t\to\infty$ такая, что

$$h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s)ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}ds\right)\leq \Delta(\varepsilon)\Theta(\Delta(\varepsilon)).$$

Тогда

$$h\left(\int\limits_0^t F(s)ds, \int\limits_0^t \overline{F}ds\right)\leq \sum_{i=1}^{k-1}\Delta(\varepsilon)\Theta(\Delta(\varepsilon))+h\left(\int\limits_{t_k}^{t} F(s)ds, \int\limits_{t_k}^{t} \overline{F}ds\right)\leq$$

$$\leq \frac{L}{\varepsilon}\Theta(\Delta(\varepsilon))+\int\limits_{t_k}^{t} h\left(F(s),\overline{F}\right)ds\leq \frac{L}{\varepsilon}\Theta(\Delta(\varepsilon))+2M\Delta(\varepsilon). \quad (16)$$

Оценим четвертое слагаемое в (9) с учетом алгоритма соответствия управлений, выбрав $T_0=\Delta(\varepsilon)$:

$$h\left(\int\limits_0^t b(s)U(s)ds, \int\limits_0^t V(s)ds\right)\leq$$

$$\leq h\left(\sum_{i=1}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} b(s)U(s)ds+\int\limits_{t_k}^{t} b(s)U(s)ds, \sum_{i=1}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} V(s)ds+\int\limits_{t_k}^{t} V(s)ds\right)\leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k-1} h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} b(s)U(s)ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} V(s)ds\right)+h\left(\int\limits_{t_k}^{t} b(s)U(s)ds, \int\limits_{t_k}^{t} V(s)ds\right)\leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k-1} \Delta(\varepsilon)\Theta(\Delta(\varepsilon)) + 2M\Delta(\varepsilon) \leq \frac{L}{\varepsilon}\Theta(\Delta(\varepsilon)) + 2M\Delta(\varepsilon). \tag{17}$$

Из (9), (14), (15), (16), (17) получаем:

$$\delta(t) \leq r(\varepsilon) + 2\varepsilon M \int_0^t \delta(s)ds$$

где

$$r(\varepsilon) = 4M\varepsilon\Delta(\varepsilon)\left(2ML+(2ML+1)(|X_0|+2ML)e^{2ML}\right)+4M\varepsilon\Delta(\varepsilon)+4L\Theta(\Delta(\varepsilon)).$$

По лемме Гронуола-Беллмана:

$$\delta(s) \leq r(\varepsilon)e^{2ML}. \tag{18}$$

Т.к. $r(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то из (18) следует утверждение теоремы (8).

Заключение. Таким образом, доказанная теорема позволяет построить численно-асимптотические методы решения задач оптимального управления системами с производной Хукухары и многозначными управлениями аналогично задачам оптимального управления на траекториях, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [4].

1. **Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.** Дифференциальные включения и оптимальное управление / Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы. Сб. обзорных статей. 2. К 50-летию института (Труды МИАН СССР). - М.: Наука, 1985. - С. 194 - 252.
2. **Ляпунов А.А.** О вполне аддитивных вектор-функциях // Изв. АН СССР. – Сер. матем. – 1940. – № 6. – С. 465-478.
3. **Плотников А.В.** Усреднение дифференциальных включений с производной Хукухары // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41, № 1. – С. 121-125.
4. Плотников В.А. Метод усреднения в задачах управления. – Киев-Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
5. **Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы – Одесса: Астропринт, 1999. – 356 с.
6. **Толстоногов А.А.** Дифференциальные включения в Банаховом пространстве. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.
7. **De Blasi F.S., Iervolino F.** Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll. Unione Mat. Ital. – 1969. – Vol. 2, № 4-5. – P. 491-501.
8. **De Blasi F.S., Iervolino F.** Euler method for differential equations with set-valued solutions // Boll. U. M. I. – 1971. – Vol. 4, № 4. – P. 941-949.
9. **Diniz G., Fernandes J.F.R., Meyer J.F.C.A., Barros L.C.** A fuzzy Cauchy problem modelling the decay of the biochemical oxygen demand in water // Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference. – 2001 – P. 512-516.

10. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurable dont la valeur est un compact convexe // Func. Ekvacioj. – 1967. – № 10. – P. 205-223.

11. **Hüllermeier E.** An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical systems // International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. 1997. – № 5. – P. 117-137.

12. **Janiak T., Luczak-Kumorek E.** Bogollubov's type theorem for functional differential inclusions with Hukuhara's derivative // Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica. – 1991. – № 1. – P. 41-54.

13. **Kisielewicz M.** Method of Averaging for Differential Equations with Compact Convex Valued Solutions // Rend. Math. – 1976. – V. 9, № 3. – P. 397-408.

14. **Lakshmikantham V., Leela S., Vatsala A.S.** Interconnection between set and fuzzy differential equations // Nonlinear Analysis. – 2003. – № 54. – P. 351-360.

15. **Lakshmikantham V., Tolstonogov A.A.** Existence and interrelation between set and fuzzy differential equations // Nonlinear Analysis. – 2003. – № 55. – P. 255-268.

16. **Oberguggenberger M., Pittschmann S.** Differential equations with fuzzy parameters // Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems. – 1999. – № 5. – P. 181-202.

17. **Plotnikov V.A., Rashkov P.I.** Averaging in differential equations with Hukuhara derivative and delay // Functional Differential Equations.(Israel) – 2001. – V. 8, № 3-4. – P. 371-381.

Получена 8.06.2006