

УДК 539.3

Д. С. Плюсн

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ

Использована новая методика решения пространственных задач, основанная на ее сведении к двум совместно и одному отдельно решаемым уравнениям. С ее помощью построено точное решение пространственной задачи для упругого слоя, нижняя грань которого либо закреплена, либо находится в условиях скользящей заделки, а к верхней грани приложено нормальное сжимающее напряжение. Применение интегрального преобразования Фурье по двум переменным сводит решение к одномерной векторной краевой задаче в пространстве трансформант. Решение задачи получено в явном виде при помощи аппарата матричного дифференциального исчисления. Вычислены нормальные напряжения и смещения на поверхности слоя и исследована возможность появления растягивающих напряжений на нижней грани при выполнении условий гладкого контакта.

MSC: 74G05.

Ключевые слова: пространственная задача, упругий слой, преобразование Фурье.

ВВЕДЕНИЕ. Впервые метод сведения уравнений движения к двум совместно и одному отдельно решаемым уравнениям был предложен в работах Г. Я. Попова [1]. Особенностью и преимуществом указанного подхода является то, что решение поставленной задачи получено в терминах исходных смещений и напряжений, а не в терминах вспомогательных функций, которые часто используются при решении краевых задач. Как известно, возвращение от вспомогательных функций к исходным механическим представляет собой достаточно сложную задачу, которой удастся избежать при указанном подходе.

Пространственные задачи теории упругости рассматривались многими авторами. Тут следует упомянуть работы Александрова В. М., Воровича И. И., Мухелишвили Н. И. и Поручикова В. Б. [6–10]. В последнее время решение пространственных задач приобрело острую актуальность в связи с развитием вычислительной техники [2–5].

Предложенная работа представляет собой аналитическое решение пространственной задачи упругости для слоя. Ее результаты могут быть обобщены на решение пространственных динамических задач.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ**1. Постановка задачи.**

Рассматривается задача о напряженном состоянии бесконечного упругого слоя, описываемого в декартовой системе координат соотношениями $-\infty < x, y < +\infty$, $0 < z < h$, к верхней грани $z = h$ которого приложена нормальная сжимающая нагрузка $P(x, y)$, а на нижней выполняются либо условия скользящей заделки

$$\begin{cases} \tau_{zx}|_{z=0} = 0 \\ \tau_{zy}|_{z=0} = 0 \\ w|_{z=0} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

либо условия защемления

$$\begin{cases} u|_{z=0} = 0 \\ v|_{z=0} = 0 \\ w|_{z=0} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $u = u_x(x, y, z)$, $v = u_y(x, y, z)$, $w = u_z(x, y, z)$ — смещения среды вдоль соответствующих координатных осей. Требуется найти смещения и напряжения, удовлетворяющие краевым условиям и уравнениям равновесия

$$\begin{cases} \Delta u + \mu_0 \theta' = 0 \\ \Delta v + \mu_0 \theta' = 0 \\ \Delta w + \mu_0 \theta' = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $\mu_0 = \frac{1}{1-2\mu}$, μ — коэффициент Пуассона, $\theta = u' + v' + w'$ — объемное расширение, штрих обозначает производную по переменной x , точка — по y , запятая — по z .

2. Приведение уравнений к системе из двух совместно и одного раздельно решаемого уравнений.

Согласно [1] введение вспомогательных функций

$$\begin{aligned} f &= u' + v' \\ \tilde{f} &= v' - u' \end{aligned} \quad (4)$$

с последующим дифференцированием системы (3) приводит к системе из двух совместно и одного раздельно решаемых уравнений вида

$$\begin{cases} \Delta f + \mu_0 \nabla_{xy} (f + w') = 0 \\ \Delta w + \mu_0 (f + w')' = 0 \\ \Delta \tilde{f} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Вводя аналогичные замены для касательных напряжений и используя соотношения теории упругости [11], получаем преобразованные граничные условия. Соотношения, определяющие нагрузку на верхней грани, имеют вид

$$\begin{cases} \tau G^{-1}|_{z=h} = (\nabla_{xy} w + f')|_{z=h} = 0 \\ \tilde{\tau} G^{-1}|_{z=h} = \tilde{f}'|_{z=h} = 0 \\ \frac{\sigma_z}{2G\mu_0}|_{z=h} = (\mu f + (1-\mu)w')|_{z=h} = -P(x, y), \end{cases} \quad (6)$$

где $\tau = \tau'_{zx} + \tau_{zy}$, $\tilde{\tau} = \tau'_{zy} - \tau_{zx}$. Аналогичным образом преобразуем остальные уравнения. В новых переменных условия скользящей заделки (1) будут выглядеть как

$$\begin{cases} \tau G^{-1}|_{z=0} = (\nabla_{xy} w + f')|_{z=0} = 0 \\ \tilde{\tau} G^{-1}|_{z=0} = \tilde{f}'|_{z=0} = 0 \\ w|_{z=0} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

условия защемления (2) —

$$\begin{cases} f|_{z=0} = 0 \\ \tilde{f}|_{z=0} = 0 \\ w|_{z=0} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, исходная задача сведена к задаче (5), (6), (7) или (5), (6), (8).

3. Сведение полученных соотношений к одномерной краевой задаче.

Полученная задача относительно функции $\tilde{f}$ является однородной задачей для уравнения Лапласа, что приводит к тривиальному решению

$$\tilde{f}(x, y, z) \equiv 0. \quad (9)$$

К оставшимся двум уравнениям системы (5) применим полное интегральное преобразование Фурье по переменным x и y согласно схеме

$$f_{\alpha\beta} = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy.$$

В пространстве трансформант уравнения представляют собой однородное векторное дифференциальное уравнение для оператора второго порядка

$$L_2[\vec{y}(z)] = I \vec{y}'' + \mu_0 Q \vec{y}' - N^2 P \vec{y}, \quad (10)$$

где

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} w_{\alpha\beta} \\ f_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & \mu_*^{-1} \\ -N^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \mu_*^{-1} & 0 \\ 0 & \mu_* \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом преобразовываем граничные условия, получая одномерную краевую задачу в пространстве трансформант.

4. Решение одномерной краевой задачи.

Одномерную краевую задачу будем решать методом, описанным в [12]. Решение векторного уравнения связано с решением соответствующего матричного уравнения $L_2[Y(z)] = 0$ соотношением

$$\vec{y}(z) = \sum_{i=1}^2 Y_i(z) C_i, \quad (11)$$

где $C_i = (C_{i1} \ C_{i2})^T$ — векторы неизвестных констант. Прямой подстановкой можно убедиться, что решением однородного матричного уравнения является функция [13]

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sz} M^{-1}(s) ds, \quad (12)$$

где матрица $M(s)$ определяется из соотношения $L_2[e^{sz} I] = M(s) e^{sz} I$, что можно установить путем подстановки матрицы $R(z) = e^{sz} I$ в соотношение (10). Определяя нули подынтегральной функции $\det M(s) = (s - N)^2 (s + N)^2$, выбирая

соответствующие контуры и вычисляя вычеты, получаем два линейно независимых решения матричного уравнения:

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= e^{-Nz} \left\| \begin{array}{cc} -\frac{zN(\mu_*-1)+\mu_*+1}{4N} & \frac{\mu_0 z}{4N\mu_*} \\ -\frac{\mu_0 Nz}{4} & \frac{zN(\mu_*-1)-\mu_*-1}{4N\mu_*} \end{array} \right\| \\ Y_2(z) &= e^{Nz} \left\| \begin{array}{cc} -\frac{zN(\mu_*-1)-\mu_*-1}{4N} & -\frac{\mu_0 z}{4N\mu_*} \\ \frac{\mu_0 Nz}{4} & \frac{zN(\mu_*-1)+\mu_*+1}{4N\mu_*} \end{array} \right\|. \end{aligned} \quad (13)$$

Константы в выражении (11) находятся из граничных условий (6), (7) или (6), (8). Таким образом, получено векторное решение краевой задачи с уравнением (10) и условиями (6), (7) или (6), (8).

5. Обращение преобразований.

Учитывая (8), трансформанты смещений связаны с трансформантами вспомогательных функций (4) соотношением

$$\begin{cases} u_{\alpha\beta} = \frac{i\alpha}{N^2} z_{\alpha\beta} \\ v_{\alpha\beta} = \frac{i\beta}{N^2} z_{\alpha\beta}. \end{cases} \quad (14)$$

В связи с тем, что исходная система дифференциальных уравнений была продифференцирована, необходимо убедиться, является ли формула (10) решением исходной системы (3). Для этого в трансформанте системы (3) применим выражение для $u_{\alpha\beta}$ и $v_{\alpha\beta}$ из (13), получая систему (9). Таким образом, показано, что решения уравнений в переменных f и $\tilde{f}$ удовлетворяют системе уравнений Ламе. Для получения смещений в пространстве оригиналов обратим преобразование Фурье по формуле

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha\beta} e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta.$$

Учитывая четность функций $f_{\alpha\beta}(N, z)$ и $w_{\alpha\beta}(N, z)$ относительно α и β , в формулах обратных преобразований перейдем к полярной системе координат (N, ϕ) . Окончательные формулы для смещений будут иметь вид

$$\begin{aligned} w(x, y, z) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} N w_{\alpha\beta}(z) \cos(Nx \cos(\phi)) \cos(Ny \sin(\phi)) dN d\phi \\ u(x, y, z) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} z_{\alpha\beta}(z) \cos(\phi) \sin(Nx \cos(\phi)) \cos(Ny \sin(\phi)) dN d\phi \\ v(x, y, z) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} z_{\alpha\beta}(z) \cos(\phi) \sin(Ny \cos(\phi)) \cos(Nx \sin(\phi)) dN d\phi. \end{aligned} \quad (15)$$

6. Численные результаты.

В качестве упругого материала была выбрана сталь ($\mu = 0,28$, $G = 7,93 \cdot 10^9$) с толщиной $h = 1$. Рассмотрим два вида нагрузок: убывающую, приложенную

ко всей верхней грани, и постоянную, приложенную к определенной области. Численное интегрирование в формулах (15) было выполнено при помощи метода Филона [14].

В качестве убывающей нагрузки выберем $R = \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}$, трансформанта Фурье которой может быть вычислена при помощи леммы Жордана: $R_{\alpha\beta} = \pi e^{-|\alpha|+|\beta|}$. В случае скользящей заделки смещения выглядят следующим образом:

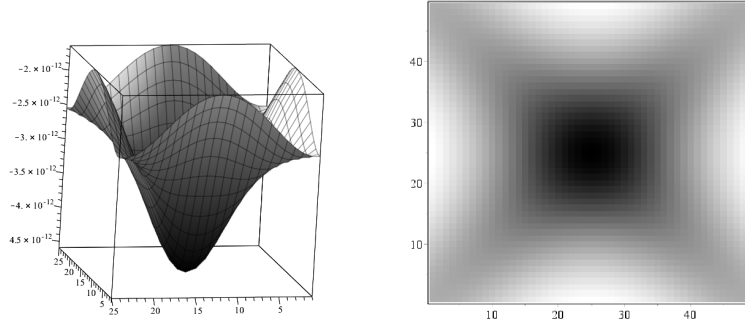


Рис 1. Общий вид смещений в случае убывающей нагрузки

При этом нормальные напряжения по своей структуре остаются похожими на:

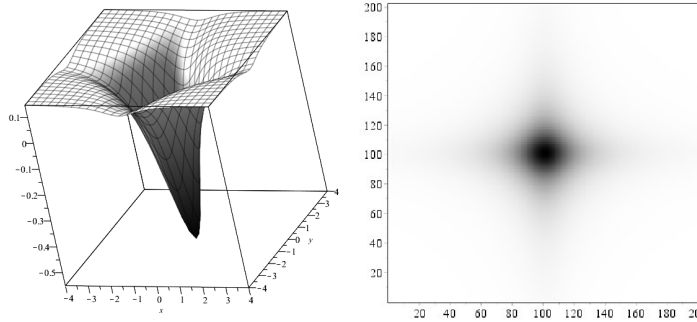


Рис 2. Общий вид напряжений в случае убывающей нагрузки

Динамика напряжений по оси z показана на рис. 3. Заметим, что напряжения остаются отрицательными, т.е. отрыва нижней грани от жесткого основания не происходит.

В качестве нагрузки, приложенной к области, выберем

$$Q = \begin{cases} A, & |x| < a, |y| < b \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad A = a = b = 1.$$

Ее трансформантой является $Q_{\alpha\beta} = \frac{4A}{\alpha\beta} \sin(a\beta) \sin(\alpha b)$.

В данном случае смещения будут иметь вид

Напряжения σ_z и их изменение при увеличении координаты z показано на рис. 5. В данном случае все напряжения также остаются отрицательными.

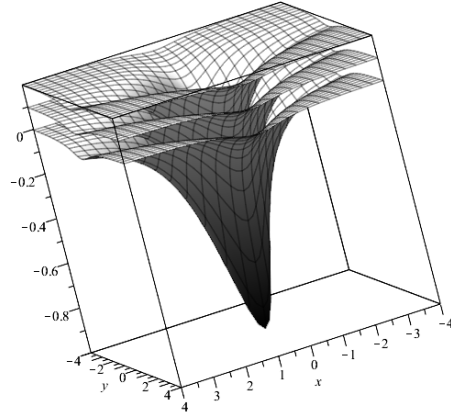
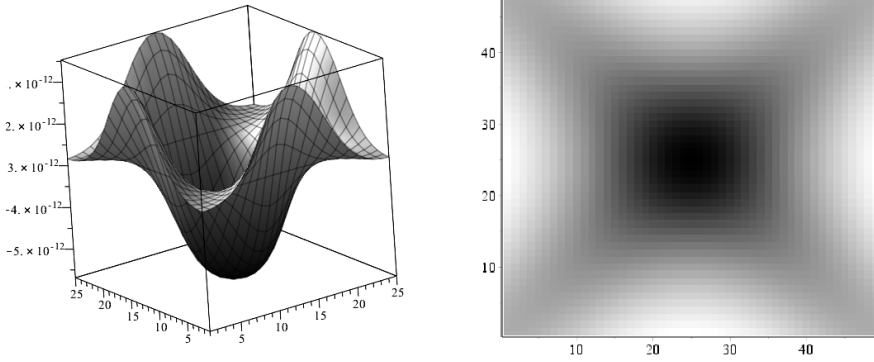
Рис 3. Изменение напряжений при увеличении z 

Рис 4. Общий вид смещений в случае постоянной нагрузки

Приложение А. Построение системы фундаментальных решений уравнения (10).

Согласно формуле (12) решением матричного уравнения $L_2[Y(z)] = 0$ является

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sz} M^{-1}(s) ds, \quad (1A)$$

где оператор L_2 определен в выражении (10), а матрица $M(s)$ определяется из соотношения $L_2[e^{sz} I] = M(s)e^{sz} I$.

Положим $R(z) = e^{sz} I$. Тогда $R'(z) = se^{sz} I = sR(z)$, $R''(z) = s^2 e^{sz} I = s^2 R(z)$, и

$$L_2[R(z)] = IR''(z) + \mu_0 QR'(z) - N^2 PR(z) = (s^2 I + \mu_0 Qs - N^2 P) R(z),$$

откуда получаем $M(s) = s^2 I + \mu_0 Qs - N^2 P$. Тогда нулями знаменателя подын-

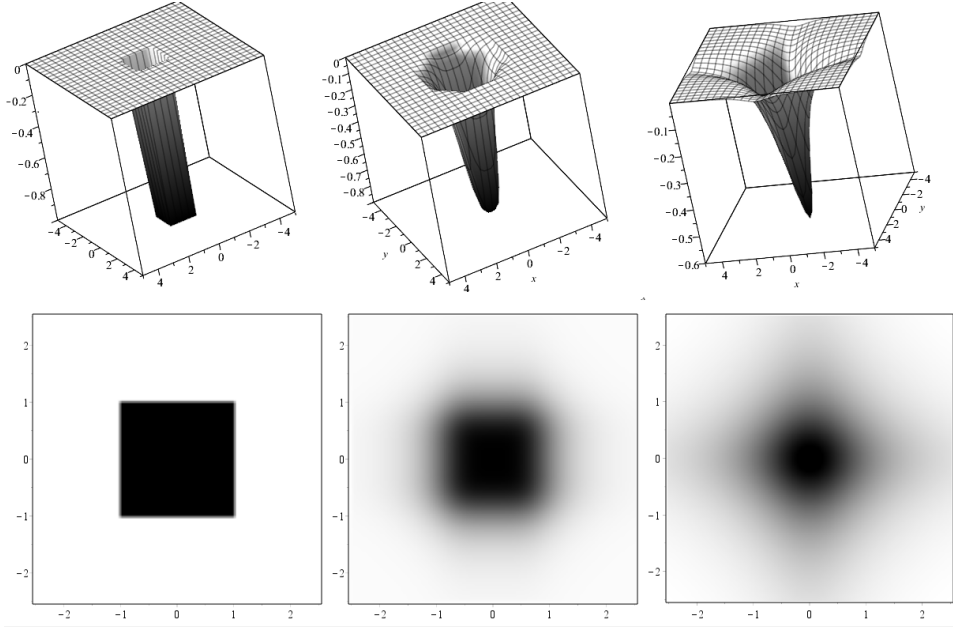


Рис 5. Напряжения в случае постоянной нагрузки

тегральной функции $\det M(s) = (s - N)^2(s + N)^2$ в выражении (1A) являются

$$s_i = \pm N, \quad (2A)$$

и обращение матрицы $M(s)$ приводит к

$$M^{-1}(s) = \frac{1}{(s - N)^2(s + N)^2} \begin{vmatrix} s^2 - \mu_* N^2 & -\mu_0 s \mu_*^{-1} \\ \mu_0 s N^2 & s^2 - N^2 \mu_*^{-1} \end{vmatrix}.$$

Для преобразования выражения (1A) выберем контуры, содержащие точки (2A), и введем вычеты

$$\phi_{ij} = \oint_{s=s_j} \frac{s^i e^{sz}}{(s - N)^2(s + N)^2} ds.$$

Таким образом, формула (1A) может быть переписана в терминах функций ϕ_{ij} следующим образом:

$$Y_i(z) = \begin{vmatrix} \phi_{2i} - \mu_* N^2 \phi_{0i} & -\mu_0 \mu_*^{-1} \phi_{1i} \\ \mu_0 N^2 \phi_{1i} & \phi_{2i} - N^2 \mu_*^{-1} \phi_{0i} \end{vmatrix}, i = \overline{0, 1}. \quad (3A)$$

Вычеты ϕ_{ij} могут быть вычислены с учетом того, что точки s_i являются полюсами второго порядка как $\phi_{ij} = \frac{d}{ds} \left((s - s_i)^2 \frac{s^i e^{sz}}{(s - N)^2(s + N)^2} \right)$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \phi_{00} &= e^{Nz} \frac{zN-1}{4N^3}; \phi_{10} = e^{Nz} \frac{z}{4N}; \phi_{20} = e^{Nz} \frac{zN+1}{4N} \\ \phi_{01} &= e^{-Nz} \frac{zN+1}{4N^3}; \phi_{11} = -e^{-Nz} \frac{z}{4N}; \phi_{21} = e^{-Nz} \frac{zN-1}{4N}, \end{aligned}$$

а окончательное выражение для системы фундаментальных решений будет иметь вид

$$\begin{aligned} Y_0(z) &= e^{-Nz} \left\| \begin{array}{cc} -\frac{zN(\mu_*-1)+\mu_*+1}{4N} & \frac{\mu_0 z}{4N\mu_*} \\ -\frac{\mu_0 Nz}{4} & \frac{zN(\mu_*-1)-\mu_*-1}{4N\mu_*} \end{array} \right\| \\ Y_1(z) &= e^{Nz} \left\| \begin{array}{cc} -\frac{zN(\mu_*-1)-\mu_*-1}{4N} & -\frac{\mu_0 z}{4N\mu_*} \\ \frac{\mu_0 Nz}{4} & \frac{zN(\mu_*-1)+\mu_*+1}{4N\mu_*} \end{array} \right\|. \end{aligned} \quad (4A)$$

Приложение В. Проверка решения на удовлетворение исходным уравнениям.

Поскольку преобразование системы (3) в систему (5) включает в себя дифференцирование системы уравнений Ламе, после получения решений в терминах функций w , f и $\tilde{f}$ необходимо убедиться, что после возвращения к смещениям путем подстановки (14), они будут являться решениями системы (3). Проверку будем проводить в пространстве трансформант. Для этого к первым двум уравнениям системы (3) применим преобразование Фурье, получая

$$\begin{cases} -N^2 u_{\alpha\beta} + u''_{\alpha\beta} - \mu_0 i\alpha (f_{\alpha\beta} + w'_{\alpha\beta}) = 0 \\ -N^2 v_{\alpha\beta} + v''_{\alpha\beta} - \mu_0 i\beta (f_{\alpha\beta} + w'_{\alpha\beta}) = 0. \end{cases} \quad (B1)$$

В данной системе выполним подстановку (14):

$u''_{\alpha\beta} = i\alpha N^{-2} z''_{\alpha\beta}$; $u'_{\alpha\beta} = i\beta N^{-2} z''_{\alpha\beta}$. В итоге получим уравнения

$$\begin{cases} w''_{\alpha\beta} + \mu_0 \mu_*^{-1} f'_{\alpha\beta} - N^2 \mu_*^{-1} w_{\alpha\beta} = 0 \\ f''_{\alpha\beta} - N^2 \mu_0 w'_{\alpha\beta} - N^2 \mu_* f_{\alpha\beta} = 0, \end{cases} \quad (B2)$$

которые, будучи записанным в векторной форме, в точности совпадают с уравнением (10). Таким образом, функции (11), (13), являясь решениями уравнения (10), одновременно являются решениями системы (B2), а функции, полученные при возвращении к исходным смещениям путем подстановки (14), будут решениями системы (B1), которая представляет собой трансформированную систему (3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

1. Используя подход, предложенный в [1], построено точное решение пространственной задачи для упругого слоя.
 2. Указанная методика позволит решать аналогичные по постановке задачи для слоистых сред.
1. **Попов Г. Я.** О приведении уравнений движения упругой среды к одному независимому и к двум совместно решаемым уравнениям / Попов Г. Я. // Докл. НАН. – 2002. – 384, № 2. – С. 193–196.

2. **Georgiadis H. G.** The Boussinesq problem in dipolar gradient elasticity / H. G. Georgiadis, P. A. Gourgiotis, D. S. Anagnostou // Archive of Applied Mechanics. – 2014. – Volume 84, Issue 9. – P. 1373–1391.
3. **Selvadurai A. P. S.** On Frohlich's solution for Boussinesq's problem. / A. P. S. Selvadurai // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2014. – Volume 38, Issue 9. – P. 925–934.
4. **Tewary V. K.** Elastostatic Green's function for advanced materials subject to surface loading. / V.K. Tewary // Journal of Engineering Mathematics. – 2004. – Volume 49, Issue 3. – P. 289–304.
5. **Barbot S.** Fourier-domain Green's function for an elastic semi-infinite solid under gravity, with applications to earthquake and volcano deformation / S. Barbot, Y. Fialko // Geophysical Journal International. – 2010. – Volume 82, Issue 2. – P. 568–582.
6. **Александров В. М.** Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. / Александров В. М., Мхитарян С. М. – М.: Наука, 1983.
7. **Ворович И. И.** Неклассические смешанные задачи теории упругости / Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. – М.: Наука, 1974.
8. **Ворович И. И.** Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах / Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д. – М.: Научный мир, 1999.
9. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Мусхелишвили Н. И. – 5-е изд. – М.: Наука, 1986.
10. **Поручиков В. Б.** Методы динамической теории упругости / Поручиков В. Б. – М.: Наука, 1966.
11. **Новацкий В.** Теория упругости / Новацкий В. – М.: Мир, 1975.
12. **Попов Г. Я.** Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач / Попов Г. Я., Абдыманапов С. А., Ефимов В. В. – Алматы: Рауан, 1999.
13. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц / Гантмахер Ф. Р. – М: Наука, 1966. – 576 с.
14. **Трантер К. Дж.** Интегральные преобразования в математической физике / Трантер К. Дж. – М.: Гостехтеориздат, 1956.

Плюснев Д. С.

ПРОСТОРОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРУЖНОГО ШАРУ

Резюме

Використано новий підхід для розв'язання просторових задач, заснований на зведенні системи рівнянь Ламе до двох спільно і одного окремо вирішуваного рівнянь. З її допомогою побудовано точний розв'язок просторової задачі для пружного шару, нижня грань якого або затиснена, або знаходиться в умовах ковзного закладення, а до верхньої прикладено нормальне стискаюче навантаження. Застосування інтегрального перетворення Фур'є за двома змінними зводить розв'язання задачі до одновимірної векторної крайової задачі у просторі трансформант. Розв'язок задачі побудовано в явному вигляді за допомогою апарату матричного диференціального числення. Обчислені нормальні напружки та зміщення на поверхні шару та досліджена можливість появи розтягуючих напружок на нижній грані при виконанні умов ковзного закладення.

Ключові слова: просторова задача, пружний шар, перетворення Фур'є.

Pliusnov D. S.

SPATIAL PROBLEM FOR ELASTIC LAYER

Summary

A new approach to spatial problems' solving has been used to construct the exact solution for the elastic layer with its lower surface being in either rigid or slipping restraint conditions and its upper one being subjected to a compression load. The approach lies in converting the problem into the system of two simultaneously and one separately solved equations. The integral Fourier transform is applied to the system, leading to a one-dimensional vector boundary problem. The solution to the obtained problem has been constructed explicitly using the matrix differential calculus. The normal stresses and displacements have been calculated on the surfaces and the possibility of stretching stresses on the lower surface in case of slipping restraint has been examined.

Key words: spatial problem, elastic layer, Fourier transformation.

REFERENCES

1. **Popov, G. Ja.** 2002, O privedenii uravnenij dvizhenija uprugoj sredy k odnomu nezavisimomu i k dvum sovместno reshaemym uravnenijam [On the reduction of the equations of motion of the elastic medium to one independent and the two work together to solve equations], *Dokl. NAN.*, vol. 384, no. 2, pp. 193–196.
2. **Georgiadis, H. G., Gourgiotis, P. A. & Anagnostou, D. S.** 2014, The Boussinesq problem in dipolar gradient elasticity, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 84, Issue 9, pp. 1373–1391.
3. **Selvadurai, A. P. S.** 2014, On Frohlich's solution for Boussinesq's problem, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 38, Issue 9, pp. 925–934.
4. **Tewary, V. K.** 2004, Elastostatic Green's function for advanced materials subject to surface loading, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 49, Issue 3, pp. 289–304.
5. **Barbot, S. & Fialko, Y.** 2010, Fourier-domain Green's function for an elastic semi-infinite solid under gravity, with applications to earthquake and volcano deformation, *Geophysical Journal International*, Volume 82, Issue 2, pp. 568–582.
6. **Aleksandrov, V. M. & Mhitarjan, S. M.** 1983, Kontaktnye zadachi dlja tel s tonkimi pokrytijami i proslojkami [Contact problems for bodies with thin coatings and layers], M.: Nauka.
7. **Vorovich, I. I., Aleksandrov, V. M. & Babeshko, V. A.** 1974, Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti [Non-classical mixed problem in elasticity theory], M.: Nauka.
8. **Vorovich, I.I., Babeshko, V.A. & Prjahina, O. D.** 1999, Dinamika massivnyh tel i rezonansnye javlenija v deformiruemyh sredah [The dynamics of massive bodies and the resonance phenomenon in deformable environments], M.: Nauchnyj mir.
9. **Mushelishvili, N. I.** 1986, Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti (5-e izdanie) [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity], M.: Nauka.
10. **Poruchikov, V. B.** 1966, Metody dinamicheskoy teorii uprugosti [Methods of dynamic elasticity theory], M.: Nauka.
11. **Novackij, V.** 1975, Teorija uprugosti [Theory of elasticity], M: Mir.

12. **Popov, G. Ja., Abdymanapov, S. A. & Efimov, V. V.** 1999, Funkcii i matricy Grina odnomernyh kraevyh zadach [The functions and Green's matrix of one-dimensional boundary value problems], Almaty: Rauan.
13. **Gantmaher, F. R.** 1966, Teorija matric [The theory of matrices], M: Nauka, 576 p.
14. **Tranter, K. Dzh.** 1956, Integral'nye preobrazovanija v matematicheskoj fizike [Integral transformations in mathematical physics], M.: Gostehteorizdat.