МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ЕКОНОМІКО-ПРАВОВИЙ ФАКУЛЬТЕТ
НАУКОВО-ДОСЛІДНИЙ ІНСТИТУТ ФІЗИКИ

О. В. ТЮРИН, О. Ю. АХМЕРОВ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

ОДЕСА
ОНУ
2019

УДК 512.64+514.12

Рекомендовано до друку Науково-методичною радою
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 5 від 13.12.2018.

Рецензенти:

О. Р. Гохман – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри фізики Південно-українського державного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського;

О. В. Глушков – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Одеського екологічного університету;

О. В. Дрозд – доктор технічних наук, професор кафедри "Комп'ютерні інтелектуальні системи та мережі" Одеського національного політехнічного університету.

Тюрин О.В.

Т985 Теорія ймовірностей і математична статистика: навч. посіб. / О. В. Тюрин, О. Ю. Ахмеров. – Одеса: Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2018. – 170 с.: іл., табл.

ISBN 978-617-689-287-8

Навчальний посібник написано відповідно до програми курсу навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика». Викладено основи теорії, методів отримання, опису і обробки експериментальних даних з метою вивчення закономірностей випадкових масових явищ.

Призначений молодшим спеціалістам та бакалаврам за фахом «Економіка».

УДК 512.64+514.12

ISBN 978-617-689-287-8

ЗМІСТ

ВСТУП

У світі, що нас оточує, і суспільстві, в якому ми живемо, відбуваються різні події, наприклад, йде дощ, виникла аварія та ін. Для того, щоб відбулась подія, їй має передувати комплекс умов. На практиці ми часто маємо справу з подіями, умови виникнення яких визначено багатьма факторами. Більшість з цих факторів можуть бути невідомими для нас або вони мають випадковий характер; їх фактично не можна враховувати. Тому за одних і тих самих початкових умов ці події можуть відбутися, а можуть і не відбутися, тобто їхнє виникнення має випадковий характер. Теорія ймовірностей якраз і займається тим, що вивчає властивості масових випадкових подій, здатних багаторазово повторюватися за відтворення певного комплексу умов. Основним завданням теорії ймовірностей є кількісне оцінювання випадкових факторів у можливості виникнення будь-якої випадкової події незалежно від її природи, тобто кількісне оцінювання ймовірності його здійснення.

Незважаючи на випадковий характер виникнення подій, під час численного, масового відтворення цих подій виявлено деякі закономірності, які дозволяють прогнозувати поведінку випадкових подій за певних заданих умов. Вивченням таких закономірностей на основі масових випадкових подій займається математична статистика, яка спирається на теорію ймовірностей і основне завдання якої полягає в тому, щоб за обмеженими даними (вибірці) відновити з певним ступенем вірогідності характеристики, властиві загальній сукупності, тобто всьому можливому набору даних, що описує досліджуване явище з випадковим характером.

За кілька останніх десятиліть від теорії ймовірностей і математичної статистики відокремились такі галузі науки, як теорія випадкових процесів, теорія масового обслуговування, теорія інформації, економетричне моделювання та ін. Цей процес триває і дотепер.

Однією з найважливіших сфер застосування теорії ймовірностей і математичної статистики є економіка. У наш час важко уявити собі дослідження і прогнозування економічних явищ без використання економетричного моделювання, регресійного аналізу, трендових і згладжувальних моделей та інших методів, що спираються на теорію ймовірностей і математичну статистику. Статистичні закономірності властиві також централізовано керованій і тим паче децентралізованій економіці.

Наявність таких узвичаєних в економіці понять, як страховий запас, резервні потужності, державні резерви, фінансові ризики і т. п., свідчать про це.

Необхідно також зауважити, що без елементів випадковості є неможливим розвиток взагалі. Без випадковості були б неможливими виникнення життя і вдосконалення біологічних видів, історія людства, творча діяльність людей, розвиток соціально-економічних систем.

Прояв випадковості, наприклад, в соціально-економічній системі, слід розглядати як відхилення від сформованого русла течії подій або в позитивний бік (виникнення нових наукових відкриттів, технологій, способів ведення та організації виробництва і т. п.), або в негативний (стихійні лиха, поломки обладнання, хвороби працівників, конфлікти людей і т. п.), що згодом призводить до істотної зміни самого перебігу подій.

З розвитком суспільства соціально-економічна система дедалі більше ускладнюється. Отже, відповідно до законів розвитку динамічних систем має посилюватися статистичний характер законів, що описують соціально-економічні явища. Усе це зумовлює потребу оволодіти методами теорії ймовірностей і математичної статистики як інструментом статистичного аналізу і прогнозування різних явищ і процесів.

Розділ 1
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

В основі теорії ймовірностей, як і в основі будь-якої іншої науки, лежать деякі початкові поняття. За допомогою цих понять подають логічне визначення наступних більш складних понять.

У ролі основних вихідних понять, якими оперує теорія ймовірностей, виступають поняття стохастичного експерименту (досліду), випадкової події та ймовірності випадкової події.

Під стохастичним експериментом (дослідом, випробуванням) розуміють відтворення комплексу умов для виникнення певного набору конкретних подій, проте, яке з цих подій відбудеться в процесі реалізації цих умов, передбачити заздалегідь не можна. Слід зауважити, що цей комплекс умов може бути створений мимовільно під дією внутрішніх процесів, що протікають в природі, суспільстві й ін., а може бути відтворений і людиною під час проведення експерименту.

Першим розглянемо поняття «випадкова подія».

1.1. Випадкові події

Визначення 1.1. Подією в теорії ймовірностей називають кожний факт (результат), що може відбутися унаслідок проведення деякого експерименту.

Події прийнято позначати великими латинськими літерами A, B, C... Результатом для одних і тих самих умов проведення експерименту при багаторазовому його повторенні можуть бути різноманітні події.

Визначення 1.2. Усі можливі результати експерименту називають простором елементарних подій (результатів).

Отже, для будь-якого експерименту можна поставити у відповідність деяку множину Ω, елементами якої є взаємовиключні елементарні результати ω, тобто результатом експерименту є лише єдиний результат. Позначають простір елементарних результатів

$\Omega = \{\omega\}$. Простір елементарних подій $\Omega = \{\omega\}$ є одним з основних понять теорії ймовірностей. Загалом простір елементарних подій може бути різноманітним: як скінченним, так і нескінченним, як дискретним, так і неперервним. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1.1. Розглянемо стрільбу по мішені. Якщо нас цікавить лише факт влучення у мішень, то елементарними результатами будуть ω_1 – влучення у мішень та ω_0 – невлучення у мішень. Якщо важливим є влучення в окремі ділянки мішені (ділянки відрізняються з погляду вразливості реальної цілі), то простір елементарних подій може складатися з таких результатів: ω_{10} – влучення у десятку, ω_9 – у дев'ятку, ω_8 –у вісімку, ω_7 – у сімку, ω_6 – у шістку, ω_5 – у п'ятірку, ω_4 – у четвірку, ω_3 – у трійку, ω_2 – у двійку, ω_1 – в одиницу (вони відповідають числу очок, що надають за влучення в певну ділянку) та ω_0 – невлучення. Нарешті, якщо надзвичайно важливим моментом є, в яку саме точку щита із зображенням мішені (наприклад, кабана) було влучено, то довільний елементарний результат $\omega = (x, y)$ представляє собою координати точки влучення, а простір елементарних подій $\Omega = \{\omega\}$ є множиною точок щита (зображення кабана).

У перших двох розглянутих випадках простір елементарних подій $\Omega = \{\omega\}$ є скінченним і дискретним, а третьому випадку – скінченним та неперервним.

Приклад 1.2. Проводять експеримент: підкидають монету один раз. Множина $\Omega = \{Г,Р\}$, в якому літера *Г* означає появи сторони з гербом, літера *Р* – появу сторони з решкою. Простір елементарних подій $\Omega = \{\omega\}$ є скінченним і дискретним.

Приклад 1.3. Монету підкидають двічі, $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$. Простір елементарних подій $\Omega = \{\omega\}$ є скінченним і дискретним.

Різноманітні події відрізняють між собою за ступенем можливості їхнього виникнення і за характером взаємозв'язку.

Визначення 1.3. Якщо за виконанням певного комплексу умов подія обов'язково відбувається, то таку подію називають *достовірною.* Відповідно, *неможливою* називають подію, яка ніколи не відбудеться у разі заданого комплексу умов. *Випадковою* є така подія, що може відбутися, а може не відбутися у разі заданого комплексу подій.

Достовірну та неможливу події можна розглядати як окремі приклади випадкових подій. Ми позначимо достовірну подію як Ω, а неможливу – символом $\emptyset$.

Визначення 1.4. Дві чи декілька подій називають рівно можливими, якщо умови їхнього виникнення є однаковими і відсутні причини для ствердження, що якась з них має більше шансів відбутися унаслідок досліду, тобто жодний результат експерименту не має об'єктивної переваги серед інших.

Наприклад, у магазин надійшла партія взуття різних кольорів і розмірів, проте усі вони запаковані в однакові коробки. У такому разі події, пов'язані з вибором коробки із взуттям певного кольору і розміру є рівно можливими. Рівно можливими також є події, пов'язані з підкиданням грального кубика, випадання герба або решки під час підкидання монети тощо.

Визначення 1.5. Дві події A і B називають сумісними, якщо виникнення однієї з них не виключає виникнення іншої.

Розглянемо приклади.

Приклад 1.4. Підкидають два гральні кубика. Подія A – випадання 5 очок на першому кубику, подія B – випадання 5 очок на другому кубику. A і B – сумісні події. Водночас вони є і рівно можливими.

Приклад 1.5. На склад надійшла партія холодильників різних фірм і різних кольорів. Подія A – вибір холодильника певного кольору, подія B – вибір холодильника певної фірми. A і B – сумісні події. У цьому разі вони не є рівно можливими; ці події будуть рівно можливими, якщо холодильники різних кольорів виготовлені однією і той самою фірмою.

Визначення 1.6. Групу подій A_1, A_2,…,A_n називають групою сумісних подій, якщо події, що входять в цю групу, є попарно сумісними.

Приклад 1.6. В урні лежать 10 куль, з них 6 куль – червоні, 4 кулі – білі, причому 5 куль мають номера. A – поява червоної кулі, B – поява білої кулі, C – поява кулі з номером під час одного виймання. Події A, B, C утворюють групу сумісних подій.

Приклад 1.7. Здійснюють три постріли по мішені. Подія A_1 – влучення в мішень під час першого пострілу, A_2 – влучення в мішень під час другого пострілу, A_3 – влучення в мішень під час третього пострілу. Події A_1, A_2, A_3 утворюють групу сумісних подій.

Визначення 1.7. Дві події A і B називають несумісними, якщо виникнення однієї з них виключає виникнення іншої.

Розглянемо приклади.

Приклад 1.8. До магазину надійшла партія взуття одного розміру, але різного кольору. Подія A – обрана навмання коробка міститиме взуттям чорного кольору, подія B – коробка міститиме взуття коричневого кольору. A і B – несумісні події.

Приклад 1.9. Ви прийшли до магазину купити холодильник. Подія A – ви купили холодильник без дефектів, B – ви купили холодильник з дефектом. A і B – несумісні події.

Визначення 1.8. Групу подій A_1, A_2,…,A_n називають групою несумісних подій, якщо події, що входять в цю групу, попарно несумісні.

Приклад 1.10. Здійснюють три постріли по цілі. Нехай A означатиме промах, B – одне влучення, C – два влучення і D – три попадання. Усі події A, B, C і D утворюють групу несумісних подій.

Багато подій можуть бути представлені як сукупність (група) найпростіших подій. Розглянемо це на прикладі простору елементарних подій $\Omega = \{\omega\}$. Будь-яка підмножина A простору Ω, тобто деяка сукупність (група) елементарних подій ω є подією. Простір Ω також є подією, і він є достовірною подією, оскільки один з його результатів обов'язково відбудеться.

Проілюструємо введені поняття за допомогою низки найпростіших прикладів, які відносять до випадкового досліду.

Випадковий експеримент (випробування, дослід) – це експеримент, результатом якого є випадкова подія.

Приклад 1.11. Кидають гральний кубик і реєструють число очок, що випали. Простір елементарних фіналів складається з шести елементів $\omega_i = i$, $i = 1, ..., 6$. Приклад складеної події: $A = \{2, 4, 6\}$ – випало парне число очок.

Приклад 1.12. Кидають два гральні кубики, простір елементарних результатів можна представити як матрицю Ω = ((i, j) ij), i = j = 1, ..., 6. Приклад складеної події: сума очок більше 10; виникнення цієї події *A* можливо лише за елементарних результатів (5,6), (6,5), (6,6), тобто $A = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$.

Приклад 1.13. Розглянемо приклад 1.10. Якщо в ньому розглянути простір елементарних подій, що складається з двох результатів ω_1 – промах, ω_2 – влучення в ціль, то події *A, B, C* і *D* складаються з елементарних подій ω_1 і ω_2: $A = \{\omega_1, \omega_1, \omega_1\}$, $B = \{(\omega_1, \omega_1, \omega_2), (\omega_1, \omega_2, \omega_1), (\omega_2, \omega_1, \omega_1)\}$, $C = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_2), (\omega_2, \omega_2, \omega_1), (\omega_2, \omega_1, \omega_2)\}$ і $D = \{\omega_2, \omega_2, \omega_2)\}$.

На практиці нам часто доводиться досліджувати дві елементарні події, що утворюють простір Ω, тобто під час будь-якого досліду обов'язково відбувається хоча б одна з цих подій, а друга не відбувається, отже, вони є несумісними. Наприклад, випадання герба і решки під час підкидання монети. Називають такі події протилежними і позначають як A і $\bar{A}$, зокрема $\overline{\Omega} = \emptyset$ та $\emptyset = \overline{\Omega}$.

Визначення 1.9. Дві рівно можливі несумісні події, що складають весь простір елементарних подій Ω, називають *протилежними.*

1.2. Алгебра подій

Нехай є простір елементарних подій Ω = {ω} будь-якої природи. У ролі подій будемо розглядати підмножини *A, B, C, ...* цього простору. У такому разі операції з подіями стають операціями з підмножинами.

Якщо у випадковому експерименті виникнення події *A* породжує виникнення події *B*, то говорять, що *A* спричиняє (містить) *B* ($A \subset B$). Якщо $A \subset B$, а $B \subset A$, то говорять, що події *A* і *B* є рівносильними ($A = B$). Наприклад, в урні лежать 20 куль: з них 12 чорних і 8 білих. Всі білі кулі пронумеровані, а з чорних куль пронумеровані тільки 5. Нехай за одного виймання подія A – поява чорної кулі, B – поява білої кулі, C – поява кулі з номером. У цьому разі подія B спричиняє (містить) C, отже, $B \subset C$. Якщо ж пронумерованими є лише білі кулі, то події B і C є рівносильними, а отже, $B = C$.

Визначення 1.10. Сумою двох подій A і B називають подію $A + B$ ($A \subset B$), що відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається або подія A, або подія B, або події A і B відбуваються разом.

Сума подій відповідає операції поєднання множин. Аналогічний смисл має сума будь-якого числа подій. Наприклад, здійснюють три постріли. Подія A є влученням у ціль під час першого пострілу, B – під час другого і C – під час третього, то подія $D = A + B + C$ є влученням у ціль взагалі, незважаючи на те, під час якого пострілу, в якій послідовності і скільки разів з трьох воно відбувається.

Визначення 1.11. Добутком (перетином) кількох подій називають подію, що складається із сумісного виникнення всіх цих подій.

Добуток подій відповідає операції перетину множин. Добуток S подій $A, B, C, ..., N$ позначають як $S = ABC, ..., N$, або $S = A\ B\ C\ ...\ N.$ Наприклад, здійснюють три постріли. Подія A є влученням у ціль під час першого пострілу, B – під час другого і C – під час третього, то подія $D = ABC$ є влученням у ціль під час усіх трьох пострілах.

Визначення 1.12. Різницею $A \backslash B$ двох подій A і B є подія, до якої входять ті елементарні події, що входять до A і не входять до B, тобто яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається A, проте не відбувається B.

Різниця подій відповідає операції різниці множин. Наприклад, подія $\bar{A}$, протилежна події A, є $\Omega \backslash A$. Справді, $A \cup (\Omega \setminus A) = \Omega$ і $A \cap (\Omega \setminus A) = \emptyset$, тобто, справді, $\bar{A} = \Omega \setminus A$.

Поняття суми, добутку і різниці двох подій мають наочну геометричну інтерпретацію. Справді, нехай подія A є влученням точки в область A, відповідно, подія B – влучення в область B, тоді подія $A + B$ є влученням точки в область, заштриховану на рис. 1.1, подія AB є влученням точки в область, заштриховану на рис. 1.2, подія $A\backslash B$ є влученням точки в область, заштриховану на рис. 1.3.

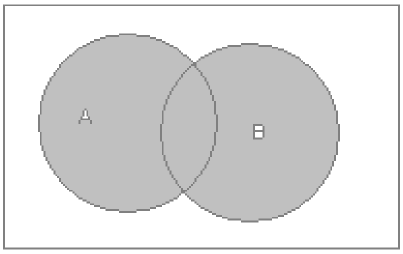

Рис. 1.1

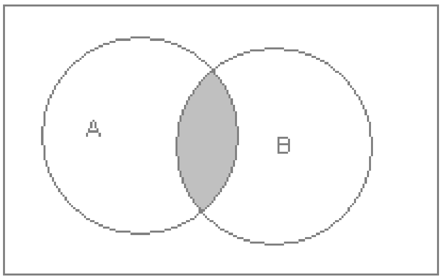

Рис. 1.2

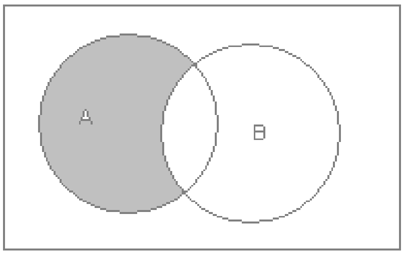

Рис. 1.3

Операції додавання і множення подій як операції з множинами мають такі властивості:

а) $A + B = B + A$, $AB = BA$ (комутативність);

б) $(A + B) + C = A + (B + C)$, $A\,(BC) = (AB)\,C$ (асоціативність);

в) $(A + B)\,C = AC + BC$ (дистрибутивність множення відносно додавання).

Зазначимо ще деякі очевидні співвідношення:

$$AA = A, \quad A\emptyset = \emptyset, \quad A\Omega = \mathbf{A}, \quad A + A = A, \quad \mathbf{A} + \Omega = \Omega, \quad \mathbf{A} + \emptyset = \mathbf{A}.$$

Для несумісних подій A і B маємо $AB = \emptyset$, зокрема $A\bar{A} = \emptyset$.
Якщо $A \subset B$, тоді наявними є такі рівності: $A + B = A; AB = B$.

Під час вирішення різних задач, пов'язаних з подіями, дуже часто мусимо представляти складні події як комбінацію простіших (елементарних) подій, застосовуючи розглянуті нами вище операції з цими подіями. Наприклад, нехай по мішені здійснюють три постріли, і розглядають такі найпростіші події:

A_1 – влучення під час першого пострілу;
$\acute{A}_1$ – промах під час першого пострілу;
A_2 – влучення під час другого пострілу;
$\acute{A}_2$ – промах під час другого пострілу;
A_3 – влучення під час третього пострілу;
$\acute{A}_3$ – промах під час третього пострілу.

Розглянемо складну подію B, яка полягає в тому, що унаслідок трьох пострілів буде здійснене рівно одне влучення в мішень. Подія B може бути представлена як така комбінація елементарних подій:

$$B = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}\,A_2\,\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3.$$

Подія C, яка полягає в тому, що у мішень буде здійснене не менше двох влучень, може бути представлена як

$$C = A_1\,A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}\,A_3 + \overline{A_1}\,A_2\,A_3 + A_1\,A_2\,A_3.$$

1.3. Імовірність події

Як показує практика, можливість виникнення події в конкретному випробуванні можна оцінити кількісно, тобто за допомогою числа.

Визначення 1.13. Число, що виражає кількісну оцінку можливості виникнення події, називають ймовірністю події.

Для обчислення ймовірності застосовують в основному два підходи, які умовно називають статистичним і класичним. Найбільш загальним є аксіоматичне визначення ймовірності, яке сформулював радянський математик Колмогоров А. Н. в 1933 р. Однак аналіз цього визначення виходить за рамки цього курсу лекцій.

1.3.1. Статистичне визначення ймовірності

Для визначення ймовірності події за статистичним підходом необхідно, щоб ця подія реально відбувалася і причому багаторазово, тобто ця ймовірність може бути визначена тільки шляхом проведення численних випробувань або спостережень.

Нехай проведено серію n-експериментів (випробувань), в кожному з яких могла виникнути або не виникнути деяка подія A. Кількісною характеристикою можливості виникнення події А в цій серії випробувань служить відносна частота (часто її називають просто частота) появи події A.

Визначення 1.14. Відносною частотою події A в конкретній серії випробувань називають відношення числа випробувань, в яких виникла подія A, до числа всіх випробувань.

Позначаючи відносну частоту події A через $P^*(A)$, маємо за визначенням: $P^*(A) = m/n$, де m – число випробувань, в яких виникла подія A, а n – загальне число випробувань.

Основні властивості відносної частоти:

1. Відносна частота випадкової події є невід'ємне число, розташоване між нулем і одиницею, тобто $0 \le P^*(A) \le 1$;
2. Відносна частота достовірної події дорівнює одиниці;
3. Відносна частота неможливої події дорівнює нулю.

Відносна частота подій не залишається постійною після зміни числа випробувань. Однак, як показує дослід, зі збільшенням числа випробувань відносна частота поступово стабілізується і прямує до деякого цілком певного числа. Отже, з розглянутою подією можна зв'язати деяке число, біля якого групуються відносні частоти і яке є кількісною характеристикою об'єктивного зв'язку між комплексом умов, за допомогою якого виконують випробування, і подією. Це число і розуміють як ймовірність події в разі статистичного підходу її обчислення.

Ці вихідні поняття дозволяють тепер дати таке статистичне визначення ймовірності події.

Визначення 1.15. Імовірністю випадкової події в разі статистичного підходу її обчислення називають постійне число, біля якого групуються відносні частоти цієї події із збільшенням числа випробувань.

Імовірність події *A* прийнято позначати *P(A)*.

З викладеного вище випливає, що статистичний метод визначення ймовірності спирається на реальний експеримент, і для надійного визначення ймовірності необхідно виконати велику кількість випробувань або спостережень, що не завжди можливо і вимагає великих матеріальних затрат. Статистичний спосіб визначення ймовірності є основою математичної статистики, і ми повернемося до нього під час вивчення цього розділу.

Однак в більшості випадків ймовірність події можна визначити теоретично, взагалі не вдаючись до випробувань. В основі такого способу визначення лежить класичне визначення ймовірності випадкової події.

1.3.2. Класичне визначення ймовірності

Класичний спосіб визначення ймовірності заснований на понятті простору елементарних подій Ω. Причому цей простір складається зі скінченного числа n рівно можливих і незалежних елементарних результатів $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$. Нехай тепер відбувається деяка подія, що є деякою підмножиною цього простору. Відносно кожної події елементарні результати простору Ω ділять на сприятливі, за яких ця подія відбувається, і несприятливі, за яких ця подія не відбувається. Наприклад, під час підкидання грального кубика події появи парного числа очок з шести елементарних результатів простору Ω сприяють три елементарні результати (2, 4, 6) і не сприяють також три (1, 3, 5).

Ці вихідні поняття дозволяють тепер дати таке класичне визначення ймовірності події.

Визначення 1.16. Імовірністю виникнення деякої події називають відношення числа результатів, що сприяють виникненню цієї події, до загального числа рівно можливих результатів у цьому експерименті.

Позначаючи число результатів, що сприяють появі події A, через m і загальне число рівно можливих випадків у цьому експерименті через n, ми можемо записати окреслене класичне визначення ймовірності як формулу

$$P(A)=\frac{m}{n}\ . \tag{1.1}$$

Як вже було зазначено, важливою перевагою класичного способу визначення ймовірності є те, що за його допомогою ймовірність події можна визначити до здійснення досліду і заздалегідь зробити для себе висновки. Однак цей спосіб має суттєвий недолік, тому що його застосовують лише тоді, коли ми маємо справу з рівно можливими результатами випробування. Крім того, визначення всіх рівно можливих результатів у такому експерименті є здебільшого досить складним завданням, яке не завжди підлягає вирішенню. Наприклад, неможливо встановити, чи є події народження хлопчика або дівчинки рівно можливими, або інший приклад: влучення в мішень під час пострілів за умови, що в мішень стріляють різні стрільці.

Класична ймовірність має такі властивості:

1. Імовірність достовірної події Ω дорівнює 1: $P(\Omega) = 1$.

2. Імовірність неможливої події дорівнює нулю: : $P(\emptyset) = 0$.

3. Імовірність випадкової події міститься в інтервалі (0,1):

$$0 < P(A) <1.$$

4. Імовірність будь-якої події міститься в сегменті [0,1]:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Розглянемо приклади обчислення ймовірностей випадкових подій, керуючись класичним визначенням.

Приклад 1.14. Один раз підкидають монету. Чому дорівнює ймовірність випадання герба?

Тут $\Omega = \{Г,\ Р\}$, причому результати експерименту є рівно можливими, за умовою $A = \{Г\}$, таким чином,

$m = 1, \quad n = 2, \quad P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}.$

Приклад 1.15. Один раз підкидають шестигранний гральний кубик. Чому дорівнює ймовірність того, що випаде число очок, кратне трьом?

Згідно з умовою $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, елементарні результати є рівно можливими, $A = \{3,6\}$, $m = 2$, $n = 6$, $P(A) = m/n = 2/6 = 1/3$.

У більш складних задачах неможливо наочно записати всі елементарні результати експерименту, а також сприятливі результати для випадкової події. Наприклад, в ящику лежать 10 деталей, серед яких 3 – дефектні. З ящика навмання витягають 5 деталей. Завданням є знайти ймовірність того, що серед них виявляться дві дефектні.

У разі такого застосовують комбінаторні методи підрахунку чисел m і n.

1.3.3. Основи комбінаторики

Комбінаторика – це розділ математики, в якому вивчають питання про те, скільки різноманітних комбінацій, підпорядкованих тим чи іншим умовам, можна скласти із заданих об'єктів. Основи комбінаторики є дуже важливими для оцінювання ймовірностей випадкових подій, тому що саме вони дозволяють підрахувати принципово можливу кількість сприятливих і всіх рівноможливих елементарних результатів у цьому експерименті.

Розглянемо основні визначення і формули комбінаторики.

Аналіз почнемо з *основної формули комбінаторики*. Нехай є k групп елементів, причому i-а група складається з n_i елементів.

Оберемо один елемент з кожної групи. Тоді загальне число N способів, за допомогою яких можна здійснювати такий вибір, визначається відношенням $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Приклад 1.16. Пояснимо це правило на простому прикладі. Нехай є дві групи елементів, причому перша група складається з n_1 елементів, а друга – з n_2 елементів. Скільки різноманітних пар елементів можна скласти з цих двох груп так, щоб пара містила один елемент з кожної групи? Припустимо, ми обрали перший елемент з першої групи і, не змінюючи його, перебрали всі можливі пари, змінюючи тільки елементи з другої групи. Таких пар для цього елемента можна скласти n_2. Потім ми обираємо другий елемент з першої групи і також складаємо для нього всі можливі пари. Таких пар теж буде n_2. Оскільки в першій групі всього n_1 елемент, всього можливих варіантів буде $n_1 \cdot n_2$.

Приклад 1.17. Скільки трьохзначних парних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри можуть повторюватися?

Розв'язання: як першу цифру можна обрати будь-яку цифру з 1, 2, 3, 4, 5, 6, отже, $n_1 = 6$. Як другу цифру можна обрати будь-яку цифру з 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, тобто $n_2=7$, $n_3= 4$ (оскільки як третю цифру можна обрати будь-яку цифру з 0, 2, 4, 6).

Отже, $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 6 \cdot 7 \cdot 4 = 168$.

У тому разі, коли всі групи складаються з однакового числа елементів, тобто $n_1 = n_2 = ... = n_k = n$, можна вважати, що кожен вибір здійснюють з однієї і тої самої групи, причому елемент після вибору знову повертають до групи. Тоді число всіх способів вибору дорівнює n^k.

Такий спосіб вибору в комбінаториці має назву *вибірки з поверненням.*

Приклад 1.18. Скільки всіх чотирьохзначних чисел можна скласти з цифр 1, 5, 6, 7, 8?

Розв'язання. Для кожного розряду чотиризначного числа є п'ять можливостей, отже, $N = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$.

Розглянемо множину, що складається з n елементів. Цю множину в комбінаториці називають *генеральною сукупністю.*

Визначення 1.17. Розміщенням із n елементів по m в комбінаториці називають будь-який упорядкований набір із m різних елементів, вибраних із генеральної сукупності в n елементів.

Приклад 1.19. Різними розміщеннями з трьох елементів {1,2,3} по два утворюють набори (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2).

Розміщення відрізняються один від одного не лише елементами, але і їхнім порядком.

Число розміщень в комбінаториці позначають як A_n^m і обчислюють за формулою:

$$A_n^m = n(n - 1)(n - 2)\ldots(n - m + 1) = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{1.2}$$

Приклад 1.20. Скільки буває двозначних чисел, в яких цифра десятків і цифра одиниць є різними і непарними?

Розв'язання: оскільки непарних цифр в кожному розряді п'ять, а саме 1, 3, 5, 7, 9, то цю задачу зводять до вибору і розміщення на дві різні позиції двох із п'яти різноманітних цифр, тобто зазначених чисел буде: $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$.

Визначення 1.18. *Сполученням* із n елементів по m в комбінаториці називають будь-який невпорядкований набір із різних елементів, вибраних із генеральної сукупності в n елементів.

Приклад 1.21. Для множини $\{1, 2, 3\}$ сполученнями по два елементи є $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$. Різні сполучення мають відрізнятися один від одного хоча б одним елементом.

Число сполучень позначають C_n^m і обчислюють за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}\,. \qquad (1.3)$$

Розв'язання великого класу задач із використанням формули сполучень (1.3) зводять до застосування так званої урнової схеми: подія, ймовірність виникнення якої необхідно обчислити, можна трактувати як результат випадкового вибору куль різного забарвлення з урни. Кулі в урні повинні бути однаковими за розміром, вагою та іншими відчутними ознаками і ретельно перемішаними перед вийманням, тоді події, які передбачають появу тієї чи іншої кулі (або групи куль) з урни, є рівно можливими і несумісними. Так, наприклад, дослід з підкиданням монети зводять до схеми урни, що містить дві кулі; дослід із підкиданням грального кубика зводять до схеми урни, що містить шість куль і т. п.

Наведемо декілька прикладів на застосування урнової схеми під час знаходженні ймовірності рівно можливих і несумісних подій.

Приклад 1.22. За допомогою скількох способів читач може вибрати дві книжки із наявних шести?

Розв'язання: число способів дорівнює числу сполучень із шести книжок по дві, тобто дорівнює:

$$C_6^2 = \frac{5 \cdot 6}{2!} = 15.$$

Приклад 1.23. Урна містить 15 куль, з них 9 червоних і 6 синіх. Потрібно знайти ймовірність того, що навмання вийняті дві кулі будуть червоними.

Розв'язання: у цьому прикладі загальне число n рівноможливих результатів дорівнює числу сполучень з усього числа куль по дві, тобто $n = C_{15}^2 = \frac{15 \cdot 14}{2!} = 105$. Позначимо через *A* подію, що передбачає появу двох червоних куль під час випробування; тоді число результатів, що сприяють події A, дорівнює числу сполучень із числа червоних куль по дві. Тому $m = C_8^2 = \frac{9\cdot 8}{2!} = 36$.

Отже, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{36}{105} = \frac{12}{35}$.

Приклад 1.24. Ящик містить $N = 10$ деталей, серед яких $M = 3$ дефектних. З ящика навмання виймають $n = 5$ деталей. Потрібно знайти ймовірність того, що серед них будуть $m = 2$ дефектними.

Розв'язання: з умови задачі випливає, що $M \le N$ та $m \le n$. Оскільки будь-яка комбінація з N по m виробів має однакову можливість виникнути, то C_N^n означатиме всі рівноможливі результати. Позначимо через А появу m дефектних виробів серед вибраних навмання n виробів. Число способів, за допомогою яких можна вийняти m дефектних виробів з M, дорівнює C_M^m. Але кожен з цих способів може доповнюватися будь-якою групою виробів із числа способів, за допомогою яких можна вийняти решту $n - m$, придатних із загального числа придатних $N - M$ виробів. Число таких груп дорівнює C_{N-M}^{n-m}. Отже, всі результати, що сприяють виникненню події А дорівнюють $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$. Тому $P(A) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = \frac{C_3^2 \cdot C_7^3}{C_{10}^5} = \frac{5}{12}$.

Визначення 1.19. *Перестановкою* із n елементів називають будь-який упорядкований набір цих елементів.

Приклад 1.25. Усі можливі перестановки множини, що складається з трьох елементів {1, 2, 3} : (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 2, 1), (3, 1, 2).

Число різноманітних перестановок із n елементів позначають P_n і обчислюють за формулою $P_n = n!$.

Приклад 1.26. Скількома способами сім книг різних авторів можна розташувати на полиці в один ряд?

Розв'язання. Ця задача стосується кількості перестановок семи різних книг. Отже, в наявності $P_7 = 7! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 5040$ способів здійснення розстановки книг.

Отже, ми бачимо, що число можливих комбінацій можна порахувати за різними правилами (перестановки, сполучення, розміщення), причому результат виявиться різним, тому що принцип підрахунку і самі формули відрізняються. Результат обчислень залежить від декількох факторів одночасно. По-перше, від того, з якої кількості елементів ми можемо комбінувати їхні набори (наскільки велика генеральна сукупність елементів). По-друге, результат залежить від того, яку величину наборів елементів ми потребуємо. І нарешті, важливо знати, чи є для нас істотним порядок елементів у наборі. Пояснимо останній фактор у наступному прикладі.

Приклад 1.27. На батьківських зборах присутні 20 осіб. Скільки налічують різноманітних n варіантів складу батьківського комітету, якщо до нього мають входити 5 осіб?

Розв'язання. Якщо в цьому прикладі нас не цікавить порядок прізвищ в списку комітету і чим конкретно буде займатися кожен член комітету, тоді, якщо внаслідок відбору в його складі опиняються одні й ті самі люди, ми матимемо один і той самий варіант за змістом. Тому ми можемо використати формулу для підрахунку числа сполучень з 20 елементів по 5: $n = C_{20}^{5} = \frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 15504$.

Інакшою буде ситуація, якщо кожен член комітету від самого початку відповідає за певний напрямок роботи. Тоді за того ж самого облікового складу комітету усередині нього можливі 5! варіантів перестановок, які мають значення. Кількість різних (і за складом, і за сферою відповідальності) варіантів визначають в цьому разі за числом розміщень з 20 елементів по 5 : $n = A_{20}^{5} = \frac{20!}{15!}$ =1860480.

Ми розглянули властивості класичної ймовірності однієї події, але на практиці можуть виникнути випадки, коли в серії з n випробувань відбувається не одна подія, а декілька подій, які мають певні відношення між собою. У цьому разі класична ймовірність для рівноможливих і несумісних подій має такі властивості:

1. Якщо подія $C = A + B$, причому A *і* B є рівноможливими, несумісними і підмножинами простору елементарних подій Ω, то ймовірність події C дорівнює сумі ймовірностей події A і події B: $P\ (C) = P\ (A) + P\ (\ B)$. Цю властивість називають правилом додавання ймовірностей.
2. Сума ймовірностей всіх елементарних подій простору Ω дорівнює 1:
$$P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) +\ldots+ P(\omega_n) = 1.$$
3. Імовірність протилежної події дорівнює $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
4. Якщо $A \subset B$, тоді $P(A) \leq P(B)$.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1.28. Під час приймання партії товару з 80 виробів, серед яких 6 дефектних, перевіряють 40 навмання вибраних виробів. Потрібно визначити ймовірність того, що партія буде прийнятою, якщо умовами приймання допускають не більше двох дефектних виробів серед перевірених.

Розв'язання. Позначимо через A подію, яка передбачає, що під час перевірки 40 виробів не отримали жодного дефектного виробу, через B – подію, яка полягає в тому, що отримали тільки один дефектний виріб, і через C – подію, яка припускає те, що отримали два бракованих вироби. Події A, B і C є несумісними.

Згідно з умовою приймання, партія виробів буде прийнятою, якщо відбудеться подія $A + B + C$. Тому, за правилом додавання ймовірностей, шукана ймовірність є $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C)$.

З 80 виробів можемо вибрати 40 виробів C_{80}^{40} способами. З 74 недефектних виробів можемо вибрати 40 виробів C_{74}^{40} способами. Отже, $P(A) = \frac{C_{74}^{40} \cdot C_6^0}{C_{80}^{40}}$. За аналогією, $P(B) = \frac{C_{74}^{39} \cdot C_6^1}{C_{80}^{40}}$, $P(C) = \frac{C_{74}^{38} \cdot C_6^2}{C_{80}^{40}}$. Тому $P(A + B + C) = \frac{C_{74}^{40} \cdot C_6^0}{C_{80}^{40}} + \frac{C_{74}^{39} \cdot C_6^1}{C_{80}^{40}} + \frac{C_{74}^{38} \cdot C_6^2}{C_{80}^{40}} \approx 0{,}337$.

Приклад 1.29. Здійснюють один постріл по мішені, що складається з двох концентричних кілець. Імовірність влучення під час одного пострілу в центр мішені і в кільця відповідно дорівнюють 0,11, 0,24, 0,35. Потрібно знайти ймовірність промаху.

Розв'язання. Події влучення в мішень і промах є протилежними подіями, тому що складають усі можливі результати пострілу. Позначимо через A влучення в мішень, тоді $\overline{A}$ – промах. Отже, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, но $A = A_1 + A_2 + A_3 = 0{,}11 + 0{,}24 + 0{,}35 = 0{,}7$. Тому $P(\overline{A}) = 0{,}3$.

1.3.4. Геометричні ймовірності

У класичному визначенні ймовірності розглядають повну групу кінцевого числа рівноможливих подій. На практиці ж дуже часто ми зустрічаємо такі досліди, число можливих результатів яких є нескінченним. У таких ситуаціях класичне визначення не можна застосувати. Однак іноді в таких ситуаціях можна скористатися іншим методом обчислення ймовірності, в якому, як і раніше, основну вагу має поняття рівної можливості деяких подій. Застосовують цей метод в задачах, які зводять до випадкового кидання точки на кінцеву ділянку прямої, площини або простору. Звідси і виникає сама назва методу – геометрична ймовірність.

Для визначення обмежимося двовимірним випадком. Одновимірний і тривимірний випадки різняться тільки тим, що замість площі в них потрібно говорити про довжини і об'єми.

Отже, нехай на площині є деяка область *G*, площа якої S_G, і вона містить іншу область g, площа якої S_G. В область *G* навмання кидають точку. Виникає запитання, чому дорівнює ймовірність того, що точка потрапить в область g? Водночас передбачають, що навмання кинута точка може потрапити в будь-яку точку області *G*, і ймовірність потрапити в будь-яку частину області *G* пропорційна площі цієї частини і не залежить від її розташування і форми. У такому разі ймовірність p потрапляння в область g під час кидання навмання точки в область *G* дорівнює $\frac{S_g}{S_G}$.

Отже, загалом, якщо можливість випадкового виникнення точки всередині деякої області на прямій, площині чи в просторі визначають не за положенням цієї області і її межами, а тільки за її розміром, тобто за довжиною, площею або об'ємом, тоді *ймовірність появи випадкової точки всередині деякої області визначають як відношення розміру цієї області до розміру всієї області, в якій може з'явитися ця точка.*

<u>Зауваження.</u> За умови класичного визначення ймовірності ймовірність неможливої події дорівнює нулю. Правильним є і зворотне твердження: якщо ймовірність події дорівнює нулю, тоді подія є неможливою. У разі геометричного визначення ймовірності немає зворотного твердження. Наприклад, якщо кинута точка може з'явитися в будь-якій точці всій площині *G*, то ймовірність потрапляння цієї точки в будь-яку обмежену за площею область g цій площині дорівнює нулю. Але ця подія може відбутися і, отже, є можливою.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1.30. На відрізок *OA* довжиною *L* числової осі *Ox* навмання поставили точку *B(x)*. Потрібно знайти ймовірність того, що менший з відрізків *OB* і *BA* має довжину більшу, ніж $\frac{L}{5}$. Передбачено, що ймовірність потрапляння точки у відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розташування на числовій осі.

Розв'язання. Скористаємось поняттям геометричної ймовірності – ймовірність p потрапляння випадкової точки у відрізок довжиною ℓ, яку розташовують всередині відрізка більшої довжини *L*, дорівнює відношенню їхніх довжин: $p = \frac{\ell}{L}$. Для цього розділимо відрізок *OA* точками *C, D, E* і *F* на п'ять рівних відрізків, довжина кожного з яких дорівнює $\frac{L}{5}$. Вимога задачі буде виконана, якщо точка потрапить на відрізки *CD, DE* і *EF*. Імовірність p потрапляння точки в ці відрізки є однаковою і дорівнює $\frac{\frac{L}{5}}{L} = \frac{1}{5}$. Вказані події є незалежними і, отже, ймовірність їхнього сумісного виникнення дорівнює сумі цих ймовірностей. Виходить, що $P = 3p = \frac{3}{5}$.

Приклад 1.31 (задача про зустріч). Дві особи домовились про зустріч, яка має відбутися в певному місці в будь-який момент проміжку часу t. Потрібно визначити ймовірність зустрічі, якщо моменти приходу кожної особи є незалежними, і час очікування однією особою на іншу буде не більше τ.

Розв'язання. Позначимо момент приходу однієї особи через x, а іншої – через y. Щоб зустріч відбулася, необхідним і достатнім є $|x - y| \leq \tau$ або:

$$y < x + \tau \text{ при } y > x,$$
$$y < x - \tau \text{ при } y < x.$$

Будемо розглядати x і y як декартові координати точок на координатній площині *xOy*. Тоді всі можливі результати для зустрічі

$x < t,\ y < t$ (область G) будуть зображені точками квадрата зі стороною t (рис. 1.4). Результати, що сприяють зустрічі $|x-y| \le \tau$ (область g), будуть зображені точками, які розташовують в заштрихованій області шестикутника (рис. 1.4).

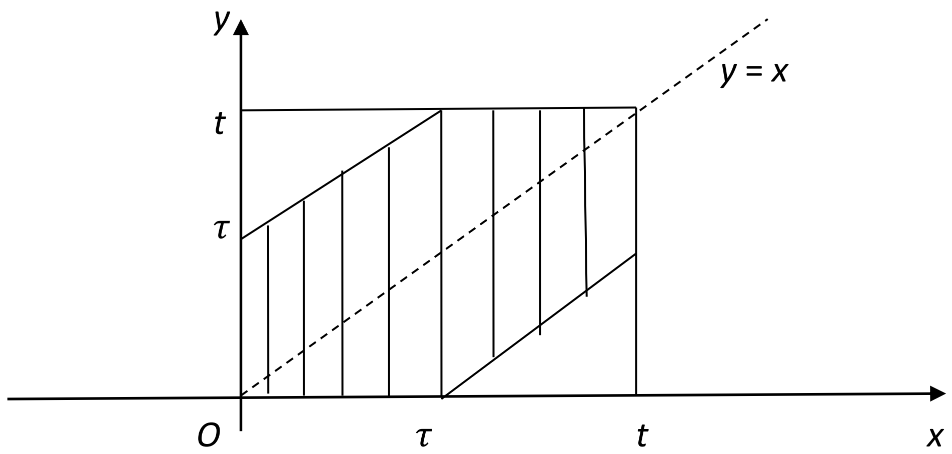

Рис. 1.4

Шукана ймовірність дорівнює відношенню площі заштрихованого шестикутника до площі всього квадрата, тобто:

$$P = \frac{t^2 - (t-\tau)^2}{t^2}.$$

1.3.5. Умовні ймовірності. Незалежність подій

Як зазначено вище, є сенс говорити про ймовірність *P(A)* як про міру можливості здійснення випадкової події *A* тільки, якщо здійснюють певний комплекс умов. У разі зміни умов зміниться і ймовірність. Так, якщо до комплексу умов, за якими вивчалася ймовірність *P(A)*, додати нову умову, що передбачає виникнення події *B*, то отримаємо інше значення ймовірності *P(A/B)* – умовну ймовірність події *A* за умови, що відбулася подія *B*. Імовірність *P(A)* на відміну від умовної будемо називати безумовною.

Визначення 1.20. Імовірність настання події *A*, обчислена за умови настання іншої події *B*, називають умовною ймовірністю і позначають *P(A/B)*. Умовні ймовірності визначають за характером взаємозв'язку між подіями. Це можна проілюструвати на таких прикладах.

Приклад 1.32. Урна містить 6 білих і 4 чорних куль. З урни навмання виймають одну кулю, потім вийняту кулю повертають до урни, і випробування повторюють. Подія B – поява білої кулі під час першого випробування, подія A – поява білого шару під час другого випробування. Вочевидь, що ймовірність події A не залежить від результату першого випробування: $P(A) = \frac{3}{5}$.

Приклад 1.33. Ящик містить 60 сюрпризних цукерок. 50 з них містить всередині чебурашку як сюрприз, а десять – крокодила Гену. Навмання з ящика виймають спочатку одну цукерку, а потім – другу. Подія B – усередині першої вибраної цукерки опиняється чебурашка, подія A – усередині другої вибраної цукерки теж опиняється чебурашка. Імовірність виникнення події A за умови, що відбулася подія B, дорівнює $P(A) = \frac{49}{59}$. Якщо в першому випробуванні подія B не відбулася (у цукерці опинився крокодил Гена), то ймовірність $P(A) = \frac{50}{59}$. Відповідно, ймовірність виникнення події A залежить від того, відбулася подія B чи ні.

Отже, події за характером взаємозв'язку можна поділити на незалежні (перший розглянутий випадок) та залежні (другий випадок). Поняття про незалежні та залежні події відіграє дуже важливу роль у подальшому вивченні питань теорії ймовірності. У зв'язку з цим для подальшого аналізу уводимо поняття залежності та незалежності подій.

Визначення 1.21. Подію A називають незалежною відносно події B, якщо ймовірність події A не залежить від того, відбулася подія B чи ні; у протилежному разі подію А називають залежною від події B.

Умову незалежності події A від події B записують математично так: $P(A/B) = P(A)$, а умову залежності – $P(A/B) \neq P(A)$.

Для незалежних подій є така умова: якщо подія A не залежить від події B, тоді й подія В не залежить від події A, тобто поняття залежності та незалежності подій є обопільним. У зв'язку з цим можна дати нове визначення незалежних подій.

Визначення 1.21,а. Дві події називають незалежними, якщо виникнення однієї з них не змінює ймовірності виникнення іншої.

Перенесемо поняття незалежності подій на випадок довільного числа подій.

Визначення 1.22. Кілька подій називають незалежними в сукупності, якщо кожна з них і будь-яка комбінація решти подій, що містить або усю решту подій або її частину, є незалежними подіями. Наприклад, якщо події A_1, A_2 і A_3 є незалежними в сукупності, то це означає, що незалежними будуть такі події: A_1 і A_2; A_1 і A_3; A_2 і A_3; A_1A_2 і A_3; A_1A_3 і A_2; $A_2 A_3$ і A_1.

На початку викладу ми говорили, що багато подій можуть бути представлені як результат проведення алгебраїчних операцій з найпростішими подіями. Постає питання, як визначити ймовірність таких подій, якщо відомі ймовірності найпростіших подій. Надалі такі події будемо називати складними (складеними) подіями.

1.4. Обчислення ймовірностей для складних подій

У розділі 1.3.3 ми встановили, що якщо складна подія є сумою рівноможливих і несумісних елементарних подій, тоді ймовірність складної події дорівнює сумі ймовірностей елементарних подій. Для того, щоб встановити правило обчислення ймовірності складної події, що являє собою суму як несумісних, так і сумісних подій, необхідно спочатку розглянути правило обчислення ймовірності події, що є добутком елементарних подій.

1.4.1. Теорема множення ймовірностей

Перш ніж сформулюємо теорему множення ймовірностей, нагадаємо, що подія, яка являє собою добуток двох або більше подій, є такою, що складається з сумісного виникнення всіх цих подій.

Теорема. 1.1. Імовірність добутку або сумісного настання кількох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності решти подій, обчислених з припущенням, що всі попередні події відбулися:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)P(A_4/A_1A_2A_3)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}) \tag{1.4}$$

Для двох довільних подій A і B: $P(AB) = P(A)\ P(B/A) = P(B)P(A/B)$.

Ми приймемо теорему без доведення і розглянемо два наслідки, що випливають з теореми множення ймовірностей:

Наслідок 1.1.1. Якщо подія A не залежить від події B, то і подія B не залежить від A.

Наслідок 1.1.2. Імовірність добутку незалежних в сукупності подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто для незалежних подій формула (1.4) набуває вигляду:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)\ldots P(A_n) \tag{1.5}$$

Розглянемо кілька прикладів:

Приклад 1.32. До механізму входять три однакові деталі. Робота механізму порушується, якщо під час його складання встановлюють всі три деталі за розміром більші, ніж у кресленні. У складальника залишилося 15 деталей, з яких 5 – більшого розміру. Потрібно знайти ймовірність поганої роботи першого механізму, зібраного з цих деталей, якщо складальник вибирає деталі навмання.

Розв'язання. Позначимо через A подію поганої роботи першого зібраного механізму, а через A_1, A_2 і A_3 – події, які передбачають, що перша, друга і третя деталі, відповідно, поставлені в механізм, – більшого розміру. Тоді $A = A_1\ A_2\ A_3$, оскільки подія A відбувається за умови одночасного настання подій A_1, A_2 і A_3. За теоремою множення знаходимо:

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) = \frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13} \approx 0{,}011.$$

Приклад 1.33. До складу надходять партії товару. Імовірність того, що в кожній партії товару знайдуть дефектні вироби (продукт), дорівнює 0,1. Потрібно визначити ймовірність того, що три партії товару, які надійшли поспіль, не містять дефектні вироби.

Розв'язання. Позначимо через A подію, яка передбачає те, що три надіслені поспіль партії товару не містять дефектні вироби, а через A_1, A_2, A_3 – події, які передбачають те, що кожна партія товару не містить дефектні виробів.

За умовою задачі $A_1 = A_2 = A_3 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$, оскільки події, які передбачають, що надіслена партія товару не містить дефектні вироби і містить дефектні вироби, є протилежними.

Тепер, оскільки подія A відбувається за умови одночасного настання подій A_1, A_2 і A_3 , виходить, що $\text{А} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Події A_1, A_2 і A_3 є незалежними, тому що ймовірності настання кожної з цих подій не залежать від того, відбулися дві інші події чи ні. Тому за теоремою множення ймовірностей для незалежних подій (1.1) ми маємо:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}9^3 = 0{,}729.$$

1.4.2. Теорема додавання ймовірностей

Після того як ми розглянули теорему множення ймовірностей, ми можемо сформулювати теорему додавання ймовірностей не тільки для несумісних подій, а й для сумісних.

Теорема 1.2. Імовірність виникнення хоча б одного з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їхнього сумісного виникнення:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (1.6)$$

Теорему приймаємо без доведення.

Як наслідок з формули (1.6) випливає й формула додавання ймовірностей для несумісних подій. Справді, оскільки для несумісних подій $P(AB) = 0$, тому з (1.6) отримуємо:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Розглянемо кілька прикладів застосування теореми 1.2.

Приклад 1.34. Потрібно визначити ймовірність того, що вибраний навмання виріб є першосортним, якщо відомо, що 5% всієї продукції є браком, а 80% виробів без дефектів задовольняють вимоги 1-го сорту.

Розв'язання. Позначимо A – обраний виріб не є дефектним, B – обраний виріб задовольняє вимоги 1-го сорту, тоді AB – обраний виріб є першосортним, а шукана ймовірність

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = 0{,}95 \cdot 0{,}8 = 0{,}76, \text{ де } P(A) = 1 - 0{,}05,\ P(B/A) = 0{,}8.$$

Приклад 1.35. Здійснюють два постріли по одній і тій самій мішені. Імовірність влучення під час першого пострілу дорівнює 0,6, для другого – 0,8. Потрібно знайти ймовірність того, що мішень буде ураженою хоча б один раз.

Розв'язання. Розглянемо подію A – влучення під час першого пострілу і подію B – під час другого пострілу. Їхні ймовірності дорівнюють: $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}8$. Оскільки A і B є сумісними і незалежними подіями, тоді ймовірність того, що в мішень буде здійснене хоча б одне влучення, згідно з формулою (1.6), дорівнює:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}92.$$

Ми взяли до уваги, що події незалежні, отже, $P(AB) = P(A)P(B)$.

Якщо ж скористатися поняттям протилежної події, то, враховуючи, що $A+B$ і $\bar{A}\,\bar{B}$ протилежні події, отримаємо

$$P(A + B) = 1 - P(\bar{A})\,P(\bar{B}) = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}92.$$

Тут $\bar{A}$ і $\bar{B}$ – промах під час першого і другого пострілу, відповідно, і події незалежні.

1.4.3. Формула повної ймовірності

Нехай деяка цікава для нас подія A може настати або не настати разом з однією із низки несумісних подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$, що утворюють простір елементарних подій (інакше кажучи, ці події утворюють повну групу). Події такої низки зазвичай називають гіпотезами. Імовірності всіх гіпотез є відомими, тобто задано $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$, за такої умови $P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1$. Відомі також умовні ймовірності настання події А у разі здійснення кожної із зазначених гіпотез, тобто задано $P(A/H_1)$, $P(A/H_2), \ldots$, $P(A/H_n)$. Імовірність $P(A)$ цікавої для нас події A визначають за такою теоремою.

Теорема. 1.3. Імовірність події A, яка може відбутися разом з однією з гіпотез H_1, H_2,..., H_n, дорівнює сумі парних добутків ймовірностей кожної з цих гіпотез на відповідні для них умовні ймовірності настання події А:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i) \qquad (1.7)$$

Формула (1.7) має назву формули повної ймовірності.

Доведення. Оскільки гіпотези H_1, H_2,…, H_n утворюють повну групу, то подію А можна представити як суму подій:

$A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n = = \sum_{i=1}^{n} AH_i$.

Оскільки події H_i несумісні, тоді й події AH_i ($i = 1,2,\ldots,n$) також несумісні. Ця обставина дозволяє застосувати для визначення ймовірності події A теорему додавання ймовірностей несумісних подій (1.2)

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i) \qquad (1.8)$$

Імовірність добутку подій A і H_i визначають за теоремою множення ймовірностей (1.1):

$$P(AH_i) = P(H_i) \cdot P(A/H_i) \, . \qquad (1.9)$$

Підставляючи (1.9) у формулу (1.8), отримуємо:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i) \, ,$$

що й потрібно було довести.

Розглянемо кілька прикладів застосування теореми 1.3.

Приклад 1.36. Нехай один з трьох ящиків містить 3 білі і 2 чорні кулі, другий – 2 білі і 3 чорні, а третій – тільки білі кулі. З навмання вибраного ящика виймають одну кулю. Потрібно знайти ймовірність того, що вона буде білого кольору.

Розв'язання. Розглянемо події: H_1 – куля, взята з першого ящика, H_2 – куля, взята з другого ящика, H_3 – куля, взята з третього ящика. Виймання кулі з будь-якого ящика відбувається навмання, отже, ймовірності подій, з якого ящика куля буде вийнята, однакові і складають: $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$. Позначимо через A подію, яка передбачає, що куля, вибрана з будь-якого з трьох ящиків, виявиться білого кольору. Імовірність цієї події залежить від того, з якого ящика вибирають кулю, і умовні ймовірності настання події A під час реалізації кожної з подій H_1, H_2, H_3 дорівнює: $P(A/H_1) = 3/5$, $P(A/H_2) = 2/5$, $P(A/H_3) = 1$.

Події H_1, H_2, H_3 є несумісними і утворюють повну групу, отже, для події А їх можна розглядати як гіпотези; тоді, використовуючи формулу (1.7) для повної ймовірності, отримуємо:

$P(A) = P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)= = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}.$

Приклад 1.37. На двох автоматичних верстатах виготовляють однакові валики. Імовірність виготовлення першокласного валика на першому верстаті дорівнює 0,95, а на другому – 0,80. Виготовлені на обох верстатах не розсортовані валики лежать на складі; серед них валиків, виготовлених на першому верстаті, в три рази більше, ніж на другому. Потрібно визначити ймовірність того, що навмання взятий валик буде першокласним.

Розв'язання. Позначимо буквою A подію, яка передбачає, що взятий навмання валик буде першокласним; B_1 – подію, яка передбачає, що взятий навмання валик був зроблений на першому верстаті; B_2 – подію, яка передбачає, що валик був зроблений на другому верстаті. Використовуючи формулу повної ймовірності, ми отримаємо:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + \mathrm{P}(B_2)P(A/B_2) = \frac{3}{4}\cdot 0{,}95+\frac{1}{4}\cdot 0{,}80 = 0{,}91.$$

Тут $P(B_1) = \frac{3}{4}$, $P(B_2) = \frac{1}{4}$, оскільки валиків, вироблених на першому верстаті, в 3 рази більше, ніж на другому. Умовні ймовірності задані в умові задачі: $P(A/B_1) = 0{,}95$, $P(A/B_2) = 0{,}80$.

1.4.4. Теорема гіпотез (формула Баєса)

Досі ми розглядали ймовірність подій до випробувань, тобто в комплексі умов не фігурував результат проведеного досліду.

Сформулюємо таку задачу. Є повна група несумісних гіпотез H_1, $H_2,\ldots,\ H_n$. Відомими є ймовірності кожної з $P(H_1)$, $P(H_2),\ldots,\ P(H_n)$. Проводять дослід, і в його результаті виконують деяку подію A, ймовірності якої з кожної гіпотези відомі, тобто відомі $P(A/H_1)$, $P(A/H_2),\ldots,\ P(A/H_n)$.

Виникає запитання, які ймовірності мають гіпотези $H_1,\ H_2,\ldots,\ H_n$ з огляду на виникнення події A? Інакше кажучи, нас цікавлять умовні ймовірності $P(H_i\,/\,A)$ ($i = 1,2,\ldots,n$) для кожної гіпотези.

Теорема. 1.4. Імовірність гіпотези після випробування дорівнює добутку ймовірності гіпотези до випробування на відповідну для неї умовну ймовірність події, яка відбулася під час випробування, поділеній на повну ймовірність цієї події:

$$P(H_i\,/\,A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)}\,. \tag{1.10}$$

Формула (1.10) має назву формули Баєса.

В окремому разі, якщо всі гіпотези H_i ($i = 1,2,\ldots,n$) перед випробуванням мають однакову ймовірність $P(H_i) = p$, формула (1.10) набуває вигляду:

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)} \tag{1.11}$$

Приймемо теорему гіпотез без доказу і розглянемо кілька прикладів із застосування цієї теореми.

Приклад 1.38. Нехай в умовах прикладу 1.37 взятий навмання валик виявився першокласним. Потрібно визначити ймовірність того, що він був зроблений на першому верстаті.

Розв'язання. Використовуючи позначення прикладу 1.37, за формулою Баєса ми отримаємо:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P(A/B_i)} = \frac{0{,}71}{0{,}71 + 0{,}20} = 0{,}78.$$

Приклад 1.39. До склад надійшли три ящика з однотипними виробами від різних фірм: в першому – 10 виробів, з них 3 нестандартних, в другому – 15 виробів, з них 5 нестандартних і в третьому – 20 виробів, з них 6 нестандартних. Навмання вибирають один виріб, і він виявився нестандартним. Потрібно визначити ймовірність того, що взятий виріб належить фірмі, яка надіслала другий ящик.

Розв'язання. Позначимо через H_1, H_2, H_3 відповідно гіпотези про те, що навмання взятий виріб належав першому, другому, третьому ящикам. Тоді ймовірності цих гіпотез перед проведенням випробування є однаковими і дорівнюють 1/3, тобто $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$. Унаслідок випробування спостерігаємо подію A, яка передбачає, що навмання вибраний виріб є нестандартним. Умовні ймовірності цієї події за гіпотез H_1, H_2, H_3 відповідно дорівнюють: $P(A/H_1) = 3/10$, $P(A/H_2) = 5/15 = 1/3$, $P(A/H_3) = 3/10$. Тепер за формулою Баєса (1.10) визначимо ймовірність гіпотези H_2 після випробування, тобто ймовірність того, що цей нестандартний виріб належить фірмі, яка надіслала другий ящик:

$$(H_2/\mathrm{A}) = \ = \frac{P(A/H_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(A/H_i)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{10}+\frac{1}{3}+\frac{3}{10}} = \frac{5}{14}.$$

1.4.5. Послідовність незалежних випробувань. Формула Бернуллі

На практиці доводиться стикатися із задачами, які можна представити як багаторазово повторювані випробування, внаслідок кожного з яких може виникнути або не виникнути подія A. Водночас інтерес становить результат не кожного окремого випробування, а загальне число виникнення події A після певної кількості випробувань. За подібних обставин потрібно вміти визначати ймовірність будь-якого числа m виникнення події A унаслідок n випробувань.

Визначення 1.23. Якщо ймовірність події A в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань, то такі випробування називають незалежними відносно події A.

Сформулюємо таку задачу.

Потрібно визначити ймовірність того, що внаслідок проведення n незалежних випробувань деяка подія A відбудеться рівно m раз, якщо в кожному з цих випробувань ця подія відбувається з постійною ймовірністю $P(A) = p$.

Шукану ймовірність позначимо як $P_{m,n}(A)$. Наприклад, символ $P_{4,12}(A)$ означає, що в дванадцяти випробуваннях подія A виникла 4 рази.

Розглянемо спосіб розрахунку шуканої ймовірності, заснованому на використанні формули Бернуллі.

Формула Бернуллі. Припустім, що в однакових умовах проводять n незалежних випробувань, результатом кожного з яких може бути настання або події A з ймовірністю $P(A) = p$, або протилежної до неї $\bar{A}$ з ймовірністю $P(\bar{A}) = 1 - p$. Позначимо через A_i ($i = 1,2,\ldots,n$) настання події A в i-ому випробуванні. З огляду на сталість умов (незалежність) випробування

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \ldots = P(A_n) = p,$$

$$P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = P(\bar{A}_3) = \ldots = P(\bar{A}_n) = 1 - p.$$

Нас цікавить ймовірність того, що подія A під час n випробувань може виникнути рівно m раз у різних послідовностях або комбінаціях, число яких дорівнює числу сполучень з n елементів по m, тобто C^m_n. Прикладом такої комбінації може слугувати подія B, за якої подія A настає поспіль m раз, починаючи з першого випробування:

$$B = A_1A_2\ldots A_m\,\bar{A}_{m+1}\ldots\,\bar{A}_n \tag{1.12}$$

За умовою випробування є незалежними. Це означає, що незалежними є події, що входять у комбінацію (1.12), тому, використовуючи теорему множення для незалежних подій, ми отримаємо:

$$P(B) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_m)\cdot P(\bar{A}_{m+1})\cdot\ldots\cdot P(\bar{A}_n) = p^m(1-p)^{n-m}$$

Оскільки всі комбінації подій, подібні до комбінації B, є несумісними подіями, і неважливо, в якій послідовності виникне подія A і в якій послідовності виникне протилежна до неї подія, тоді застосовуючи теорему додавання ймовірностей для несумісних подій, ми отримаємо:

$$P_{m,n}(A) = C_n^m\,p^m(1-p)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\,p^m\big(1-p\big)^{n-m} \tag{1.13}$$

Одержана формула (1.13) має назву формули Бернуллі.

Формула Бернуллі має дуже важливе значення в теорії ймовірностей, тому що вона пов'язана з повторенням випробувань в однакових умовах, тобто в таких умовах, в яких якраз і виявляють закони теорії ймовірностей.

Розглянемо приклади з використанням формули Бернуллі.

Приклад 1.40. Монету підкидають 5 разів. Потрібно знайти ймовірність того, що герб з'явиться 3 рази.

Розв'язання. Умова задачі відповідає схемі послідовності випробувань в однакових умовах. Позначимо події: A – поява герба в одному випробуванні, B – герб з'явиться 3 рази в серії з п'яти випробувань.

Тепер, застосовуючи формулу (1.13) за умов n=5, m=3 і p= 1/2, отримаємо $P_{3,5}(A) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$.

Приклад 1.41. Вироби деякого виробництва має 5% браку. Потрібно знайти ймовірність того, що серед шести, взятих навмання виробів:

1) виявляться два дефектних;

2) не виявляться дефектних;

3) усі шість будуть дефектними.

Розв'язання. Умова задачі відповідає схемі послідовності випробувань в однакових умовах. Уведемо позначення: A – подія, що передбачає появу дефектного виробу, B – подія, що передбачає появу m дефектних виробів під час послідовних n = 6 випробуваннях. З умови задачі випливає, що $P(A)$ = 0,05 , $P(\overline{\mathbf{A}})$ = 1 – 0,05 = 0,95.

За формулою Бернуллі

1) при m = 2, $P_{2,6}(A) = C_6^2 \cdot (0{,}05)^2 \cdot (0{,}95)^4$ = 0,03;

2) при m = 0, $P_{0,6}(A) = (0{,}95)^6 \approx 0{,}73$;

3) при m = 6, $P_{6,6}(A) = (0{,}05)^6 \approx 0{,}156\ 10^{-7}$.

1.4.6. Найімовірніше число виникнення події під час послідовних випробувань

Визначення 1.24. Найімовірнішим числом m_0 виникнення події A в n незалежних випробуваннях називають число, для якого ймовірність $P_{m,n}(A)$ перевищує або принаймні не є меншою за ймовірність кожного з решти можливих результатів випробувань.

Для визначення найімовірнішого числа m_0 зовсім не потрібно обчислювати ймовірності різноманітних комбінацій виникнення події A, а достатньо знати число випробувань n і ймовірність p виникнення події A в одному випробуванні. Встановлено, що найімовірніше число m_0 задовольняє подвійній нерівності:

$$np - q \leq m_0 \leq np + p, \text{ где } q = 1 - p. \tag{1.14}$$

Ця подвійне нерівність слугує для визначення найімовірнішого числа m_0.

Зауваження. Довжина сегмента $[np - q, np + p]$, визначена нерівностями (1.14), дорівнює одиниці: $(np + p) - (np - q) = 1 - p + p = 1$. Тому, якщо межами цього сегмента є дробові числа, то ми отримуємо одне значення найімовірнішого числа m_0, якщо межами є цілі числа, тоді отримуємо два значення найімовірнішого числа m_0: $np + p$ і $np - q$.

Розглянемо приклади.

Приклад 1.42. Оптова база забезпечує 10 магазинів, від кожного з яких може надійти замовлення чергового дня з ймовірністю 0,4 незалежно від замовлень інших магазинів. Потрібно знайти найімовірніше число замовлень в день і ймовірність отримання цього числа замовлень.

Розв'язання. У цій задачі n=10, p=0,4, q=1 - p = 1 - 0,4 = 0,6. Підставляючи ці дані в нерівності (1.14), отримуємо

$$10 \cdot 0{,}4 - 0{,}6 \leq m_0 \leq 10 \cdot 0{,}4 + 0{,}4,$$

$$3{,}4 \leq m_0 \leq 4{,}4,$$

і, отже, $m_0 = 4$. Найімовірніше число замовлень дорівнює 4.

Знайдемо тепер ймовірність одержання чотирьох замовлень за формулою Бернуллі

$$P_{4,10}(A) = C_{10}^4 \cdot (0{,}4)^4 \cdot (0{,}6)^6 = 0{,}25.$$

Приклад 1.43. За встановленого технологічного процесу 85% усієї продукції належить до вищого сорту. Потрібно знайти найімовірніше число виробів вищого сорту в партії з 150 виробів.

Розв'язання. За умовою задачі n = 150, p = 0,85, q = 1 - p = 1 - 0,85 = 0,15. Підставляючи ці дані в нерівності (1.14), отримуємо

150·0,85 – 0,15 ≤ m_0 ≤ 150·0,85 + 0.85, звідки m_0 = 128.

Отже, найімовірніше число виробів вищого сорту в партії з 150 виробів дорівнює 128.

Приклад 1.44. Потрібно визначити найімовірніше число уражених літаків в групі з 13 бомбардувальників, якщо літаки уражаються незалежно один від одного і ймовірність ураження одного літака становить $\frac{4}{7}$.

Розв'язання. За умовою задачі n = 13, p = $\frac{4}{7}$, q = 1 – p = 1 – $\frac{4}{7}$ = $\frac{3}{7}$. Як наслідок, згідно з нерівностями (1.14) ми маємо:

$$13\cdot\frac{4}{7}-\frac{3}{7}\leq m_0\leq 13\cdot\frac{4}{7}+\frac{4}{7}.$$

Звідси отримуємо:

$$7\leq m_0\leq 8.$$

Це означає, що є два значення 7 і 8, кожне з яких є найбільш імовірним числом уражених літаків.

Питання для самоконтролю до розділу 1

1. Чим займається теорія ймовірностей? Основні її поняття та завдання.

2. Які події називаються випадковими? Наведіть приклади випадкових подій.

3. Які події називаються рівноможливими? Наведіть приклади.

4. Які події називаються спільними і несумісними? Наведіть приклади.

5. Які події утворюють простір елементарних подій? Наведіть приклади.

6. Які події називаються протилежними? Наведіть приклади.

7. Які події називаються сумою або об'єднанням кількох подій? Наведіть приклади.

8. Які події називаються твором або перетином (суміщенням) кількох подій? Наведіть приклади.

9. Які події називаються різницею кількох подій? Наведіть приклади.

10. Сформулюйте статистичне і класичне визначення ймовірності події. У чому їхня відмінність і схожість?

11. Чому дорівнює сума ймовірностей несумісних подій, що утворюють простір елементарних фіналів?

12. Сформулюйте основні визначення і запишіть основні формули комбінаторики.

13. Що називається умовною ймовірністю? Які події називаються незалежними? Наведіть приклади.

14. Сформулюйте теорему множення ймовірностей і наслідки з неї.

15. Сформулюйте теорему додавання ймовірностей і наслідки з неї.

16. Доведіть формулу повної ймовірності.

17. Сформулюйте теорему гіпотез і запишіть формулу Байеса.

18. При вирішенні яких завдань застосовується формула повної ймовірності?

19. При вирішенні, яких завдань застосовується формула ймовірності гіпотез (Байеса)?

20. Доведіть формулу Бернуллі.

21. При вирішенні, яких завдань застосовується формула Бернуллі?

22. Дайте визначення найімовірнішого числа появ події при послідовних незалежних випробуваннях і приведіть правило його обчислення.

Розділ 2
ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

У першій частині нашого викладу ми мали справу з випадковими подіями. Подія за визначенням є якісною характеристикою випадкового результату експерименту. Можливість виникнення випадкової події підлягає кількісному оцінюванню, яким слугує ймовірність виникнення події, вираженої числом. Але випадковий результат експерименту також можна охарактеризувати кількісно, тобто порівняти його з деяким числом. Наприклад, всі економічні показники виражають чисельно. Це включає і заробітну плату працівників у разі відрядної оплати праці, і обсяг випуску продукції, і рентабельність, і продуктивність праці, і число деталей, що виходять за межі допуску через свої розміри та ін.

Далі, будь-якому випадковому експерименту може відповідати простір елементарних фіналів $\Omega = \{\omega\}$. Якщо тепер кожний елементарний результат ω випадкового експерименту буде зіставлений також і з деяким числовим значенням, тоді сукупність цих числових значень для всіх елементарних результатів простору Ω може слугувати кількісною характеристикою випадкового результату експерименту і бути випадковою величиною. Поняття випадкової величини є фундаментальним поняттям теорії ймовірностей і відіграє дуже велику роль в її додатках.

2.1. Поняття випадкової величини

Спочатку розглянемо поняття випадкової величини, яке було сформовано історично.

Визначення 2.1. Випадковою величиною називають величину, яка внаслідок експерименту може набувати те або інше (але лише одне) значення (виражене числом), причому заздалегідь, до експерименту, невідомо яке саме.

Випадкові величини позначають зазвичай великими літерами кінця латинського алфавіту X, Y, ..., а їхні можливі числові значення позначають відповідними малими літерами x, y, ...

Серед випадкових величин, з якими доводиться зустрічатися на практиці, можна виділити два основні типи: дискретні випадкові величини і безперервні випадкові величини.

Визначення 2.2. Дискретною випадковою величиною називають таку величину, число можливих значень якої є або скінченною, або нескінченною зліченною множиною.

Наведемо приклади дискретних випадкових величин: 1. Число покупців, що відвідують магазин за день; 2. Число викликів, що надходять на телефонну станцію протягом доби; 3. Кількість днів, необхідних для того, щоб в червні пішов град. У останньому прикладі випадкова величина може набувати нескінченну, але зліченну множину значень.

Визначення 2.3. Неперервною випадковою величиною називають таку величину, можливі числові значення якої змінюють у безперервний або суцільний спосіб, тобто являють собою деякий числовий проміжок.

Вочевидь, що число можливих значень неперервної випадкової величини навіть у тому разі, коли вона обмежена, є нескінченним. Наведемо приклади безперервних випадкових величин: випадкові відхилення ваги товару від заданої ваги товару в супровідному документі; відхилення розміру деталі, що виготовляють, від заданого розміру у кресленні. Водночас, якщо відхилення ваги або розміру пов'язане з їхнім збільшенням, значення випадкової величини пишуть зі знаком плюс, якщо зі зменшенням – тоді з мінусом.

Отже, кожна випадкова подія можна бути пов'язана з її двома числовими характеристиками: ймовірність виникнення події і числове значення випадкової величини, що певною мірою є абстрактним вираженням випадкової події. Відмітною особливістю цих характеристик є також те, що ймовірність випадкової події – позитивна величина; випадкова ж величина, як дискретна, так і неперервна, може набувати і додатних, і від'ємних значень. Наприклад, нехай подією вважають наповнення автобуса впродовж усього маршруту або наповнення магазину покупцями в різні години роботи магазину. В обох цих випадках подію можна пов'язати з випадковою величиною, вираженою різницею пасажирів, які входять і виходять з автобусу, або покупців у магазині. Ця випадкова величина буде дискретною і може набувати як додатних, так і від'ємних значень.

Оперування поняттям випадкової величини в низці випадків буває зручнішим, ніж оперування випадковими подіями. У цьому можна переконатися в подальшому нашому викладі.

Розглянемо тепер сучасну інтерпретацію поняття випадкової величини. Нехай деякий випадковий експеримент характеризується простором елементарних подій Ω = {ω}, і нехай кожному елементарному результату ω експерименту відповідає деяке числове значення *x* з множини *R* дійсних чисел. Це означає, що на просторі елементарних подій Ω = {ω} задано числову функцію, аргументами якої є елементарні результати ω експерименту, а дійсні числа – їхніми образами. Інакше кажучи, ця функція відображає простір елементарних подій Ω = {ω} у множині *R* дійсних чисел, тобто для кожної елементарної події ω ця функція ставить відповідне деяке дійсне число. У такий підхід цю функцію і розглядають як випадкову величину.

З огляду на це випадкова величина отримує таке визначення.

Визначення 2.4. Випадковою величиною називають числову функцію, задану на просторі елементарних подій Ω = {ω}.

Позначають цю функцію, як і заведено, для випадкової величини як *X, Y*, ..., а їхні можливі числові значення як *x, y,* ..., і, відповідно, *X(ω), Y(ω)*, ... Іноді для цієї функції ми будемо використовувати також такий запис: X: $\forall\omega \in \Omega \to X = X(\omega) \in R,$, тобто сама функція і її значення позначають однією літерою: *X* = *X(ω)*.

Слід зазначити, що областю значень цієї функції є множина R дійсних чисел, і, отже, ця функція дозволяє відобразити простір елементарних подій Ω = {ω} як сукупність точок на числовій осі.

Знання можливих значень випадкової величини ще не дозволяє нам повністю описати випадкову величину, оскільки ми не можемо сказати, як часто слід очікувати появу тих чи тих можливих значень випадкової величини внаслідок повторення експерименту в одних і тих самих умовах. Щоб досягнути цього, необхідно знати ймовірність реалізації під час проведення експерименту кожного числового значення випадкової величини, тобто необхідно знати закон розподілу ймовірності за всіма числовими значеннями випадкової величини. Зважаючи на це судження, дамо наступне визначення.

Визначення 2.5. Законом розподілу випадкової величини називають кожне взаємовідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними ймовірностями.

Знаючи розподіл ймовірності між можливими значеннями випадкової величини, можна до проведення експерименту припускати, які значення випадкової величини виникатимуть частіше і які рідше. Слід зазначити, що способи або форми подання закону розподілу випадкової величини можуть бути різними. Розглянемо деякі з них.

2.2. Закони розподілу ймовірностей випадкової величини

Вивчення почнемо з розподілів, які використовують для дискретної випадкової величини.

2.2.1. Ряд розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини

Найпростішою формою задання закону розподілу дискретної випадкової величини є таблиця, в якій перераховано можливі значення випадкової величини і відповідні для них ймовірності. Така таблиця має назву ряду розподілу дискретної випадкової величини.

Визначення 2.6. Рядом розподілу або законом розподілу дискретної випадкової величини називають перелік значень випадкової величини і відповідних ймовірностей для цих значень.

Ряд розподілу дискретної випадкової величини може бути заданий і в графічній формі. У разі графічного подання всі можливі значення випадкової величини відкладають на координатної площині по осі абсцис, а по осі ординат – відповідні ймовірності. Вершини отриманих ординат зазвичай з'єднують відрізками прямих. Слід зазначити, що з'єднання вершин ординат здійснюють тільки для наочності, оскільки в проміжках між вершинами випадкова величина не може набути значень, тому ймовірності її появи в цих проміжках дорівнюють нулю.

Таку графічну форму подання закону розподілу дискретної випадкової величини за традицією називають багатокутником розподілу. Для різних умов експерименту ряд розподілу дискретної випадкової величини відрізняється один від одного, проте всі вони мають одну спільну властивість.

Властивість ряду розподілу. Сума значень ряду (або ординат багатокутника) розподілу, що являють собою суму ймовірностей всіх можливих значень випадкової величини, завжди дорівнює одиниці. Це і є основна властивість закону розподілу ймовірностей випадкової величини, яка випливає з такої задачі.

Нехай задано деякий скінченний дискретний простір елементарних подій Ω і нехай $A_1, A_2,\ldots,A_\mathrm{n}$ є несумісними подіями, що утворюють цей простір. Кожна з цих подій має ймовірність виникнути, тобто є $P(A_1)$, $P(A_2),\ldots,P(A_\mathrm{n})$. Подія A, що являє собою суму всіх несумісних елементарних подій простору Ω: $A = A_1 + A_2 +\ldots+ A_n$ є достовірною подією, а це означає зі свого боку, що $P(A_1) + P(A_2) +\ldots+ P(A_n) = 1$. Якщо тепер простір Ω можна пов'язати з деякою випадковою величиною X, числові значення x якої відповідають подіям цього простору: $x_1 = A_1$, $x_2 = A_2,\ldots, x_n = A_n$, звідси випливає, що $P(x_1) + P(x_2) +\ldots+ P(x_n) = 1$, оскільки ймовірності виникнення подій A_i і значень випадкової величини x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ є однаковими. Розглянемо приклад.

Приклад 2.1. Монету підкидають тричі. Потрібно знайти ряд розподілу і побудувати багатокутник розподілу числа появ герба.

Розв'язання. У цьому експерименті випадковою величиною X є кількість появи герба, а числовими значеннями, які вона може набувати, є $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Для визначення ймовірностей цих значень можна використати формулу Бернуллі, оскільки випробування є незалежними, а поява герба відбувається з постійною ймовірністю $p = 1/2$.

$$P_{m,n} = C_n^m\, p^m (1-p)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\, p^m (1-p)^{n-m}. \qquad (2.1)$$

Підставляючи в цю формулу n=3, а для m – значення 0,1,2,3, отримуємо шукані значення ймовірностей: $P(0) = p^3 = 1/8$ (напомним, что $0! = 1$); $P(1) = 3/8$; $P(2) = 3/8$; $P(3) = 1/8$.

Одержаний закон розподілу ймовірностей випадкової величини підтверджує його основну властивість:

$$\sum_{i=1}^{4} P(x_i) = 1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8 = 1.$$

Відповідний ряд розподілу випадкової величини для цього експерименту наведено в таблиці 1, а багатокутник розподілу зображено на рис. 2.1.

Розглянутий ряд розподілу є зручною формою подання закону розподілу для дискретної випадкової величини зі скінченним числом можливих значень, який не застосовують для неперервної випадкової величини. Розглянемо тепер найбільш загальну форму подання закону розподілу ймовірності випадкової величини, так звану функцію розподілу, яка застосовують для всіх випадкових величин: як дискретних, так і безперервних.

Таблиця 1

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

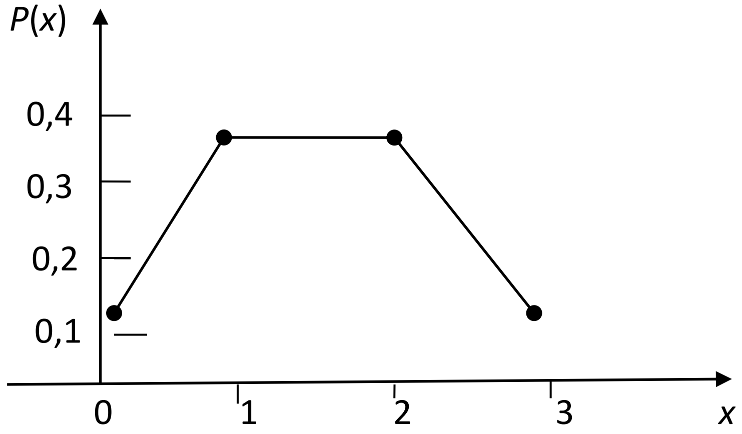

Рис. 2.1

2.2.2. Функція розподілу ймовірності випадкової величини

Розглянемо випадкову величину $X = X(\omega)$, значення якої належать множині R дійсних чисел, і нехай x є деяким числовим значенням цієї випадкової величини X. Позначимо ймовірність того, що ця випадкова величина X набуде після випробування значення менше x через $P\ (X < x)$. Тоді за умови, що $\forall x \in X$, буде встановлено відповідність $x \rightarrow P\ (X < x)$, яка являє собою функцію, задану на множині значень випадкової величини $X \subset R$ дійсних чисел зі значеннями також у множині R, тобто числову функцію однієї дійсної змінної. Позначають цю функцію F, а її значення – $F(x)$. Називають цю функцію функцією розподілу випадкової величини X. Отже, функція $F\colon \forall x \in X \rightarrow F(x) = P(X < x)$.

Область визначення функції розподілу становить всю множину R дійсних чисел, навіть в тому разі, якщо випадкова величина набуває дискретних значень, оскільки ті числові значення, які лежать нижче найменшого значення, що набуває випадкова величина, можна розглядати як неможливі події і вважати ймовірність їхнього виникнення рівною нулю. Тепер дамо визначення функції розподілу випадкової величини X.

Визначення 2.7. Функцією розподілу випадкової величини X називають функцію $F(x)$, задану на всій множині R дійсних чисел, тобто $X \subset R$, значеннями якої є ймовірність $P(X < x)$ того, що випадкова величина X набуде після випробування значення менше x.

Функція розподілу повністю характеризує випадкову величину з імовірнісної думки; це означає, що вона є однією з форм закону розподілу. Істотною перевагою функції розподілу є те, що вона являє собою числову функцію однієї дійсної змінної, яка задана на всій множині R дійсних чисел і, отже, для її дослідження ми можемо використовувати всі методи і прийоми, закладені в математичному аналізі для дослідження таких функцій. Один з плюсів такого подання, наприклад, полягає в тому, що таку функцію можна зображувати наочно як графік на координатній площині.

Для дискретної випадкової величини X, яка може набувати значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$, функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \sum_{x_i<x} P(X = x_i), \qquad (2.2)$$

де підсумовування поширюється на всі ті значення індексу i, для яких $x_i < x$. Розглянемо приклад.

Приклад 2.2. У ціль здійснюють три незалежних постріли. Імовірність влучення в ціль під час кожного пострілу дорівнює 0,4. Потрібно побудувати функцію розподілу числа влучень.

Розв'язання. Позначимо випадкову величину числа влучень через X, тоді можливі значення X будуть такими: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Для визначення ймовірностей цих значень можна використати формулу Бернуллі (2.1), оскільки постріли є незалежними, а влучення відбувається з постійною ймовірністю $p = 0{,}4$.

Підставляючи в цю формулу $n = 3$, а для m – значення 0,1,2,3, отримуємо шукані значення ймовірностей: $P(0) = (1 - p)^3 = 0{,}216$ (нагадаємо, що $0! = 1$); P (1) = 0,432; P (2) = 0,288; P (3) = 0,064.

Відповідний ряд розподілу наведено в табл. 2.

Таблиця 2

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	0,216	0,432	0,288	0,064

Тепер відповідно до (2.2) побудуємо функцію розподілу для отриманої дискретної випадкової величини X:

1. За умови $x \le 0$, $F(x) = P(X < 0) = 0$, оскільки досліджувана подія для цього числового проміжку є неможливою подією;

2. За умови $0 < x \le 1$, $F(x) = P(X = 0) = 0{,}216$;

3. За умови $1 < x \le 2$, $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}216 + 0{,}432 = 0{,}648$;

4. За умови $2 < x \le 3$, $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 = 0{,}936$;

5. За умови $x > 3$, $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 + 0{,}064 = 1{,}0$.

Графік функції розподілу досліджуваної випадкової величини X представлено на рис. 2.2.

З наведеного прикладу випливає, що функція розподілу дискретної випадкової величини *X*, залишаючись неперервною зліва, має розриви справа і зростає у стрибкуватий спосіб під час переходу через точки її можливих значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причому величина стрибка дорівнює ймовірності відповідного значення. Значення дискретної випадкової величини розділено числовими проміжками, всередині яких немає інших можливих значень *X*. На цих числових проміжках функція розподілу *F(x)* постійна, тобто графік функції розподілу являє собою ступінчасту лінію.

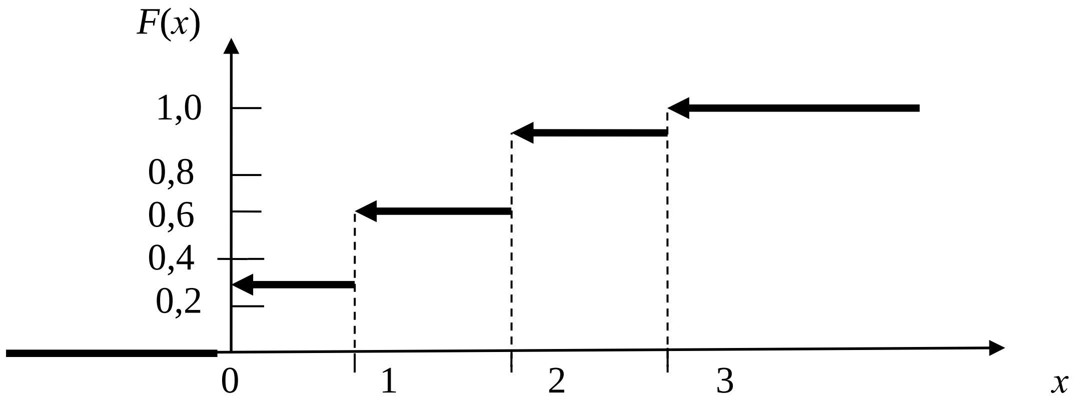

Рис. 2.2

Розглянемо загальні властивості функції розподілу, характерні як для дискретної, так і неперервної випадкової величини *X*.

1. Функція розподілу *F(x)* є невід'ємною функцією, значення якої розташовано між нулем і одиницею: $0 \le F(x) \le 1$;

2. За умови $x \to -\infty$, $F(x) \to 0$;

3. За умови $x \to +\infty$, $F(x) \to 1$;

4. Ймовірність потрапляння випадкової величини X в довільний числовий проміжок дійсної осі $[x_1,x_2)$, незамкненій справа, визначає формула:

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Доведемо цю властивість. Для цього розглянемо подію $(X < x_2)$. Вочевидь, що цю подію можна записати як суму:

$$(X < x_2) = (x_1 \le X < x_2) + (X < x_1),$$

Використовуючи формулу складання для несумісних подій, отримаємо:

$P(X < x_2) = P(x_1 \le X < x_2) + P(X < x_1)$, звідки випливає:

$F(x_2) = P(x_1 \le X < x_2) + F(x_1)$ или $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

5. Функція розподілу $F(x)$ – неспадна функція на всій своїй області визначення R дійсних чисел, тобто якщо, $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$.

6. Функція розподілу є неперервною зліва, тобто:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0).$$

З розглянутих властивостей випливає, що якщо графік функції розподілу $F(x)$ являє собою неперервну лінію, яка монотонно зростає на координатної площині в інтервалі (a,b), то їй відповідає неперервна випадкова величина, можливі значення якої безперервно заповнюють цей інтервал. Протилежне твердження не є правильним, і до нього ми повернемося трохи пізніше. Прикладом графіка неперервної функції $F(x)$ може слугувати лінія, зображена на рис. 2.3.

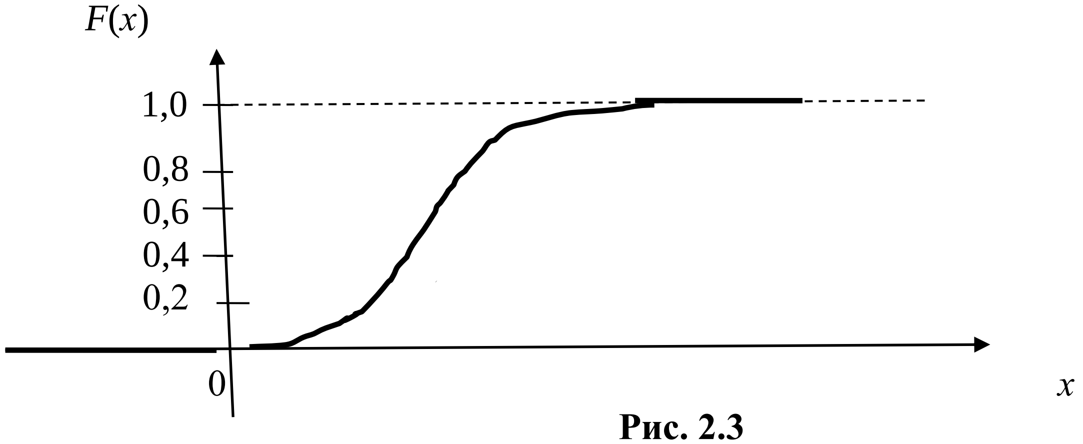

Рис. 2.3

Функція розподілу неперервної випадкової величини є її ґрунтовною ймовірнісною характеристикою. Проте вона має недолік, який полягає в тому, що з нею важко говорити про характер розподілу неперервної випадкової величини в невеликому околі тієї чи тієї точки числової осі, тобто як часто значення неперервної випадкової величини належать до околу вибраної точки. Більш наочне уявлення про характер розподілу неперервної випадкової величини в околах різних точок дає функція, яку називають щільністю розподілу ймовірності або диференціальним законом розподілу випадкової величини.

2.2.3. Щільність розподілу ймовірності неперервної випадкової величини

Нехай є неперервна випадкова величина *X* з функцією розподілу *F(x)*. Обчислимо ймовірність потрапляння цієї випадкової величини в числовій проміжок (x, $x + \Delta x$). Відповідно до властивості 4 попереднього розділу маємо:

$$P\,(x < X < x + \Delta x) = F\,(x + \Delta x) - F\,(x).$$

Складемо відношення цієї ймовірності до довжини інтервалу Δx:

$$\frac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}.(2.3) \qquad (2.3)$$

Визначення 2.8. Відношення (2.3) називають середньою ймовірністю, яка припадає на одиницю довжини інтервалу Δx.

Вважаючи функцію *F(x)* диференційованою, перейдемо в рівності (2.3) до границі з $\Delta x \to 0$, тоді отримаємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x). \qquad (2.4)$$

Отриманий вираз (2.4) відображає поняття щільності розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини.

Визначення 2.9. Границею відношення ймовірності потрапляння неперервної випадкової величини в числовій проміжок від x до $x + \Delta x$ до довжини цього проміжку Δx, коли Δx прагне до нуля, називають щільністю розподілу ймовірності випадкової величини в точці x і позначають як *f(x)*. З огляду на рівність (2.4) щільність розподілу *f(x)* дорівнює похідній від функції розподілу *F(x),* тобто *f(x)=F(x).*

Суть щільності розподілу *f(x)* полягає в тому, що вона вказує на частоту появи випадкової величини *X* в деякому околі точки *x* під час повторення випробувань.

Визначення 2.10. Криву, що відображає щільність розподілу *f(x)* випадкової величини, називають кривою розподілу.

Приблизний вигляд кривої розподілу *f(x)* зображено на рис. 2.4 суцільною кривою.

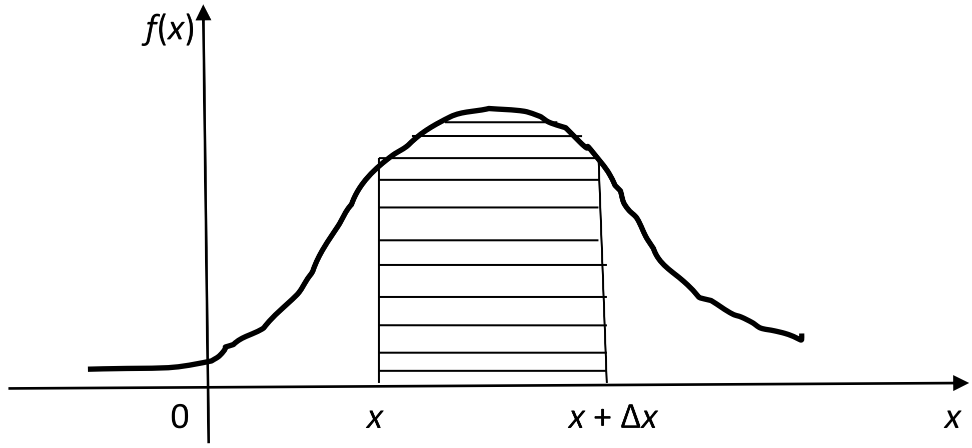

Рис. 2.4

Зауважимо, що якщо можливі значення випадкової величини заповнюють деякий скінченний числовий проміжок, то щільність розподілу *f(x)* = 0 – поза межами цього проміжку.

Ми вже звертали увагу на те, що не для всіх неперервних випадкових величин, можливі значення яких безперервно заповнюють деякий числовий проміжок, функція розподілу буде також неперервною. Трапляються такі випадкові величини, можливі значення яких безперервно заповнюють деякий числовий проміжок, але функція розподілу для яких не є всюди неперервною, а в окремих точках має розриви. Такі випадкові величини називають змішаними. Для змішаних випадкових величин немає границі функції розподілу *F(x)* за умови $\Delta x \to 0$ в точках її розриву, а, отже, немає й в цих точках характеристики щільності розподілу. Зважаючи на це, визначимо точніше неперервну випадкову величину.

Визначення 2.11. Випадкову величину *X* називають неперервною, якщо її функція розподілу *F(x)* є неперервною по всій числовій осі *Ox*, а щільність розподілу $f(x)$ присутня всюди, можливо, за винятком скінченного числа точок.

Розглянемо властивості щільності розподілу.

1. Щільність розподілу є невід'ємною, тобто $f(x) \geq 0$.

2. Функція розподілу випадкової величини $F(x)$ дорівнює інтегралу від щільності $f(x)$ в проміжку від $-\infty$ до x, тобто $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$. Тут взято до уваги, що $F(-\infty) = 0$.

3. Імовірність потрапляння неперервної випадкової величини X в інтервал $(x, x + \Delta x)$ дорівнює інтегралу від щільності розподілу, взятому за цим інтервалом, тобто $P(x < X < x + \Delta x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(z)dz$. Геометрично цю властивість можна інтерпретувати так: ймовірність того, що неперервна випадкова величина набуде значення, що належить до інтервалу $(x, x + \Delta x)$, дорівнює площі криволінійної трапеції, заштрихованої на рис. 2.4.

Зауважимо, що ймовірність $P(x < X < x + \Delta x)$ можна отримати, підсумовуючи елементи ймовірності на ділянках dx для всього інтервалу $(x, x + \Delta x)$.

4. Інтеграл в нескінченних границях від щільності розподілу дорівнює одиниці: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Якщо інтервал можливих значень випадкової величини має скінченні границі a і b, то щільність розподілу $f(x) = 0$ – поза границями інтервалу (a, b), і властивість 4 тоді можна записати так: $\int_{a}^{b} f(x)dx = 1$.

Геометрично ця властивість щільності розподілу випадкової величини означає, що вся площа під кривою розподілу, обмеженою віссю Ox, дорівнює одиниці.

Приклад. 2.3. Випадкова величина X підпорядковується закону розподілу зі щільністю:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot sinx & \text{при } \; 0 \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } x > \pi. \end{cases}$$

Потрібно:

1) Знайти коефіцієнт a.

2) Побудувати графік щільності розподілу.

3)Знайти ймовірність потрапляння випадкової величини у проміжок від 0 до $\pi/4$.

Розв'язання. 1) Для визначення коефіцієнта а, скористаємося властивістю 4 щільності розподілу : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{\pi} a\sin x dx = 2a = 1$. Звідси а = 1/2.

2) Графік щільності розподілу *f(x)* представлено на рис. 2.5.

3) Відповідно до властивості 3 маємо:

$$P(0 < X < \frac{\pi}{4}) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin x dx = -\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0) \approx 0{,}15.$$

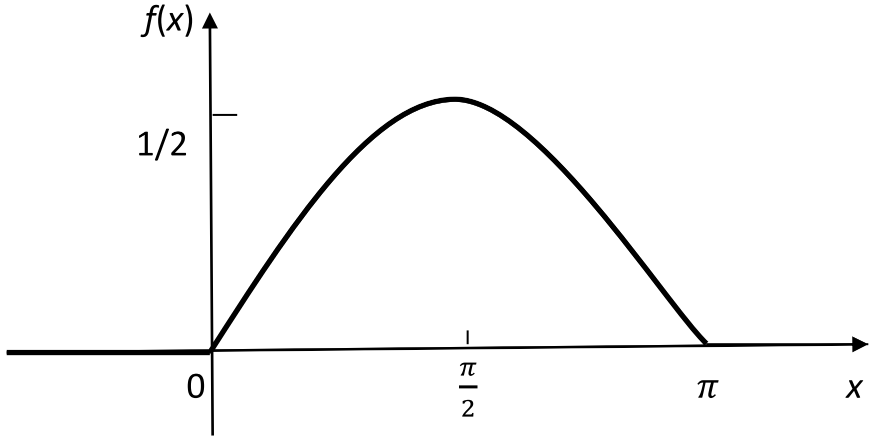

Рис. 2.5

Як ми вже говорили, закон розподілу повністю характеризує випадкову величину з імовірнісної думки. Знаючи закон розподілу випадкової величини, можна вказати, де розташовані можливі значення випадкової величини і яка ймовірність її появи в тому чи тому інтервалі.

Однак під час вирішення багатьох практичних завдань немає потреби характеризувати випадкову величину повністю, а достатньо мати лише деяке загальне уявлення про випадкову величину. Найчастіше достатньо вказати не весь закон розподілу, а лише деякі характерні риси закону розподілу.

У теорії ймовірностей для загальної характеристики випадкової величини використовують деякі величини, які має назву числових характеристик випадкової величини.

Основне їхнє призначення – у стислій формі сформулювати найбільш суттєві особливості того чи того розподілу.

2.3. Числові характеристики випадкової величини

У кожній випадковій величині необхідно, насамперед, знати її середнє значення, біля якого групуються можливі значення випадкової величини, а також будь-яке число, що характеризує ступінь невпорядкованості цих значень відносно середнього числа. Крім зазначених числових характеристик для більш повного опису випадкової величини використовують низку інших числових характеристик. Усі вони допомагають тією чи тією мірою усвідомити характерні риси розподілу випадкової величини. Розглянемо найбільш поширені числові характеристики.

2.3.1. Математичне сподівання

Математичне сподівання є найважливішою характеристикою поняття випадкової величини. Математичне сподівання випадкової величини іноді називають просто середнім значенням випадкової величини. Розглянемо спочатку дискретну випадкову величину.

2.3.1.1. Математичне сподівання дискретної випадкової величини

Нехай X є дискретною випадковою величиною, що має можливі значення $x_1, x_2,\ldots, x_n$ з ймовірністю $p_1, p_2,\ldots, p_n$.

Визначення 2.12. Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називають суму добутків усіх можливих значень випадкової величини на ймовірності цих значень.

Якщо позначити математичне сподівання випадкової величини X через $M(X)$, тоді згідно з визначенням математичне сподівання $M(X)$ випадкової величини X визначає рівність:

$$M(X) = x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + \ldots + x_n\, p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (2.5)$$

Якщо дискретна випадкова величина може набувати нескінченну злічену безліч значень $x_1, x_2,\ldots, x_n,\ldots$ з ймовірностями $p_1, p_2,\ldots, p_{\text{n}},\ldots$, то її математичне сподівання визначає рівність:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i. \qquad (2.6)$$

За статистичним підходом визначення математичного сподівання випадкової величини, тобто дослідним шляхом внаслідок проведення випробувань математичне сподівання приблизно дорівнює середньому арифметичному спостережуваних значень випадкової величини, і тим точніше, чим більше число випробувань.

Якщо проведено деяку серію випробувань, то математичне сподівання є таким постійним числом, навколо якого будуть коливатися середні арифметичні значення випадкової величини, обчислені для кожної серії випробувань.

Розглянемо тепер математичне сподівання неперервної випадкової величини.

2.3.1.2. Математичне сподівання неперервної випадкової величини

Нехай задано неперервну випадкову величину *X*, всі можливі значення якої належать до відрізка $[a, b]$, а *f(x)* є щільністю її розподілу.

Визначення 2.13. Математичним сподіванням неперервної випадкової величини *X*, всі можливі значення якої належать до відрізка $[a, b]$ називають визначений інтеграл:

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx. \qquad (2.7)$$

Якщо можливі значення неперервної випадкової величини Х належать до всій осі Ох, то математичне сподівання визначає інтеграл:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. (2.8) \qquad (2.8)$$

Слід зазначити, що трапляються і такі випадкові величини, для яких немає математичного сподівання, оскільки відповідна сума (2.6) або відповідний інтеграл (2.8) різняться. Однак такі випадкові величини трапляються досить рідко, і ми з ними не будемо стикатися.

Відзначимо найпростіші властивості математичного сподівання.

2.3.1.3. Властивості математичного сподівання випадкової величини

Властивість 1. Математичне сподівання постійної величини дорівнює власне сталій, тобто $M(C) = C$.

Справді, постійну величину можна розглядати як окремий випадок достовірної події, тоді з (2.8) випливає, що $M(C) = C \cdot 1 = C$.

Властивість 2. Якщо випадкову величину помножити на деяке число k, тоді і математичне сподівання помножують на те саме число, або постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання, тобто $M(кX) = кM(X)$.

Властивість 3. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їхніх математичних сподівань:

$$M\,(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n).$$

Властивість 4. $M(X_1 - X_2) = M(X_1) - M(X_2)$.

Властивість 5. Для незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots X_n$ математичне сподівання добутку дорівнює добутку їхніх математичних сподівань:

$$M(X_1,\ X_2,\ \ldots X_n) = M(X_1)\,M(X_2)\,\ldots\,M(X_n).$$

Властивість 6. Математичне сподівання відхилень X - $M(X)$ значень випадкової величини X від її середнього значення $M(X)$ дорівнює нулю:

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

Розглянемо приклади.

Приклад 2.4. Фірма проводить розіграш грошових призів для постійних клієнтів. Для цього в урну помістили 20 однакових куль, усередині яких міститься купон із зазначенням грошової суми виграшу, які становлять 1000 грн, 2000 грн, ..., 20000 грн. Потрібно визначити середнє значення суми виграшу.

Розв'язання. Величина виграшу є випадковою величиною X, яка набуває значення x_1 = 1000 грн, x_2 = 2000 грн,…, x_{20} = 20000 грн. Імовірність виграшу будь-якої суми є однаковою і становить р = 1/20. Тоді відповідно до формули (2.5) маємо:

$$M(X) = p(x_1 + x_2 + \ldots + x_{20}) = p\sum_{i=1}^{20} x_i = 10500 \text{ грн.}$$

Приклад 2.5. Нехай випадкові величини X_1, X_2 задано, відповідно, законами розподілу (таблиця 3 і таблиця 4):

X_1 Таблиця 3

x_{1i}	− 0,1	− 0,01	0	0,01	0,1
p_{1i}	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

X_2 Таблиця 4

x_{2i}	−20	− 10	0	10	20
p_{1i}	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

Обчислимо $M(X_1)$ та $M(X_2)$:

$M(X_1)$ = (− 0,1) 0,1 + (− 0,01) 0,2 + 0 · 0,4 + 0,01 · 0,2 + 0,1 · 0,1 = 0.

$M(X_2)$ = (− 20) 0,3 + (− 10) 0,1 + 0 · 0,2 + 10 · 0,1 + 20 · 0,3 = 0.

Математичні сподівання, тобто середні значення обох випадкових величин, дорівнюють нулю. Однак характер їхнього розподілу є різним. Якщо значення X_1 мало відрізняються від свого математичного сподівання, то значення X_2 значною мірою відрізняються від свого математичного сподівання, і ймовірності таких відхилень не є малими. Ці приклади показують, що за середнім значенням випадкової величини можна визначити, які відхилення від нього мають набуті значення випадкової величини як в менший, так і в більший бік під час випробувань. Наприклад, за однаковою середньою величиною річних опадів, що випадають у двох місцинах, не можна сказати, що ці місцини є однаково сприятливими для сільськогосподарських робіт. Аналогічно за показником середньої заробітної плати неможливо розмірковувати про питому вагу високо- і низькооплачуваних працівників. Тому вводять числові характеристики, які характеризують ступінь відхилення випадкової величини від свого середнього значення, і цими величинами є дисперсія і середньоквадратичне відхилення.

2.3.2. Дисперсія і середнє квадратичне відхилення

Значення спостережуваних в практиці випадкових величин завжди більш-менш коливаються біля середнього значення. Це явище називають розсіюванням величини навколо її середнього значення.

Числові характеристики, що показують, наскільки близько згруповано можливі значення випадкової величини навколо центру розсіювання (математичного сподівання), називають характеристиками розсіювання.

Як характеристику розсіювання випадкової величини X від свого середнього значення не можна використовувати відхилення X - $M(X)$ її значень від середнього значення, оскільки відповідно до властивості 6 математичного сподівання математичне сподівання такого відхилення дорівнює нулю: $M(X - M(X)) = 0$. Воно вказує тільки на те, що значення відхилень є числами з різним знаком. Тому за міру розсіювання випадкової величини беруть математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання, яке називають дисперсією випадкової величини X і позначають $D(X)$ або DX.

Визначення 2.14. Дисперсією випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилень значень випадкової величини X від її математичного сподівання, тобто:

$$D(X) = M(\mathrm{X} - M(X))^2. \tag{2.9}$$

Для дискретної випадкової величини X, що набуває значень x_1, $x_2, \ldots, x_n$ з ймовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, дисперсію виражають сумою:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i, \tag{2.10}$$

а для неперервної – інтегралом:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx. \tag{2.11}$$

Якщо інтервал можливих значень випадкової величини має скінченні границі a і b, то x - $M(X)$ = 0 поза границями інтервалу (a, b), і тоді (2.11) можна записати так: : $D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx$.

Формули (2.10) і (2.11) безпосередньо випливають із визначення математичного сподівання (2.5) і (2.8).

Дисперсія випадкової величини є дуже зручною характеристикою розсіювання можливих значень випадкової величини. Однак вона не є наочною, оскільки має розмірність квадрата випадкової величини.

Для більшої зручності бажано мати характеристику, що за своєю розмірністю збігається з розмірністю випадкової величини, так само як і математичне сподівання. Такою характеристикою є середньоквадратичне відхилення випадкової величини, яке являє собою позитивний квадратний корінь із дисперсії.

Визначення 2.15. Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають величину, що дорівнює квадратному кореню з дисперсії випадкової величини.

Позначають середнє квадратичне відхилення випадкової величини X символом σ_x, а, отже:

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)}. \qquad (2.12)$$

Розглянемо найпростіші властивості дисперсії.

Властивість 1. Дисперсія постійної величини дорівнює нулю: $D(C) = 0$.

Властивість 2. Дисперсія добутку постійної величини на випадкову величину дорівнює добутку квадрата постійної величини на дисперсію випадкової величини: $D(CX) = C^2 D(X)$.

Властивість 3. Дисперсія випадкової величини X дорівнює математичному сподіванню квадрата випадкової величини мінус квадрат її математичного сподівання: $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$.

Властивість 4. Дисперсія суми попарно незалежних випадкових величин X_1, X_2, …, X_n дорівнює сумі дисперсій цих величин.

$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$.

Розглянемо приклади.

Приклад 2.6. Потрібно обчислити дисперсії для випадкових величин X_1, X_2 із прикладу 2.5., для яких математичні сподівання дорівнюють нулю: $M(X_1) = M(X_2) = 0$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (2.10) і таблицями 3 і 4.

$D(X_1) = 0{,}01 \cdot 0{,}1 + 0{,}0001 \cdot 0{,}2 + 0{,}0001 \cdot 0{,}2 + 0{,}01 \cdot 0{,}1 = 0{,}001 + 0{,}00002 + 0{,}00002 + 0{,}001 = 0{,}00204$.

$D(X_2) = (-20)^2 \cdot 0{,}3 + (-10)^2 \cdot 0{,}1 + 10^2 \cdot 0{,}1 + 20^2 \cdot 0{,}3 = 240 + 20 = 260$.

Що ближче значення дисперсії до нуля, то менший розкид випадкової величини відносно середнього значення.

Приклад 2.7. Випадкову величину задано щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{cosx}{2} & \text{при } -\dfrac{\pi}{2} \leq x \ll \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } \quad |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Потрібно визначити дисперсію і середньоквадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Розв'язання. Застосовуючи формулу (2.7), знайдемо математичне сподівання:

$$M(X) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xcosxdx = \frac{1}{2} xsinx|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sinxdx = 0\,.$$

Оскільки $M(X) = 0$, то, застосовуючи формулу (2.11), знайдемо:

$$D(X) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 cosxdx = \frac{1}{2}\left(2xcosx|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + (x^2 - 2)sinx|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi^2 - 8}{4},$$

звідси $\qquad \sigma_X = \sqrt{\frac{\pi^2 - 8}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2 - 8}.$

2.3.3. Мода і медіана випадкової величини

Крім математичного сподівання, яке є основною чисельною характеристикою поняття випадкової величини, на практиці використовують й інші характеристики поняття, зокрема мода і медіана випадкової величини.

Визначення 2.16. Модою M_d дискретної випадкової величини X називають таке значення випадкової величини, якому відповідає найбільша ймовірність.

Визначення 2.17. Модою M_d випадкової величини X неперервного типу називають таке значення випадкової величини, якому відповідає точка максимуму щільності розподілу ймовірностей $f(x)$.

Якщо багатокутник розподілу дискретної випадкової величини (або крива розподілу неперервної випадкової величини) має два або кілька максимумів, то розподіл називають двохмодальним або багатомодальним.

Іноді трапляються розподіли, які мають мінімум, але не мають максимуму. Такі розподіли називають антимодальними.

Визначення 2.18. Медіаною M_D випадкової величини X неперервного типу називають таке значення випадкової величини, відносно якого є рівно ймовірним отримання більшого або меншого значення випадкової величини, тобто $P(X < M_D) = P(X > M_D)$.

Геометрично медіана – це абсциса точки, в якій площа, обмежена кривою розподілу, ділиться навпіл. Кожна з цих площ дорівнює 0,5, оскільки вся площа, обмежена кривою розподілу, дорівнює одиниці. Тому функція розподілу в точці M_D:

$$F(M_D) = P(X < M_D) = 0{,}5.$$

Зауважимо, що якщо розподіл є одномодальним і симетричним, то всі три числові характеристики поняття випадкової величини – математичне сподівання, а мода і медіана збігаються.

Перейдемо тепер до розгляду конкретних законів розподілу випадкової величини, що найчастіше трапляються на практиці.

2.4. Приклади законів розподілу випадкової величини

Вивчення почнемо з дискретних випадкових величин.

2.4.1. Приклади законів розподілу дискретної випадкової величини

Серед законів розподілу для дискретних випадкових величин найбільш поширеними є біноміальний розподіл і розподіл Пуассона.

2.4.1.1. Біноміальний розподіл

Біноміальний розподіл відбувається в наступних умовах.

Нехай випадкова величина X виражає число виникнення події A під час n незалежних випробувань, проведених в однакових умовах. Імовірність виникнення події A є постійною і дорівнює p. Як наслідок, ймовірність не виникнення події A дорівнює $q = 1 - p$.

Можливими значеннями випадкової величини X є $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2,\ldots, x_n = n$. Імовірності $P(X = x_i)$, і = 0, 1, 2, ..., n цих можливих значень визначають за формулою Бернуллі (2.1) за умови, що $m = x_i$:

$$P(X = x_i) = C_n^{x_i}\, p^{x_i}(1-p)^{n-x_i} = \frac{n!}{x_i!(n-x_i)!}\, p^{x_i}(1-p)^{n-x_i} \qquad (2.13)$$

Оскільки числові значення $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2,\ldots, x_n = n$, яких набуває випадкова величина X та які передбачають різну кількість виникнення події A в серії з n випробувань, є несумісними і утворюють простір елементарних результатів для випадкової величини X, тоді для того, щоб формула (2.13) була рядом розподілу для випадкової величини X, необхідно, щоб сума ймовірностей, які визначають за формулою (2.13), для всіх елементарних результатів випадкової величини X дорівнювала одиниці, тобто:

$\sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \cdots + C_n^n p^n q^0 = 1.$

Тут $q = 1 - p$.

Розглянемо вираз $(p + q)^n = 1$, розкладемо двочлен $(p + q)^n$ за формулою бінома Ньютона. Отримаємо:

$$C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^n p^n q^0 = 1,$$

тобто сума $\sum_{i=0}^{n} P(X = x_i)$ ймовірностей усіх значень випадкової величини дорівнює одиниці, отже (2.13) є законом розподілу.

Визначення 2.19. Розподіл дискретної випадкової величини *X*, ряд розподілу якої задає формула (2.13), називають біноміальним розподілом.

Знайдемо математичне сподівання і дисперсію випадкової величини *X*, що має біноміальний розподіл. Згідно з визначенням математичного сподівання дискретної випадкової величини, маємо:

$$M(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i p_i = \sum_{i=0}^{n} x_i C_n^{x_i}\, p^{x_i} (1-p)^{n-x_i}. \qquad (2.14)$$

Розглянемо випадкові величини X_1, X_2, …, X_n з однаковим законом розподілу:

$$X_k = \begin{cases} 1, \text{якщо в } k - \text{ому випробуванні настала подія } A, \\ 0, \text{якщо в } k - \text{ому випробуванні настала подія } \overline{A}, \end{cases}$$

де $k = 1, 2, \ldots, n$. Тоді $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Використовуючи властивості математичного сподівання, отримаємо:

$$M(X) = M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n).$$

Знайдемо математичне сподівання X_k, $M(X_k) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$, як наслідок, $M(X) = n \cdot p$.

Отже, математичне сподівання числа настання подій в серії незалежних і однакових випробувань дорівнює добутку числа випробувань на ймовірності виникнення події під час одного випробування.

Аналогічно, знайдемо дисперсію для біноміального розподілу:

$D(X) = D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$.

$D(X) = D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$.

$D(X_k) = (0 - p)^2 (1 - p) + (1 - p)^2\, p = p^2 (1 - p) + (1 - p)^2 p =$

$= p\,(1 - p)\,(p + 1 - p) = p\,(1 - p) = p\,q$. Тому $D(X) = n{\cdot}p{\cdot}q$,

отже, $\sigma_X = \sqrt{npq}$.

Приклад 2.8. До складу поставляють партії виробів. Для затвердження партії необхідно, щоб ймовірність наявності в партії дефектного виробу становила не більше 0,6. Для цього з кожної партії вибирають 50 виробів. Потрібно знайти, чому повинні дорівнювати математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення числа дефектних деталей у вибірці для того, щоб партія була затверджена.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X представляє число x_i, і = 0,1,2, ..., 50 дефектних виробів у вибірці з n = 50 виробів. Імовірність браку однієї деталі р = 0,06. Випадкова величина X має біноміальний розподіл, який визначають за формулою (2.13). Тому математичне сподівання, тобто середнє значення числа дефектних деталей у вибірці, обчислюють за формулою: $M(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}6 = 3$ (вироби). Відповідно, дисперсія $D\,(X) = n{\cdot}p{\cdot}q = 50 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}94 = 2{,}82$, а середньоквадратичне відхилення $\sigma_X = \sqrt{npq} = \sqrt{2{,}82} \approx 1{,}68$.

Отже, для того, щоб партія виробів була затверджена, вибірка з 50 виробів не повинна містити більше п'яти дефектних виробів: $M(X) + \sigma_X \approx 5$.

2.4.1.2. Розподіл Пуассона

Типовими прикладами випадкової величини, що має розподіл Пуассона, є число викликів на телефонній станції за деякий час, число відмов складної апаратури за певний проміжок часу роботи, якщо відомо, що відмови є незалежними один від одного, і в середньому на одиницю часу припадає λ відмов, і т. д.

Розглянемо загальну задачу теорії ймовірностей, яка призводить до розподілу Пуассона.

Нехай на числової осі Ox розподілено точки деякої випадкової величини X, яка набуває безліч числових значень у таким спосіб, що ймовірність потрапляння будь-якого числа точок на будь-який відрізок λ осі Ox не залежить від числа точок, які потрапляють на інші відрізки осі Ох, що не перекривають один одного, і від їхнього розподілу на цих відрізках, а залежить тільки від розміру відрізка λ.

Потрібно знайти ймовірність *P(X = m)* того, що на відрізок числової осі *Ox* довжини λ потрапить рівно m точок, припускаючи, що точки розподілено по всій осі з однаковою середньою щільністю. Позначимо цю щільність, тобто середнє число точок (математичне сподівання), що припадають на одиницю довжини, через ρ. Тоді шукану ймовірність задає формула:

$$P(X = m) = \frac{(\rho\,\ell\,)^m}{m!}e^{-\rho\,\ell}$$

В отриманому виразі величина є не чим іншим, як математичним сподіванням числа точок, що потрапляють на відрізок довжиною λ. Позначаючи $\rho\,\ell\, = \lambda$, отримуємо:

$$P(X = m) = \frac{(\lambda)^m}{m!}e^{-\lambda}\,. \qquad (2.15)$$

Визначення 2.20. Розподіл дискретної випадкової величини X, яку описує формула (2.15), називають розподілом Пуассона.

Розподіл Пуассона залежить від одного параметра λ, що є математичним сподіванням випадкової величини X ($M(X) = \lambda$).

Сума ймовірностей для всіх числових значень випадкової величини X, незважаючи на їхню нескінченну кількість ($m \to \infty$), дорівнює одиниці як і для будь-якого закону розподілу:

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(X = m) = \sum_{\mathrm{m}=0}^{\infty} \frac{(\lambda)^m}{m!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda)^m}{m!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

Визначимо дисперсію випадкової величини X, що має розподіл Пуассона (2.15). Згідно з третьою властивістю дисперсії маємо:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Знайдемо $M(X^2)$:

$M(X^2) = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \frac{(\lambda)^m}{m!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{(\lambda)^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} [(m-1) + 1] \frac{(\lambda)^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} (m-1) \frac{(\lambda)^{m-1}}{(m-1)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\lambda)^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(\lambda)^{m-2}}{(m-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\lambda)^{m-1}}{(m-1)!}$.

Оскільки кожна з цих сум дорівнює e^{λ}, то:

$$M(X^2) = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda$$

Отже, дисперсія величини X дорівнює:

$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$

Отже, дисперсія випадкової величини, що має розподіл Пуассона, дорівнює її математичному сподіванню.

Розглянемо приклади.

Приклад 2.9. До швидкої допомоги протягом певної години дня надходить в середньому 90 викликів. Потрібно знайти ймовірність того, що протягом хвилини надходить не більше трьох викликів.

Розв'язання. Математичне сподівання числа викликів за хвилину дорівнює 90/60 = 3/2. Імовірність того, що протягом цієї хвилини не буде здійснено більше трьох викликів, дорівнює сумі ймовірностей того, що протягом цієї хвилини буде або 0, або 1, або 2, або 3 виклики. Тому шукана ймовірність

$$\sum_{m=0}^{3} P(X=m) = \sum_{m=0}^{3} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^m}{m!} e^{-\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{48}\right) \approx 0{,}81.$$

Розподіл Пуассона може використати як наближене в тих випадках, коли точним розподілом випадкової величини є біноміальний розподіл і коли математичне сподівання мало відрізняють від дисперсії, тобто коли $n \cdot p \approx n \cdot p \cdot q$.

Приклад 2.10. Завод відправив до бази 500 доброякісних виробів. Імовірність того, що в дорозі виріб буде пошкодженим, дорівнює 0,002. Потрібно знайти ймовірність того, що до бази надійде три непридатні вироби.

Розв'язання. Задачу вирішують наближено за допомогою формули Пуассона. Маємо: $p = 0{,}002$, $q = 1 - p = 0{,}998$ і $n = 500$.

За формулами $M(X) = n \cdot p$ і $D(X) = n \cdot p \cdot q$ визначаємо, відповідно, математичне сподівання і дисперсію числа непридатних виробів: $M(X) = 500 \cdot 0{,}002 = 1$, $D(X) = 500 \cdot 0{,}002 \cdot 0{,}998 = 0{,}998$.

Оскільки $M(X) \approx D(X)$, то, припускаючи, що $\lambda = M(X) = 1$, знайдемо наближено шукану ймовірність за формулою Пуассона:

$$P(X = 3) = \frac{(\lambda)^m}{m!} e^{-\lambda} = \frac{1}{3!} e^{-1} \approx 0{,}06.$$

2.4.2.Приклади законів розподілу неперервної випадкової величини

2.4.2.1. Рівномірний розподіл

Визначення. 2.21. Випадкову величину X неперервного типу називають розподіленою рівномірно на відрізку $[a, b]$, якщо її щільність розподілу є постійною на цьому відрізку, а поза відрізком дорівнює нулю, тобто:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \notin [a, b] \\ C, \text{ якщо } x \in [a, b] \end{cases}$$

Графік функції $f(x)$ щільності ймовірності для рівномірного розподілу зображено на рис. 2.6.

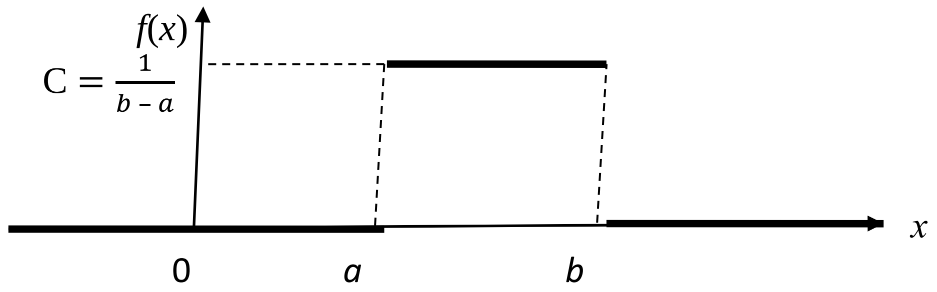

Рис. 2.6

Оскільки площа, обмежена кривою розподілу дорівнює одиниці, а ця площа (рис. 2. 6) є площею прямокутника з висотою C і основою $b - a$, отже, $C = \frac{1}{b-a}$, і рівномірний розподіл набуває вигляду:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a}, \text{ якщо } x \in [a, b] \end{cases} \qquad (2.16)$$

Знайдемо функцію розподілу *F(x)* для рівномірного розподілу. Відповідно до властивості щільності розподілу, який визначають за формулою $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz,$ маємо:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dx = \frac{x-a}{b-a} \text{ если } x \in [a, b].$$

За умови $x < a$ дорівнює *F(x)* = 0, а за умови $x > b$ дорівнює *F(x)* = 1.

Отже:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a \le x \le b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Графік функції *F(x)* зображено на рис. 2.7.

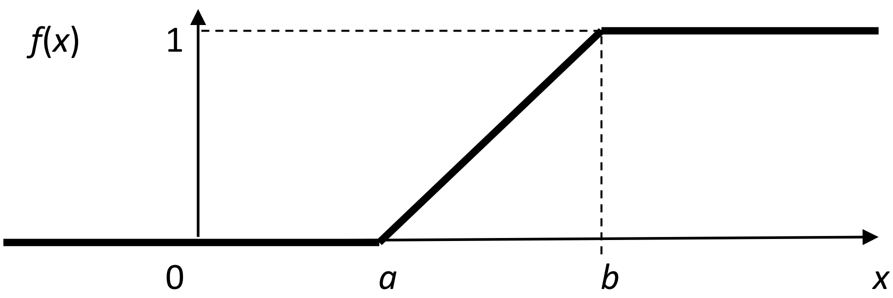

Рис. 2.7

З випадковою величиною, що має рівномірний розподіл, часто доводиться стикатися у вимірювальній практиці під час округлення відліку вимірювальних приладів до цілого ділення шкал. Помилка під час округлення відліку до найближчого цілого ділення є випадковою величиною *X*, яка може набувати будь-яке значення між двома сусідніми цілими діленнями з постійною щільністю ймовірності.

Обчислимо математичне сподівання і дисперсію випадкової величини *X*, що має рівномірний розподіл на ділянці від *a* до *b*:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{xdx}{b-a} = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_{a}^{b} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} = \frac{a+b}{2},$$

тобто математичне сподівання рівномірного розподілу розташовують посередині інтервалу його розподілу.

Дисперсію випадкової величини X знаходимо за формулою (2.11):

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - M(X)\right)^2 \cdot f(x)dx = \int_{a}^{b} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{b-a}dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Звідси середньоквадратичне відхилення $\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \frac{|b-a|}{2\sqrt{3}}$.

2.4.2.2. Показниковий (експоненційний) розподіл

У практичних додатках теорії ймовірностей, особливо в теорії масового обслуговування, дослідження операцій, питаннях надійності та інших додатках, часто мають справу з випадковими величинами, що мають так званий експоненційний або показниковий розподіл.

Визначення. 2.22. Неперервну випадкову величину X називають розподіленою за показниковим (експоненційним) законом з параметром > 0, якщо її щільність розподілу задає формула:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ якщо } x\geq 0 \end{cases} \qquad (2.17)$$

Графік функції $f(x)$ зображено на рис.2.8.

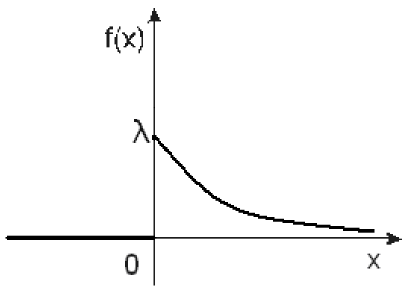

Рис. 2.8

У показниковому розподілу математичне сподівання $M(X)$ і середньоквадратичне відхилення σ_X є однаковими (доведення залишаємо виконати самостійно) і становлять зворотну величину до параметру: $\lambda : M(X) = \sigma_X = \frac{1}{\lambda}$.

.

2.4.2.3. Нормальний розподіл

Серед розподілів неперервних випадкових величин центральне місце посідає нормальний закон, який ще називають розподілом Гаусса. Його спостерігають у всіх тих випадках, коли випадкова величина *X* є результатом дії великої кількості різних факторів. Кожен фактор окремо впливає незначно на величину *X*, і не можна вказати, якою саме мірою порівняно з іншими. Прикладами випадкових величин, що мають нормальний розподіл, можуть слугувати: відхилення часу прибуття транспортного засобу від часу прибуття, вказаного в розкладі; відхилення дійсних розмірів виробів від номінального розміру, вказаного в паспорті виробу і ін.

Визначення 2.23. Випадкову величину *X* називають розподіленою за нормальним законом (законом Гаусса) з *параметрами a і □ > 0, якщо щ*ільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (2.18)$$

Щоб побудувати графік цієї функції, дослідимо її. Для цього обчислимо похідну:

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{-2(x-a)}{2\sigma^2}$$

За умови $x < a$ маємо $f(x) > 0$, отже, на інтервалі $(-\infty, a)$ функція зростає, а за умови $x > a$ маємо $f(x) < 0$ – функція спадає. У точці $x = a$ – функція має максимум, що дорівнює $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Графік функції наведено на рис. 2.9, її називають кривою Гаусса. Відзначимо деякі властивості кривої Гаусса:

1) Крива розподілу є симетричною відносно ординати, що проходить через точку *a*;

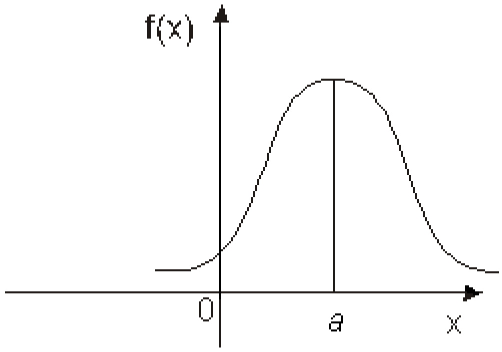

Рис. 2.9

2) За умови |x|→∞ гілки кривої асимптотично наближаються до осі *Ox*;

3) Зміна параметра σ при a = const призводить до звуження кривої розподілу, якщо 0 < σ <1, і розширенню, якщо σ > 1.

Обчислимо математичне сподівання і дисперсію нормального розподілу:

$$M(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Здійснивши заміну змінної $\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} = t$, маємо:

$$M(X) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a + \sigma\sqrt{2}\, t) \cdot e^{-t^2} dt = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt + \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt.$$

Другий інтеграл дорівнює нулю; як інтеграл від непарної функції в симетричних границях, перший інтеграл являє собою відомий інтеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Тому:

$$M(X) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = a.$$

Отже, параметр a є математичним сподіванням випадкової величини *X*, що має нормальний розподіл.

Аналогічно можна показати, що $D(X) = \sigma^2$. Як наслідок, параметр σ для нормального розподілу випадкової величини X є середньоквадратичним відхиленням: $\sigma = \sigma_X = \sqrt{D(X)}$.

Важливе значення в прикладних задачах має окремий випадок щільності нормального розподілу з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 1$, що називають стандартним (нормованим) нормальним розподілом:

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (2.19)$$

Функція (2.19) – парна, тобто $f_0(-x) = f_0(x)$. Крива стандартного нормального розподілу є симетричною відносно координатної осі Oy і має максимум, що дорівнює $1/\sqrt{2\pi}$.

2.4.3. Імовірність потрапляння випадкової величини, що має нормальний розподіл, у задану ділянку

Ми вже встановили, що якщо випадкову величину X задає щільність ймовірності $f(x)$, то ймовірність $P(x_1 < X < x_2)$ потрапляння значень випадкової величини X в інтервал (x_1, x_2) обчислюють за формулою:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Нехай випадкову величину X розподілено за нормальним законом (2.18). Тоді ймовірність того, що X набуде значення, що належить до інтервалу (x_1, x_2), дорівнює:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Здійснивши заміну змінної $\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} = t$, , отримаємо:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1-a}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{x_2-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt. \qquad (2.20)$$

Оскільки інтеграл $\int e^{-t^2}dt$ не виражають через елементарні функції, то для обчислення інтеграла (2.20) використовують таблиці значень спеціальної функції, яку називають функцією Лапласа або інтегралом ймовірності, до вивчення якої ми і перейдемо.

2.4.3.1. Функція Лапласа

Функція Лапласа або інтеграл ймовірності має вигляд:

$$\bar{\Phi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

Функція Лапласа має такі властивості:

1) функцію Лапласа визначено на всій множині дійсних чисел $-\infty < x < +\infty$ и $\bar{\Phi}$ *(0)* = 0;

2) функція Лапласа *Ф(x)* є непарною функцією, тобто $\bar{\Phi}$ $(-x) = -\bar{\Phi}$ (x);

3) $\bar{\Phi}$ (+ ∞) = 1.. Справді, $\bar{\Phi}$ (+ ∞) = $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$, відповідно, $\bar{\Phi}$ (− ∞) = − 1.

Графік функції Лапласа зображено на рис. 2.10.

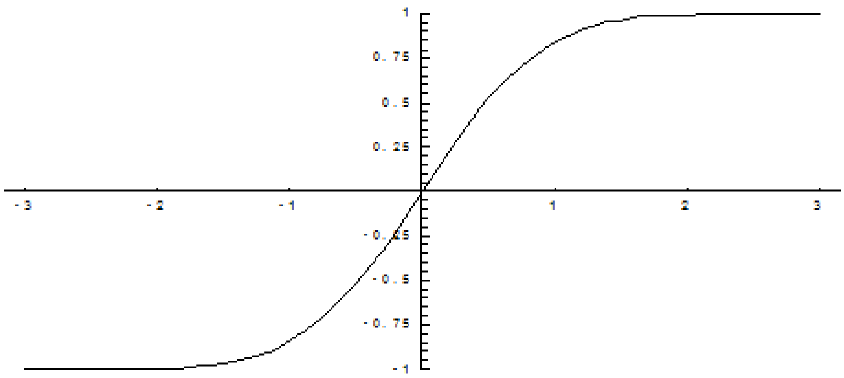

Рис. 2.10

Тепер за допомогою функції Лапласа для ймовірності (2.20) потрапляння випадкової величини X у заданий інтервал (x_1, x_2), отримуємо:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1-a}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{x_2-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x_2-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x_1-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\overline{\Phi}\left(\frac{x_2 - a}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \overline{\Phi}\left(\frac{x_1 - a}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]. \qquad (2.21)$$

Крім функції Лапласа використовують ще нормовану функцію Лапласа (часто саме цю функцію називають функцією Лапласа), яка пов'язана з функцією Лапласа співвідношенням:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\overline{\Phi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

На рис. 2.11 показано графік нормованої функції Лапласа.

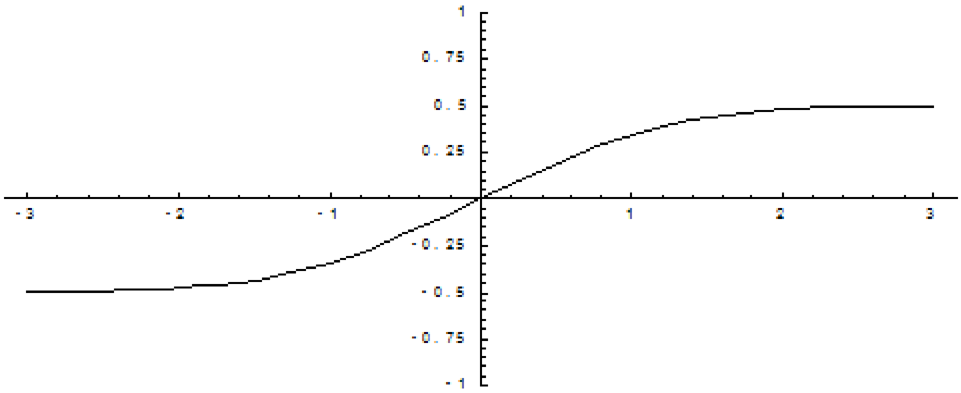

Рис. 2.11

Відмінною особливістю нормованої функції Лапласа є така: якщо $\overline{\Phi}(+\infty) = 1$, то $\Phi(+\infty) = 0{,}5$, відповідно, $\overline{\Phi}(-\infty) = -1$, а $\Phi(-\infty) = -0{,}5$.

Таблицю значень нормованої функції Лапласа наведено в додатку 2.

У разі використання нормованої функції Лапласа вираз (2.21) для ймовірності потрапляння випадкової величини X у заданий інтервал (x_1, x_2) набуває вигляду:

$$(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x_1-a}{\sigma}}^{\frac{x_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x_1-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right] =$$

$$= \left[\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right)\right]. \qquad (2.22)$$

Тут використано заміну змінної $\frac{x-a}{\sigma} = t$.

Відзначимо, що для необмеженого (нескінченного) інтервалу $(-\infty, +\infty)$ вирази (2.21) і (2.22) дають ймовірність, що дорівнює одиниці:

$$P(-\infty < X < +\infty) = \frac{1}{2}[\overline{\Phi}(+\infty) - \overline{\Phi}(-\infty)] = [\Phi(+\infty) - \Phi(-\infty)] = 1.$$

Для стандартного нормального розподілу $f_0(x)$ (2.19) формули (2.21) і (2.22) мають, відповідно, вид:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2}\left[\overline{\Phi}(\frac{x_2}{\sqrt{2}}) - \overline{\Phi}\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)\right];$$

$$P(x_1 < X < x_2) = [\Phi(x_2) - \Phi(x_1)].$$

2.4.3.2. Правило трьох сигм

Під час розгляду нормального закону розподілу виділяють важливий окремий випадок, коли необхідно визначити ймовірність $P(M(X) - \boldsymbol{\varepsilon} < X < M(X) + \boldsymbol{\varepsilon})$ потрапляння випадкової величини X, що має нормальний розподіл, в окіл свого середнього значення (математичного сподівання) $M(X)$ із середнім квадратичним відхиленням σ_X. Застосовуючи для цього випадку формулу (2.21), за умови, що $M(X) = a$, а $\sigma_x = \sigma$, отримуємо:

$$P(M(X) - \boldsymbol{\varepsilon} < X < M(X) + \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{a+\varepsilon-a}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\varepsilon-a}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \right.$$

$$\left. -\Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2}}\right). \qquad (2.23)$$

Визначимо тепер ймовірність $P(|X - M(X)| < 3\sigma_X)$ відхилення значень випадкової величини X з нормальним розподілом від свого математичного сподівання $M(X) = a$ на величину $\boldsymbol{\varepsilon}$, меншу ніж потроєне середнє квадратичне відхилення: $\boldsymbol{\varepsilon} < 3\sigma = 3\sigma_X$. Для розрахунку використовуємо таблицю значень функції Лапласа і отримаємо: $P(|X - M(X)| < 3\sigma_X) = \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}9973$.

Отже, ймовірність того, що випадкова величина відхилиться від свого математичного сподівання на величину, більшу, ніж потроєне середнє квадратичне відхилення, практично дорівнює нулю. В цьому і полягає так зване правило трьох сигм.

У практиці вважають, що якщо для будь-якої випадкової величини діє правило трьох сигм, то ця випадкова величина має нормальний розподіл.

Розглянемо приклади.

Приклад 2.11. Помилка локатора під час вимірювання відстані до мети підпорядковується нормальному закону. Математичне сподівання цієї помилки дорівнює 5 м, а середньоквадратичне відхилення дорівнює 10 м. Потрібно знайти ймовірність того, що виміряне значення відстані відхилятиметься від істинного не більше ніж на 20 м.

Розв'язання. Розв'язання задачі зведено до визначення ймовірності потрапляння випадкової величини X (помилка локатора) в інтервал (- 20,20) за умови, що $a = 5$, $\sigma = 10$. За формулою (2.21) маємо:

$$P(-20 < X < 20) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{20-5}{10\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{-20-5}{10\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{1}{2}[\Phi(1{,}06)\ + \Phi(1{,}77)] \approx 0{,}875.$$

Приклад 2.12. Розмір діаметра втулок, виготовлених фірмою, можна вважати нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням a = 2,5 см і дисперсією $D[X] = 10^{-4}$ $см^2$. В яких межах можна гарантувати розмір діаметра втулки, якщо як ймовірність практичної достовірності беруть правило трьох сигм?

Розв'язання. Позначимо через ε величину, на яку може відхилитися розмір діаметра втулки від математичного сподівання з ймовірністю трьох сигм 0,997. Тоді відповідно до формули (2.23) маємо:

$$P(|X - M(X)| < \boldsymbol{\varepsilon}) = \Phi\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}997.$$

Тепер, використавши таблицю значень функції Лапласа, отримаємо $\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma\sqrt{2}} = 2{,}1$, звідки (оскільки $\sigma = 0{,}01$) $\boldsymbol{\varepsilon} = 0{,}01 \cdot 2{,}1 \cdot \sqrt{2} \approx 0{,}03$.

Отже, розмір діаметра втулки з ймовірністю 0,997 належить до інтервалу (2.47; 2,53).

2.5. Моменти випадкової величини

Узагальненням основних числових характеристик випадкової величини є поняття моментів випадкової величини. У теорії ймовірностей розрізняють моменти двох видів: початкові і центральні.

2.5.1. Початкові моменти випадкової величини

Визначення 2.24. Початковим моментом m_k степеня k (k-го порядку) випадкової величини X називають математичне сподівання k-го степеня випадкової величини X, тобто:

$$m_k = M(X^k),\ k = 1,2,\ldots,n.$$

Отже, для дискретної випадкової величини початковий момент виражають сумою:

$$m_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i,$$

а для неперервної – інтегралом:

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx.$$

Серед початкових моментів випадкової величини особливе значення має момент першого порядку, який являє собою не що інше, як математичне сподівання випадкової величини.

Початкові моменти вищих порядків використовують здебільшого для обчислення центральних моментів.

2.5.2. Центральні моменти випадкової величини

Визначення 2.25. Центральним моментом μ_k степеня k (k-го порядку) називають математичне сподівання k-го степеня відхилення випадкової величини X від середнього значення: (X - $M(X)$), тобто:

$$\mu_k = M((X - M(X))^k), k = 1,2,\ldots,n.$$

Для дискретної випадкової величини центральний момент виражають сумою:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^k p_i,$$

а для неперервної – інтегралом:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - M(X))^k f(x)dx.$$

Центральні моменти завжди можна виразити через початкові моменти. Наприклад:

$\mu_1 = M(X - M(X)) = M(X - m_1) = 0$. Центральний момент першого порядку завжди дорівнює нулю.

$\mu_2 = M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2XM(X) + M^2(X) = M(X^2) - M(2XM(X)) + M(M^2(X)) = M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = \text{M}(X^2) - M^2(X) = m_2 - (m_1)^2 = D(X)$.

Центральний момент другого порядку являє собою не що інше, як дисперсію випадкової величини.

Центральний момент степеня k можна перетворити у вираження через початкові моменти, використовуючи формулу бінома Ньютона.

Запишемо формули для 3-го і 4-го центральних моментів, які широко застосовують для опису випадкової величини:

$\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2(m_1)^2$;

$\mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1(m_2)^2 - 3(m_1)^4$.

Третій центральний момент μ_3 слугує характеристикою асиметрії розподілу. Якщо випадкову величину X розподілено симетрично відносно її математичного сподівання, то третій центральний момент $\mu_3 = 0$.

Оскільки третій центральний момент має розмірність куба випадкової величини, то зазвичай розглядають безрозмірну величину a_x – відношення μ_3 до середнього квадратичного відхилення σ_x в третій степені, яку називають коефіцієнтом асиметрії.

Визначення 2.26. Коефіцієнтом асиметрії кривої розподілу випадкової величини X відносно свого математичного сподівання називають величину, яку визначають за формулою:

$$a_X = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3}.$$

Якщо $a_x < 0$, то крива розподілу відносно свого математичного сподівання має лівосторонню асиметрію, якщо $a_x > 0$ – правосторонню асиметрію.

Четвертий центральний момент μ_4 слугує для характеристики гострої або плоскої вершини розподілу випадкової величини. Ці властивості розподілу описують за допомогою так званого ексцесу.

Визначення 2.27. Ексцесом випадкової величини X називають величину:

$$E_X = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3.$$

Число 3 віднімають від відношення $\frac{\mu_4}{\sigma_X^4}$ тому, що для найбільш поширеного нормального закону розподілу $\frac{\mu_4}{\sigma_X^4} = 3$, а, отже, для нормального закону розподілу $E_X = 0$.

Як наслідок, криву нормального розподілу, для якого ексцес дорівнює нулю, сприймають як еталон, з яким порівнюють інші розподіли. Криві з гострішими вершинами, порівняно з нормальними, мають позитивний ексцес; криві з більш плоскими вершинами – негативний ексцес (рис. 2.12).

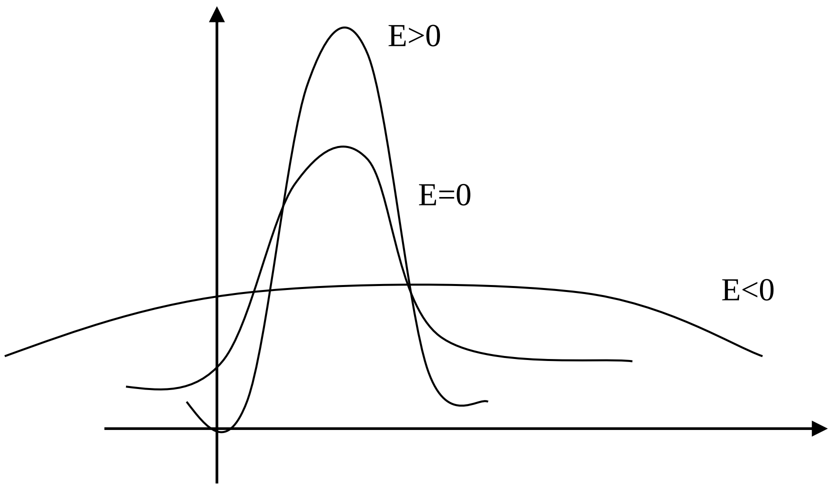

Рис. 2.12

Питання для самоконтролю до розділу 2

1. Дайте визначення випадкової величини. Які випадкові величини називаються дискретними і безперервними? Наведіть приклади.

2. Що називається законом розподілу випадкової величини? Ряд розподілу і багатокутник розподілу дискретної випадкової величини, і їх властивості.

3. Дайте визначення функції розподілу ймовірності. Перерахуйте і доведіть властивості функції розподілу.

4. Як, знаючи функцію розподілу, знайти ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал?

5. У чому полягає відмінність графіків функцій розподілу дискретної і безперервної випадкових величин?

6. Дайте визначення щільності розподілу ймовірностей. Перерахуйте і доведіть властивості щільності розподілу. Придатне поняття щільності розподілу ймовірностей для дискретної випадкової величини?

7. Як, знаючи щільність розподілу, знайти ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал?

8. Дайте визначення математичного очікування дискретної випадкової величини. Як її можна розтлумачити статистично?

9. Дайте визначення математичного очікування випадкової величини. Як її можна витлумачити статистично?

10. Перерахуйте властивості математичного сподівання випадкової величини.

11. Що називається модою і медіаною випадкової величини?

12. Дайте визначення дисперсії випадкової величини і перерахуйте її властивості.

13. Дайте визначення середньоквадратичного відхилення випадкової величини і роз'ясніть її сенс як числової характеристики випадкової величини.

14. Що називається початковим моментом k-го порядку випадкової величини?

15. Що називається центральним моментом k-го порядку випадкової величини?

16. Який розподіл ймовірностей називається біномінальним? Чому дорівнює математичне сподівання і дисперсія випадкової величини, що має біномінальний розподіл?

17. Який розподіл ймовірностей називається розподілом Пуассона? Чому дорівнює математичне сподівання і дисперсія випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона?

18. Який розподіл випадкової величини називається рівномірним розподілом? Чому дорівнює математичне сподівання і дисперсія випадкової величини, що має рівномірний розподіл?

19. Який розподіл випадкової величини називається показовим розподілом? Чому дорівнює математичне сподівання і дисперсія випадкової величини, що має показовий розподіл?

20. Який розподіл випадкової величини називається нормальним розподілом? Чому дорівнює математичне сподівання і дисперсія випадкової величини, розподіленої за нормальним законом?

21. Як називається графік щільності ймовірності нормального розподілу і які його властивості?

22. Чому дорівнює ймовірність потрапляння випадкової величини, що має нормальний розподіл на задану ділянку. Правило трьох сигм.

23. Що називається функцією Лапласа і які її властивості?

24. Які властивості розподілу випадкової величини описуються за допомогою третього і четвертого центральних моментів?

25. Які властивості розподілу випадкової величини описуються за допомогою коефіцієнта асиметрії та ексцесу?

Розділ 3
СИСТЕМА ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

У попередньому розділі ми розглядали випадкові величини і познайомилися з різними характеристиками випадкової величини.

Під час вивчення випадкових явищ залежно від їхньої складності доводиться використовувати дві, три і більше число випадкових величин. Наприклад, точку попадання снаряда визначають не однією, а двома випадковими величинами: абсцисою і ординатою. Випадкове відхилення супутника під час виведення його на орбіту визначають комплексом трьох випадкових величин – трьома координатами супутника.

У разі різноманітних вимірів ми дуже часто маємо справу з двома і більше випадковими величинами.

Спільне вивчення двох або кількох випадкових величин веде до системи випадкових величин.

3.1. Поняття про систему випадкових величин

Домовимося позначати систему кількох випадкових величин X_1, $X_2,\ldots,X_n$ як $(X_1, X_2,\ldots,X_n)$. Під час вивчення системи випадкових величин недостатньо вивчити окремо випадкові величини, що складають систему, необхідно враховувати ще й зв'язки або залежності між цими величинами. Тут виникають нові, відмінні від розглянутих раніше, задачі.

Під час розгляду системи випадкових величин зручно користуватися геометричною інтерпретацією системи. Наприклад, систему двох випадкових величин (X, Y) можна розглядати як випадкову точку на площині xOy з координатами X і Y або як випадковий вектор на площині з випадковими складовими X і Y. Систему трьох випадкових величин (X, Y, Z) можна розглядати як випадкову точку в тривимірному просторі або як випадковий вектор у просторі. За аналогією, систему n випадкових величин $(X_1, X_2,\ldots,X_n)$ можна розглядати як випадкову точку в n-вимірному просторі або як випадковий вектор в n-вимірному лінійному просторі R^n.

Оскільки систему n випадкових величин можна трактувати як систему n випадкових векторів у лінійному просторі R^n, то теорію систем випадкових величин можна розглядати як теорію випадкових векторів у лінійному просторі.

Залежно від типу випадкових величин, що утворюють систему, можуть бути системи дискретних і неперервних випадкових величин, а також змішані системи, до яких входять випадкові величини різних типів.

Під час вивчення систем випадкових величин обмежимося детальним вивченням системи двох випадкових величин, оскільки всі поняття, що стосуються системи двох випадкових величин, можна легко перенести на систему трьох, чотирьох і більше випадкових величин.

3.2. Закон розподілу системи двох випадкових величин

Під час вивчення однієї випадкової величини ми познайомилися з законом її розподілу і розглянули різні його форми. Аналогічну роль відіграє закон розподілу системи випадкових величин.

Визначення 3.1. Законом розподілу системи випадкових величин називають співвідношення, яке встановлює зв'язок між областями можливих значень системи випадкових величин та ймовірностями виникнення системи в цих областях.

Так само як і для однієї випадкової величини, закон розподілу системи випадкових величин можна задати в різноманітних формах. Розглянемо основні з них для системи двох випадкових величин.

3.2.1. Функція розподілу системи двох випадкових величин

Визначення 3.2. Функцією розподілу системи двох випадкових величин називають функцію двох аргументів $F(x,y)$, що дорівнює ймовірності сумісного виконання двох нерівностей $X < x$ і $Y < y$:

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y) \qquad (3.1)$$

Геометрична функція розподілу системи двох випадкових величин є ймовірністю потрапляння випадкової точки (X, Y) в лівий (заштрихований) нижній нескінченний квадрант площини (рис. 3.1) з вершиною в точці (x, y).

Зазначена геометрична інтерпретація функції розподілу системи двох випадкових величин дозволяє наочно проілюструвати такі властивості.

Властивість 1. Якщо один з аргументів прагне до плюс нескінченності, то функція розподілу системи прагне до функції розподілу однієї випадкової величини, що відповідає іншому аргументу, тобто:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x,y) = F_1(y); \lim_{y\to+\infty} F(x,y) = F_2(x).$$

Символічно це записують так:

$$F(+\infty,y) = F_1(y); F(x,+\infty) = F_2(x).$$

У цій властивості функції розподілу легко переконатися наочно, відсуваючи одну з границь квадранта до $+\infty$ (рис. 3.1); водночас квадрант перетворюють в напівплощину. Імовірність потрапляння випадкової точки в таку напівплощину є функцією розподілу однієї з величин, що входять до системи.

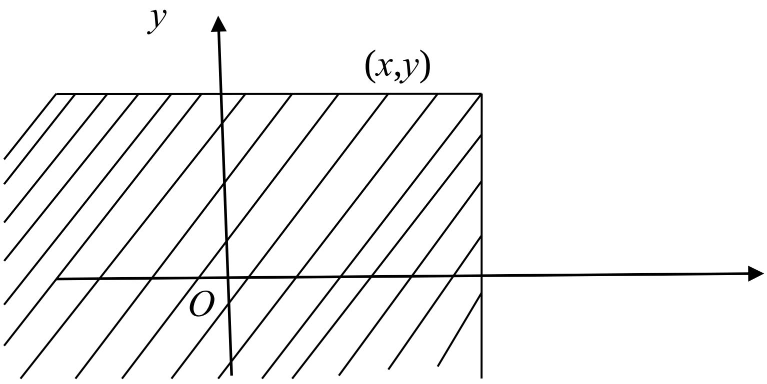

Рис. 3.1

Властивість 2. Якщо обидва аргументи прагнуть до плюс нескінченності, то функція розподілу системи прагне до одиниці, тобто:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y) = 1, \text{або } F(+\infty,+\infty) = 1.$$

Справді, за умови $x \to +\infty$ і $y \to +\infty$ квадрант з вершиною $(x,\ y)$ перетворюють у всю координатну площину xOy, потрапляння випадкової точки в яку є достовірною подією.

Властивість 3. Якщо один або обидва аргументи прагнуть до мінус нескінченності, функція розподілу прагне до нуля, тобто:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y) = 0\,.$$

або:

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0.$$

Справді, відсуваючи ту чи ту границю квадранта (або обидві границі) до мінус нескінченності, пересвідчуємося, що ймовірність потрапляння випадкової точки в квадрант у границі дорівнює нулю.

Властивість 4. Функція розподілу є неспадною функцією за кожним аргументом, тобто:

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y), \text{ якщо } x_2 > x_1;$$
$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1), \quad \text{якщо } y_2 > y_1.$$

Справді, збільшуючи x (переміщуючи границю квадранта вправо) або збільшуючи y (переміщуючи границю вгору), ми, очевидно, не можемо зменшити ймовірність потрапляння випадкової точки в такий квадрант.

Властивість 5. Імовірність потрапляння випадкової точки $(X,\ Y)$ в довільний прямокутник (рис. 3.2) зі сторонами, паралельними до координатних осей, обчислюють за формулою:

$$P(a \leq X < b, c \leq Y < d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c). \qquad (3.2)$$

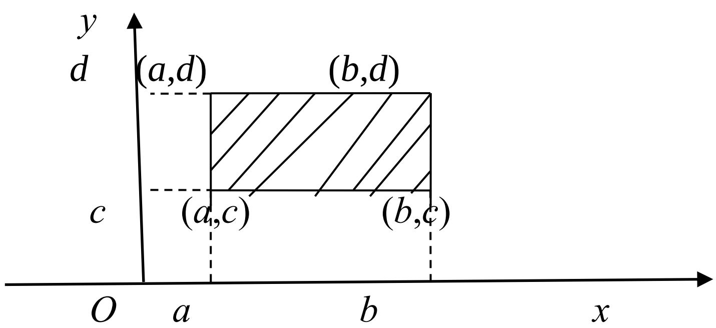

Рис. 3.2

Функція розподілу є універсальною характеристикою системи випадкових величин. Вона може бути застосована для опису систем як дискретних, так і неперервних випадкових величин. Однак основне практичне значення мають системи неперервних випадкових величин, розподіл яких характеризують не функцією розподілу, а щільністю розподілу.

3.2.2. Щільність розподілу системи двох випадкових величин

Щільність розподілу є ґрунтовною характеристикою системи неперервних випадкових величин, за допомогою якої розрахунок ймовірності потрапляння в різноманітні області здійснюють простішим способом, а опис розподілу системи стає більш наочним.

Визначимо щільність розподілу систем двох випадкових величин аналогічно тому, як ми визначили розподіл щільності для однієї випадкової величини. Нехай є система двох неперервних випадкових величин $(X,\ Y)$. Розглянемо ймовірність потрапляння випадкової точки $(X,\ Y)$ в елементарний прямокутник зі сторонами Δx і Δy, що прилягає до точки з координатами $(x,\ y)$ (рис. 3.3).

Застосовуючи формулу (3.2), отримаємо:

$$P(x \le X < x + \Delta x, y \le Y < y + \Delta y) =$$
$$= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y).$$

Розділімо одержану ймовірність на площу цього прямокутника і перейдемо до границі за умови $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x \le X < x + \Delta x, y \le Y < y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y} =$$
$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y)}{\Delta x \cdot \Delta y}. \qquad (3.3)$$

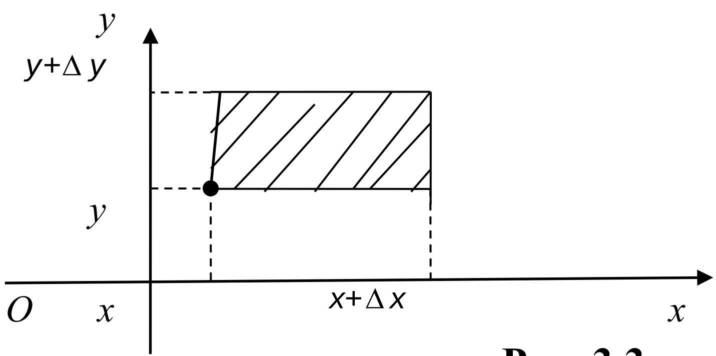

Рис. 3.3

Припустимо, що функція розподілу *F(x,y)* є не тільки неперервною, а й двічі диференційованою, тоді права частина формули (3.3) являє собою другу змішану часткову похідну функції $F(x,y)$. Позначимо цю похідну через *f(x,y)*:

$$f(x,y) = F''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}. \qquad (3.4)$$

Визначення 3.3. Функцією $f(x,y)$, яку задає вираз (3.4), називають щільністю розподілу системи неперервних двох випадкових величин (X, Y).

Отже, щільність розподілу системи двох випадкових величин є границя відношення ймовірності потрапляння випадкової точки (X, Y) в елементарний прямокутник (рис. 3.3) до площі прямокутника, коли обидва його розміри прагнуть до нуля; вона може бути обчислена як друга змішана часткова похідна від функції розподілу системи.

Геометрично функцію $f(x,y)$ можна зобразити деякою поверхнею, яку називають поверхнею розподілу.

Розглядаючи щільність розподілу $f(x)$, для однієї випадкової величини X, ми включили поняття «елемента ймовірності» $f(x)dx$, що виражає ймовірність потрапляння випадкової величини X в елементарну ділянку dx. Аналогічно вводять поняття «елемента ймовірності» і для системи двох випадкових величин. Елемент ймовірності $f(x,y)dxdy$ системи двох випадкових величин допускає ймовірність потрапляння випадкової точки в елементарний прямокутник зі сторонами dx і dy, що прилягають до точки (x, y). Геометрично елемент ймовірності є об'ємом елементарного паралелепіпеда, що спирається на елементарний прямокутник зі сторонами dx і dy і висотою $f(x,y)$.

Отже, знаючи щільність розподілу $f(x,y)$, можемо визначити ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) в довільну область D. Цю ймовірність можемо отримати підсумовуванням елементів ймовірності по всій області D і граничного переходу, коли найбільший прямокутник зі сторонами $\Delta x = dx$ і $\Delta y = dy$ стягують в точку:

$$P\big((X,Y) \subset D\big) = \iint f(x,y)dxdy. \qquad (3,5)$$

Тут подвійний інтеграл беруть по області D.

Геометрично ймовірність потрапляння в область D зображують за допомогою об'єму циліндричного тіла, обмеженого поверхнею розподілу і який спирається на цю область.

Використовуючи формулу (3.5), виразимо функцію розподілу системи $F(x,y)$ через щільність розподілу $f(x,y)$. Функція розподілу $F(x,y)$ є ймовірністю потрапляння в квадрант, обмежений абсцисами$-\infty, x$ і ординатами $-\infty, y$, тому:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy. \qquad (3.6)$$

Розглянемо властивості щільності розподілу системи двох випадкових величин.

Властивість 1. Щільність розподілу є невід'ємною функцією: $f(x,y) \geq 0$.

Справді, щільність розподілу є границею відношення ймовірності потрапляння випадкової точки в прямокутник зі сторонами Δx і Δy до площі цього прямокутника (за умови $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$). Обидві ці величини – невід'ємні. Виходить, що границя їхнього відношення не може бути від'ємною, тобто $f(x,y) \geq 0$.

Властивість 2. Подвійний невласний інтеграл з нескінченними границями від щільності розподілу системи дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1.$$

Доведення. На підставі формули (3.6) і властивості функції розподілу $F(+\infty, +\infty) = 1$ маємо:

$$F(+\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1.$$

Геометрично ця властивість означає, що об'єм тіла, обмеженого поверхнею розподілу і площиною xOy, дорівнює одиниці.

Приклад 3.1. Щільність розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) задає вираз:

$$f(x,y) = \frac{a}{1 + x^2 + x^2y^2 + y^2}$$

Потрібно знайти a, визначити функцію розподілу $F(x,y)$ і знайти ймовірність потрапляння випадкової точки в прямокутник (рис. 3.4) з вершинами $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(\sqrt{3}, 1)$, $C(\sqrt{3}, 0)$..

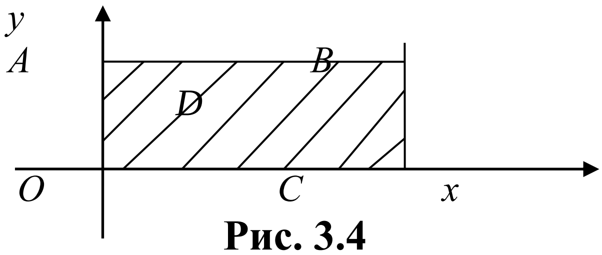

Рис. 3.4

Розв'язання. Користуючись властивістю 2 щільності розподілу, знайдемо постійну величину a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2+x^2y^2+y^2}dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy =$$

$$= a\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)} = a\cdot arctgx|_{-\infty}^{+\infty}\cdot arctgy|_{-\infty}^{+\infty} = a\pi^2$$

$$= 1.$$

Отже, $a = \frac{1}{\pi^2}$.

Функцію розподілу $F(x,y)$ визначаємо за формулою (3.6):

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \left(\frac{1}{\pi}arctgx + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}arctgy + \frac{1}{2}\right).$$

Імовірність потрапляння випадкової точки (X,Y) в заданий прямокутник (рис. 3.4) згідно з формулою (3.5) дорівнює:

$$P\big((X,Y)\subset D\big) = \iint \frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(1+x^2)}\int_0^1\frac{dy}{(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2}\cdot arctgx|_0^{\sqrt{3}}\cdot arctgy|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{12}.$$

Приклад 3.2. Щільність розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) має рівномірний розподіл в області D, тобто її задає вираз:

$$f(x,y) = \begin{cases} C & \text{всередині } D, \\ 0 & \text{ззовні } D. \end{cases}$$

Потрібно знайти ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) в деяку частину ω області D.

Розв'язання. Зважаючи на властивість 2 щільності розподілу, маємо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = C\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dxdy = C\cdot S_D = 1\,,$$

де S_D- площа області D. Виходить, $C = \frac{1}{S_D}$.

Тепер згідно з (3.5) маємо:

$$P\big((X,Y)\subset\omega\big) = \iint f(x,y)dxdy = \frac{1}{S_D}\iint dxdy = \frac{S_\omega}{S_D}.$$

Тут S_ω– площа області ω, а подвійний інтеграл вибирають за цією областю, що міститься в області D.

Отже, якщо щільність розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) має рівномірний розподіл в області D, то ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) в деяку частину ω області D дорівнює відношенню їхніх площ.

Наприкінці цього розділу відзначимо, що якщо нам відома щільність розподілу системи двох випадкових величин, то можемо визначити і щільності розподілу кожної з випадкових величин, які входять до системи.

Наприклад, відповідно до властивості 1 розділу 3.2.1 маємо:

$$F_1(x) = F(x,+\infty);\; F_2(y) = F(+\infty,y).$$

Як наслідок, використовуючи формулу (3.6) зв'язку між $f(x,y)$ і $F(x,y)$, можна зобразити $F_1(x)$ і $F_2(y)$ як:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy, \\ F_2(y) = F(+\infty,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy. \end{aligned}\right\}$$

Звідси, диференціюючи першу рівність за x, а другу - за y, отримаємо вираз для щільності розподілу окремих випадкових величин, що входять до системи:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) = F_1'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, \\ f_2(y) = F_2'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx. \end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

Отже, для того, щоб отримати щільність розподілу однієї з випадкових величин, що входять до системи, потрібно щільність розподілу проінтегрувати в нескінченних границях за аргументом, відповідним до другої випадкової величини.

3.3. Залежні і незалежні випадкові величини

Поняття залежності або незалежності випадкових величин є одним з найважливіших понять теорії ймовірностей.

Випадкові величини X і Y називають незалежними, якщо закон розподілу кожної з них не залежить від того, якого значення набуває друга величина. В іншому разі випадкові величини X і Y називають залежними. Зазначимо просту ознаку незалежності випадкових величин, яку сформулюємо як теорему і приймемо без доведення.

Теорема 3.1. Для того, щоб неперервні випадкові величини X і Y були незалежними, необхідно і достатньо, щоб щільність розподілу системи (X, Y) дорівнювала добутку щільностей розподілу окремих величин, що входять до системи: $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$.

Наслідок. Якщо щільність розподілу *f(x,y)* представляють як добуток двох співмножників, перший з яких містить тільки x, а другий – тільки y, то випадкові величини X і Y є незалежними.

Приклад 3.3. Система випадкових величин (X, Y) має щільність ймовірності:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)}$$

Потрібно визначити, чи залежними/незалежними є випадкові величини X і Y.

Розв'язання. Відповідь випливає з можливості розкладання щільності розподілу ймовірності *f(x,y)* на множники:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Тут бачимо, що випадкові величини X і Y є незалежними, оскільки $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, причому кожна з них підпорядковується так званому закону Коші:

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad f_2(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

Приклад 3.4. Систему випадкових величин (X, Y) рівномірно розподілено всередині круга з радіусом r:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi r^2} & \text{при } x^2+y^2 \le r^2, \\ 0 & \text{при } x^2+y^2 > r^2. \end{cases} \qquad (3.8)$$

Потрібно знайти щільності розподілу випадкових величин X і Y, а також встановити, чи залежними/незалежними є ці випадкові величини.

Розв'язання. Підставляючи вираз (3.8) в формулу (3.7), знаходимо щільності розподілу випадкових величин X і Y:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{dy}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2} & \text{при } |x| \le r, \\ 0 & \text{при } |x| > r. \end{cases}$$

Аналогічно обчислюючи, отримаємо:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{dy}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2} & \text{при } |x| \le r, \\ 0 & \text{при } |x| > r. \end{cases}$$

З отриманих виразів випливає, що добуток щільностей розподілу випадкових величин X і Y не дорівнює їхній сумісній щільності розподілу: $f(x,y) \neq f_1(x)f_2(y)$, а це означає, що випадкові величини X і Y є залежними.

3.4. Числові характеристики системи двох випадкових величин. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції

Закони розподілу системи випадкових величин є її ґрунтовними ймовірносними характеристиками. Однак дуже часто таку вичерпну характеристику неможливо застосувати. Іноді обмеженість експериментального матеріалу не дає можливості побудувати закон розподілу системи.

За таких обставин дуже широко застосовують числові характеристики закону розподілу системи випадкових величин, які певною мірою можуть дати уявлення також і про характер закону розподілу системи.

В основу одержання числових характеристик системи випадкових величин покладають поняття моментів. Як і для однієї випадкової величини, тут розрізняють початкові і центральні моменти.

Визначення 3.5. Початковим моментом $\boldsymbol{a_{ks}}$ порядку $k + s$ системи (X, Y) називають математичне сподівання добутку k-го степеня випадкової величини X на s-ий степінь випадкової величини Y:

$$a_{ks} = M[X^k Y^s]. \qquad (3.9)$$

Формули для обчислення початкових моментів записують так:
для системи дискретних випадкових величин:

$$a_{ks} = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s P_{ij}, \qquad (3.10)$$

де $P_{ij} = P(X = x_i,\ Y = y_j)$ – ймовірність того, що система (X, Y) набуде значень (x_i,y_j), а підсумовування поширюють на всі можливі значення випадкових величин X,Y для системи неперервних випадкових величин:

$$a_{ks} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x,y) dxdy, \qquad (3.11)$$

де $f(x,y)$ – щільність розподілу системи.

На практиці найбільш вживаними є початкові моменти першого порядку:

$$\left.\begin{aligned} a_{10} = M[X^1Y^0] = M[X] = m_x, \\ a_{01} = M[X^0Y^1] = M[Y] = m_{y,} \end{aligned}\right\},$$

які є математичними сподіваннями випадкових величин X і Y, що входять до системи. Ці математичні сподівання визначають координати точки, яку називають центром розсіювання системи на площині.

Перейдемо тепер до вивчення центральних моментів.

Визначення 3.6. Центральним моментом μ_{ks} порядку $k + s$ системи (X, Y) називають математичне сподівання добутку k-го і s-го степеня відповідних центрованих величин (відхилень випадкових величин X і Y від їхніх середніх значень):

$$\mu_{ks} = M[(X - M[X])^k (Y - M[Y])^s]. \qquad (3.12)$$

Формули для обчислення центральних моментів μ_{ks} записують так:

для системи дискретних випадкових величин:

$$\mu_{ks} = \sum_i \sum_j (x_i - M[X])^k \left(y_j - M[Y]\right)^s P_{ij}, \qquad (3.13)$$

для системи неперервних випадкових величин

$$\mu_{ks} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^k (y - M[Y])^s f(x, y) dxdy. \qquad (3.14)$$

У практиці найчастіше застосовують центральні моменти другого порядку. Два з них являють собою вже відомі нам дисперсії випадкових величин X і Y:

$$D_X = \mu_{20} = M[(X - M[X])^2 (Y - M[Y])^0] = M[(X - M[X])^2],$$
$$D_Y = \mu_{02} = M[(X - M[X])^0 (Y - M[Y])^2] = M[(Y - M[Y])^2],$$

які характеризують розсіювання випадкової точки в напрямку осей Ox і Oy.

Визначення 3.7. Особливу роль під час дослідження системи двох випадкових величин відіграє другий змішаний центральний момент, який називають кореляційним моментом або моментом зв'язку. Його зазвичай позначають як k_{xy}:

$$k_{xy} = \mu_{11} = M[(X - M[X])(Y - M[Y])]. \tag{3.15}$$

Момент зв'язку k_{xy}, який визначають як математичне сподівання добутку відхилень двох випадкових величин від їхніх математичних сподівань, крім розсіювання величин X і Y, може характеризувати взаємний вплив цих випадкових величин. Для оцінювання ступеня цього впливу зазвичай використовують не сам момент зв'язку k_{xy}, а безрозмірне відношення:

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \tag{3.16}$$

де σ_x і σ_y – середні квадратичні відхилення відповідно до випадкових величин X і Y.

Визначення 3.8. Величину r_{xy}, яку задає відношення (3.16), називають коефіцієнтом кореляції випадкових величин X і Y.

Кореляційний момент і коефіцієнт кореляції мають таку властивість. Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то кореляційний момент і коефіцієнт кореляції дорівнюють нулю.

Здійснимо доведення для неперервних випадкових величин. Нехай X і Y – незалежні випадкові величини з щільністю розподілу $f(x,y)$. Тоді згідно з теоремою 3.1 маємо: $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, де $f_1(x)$ і $f_2(y$ – щільності розподілу відповідно до величин X і Y.

Виходить, що:

$$k_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])(y - M[Y]) f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X]) f_1(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M[Y]) f_2(y)\,dy,$$

тобто подвійний інтеграл перетворюється на добуток двох інтегралів, кожен з яких дорівнює нулю, оскільки вони представляють математичні сподівання відхилень випадкових величин від їхніх математичних сподівань. Інакше кажучи, центральні моменти першого порядку.

Отже, для незалежних випадкових величин X і Y кореляційний момент k_{xy} = 0. З рівності нулю кореляційного моменту і формули (3.16) випливає рівність нулю коефіцієнта кореляції.

Аналогічно доводять цю властивість і для дискретних випадкових величин.

Рівність нулю коефіцієнта кореляції є лише необхідною, але не достатньою умовою для незалежності випадкових величин. Це означає, що може бути система залежних випадкових величин, коефіцієнт кореляції яких дорівнює нулю. Прикладом такої системи є система випадкових величин (X, Y), яку рівномірно розподілено всередині круга з радіусом r і центром на початку координат. У прикладі 3.4 ми показали, що випадкові величини X і Y системи, що має такий розподіл, є залежними. Обчислимо тепер кореляційний момент.

Оскільки для системи випадкових величин (X, Y), які рівномірно розподілено всередині круга з центром на початку координат $M[X]=0$, $M[Y]=0$, то

$$k_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy.$$

Тоді маємо:

$$k_{xy} = \frac{1}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} x \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} ydy \right) dx,$$

де $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} & \text{при } x^2 + y^2 \le r^2, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > r^2. \end{cases}$

Тут внутрішній інтеграл дорівнює нулю (підінтегральна функція є непарною, границі інтегрування відрізняються тільки знаком), а, отже, k_{xy} = 0 або коефіцієнт кореляції r_{xy}.

Визначення 3.9. Дві випадкові величини X і Y називають некорельованими, якщо їхній коефіцієнт кореляції дорівнює нулю; X і Y називають корельованими, якщо їхній коефіцієнт кореляції є відмінним від нуля.

Отже, якщо випадкові величини X і Y є незалежними, то вони є і некорельованими, але з огляду на некорельованість випадкових величин не можна загалом зробити висновок про їхню незалежність.

Крім кореляційного моменту і коефіцієнта кореляції, взаємний зв'язок двох випадкових величин можна описати за допомогою ліній регресії. Справді, хоча з кожним значенням $X = x$ величина Y залишається випадковою величиною, що допускає розсіювання своїх значень, проте залежність Y від X проявляється часто в зміні її середніх значень (математичних сподівань) під час переходу від одного значення x до іншого. Цю останню залежність і описує крива регресії $y=m_y(x)$.

Аналогічно, залежність X від Y, яка проявляється в зміні середніх значень (математичних сподівань) X під час переходу від одного значення у до іншого, описує крива регресії $x=m_x(y)$.

3.5. Функція і щільність розподілу системи довільного числа випадкових величин і її числові характеристики

На практиці дуже часто доводиться розглядати системи більш ніж двох випадкових величин. Ці системи, як ми вже відзначали на початку цього розділу, інтерпретують як випадкові точки або випадкові вектори в просторі відповідного виміру.

Повною характеристикою системи довільного числа випадкових величин є закон розподілу системи, який може бути виражений функцією розподілу або щільністю розподілу.

Визначення 3.10. Функцією розподілу системи n випадкових величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ називають функцію n аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що дорівнює ймовірності сумісного виконання n нерівностей (i = 1, 2, ..., n), тобто:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n). \qquad (3.17)$$

Ця функція є неспадною функцією кожної змінної з фіксованими значеннями інших змінних. Якщо хоча б одна із змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ прагне до мінус нескінченності (-∞), то функція розподілу прагне до нуля.

Виділимо з системи величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ окрему систему $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$, тоді функцію розподілу цієї системи визначають за формулою $F_{1,2,\ldots,m}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = F(x_1, x_2, \ldots, x_m, +\infty, \ldots, +\infty)$. Зокрема, функцію розподілу кожної з величин, що входять до системи, отримують, якщо в функції розподілу системи вставити всі інші аргументи, що дорівнюють +∞:+∞: $F_1(x_1) = F(x_1, +\infty, \ldots, +\infty)$.

Якщо всі змінні x_1, $x_2, \ldots$, x_n прагнуть до +∞, то $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ прагне до одиниці: $F(+\infty, \ldots, +\infty) = 1$.

Функція розподілу є досить загальною характеристикою системи випадкових величин. Будь-яка система випадкових величин має функцію розподілу. Для опису закону розподілу системи неперервних випадкових величин зазвичай використовують щільність розподілу системи.

Визначення 3.11. Щільність розподілу $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системи n випадкових величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ визначають як границю відношення ймовірності виникнення системи $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ в малому околі точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ до розміру цього околу $\Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_n$ за її необмеженого зменшення, тобто

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \vdots \\ \Delta x_n \to 0}} \frac{P(x < X_1 < x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n < X_n < x_n + \Delta x_n)}{\Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_n}.$$

Основні властивості щільності розподілу системи випадкових величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$:

1) Щільність розподілу системи не може бути від'ємною: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$.

2) Імовірність потрапляння випадкової точки з координатами $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ в n-мірну область D виражається n-кратним інтегралом з цієї області:

$$P\big((X_1, X_2, \ldots, X_n) \subset D\big) = \iint \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n .$$

3) Щільність ймовірності системи $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ виражають через функцію розподілу цієї системи за допомогою формули:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}.$$

4) Умова нормування щільності розподілу системи виглядає так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1.$$

5) Щільність розподілу кожної з величин, що входять до системи, отримають, якщо щільність розподілу системи проінтегрувати в нескінченних границях за всіма іншими аргументами:

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n.$$

6) Для системи $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ незалежних випадкових величин щільність розподілу дорівнює добутку щільностей розподілу окремих величин, що входять до системи:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n).$$

Правильним є і зворотне твердження. Якщо щільність розподілу системи $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ незалежних випадкових величин дорівнює добутку щільностей розподілу окремих величин, що входять до системи, то випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n$ є незалежними.

Основними числовими характеристиками, за допомогою яких може бути охарактеризована система n випадкових величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, є наступні:

Математичні сподівання випадкових величин, що входять до системи $m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}$, які в сукупності визначають центр розсіювання системи або математичне сподівання n-мірного випадкового вектора.

Дисперсії $D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_n}$, що характеризують розсіювання випадкової точки в напрямку осей.

Кореляційні моменти кожної пари з n випадкових величин $k_{x_i x_j} = M\left[\left(X_i - m_{x_i}\right)\left(X_j - m_{x_j}\right)\right]$ $(i \neq j)$, що характеризують попарно кореляцію всіх випадкових величин, які входять до системи. Знаючи кореляційні моменти, можна знайти коефіцієнти кореляції $r_{x_i x_j} = \frac{k_{x_i x_j}}{\sigma_{x_i} \sigma_{x_j}}$, які характеризують ступінь зв'язку між кожною парою випадкових величин.

Питання для самоконтролю до розділу 3

1. Що називається системою випадкових величин і як її можна трактувати?

2. Дайте визначення функції розподілу системи двох випадкових величин і вкажіть її властивості.

3. Дайте визначення щільності розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин і вкажіть її властивості.

4. Які випадкові величини називаються залежними? незалежними?

5. Що називається кореляційним моментом? Коефіцієнтом кореляції?

6. Яка оцінка для кореляційного моменту має властивості спроможності і незсуненості?

7. Що називають функцією і щільністю розподілу системи довільного числа випадкових величин?

8. За допомогою, яких числових характеристик може бути охарактеризована система довільного числа випадкових величин?

Розділ 4
ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

4.1.Попередні зауваження

Ми вже знаємо, що теорія ймовірностей вивчає закономірності, властиві масовим випадковим явищам. Як і будь-яка інша наука, теорія ймовірностей призначена для того, щоб якомога точніше прогнозувати результат того чи того явища або експерименту. Однак, якщо явище має одиничний, не масовий характер, то теорія ймовірностей здатна передбачити зазвичай лише ймовірність результату в досить широких межах. Зовсім інша річ, коли явище масове. Закономірності проявляються саме у разі великого числа випадкових явищ, що відбуваються в однорідних умовах. За велику кількість випробувань характеристики випадкових подій і випадкових величин, що спостерігають під час випробувань, стають майже невипадковими. Наприклад, частота події при значній кількості випробувань стає стійкою, те саме стосується середніх значень випадкових величин. Ця обставина дозволяє використовувати результати спостережень над випадковими явищами для передбачення результатів майбутніх випробувань.

Група теорем, які визначають відповідність між теоретичними і експериментальними характеристиками випадкових величин і випадкових подій за великого числа випробувань над ними, а також стосуються граничних законів розподілу, об'єднують під загальною назвою граничних теорем теорії ймовірностей.

У цьому розділі ми познайомимося з двома типами граничних теорем: законом великих чисел і центральною граничною теоремою.

4.2.Закон великих чисел: нерівність і теорема Чебишова. Теореми Бернуллі і Пуассона

Закон великих чисел, який посідає найважливіше місце в теорії ймовірностей, є сполучною ланкою між теорією ймовірностей як математичною наукою і закономірностями випадкових явищ під час масових спостережень над ними. Закон великих чисел відіграє дуже важливу роль у практичних застосуваннях теорії ймовірностей до явищ природи і технічних процесів, пов'язаних з масовим виробництвом.

Під час доведення теорем, що належать до групи «закону великих чисел», використовують нерівність Чебишова.

Нерівність Чебишова. Імовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання m_x за абсолютною величиною є не меншим за будь-яке додатне число, обмежують зверху величиною $\frac{D_X}{\varepsilon^2}$, де D_x – дисперсія випадкової величини X:

$$P(|X - m_x| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_X}{\varepsilon^2}. \qquad (4.1)$$

Нерівність Чебишова може записати і в іншій формі, застосовуючи до протилежної події – відхилення випадкової величини від математичного сподівання менше, ніж на ε:

$$P(|X - m_x| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D_X}{\varepsilon^2}. \qquad (4.2)$$

Однією з найважливіших форм закону великих чисел є теорема Чебишова. Вона встановлює зв'язок між середнім арифметичним спостережуваних значень випадкової величини і її математичним сподіванням.

Теорема Чебишова. За умови необмеженого збільшення числа незалежних випробувань середнє арифметичне спостережуваних значень випадкової величини, що має скінченну дисперсію, збігається за ймовірністю до її математичного сподівання.

Пояснимо зміст терміна «збігатися за ймовірністю». Послідовність випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ збігається за ймовірністю до величини a, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X - a| < \varepsilon) = 1,$$

або докладніше: послідовність випадкових величин X_1, $X_2, \ldots$ збігається за ймовірністю до величини a, якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $\delta > 0$ є таке $n(\varepsilon,\delta)$, починаючи з якого, виконується нерівність:

$$P(|X - a| < \varepsilon) > 1 - \delta.$$

Отже, теорема Чебишова означає, що якщо X_1, X_2,… є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами з математичним сподіванням m_x і з обмеженою дисперсією D_x, то за будь-якого ε > 0:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i-1}^{n} X_i}{n} - m_x\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Залишаємо теорему без доведення.

Теорему Чебишова можна поширити на більш загальний випадок, коли характеристики спостережуваної випадкової величини змінюються під час кожного випробування. Виявлено, що і в цьому разі за дотримання деяких умов середнє арифметичне є стійким і збігається за ймовірністю до певної невипадкової величини. Точніше, фігурує така узагальнена теорема Чебишова.

Узагальнена теорема Чебишова. За умови необмеженого збільшення числа незалежних випробувань над випадковими величинами, що мають обмежені дисперсії, середнє арифметичне спостережуваних значень збігається за ймовірністю до середнього арифметичного математичних сподівань цих величин, тобто:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i-1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i-1}^{n} m_{x_i}}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Наступною дуже важливою та історично першою формою закону великих чисел є теорема Бернуллі. Вона встановлює зв'язок між частотою події і її ймовірністю. Доказ, поданий Бернуллі, був досить складним. Простий доказ надав П. Л. Чебишев – як простий наслідок з його теореми.

Теорема Бернуллі. За умови необмеженого збільшення числа незалежних випробувань в постійних умовах відносна частота аналізованої події *A* збігається за ймовірністю до її ймовірності *p* в окремому випробуванні.

Якщо позначити відносну частоту події А в n випробуваннях через p^*, теорему Бернуллі можна записати як:

$$\lim_{n\to\infty} P(|p^* - p| < \varepsilon) = 1.$$

Для випадку, коли випробування відбуваються за неоднакових умов, слушною є теорема Пуассона.

Теорема Пуассона. За умови необмеженого збільшення числа незалежних випробувань в змінних умовах відносна частота аналізованої події A збігається за ймовірністю до середнього арифметичного її ймовірностей p_i під час цих випробувань.

Доказ теореми Пуассона випливає з узагальненої теореми Чебишова.

4.3.Центральна гранична теорема.Теорема Муавра-Лапласа

Розглянуті в попередньому розділі теореми є різними формами закону великих чисел. Закон великих чисел встановлює факт збіжності за ймовірністю деяких випадкових величин до їхніх постійних характеристик. Водночас ні в одній з форм закону великих чисел ми не маємо справи з законами розподілу випадкових величин.

У цьому розділі ми розглянемо питання, пов'язане з пошуком граничного закону розподілу суми:

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{4.3}$$

коли число доданків необмежено зростає. Центральна гранична теорема теорії ймовірностей (теорема Ляпунова) встановлює умови, за яких зазначений граничний закон є нормальним. Різні форми центральної граничної теореми відрізняються між собою умовами, які накладають на розподіл випадкових величин X_i, що утворюють суму (4.3). Ми сформулюємо (уникаючи доказу) найпростішу форму центральної граничної теореми, коли випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ є взаємно незалежними і однаково розподіленими.

Центральна гранична теорема. Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ є взаємно незалежними і мають один і той самий закон розподілу з математичним сподіванням m і дисперсією σ^2, причому є третій абсолютний момент μ_2, то за умови необмеженого збільшення n закон розподілу суми (4.3) необмежено наближається до нормального.

Випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$,, що фігурують у центральній граничній теоремі, можуть мати довільні розподіли ймовірності. Якщо вважати, що всі випадкові величини X_i є однаково розподіленими, дискретними і набувають тільки два можливі значення 0 або 1, то ми дійдемо теореми Муавра-Лапласа, що являє собою найпростіший окремий випадок центральної граничної теореми.

Теорема Муавра-Лапласа. Якщо проводять n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A з'являється з імовірністю p, то для будь-якого інтервалу (α,β) справедливим є співвідношення:

$$P\left(\alpha < \frac{Y - np}{\sqrt{npg}} < \beta\right) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

де Y – число виникнення події A в n випробуваннях, $g=1-p$, $\Phi(x)$, – функція Лапласа.

Теорема Муавра-Лапласа описує поведінку біномного розподілу за великих значень n. Ця обставина дозволяє істотно спростити обчислення, пов'язані з біноміальним розподілом за великих n. Справді, підрахунок ймовірності потрапляння випадкової величини в інтервал (α,β) за точною формулою:

$$P(\alpha < Y < \beta) = \sum_{\alpha<k<\beta} C_n^k p^k g^{n-k}$$

пов'язують за великих n зі складними обчисленнями. Значно простіше скористатися наближеною формулою:

$$P(\alpha < Y < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{2npg}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{2npg}}\right)\right] \qquad (4.4)$$

на припущення, що випадкову величину Y розподілено нормально з математичним сподіванням $m_y=np$ і дисперсією $\sigma_Y^2 = npg$.

Приклад 4.1. Потрібно знайти ймовірність того, що внаслідок 1000 кидків монети число випадання герба потрапить до інтервалу (475, 525).

Розв'язання. У цій задачі p = 0,5, n = 1000. Як наслідок, np = 500, npg = 250.

Вважаючи, що в формулі (4.4) a = 475, β=525, отримаємо:

$$P(475 < Y < 525) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{525-500}{\sqrt{500}}\right) - \Phi\left(\frac{475-500}{\sqrt{500}}\right)\right] = \Phi\left(\frac{25}{10\sqrt{5}}\right) \approx 0{,}8854.$$

Приклад 4.2. Завод випускає 90% виробів першого сорту і 10% виробів другого сорту. Навмання вибирають 1000 виробів. Потрібно знайти ймовірність того, що число виробів першого сорту буде в межах від 900 до 940.

Розв'язання. Імовірність вибору вироба першого сорту 0,9, числа дослідів n = 1000. Отже, np = 900, npg = 90.

Застосовуючи формулу (4.4), отримаємо:

$$P(900 < Y < 940) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{940-900}{\sqrt{180}}\right) - \Phi\left(\frac{900-900}{\sqrt{180}}\right)\right] = 0{,}5.$$

Питання для самоконтролю до розділу 4

1. У чому полягає сутність закону великих чисел?

2. Сформулюйте узагальнену теорему Чебишева. Яке практичне значення мають теореми Чебишева?

3. Поясніть, користуючись теоремою Бернуллі, властивість стійкості відносних частот.

4. В чому полягає сутність центральної граничної теореми?

Розділ 5
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

5.1. Способи збору статистичних даних

Способи збору статистичних даних відіграють визначальну роль у встановленні закономірностей для статистичних об'єктів і складають основу для планування експерименту зі збору даних.

5.1.1. Генеральна і вибіркова сукупності

Нехай потрібно вивчити сукупність однорідних об'єктів відносно деякої якісної або кількісної ознаки, що характеризує ці об'єкти. Наприклад, якщо є партія товару, то якісною ознакою може слугувати найменування товару, а кількісною – контрольована вага товару.

Іноді проводять суцільне обстеження, тобто обстежують кожний з об'єктів сукупності відносно ознаки, яка цікавить. На практиці, однак, суцільне обстеження застосовують порівняно рідко. Наприклад, якщо сукупність містить дуже велике число об'єктів, то провести суцільне обстеження фізично неможливо. Якщо обстеження об'єкта пов'язано з його знищенням або вимагає великих матеріальних затрат, то проводити суцільне обстеження практично не має сенсу. За таких обставин застосовують так званий вибірковий метод. З усієї сукупності об'єктів випадково відбирають обмежене число об'єктів і вивчають їх. У зв'язку з цим розрізняють генеральну і вибіркову сукупності.

Визначення. 5.1. Генеральною сукупністю називають сукупність всіх подумки можливих об'єктів цього виду, над якими проводять спостереження для того, щоб отримати конкретні значення випадкової величини, або сукупність результатів всіх можливих спостережень, проведених в незмінних умовах над однією з випадкових величин, пов'язаних з цим видом об'єктів.

Зауваження: часто генеральна сукупність містить скінченне число об'єктів. Однак, якщо це число досить велике, то іноді, щоб спростити обчислення, допускають, що генеральна сукупність складається з незліченної множини об'єктів. Таке припущення виправдовують тим, що збільшення обсягу генеральної сукупності (досить великого обсягу) практично не впливає на результати обробки даних вибірки.

Визначення 5.2. Вибірковою сукупністю чи просто вибіркою називають частину випадково відібраних об'єктів з генеральної сукупності.

Визначення 5.3. Обсягом сукупності (вибіркової або генеральної) називають число об'єктів цієї сукупності.

Отже, вибірковий метод полягає в тому, що з генеральної сукупності обсягом N беруть вибірку обсягу n (причому $n<<N$) і визначають характеристики вибірки, які вважають наближеними значеннями відповідних характеристик генеральної сукупності. Водночас, що більшим є n, то більш обґрунтоване судження можна висловити на підставі вибірки про властивості генеральної сукупності. Відзначимо також, що вибірка надає найбільше інформації про генеральну сукупність тільки в тому разі, коли результати обслідів, що складають вибірку, є незалежними.

5.1.2. Способи вибірки

Під час складання вибірки можна діяти у два способи: після того, як об'єкт відібрано і над ним здійснено спостереження, його можна повертати або не повертати до генеральної сукупності. Відповідно до сказаного вибірки поділяють на повторні та безповторні.

Визначення 5.4. Повторною називають вибірку, за якою відібраний об'єкт (перед відбором наступного) повертають до генеральної сукупності.

Визначення 5.5. Безповторною називають вибірку, за якою відібраний об'єкт до генеральної сукупності не повертають.

На практиці зазвичай використовують безповторний випадковий відбір.

Для того, щоб за даними вибірки можна було б досить впевнено говорити про цікаву для нас ознаку генеральної сукупності, необхідно, щоб об'єкти вибірки правильно її представляли. Інакше кажучи, вибірка повинна чітко представляти пропорції генеральної сукупності. Цю вимогу коротко формулюють так: вибірка повинна бути репрезентативною.

Зважаючи на закон великих чисел, можна стверджувати, що вибірка буде репрезентативною, якщо її здійснити випадково: кожний об'єкт вибірки відбирають випадково з генеральної сукупності, якщо всі об'єкти мають однакову ймовірність потрапити до вибірки.

На практиці застосовують різноманітні способи відбору. Принципово ці способи можна розділити на два види:

1. Відбір, який не потребує розчленування генеральної сукупності на частини. До нього належать: а) простий випадковий безповторний відбір; б) простий випадковий повторний відбір.

2. Відбір, під час якого генеральну сукупність розкладають на частини. До нього належать: а) типовий відбір; б) механічний відбір; в) серійний відбір.

Визначення 5.6. Простим випадковим відбором називають такий відбір, за якого об'єкти відбирають по одному з усієї генеральної сукупності і після обсліду не повертають (безповторний відбір) або повертають (повторний відбір) до генеральної сукупності.

Визначення 5.7. Типовим відбором називають відбір, за якого об'єкти відбирають не з усієї генеральної сукупності, а з кожної її «типової» частини. Наприклад, якщо деталі виготовляють на декількох верстатах, то відбір здійснюють не з усієї сукупності деталей, вироблених усіма верстатами, а з продукції кожного верстата окремо.

Типовий відбір використовують тоді, коли досліджувана ознака помітно коливається в різноманітних типових частинах генеральної сукупності. Наприклад, якщо продукцію виготовляють на декількох машинах, серед яких наявні більш і менш зношені, то тут типовий відбір є доцільним.

Визначення 5.8. Механічним відбором називають відбір, за якого генеральну сукупність «механічно» ділять на стільки груп, скільки об'єктів повинно увійти до вибірки, а з кожної групи відбирають один об'єкт. Наприклад, якщо потрібно відібрати 20% виготовлених верстатом деталей, то відбирають кожну п'яту деталь; якщо потрібно відібрати 5% деталей, то відбирають кожну двадцяту деталь і т. д. Слід зазначити, що іноді механічний відбір не може забезпечити репрезентативність вибірки.

Визначення 5.9. Серійним відбором називають відбір, за якого об'єкти відбирають з генеральної сукупності не по одному, а «серіями», які обстежують суцільним способом. Наприклад, якщо вироби виготовляє велика група верстатів-автоматів, то обстежують суцільним способом продукцію тільки декількох верстатів. Серійний відбір використовують тоді, коли досліджувана ознака незначно коливається в різноманітних серіях.

Підкреслимо, що на практиці часто застосовують комбінований відбір, за якого поєднують вищезазначені способи.

5.2. Статистичний розподіл вибірки

Припустимо, що вивчають деяку генеральну сукупність об'єктів і нас цікавить деяка ознака цих об'єктів, що становлять випадкову величину X, закон розподілу якої невідомий. Для цього над випадковою величиною X здійснюють ряд незалежних вимірювань (вибірка). Первинною формою обробки результатів вибірки, що являють собою набір значень випадкової величини X, слугує статистичний (варіаційний) ряд і статистичний розподіл вибірки.

5.2.1. Статистичний (варіаційний) ряд. Статистичний розподіл вибірки

Результати вибірки x_i, отримані в серії з n незалежних випробувань над випадковою величиною X, представляють як послідовність зі зростаючим порядком $x_1<x_2<\ldots<x_k$ і записують їх як таблицю:

i	1	2	…	k
x_i	x_1	x_2	...	x_k

Тут $k \le n$, оскільки результати вимірювань у вибірці можуть повторюватися.

Визначення 5.10. Спостережувані значення x_i випадкової величини X у вибірці називають варіантами, а послідовність варіант, записаних у зростаючому порядку, – варіаційним (статистичним) рядом.

Статистичний ряд можна обробити різноманітними способами. Одним із способів такої обробки є побудова статистичного розподілу вибірки.

Нехай в варіаційному ряді значення x_1 спостерігали n_1 разів, x_2– n_2 – разів, $x_k - n_k$ – разів і $\sum n_i = n$ – обсяг вибірки.

Визначення 5.11. Числа спостережень n_i значення x_i випадкової величини X у вибірці називають частотами, а їхнє відношення до обсягу вибірки $n_i/n = W_i$ – відносними частотами.

Визначення 5.12. Статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант, записаних у зростаючому порядку і відповідних до них частот або відносних частот.

Зазвичай такі відповідності оформляють як таблицю:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k
W_i	n_1 / n	n_2 / n	…	n_k / n

Зауважимо, що в теорії ймовірностей розподіл розуміють як відповідність між можливими значеннями випадкової величини X, що відображає певну кількісну ознаку генеральної сукупності, і їхніми ймовірностями, а в математичній статистиці – відповідність між спостережуваними варіантами (спостережуваними значеннями випадкової величини) і їхніми відносними частотами. Вочевидь, що за умови $n \to \infty$ статистичний розподіл вибірки наближають до розподілу ймовірностей випадкової величини X.

Розглянемо тепер, як і у разі розподілу ймовірностей випадкової величини X, найбільш загальну форму подання статистичного розподілу вибірки, так звану статистичну (емпіричну) функцію розподілу вибірки.

5.2.2. Статистична (емпірична) функція розподілу

Нехай відомим є статистичний розподіл вибірки для випадкової величини *X*, що відображає деяку кількісну ознаку генеральної сукупності. Позначення: n_x – число спостережень, під час яких спостерігали значення випадкової величини *X* у вибірці, менше за *x;* n – число спостережень (обсяг вибірки). Зрозуміло, що відносна частота того, що випадкова величина *X* набуде у вибірці значення менші за x, дорівнює n_x/n. Якщо змінюють *x,* то змінюють і відносну частоту, тобто відносна частота n_x/n є функцією від x.

Визначення 5.13. Функцію F^*, що визначає для кожного $x \in R$ відносну частоту того, що випадкова величина *X* набуде у вибірці значення менші за *x,* називають статистичної функцією розподілу вибірки.

Отже, за визначенням, $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, де n_x – число варіант, менших за x, n – обсяг вибірки.

Оскільки цю функцію визначають у емпіричний (дослідний) спосіб, то її називають емпіричною.

На відміну від емпіричної функції розподілу вибірки, функцію розподілу *F(x)* генеральної сукупності називають теоретичною функцією розподілу. Різниця між емпіричною і теоретичною функціями полягає в тому, що теоретична функція *F(x)* визначає ймовірність події $X < x$, а емпірична функція визначає відносну частоту цієї події. Звідси випливає, що статистична функція розподілу вибірки будь-якої випадкової величини (дискретної або неперервної) представляє завжди перервну ступінчасту функцію, стрибки якої відповідають спостережуваним значенням випадкової величини і за величиною дорівнюють відносним частотам цих значень.

Згідно з теоремою Бернуллі за умови необмеженого збільшення числа дослідів n відносна частота події $X < x$ збігається за ймовірністю до ймовірності цієї події. Це означає, що статистична функція розподілу $F^*(x)$ за умови збільшення n збігається за ймовірністю до справжньої теоретичної функції розподілу $F(x)$ випадкової величини X, тобто $\lim_{n\to+\infty} F^*(x)=F(x)$.

Такий висновок підтверджується тим, що $F^*(x)$ має всі властивості $F(x)$. Справді:

1. Значення емпіричної функції розподілу належить до відрізку [0,1];

2. $F^*(x)$ – неспадна функція;

3. Якщо x_1 – найменша варіанта, то $F^*(x) = 0$ за умови $x \le x_1$; якщо x_k – найбільша варіанта, то $F^*(x) =1$ за умови $x>x_k$.

Отже, емпірична функція розподілу вибірки може слугувати для оцінювання теоретичної функції розподілу генеральної сукупності. Розглянемо приклад.

Приклад 5.1. Потрібно побудувати статистичну функцію розподілу помилок 10 вимірювань дальності до цілі за допомогою далекоміра. Результати вимірювань подано в таблиці:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i, *м*	5	– 8	10	15	5	– 10	– 6	20	10	15

Розв'язання. Взявши за основу результати вимірювань, побудуємо спочатку варіаційний ряд, а потім статистичний розподіл частоти вибірки.

Варіаційний ряд і статистичний розподіл частоти вибірки відповідно мають вигляд:

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	– 10	– 8	– 6	5	10	15	20

x_i	– 10	– 8	– 6	5	10	15	20
n_i	1	1	1	2	2	2	1

Оскільки обсяг вибірки $n = 10$, отже, для статистичного розподілу відносної частоти вибірки, маємо:

x_i	– 10	– 8	– 6	5	10	15	20
W_i	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1

Тепер перейдемо до побудови статистичної функції розподілу $F^*(x)$. Оскільки найменша варіанта дорівнює – 10, отже, $F^*(x)$ = 0 за умови $x \leq -10$.

Значення X < -8, де X – випадкова величина помилок вимірювання дальності до цілі, спостерігали у вибірці з відносною частотою 0,1, а саме $x_1 = -10$, отже, $F^*(x)$ = 0,1 за умови -10 < $x \leq$ -8.

Значення X < -6, а саме $x_1 = -10$ та $x_2 = -8$, спостерігали з відносною частотою відповідно 0,1 і 0,1, отже, $F^*(x)$ = 0,2 за умови -8 < $x \leq$6.

Значення X < 5, а саме x_1 = -10, $x_2 = -8$ і $x_2 = -6$, спостерігали з відносною частотою відповідно 0,1, 0,1, 0,1, отже, $F^*(x)$ = 0,1 + 0,1+ 0,1 = 0,3 за умови – 6 < $x \leq$ 5.

Значення X < 10, а саме $x_1 = -10$, $x_2 = -8$, $x_3 = -6, x_4 = 5$ спостерігали з відносною частотою відповідно 0,1, 0,1, 0,1, 0,2, отже, $F^*(x) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}5$ за умови $5 < x \leq 10$.

Значення X < 15, а саме $x_1 = -10$, $x_2 = -8$, $x_3 = -6, x_4 = 5$, $x_5 = 10$ спостерігали з відносною частотою відповідно 0,1, 0,1, 0,1, 0,2, 0,2, отже, $F^*(x) = 0{,}7$, при $10 < x \leq 15$.

Значення X < 20, а саме $x_1 = -10$, $x_2 = -8$, $x_3 = -6, x_4 = 5$, $x_5 = 10$, $x_6 = 15$ спостерігали з відносною частотою відповідно 0,1, 0,1, 0,1, 0,2, 0,2, 0,2, отже, $F^*(x) = 0{,}9$, при $15 < x \leq 20$.

Оскільки x = 20 є найбільшою варіантою, отже, $F^*(x) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1$ при x > 20.

Отже, шукана статистична функція розподілу $F^*(x)$ помилок 10 вимірювань дальності до мети має вигляд

$$F^* = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq -10, \\ 0{,}1 & \text{при} \quad -10 < x \leq -8, \\ 0{,}2 & \text{при} \quad -8 < x \leq -6, \\ 0{,}3 & \text{при} \quad -6 < x \leq 5, \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 5 < x \leq 10, \\ 0{,}7 & \text{при} \quad 10 < x \leq 15, \\ 0{,}9 & \text{при} \quad 15 < x \leq 20, \\ 1 & \text{при} \quad x > 20. \end{cases}$$

Графік цієї функції зображено на рис. 5.1.

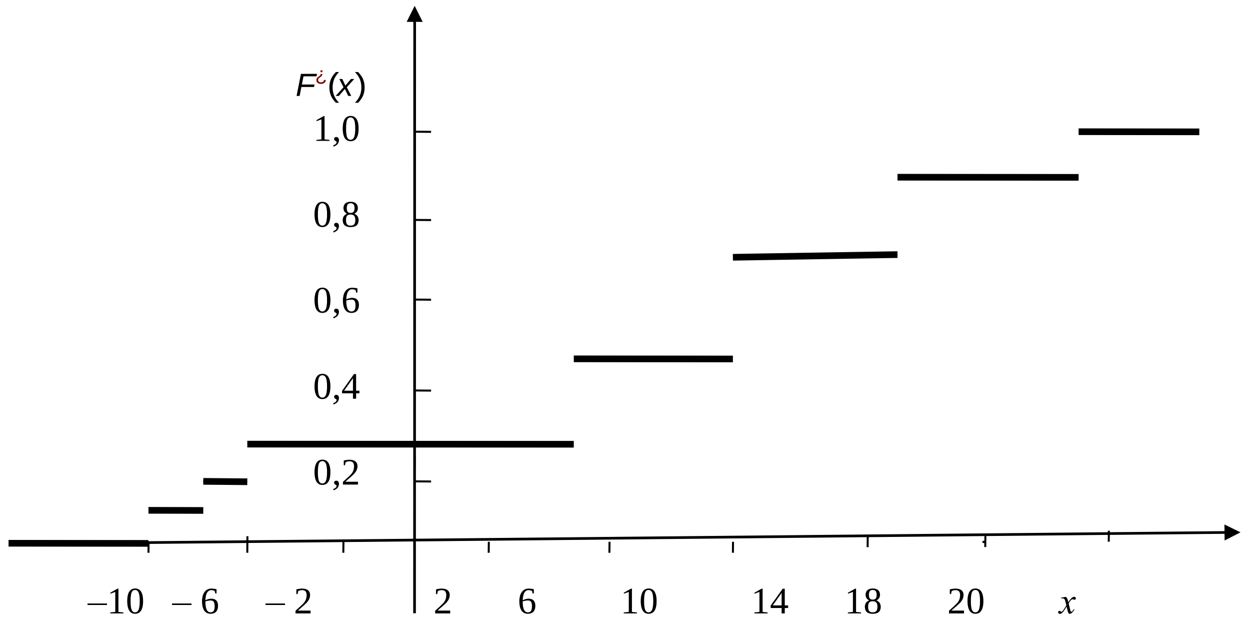

Рис. 5.1

Слід зазначити, що за великої кількості дослідів n побудова статистичної функції розподілу $F^*(x)$ – дуже складна операція, тому часто зручніше використовувати інші характеристики статистичних розподілів, аналогічними не до функції розподілу *F(x)*, а щільності ймовірності *f(x)*. Такими наочними графічними зображеннями статистичного розподілу вибірки є полігон відносних частот і гістограма.

5.2.3. Полігон і гістограма

Якщо досліджувана ознака генеральної сукупності, яку відображає випадкова величина *X*, має дискретний характер, і обсяг вибірки є невеликим, то в цьому разі для зображення статистичного розподілу вибірки зручніше використовувати полігон відносних частот.

Для побудови полігону відносних частот на осі абсцис відкладають варіанти x_i, а на осі ординат – відповідні до них відносні частоти W_i. Точки (x_i,W_i) з'єднують відрізками прямих, отримуючи полігон відносних частот вибірки.

Визначення 5.14. Полігоном відносних частот вибірки називають ламану лінію, відрізки якої з'єднують точки (x_i,W_i), де x_i – варіанти, а W_i – відповідні до них відносні частоти.

На рис. 5.2 зображено полігон відносних частот прикладу 5.1.

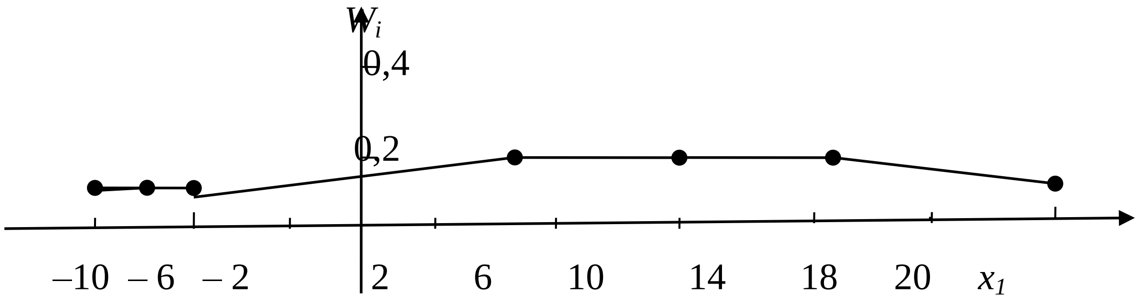

Рис. 5.2

У разі досить великого обсягу вибірки зобразити статистичний розподіл вибірки як полігон може бути засkладно, а під час розв'язання багатьох задач – і недоцільно, наприклад, коли досліджувана випадкова величина є неперервною. За таких умов для зображення статистичного розподілу вибірки зручніше використовувати гістограму відносних частот.

Для побудови гістограми відносних частот інтервал, до якого належать всі спостережувані значення випадкової величини, розбивають на i часткових інтервалів довжиною h і для кожного часткового інтервалу h_i знаходять W_i – суму відносних частот варіант, які потрапили до i-го інтервалу.

Визначення 5.15. Гістограмою відносних частот вибірки називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких слугують часткові інтервали довжиною h, а висоти дорівнюють відношенню W_i/h (щільність відносних частот).

Щодо числа розбиття i, то їхню кількість вибирають у такий спосіб, щоб результати вимірювань були доступними для достатнього огляду і містили досить велику кількість відомостей.

Гістограму відносних частот будують так: на осі абсцис відкладають часткові інтервали і на кожному з них будують прямокутник, площа якого дорівнює W_i – відносній частоті варіант, що потрапили до цього часткового інтервалу, відповідно, висота цього прямокутника дорівнює W_i/h.

Зі способу побудови гістограми відносних частот випливає, що її повна площа дорівнює сумі всіх відносних частот варіант вибірки, тобто одиниці.

Для прикладу побудуємо гістограму відносних частот статистичної сукупності помилок вимірювань дальності за допомогою далекоміра.

Приклад 5.2. Потрібно побудувати гістограму відносних частот для такого статистичного розподілу частоти помилок вимірювань:

h_I	[– 20,– 15]	(– 15,– 10]	(–10,– 5]	(– 5, 0]	(0,5]	(5,10]	(10,15]	(15,20]
n_i	2	8	17	24	26	13	6	4

Розв'язання. Для кожного часткового інтервалу h_I визначимо W_i – відносну частоту помилок вимірювань. Оскільки обсяг вибірки $n = \sum n_i = 100$, як наслідок, для статистичного розподілу відносних частот, маємо:

h_I	[– 20,– 15]	(– 15, – 10]	(–10, – 5]	(– 5, 0]	(0,5]	(5,10]	(10,15]	(15,20]
W_i	0,02	0,08	0,17	0,24	0,26	0,13	0,06	0,04

Нині визначивши для кожного часткового прямокутника його висоти W_i/h, де h = 5, будуємо гістограму відносних частот помилок вимірювань (рис. 5.3).

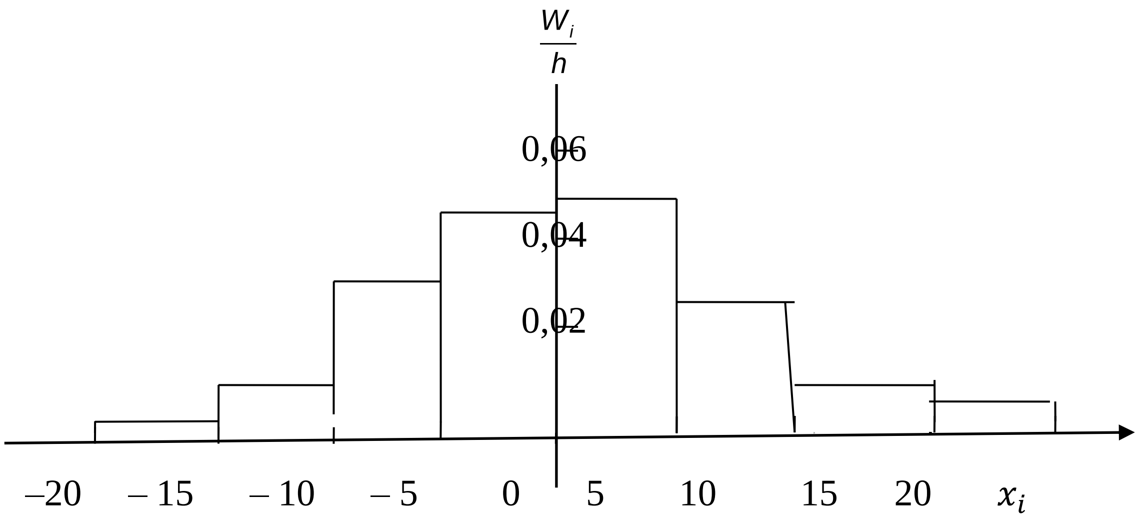

Рис. 5.3

Очевидно, що якщо точки гістограми з'єднати плавною лінією, то ця лінія в першому наближенні буде відображати графік щільності ймовірності випадкової величини *X*. Водночас, якщо збільшувати число вимірювань і вибирати дрібніші часткові інтервали розбиття, то гістограма буде дедалі більше наближатися до щільності ймовірності випадкової величини *X*.

5.2.4. Числові характеристики статистичного розподілу вибірки

Закон розподілу випадкової величини являє собою деяку функцію, зазначення цієї функції повністю описує випадкову величину з імовірнісної думки. Однак під час вирішення багатьох практичних завдань немає потреби характеризувати випадкову величину у докладний спосіб, а достатньо вказати тільки окремі числові характеристики, які характеризують істотні риси розподілу випадкової величини. Основними числовими характеристиками випадкової величини є математичне сподівання і дисперсія. Математичне сподівання характеризує середнє значення, біля якого групують можливі значення випадкової величини, а дисперсія характеризує ступінь розкиданості цих значень відносно середнього значення.

Є аналогічні числові характеристики і для статистичних розподілів вибірки. Аналогією математичного сподівання випадкової величини X є середнє арифметичне спостережуваних значень випадкової величини у вибірці:

$$M^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{k} x_j^* \cdot n_j}{n} = \sum_{j=1}^{k} x_j^* \cdot W_j, \qquad (5.1)$$

де x_i – значення випадкової величини, що спостерігають в i-ому випробуванні, n – число випробувань у вибірці, k – число варіант у вибірці, x_j^* – варіанта вибірки, j – порядковий номер варіанти у варіаційному ряді вибірки, n_i – частота варіанти, W_i – відносна частота варіанти.

Цю характеристику називають статистичним середнім вибірки з випадкової величини *X*.

У разі великого числа випробувань n середнє арифметичне спостережуваних значень випадкової величини у вибірці наближається (збігається за ймовірністю) до її математичного сподівання і може наближено дорівнювати математичному сподіванню.

Аналогією дисперсії випадкової величини X є статистична дисперсія, яку визначають так:

$$D^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M^*[X])^2}{n}, \quad (5.2)$$

де x_i – значення випадкової величини, що спостерігається в i-ому випробуванні, n – число випробувань у вибірці, $M^*[X]$ – статистичне середнє вибірки.

Аналогічно визначають статистичні початкові і центральні моменти будь-яких порядків для вибірки:

$$M^*[X^k] = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n},$$

$$M^*[(X - M^*[X^k])^k] = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M^*[X^k])^k}{n}.$$

Зауважимо, що в разі збільшення числа спостережень всі статистичні характеристики будуть збігатися за ймовірністю до відповідних числових характеристик випадкової величини і в разі досить великої кількості спостережень n можуть наближено дорівнювати їм.

Приклад 5.3. Потрібно визначити статистичне середнє і статистичну дисперсію розподілу помилок 10 вимірювань дальності до цілі за допомоги далекоміра. Результати вимірювань подано в таблиці:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i, *м*	5	– 8	10	15	5	– 10	– 6	20	10	15

Розв'язання. Застосовуючи формули (5.1) і (5.2), отримуємо:

$$M^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 5{,}6 \text{ м},$$

$$D^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M^*[X])^2}{n} \approx 98{,}64 \text{ м}^2.$$

Середнє квадратичне статистичне відхилення вибірки дорівнюватиме:

$$\sigma_X^* = \sqrt{D^*[X]} \approx 9{,}93 \text{ м}.$$

5.3. Статистичні оцінки параметрів розподілу випадкової величини

Нехай потрібно вивчити випадкову величину *X*, яка буде показувати кількісну ознаку генеральної сукупності. Припустимо, що з теоретичних міркувань вдалося встановити, за яким саме законом розподілено випадкову величину *X*. Природно виникає завдання оцінити параметри, за якими визначають цей розподіл. Наприклад, якщо заздалегідь відомо, що досліджувану випадкову величину розподілено за нормальним законом, то необхідно оцінити (приблизно знайти) математичне сподівання і середньоквадратичне відхилення, оскільки ці два параметри повністю визначають нормальний розподіл. Якщо ж є підстава вважати, що випадкова величина має, наприклад, розподіл Пуассона, то необхідно оцінити параметр, за яким цей розподіл визначають.

Зазвичай в розпорядженні дослідника є лише дані вибірки x_1, $x_2,..., x_n$, отримані внаслідок *n* незалежних спостережень над випадковою величиною *X*. Через ці дані і виражають оцінюваний параметр. Наприклад, для оцінювання математичного сподівання нормального розподілу можна використати формулу (3.1) $M^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ для середнього арифметичного спостережуваних значень x_1, $x_2,\ldots, x_n$, ипадкової величини у вибірці.

Спостережувані значення x_1, $x_2,\ldots, x_n$, випадкової величини *X* у вибірці, в разі її багаторазового повторення, зі свого боку, слід розглядати як незалежні випадкові величини X_1, $X_2,..., X_n$, кожну з яких розподілено за тим самим законом, що і випадкову величину X.

Виражаючи для кожної вибірки оцінюваний параметр, ми доходимо того, що оцінюваний параметр буде являти собою функцію від спостережуваних випадкових величин $X_1,\ X_2,\dots,X_n$. Отже, знайти статистичну оцінку невідомого параметра теоретичного розподілу означає знайти функцію від спостережуваних випадкових величин, яка і дає наближене значення оцінюваного параметра. Наприклад, для розглянутого вище оцінювання математичного сподівання нормального розподілу слугує функція $M^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ – середнє арифметичне спостережуваних значень випадкової величини у вибірці.

Отже, статистичною оцінкою невідомого параметра теоретичного розподілу випадкової величини X називають функцію від спостережуваних випадкових величин $X_1, X_2,\dots, X_n$.

Для того, щоб статистичні оцінки давали «гарні» наближення оцінюваних параметрів, вони повинні підпорядковуватись певним вимогам. Розглянемо ці вимоги.

5.3.1. Незміщені, ефективні і спроможні оцінки

Припустимо, що за вибіркою з обсягом n знайдено статистичну оцінку Q_1^* параметра Q теоретичного розподілу випадкової величини X. Повторимо дослід, тобто виберемо з генеральної сукупності іншу вибірку того самого обсягу і за її даними знайдемо статистичну оцінку Q_2^*. Повторюючи дослід багаторазово, отримаємо числа Q_1^*, $Q_2^*,\dots,\ Q_k^*$, які, загалом кажучи, різняться між собою. Отже, сукупність чисел Q_1^*, $Q_2^*,\dots,\ Q_k^*$, можна розглядати як випадкову величину Q^*, а числа Q_1^*, $Q_2^*,\dots,\ Q_k^*$,, що являють собою статистичні оцінки параметра Q - як її можливі значення. Вочевидь для того, щоб випадкова величина Q^*, значення якої є статистичні оцінки невідомого параметра Q, становила практичну цінність, вона повинна мати таку властивість. Необхідно, щоб математичне сподівання $M[Q^*]$ випадкової величини Q^* дорівнювало оцінюваному параметру Q: $M[Q^*] = Q$. В іншому разі випадкова величина Q^* буде давати систематичну помилку в оцінюванні невідомого параметра Q: або завищену ($M[Q^*]>Q$), або занижену ($M[Q^*]<Q$). Інакше кажучи, дотримання вимог $M[Q^*]=Q$ запобігає отриманню систематичних помилок, тобто помилок, що спотворюють результати вимірювань в одному певному напрямку. Хоча дотримання цієї вимоги також не усуне помилки (одні значення Q^* можуть бути більшими, а інші – меншими за Q), проте в цьому разі помилки різних знаків будуть траплятися однаково часто.

Визначення 5.15. Випадкову величину Q^*, значення якої є статистичними оцінками невідомого параметра Q теоретичного розподілу випадкової величини X, називають незміщеною, якщо математичне сподівання $M[Q^*]$ випадкової величини Q^* дорівнює оцінюваному параметру Q, тобто:

$$M[Q^*] = Q.. \qquad (5.3)$$

Визначення 5.16. Зміщеною називають випадкову величину Q^*, математичне сподівання $M[Q^*]$ якої не дорівнює оцінюваному параметру, Q тобто $M[Q^*]\neq Q$. Однак було б помилкою вважати, що незміщена оцінка завжди дає хороше наближення оцінюваного параметра. Справді, можливі значення випадкової величини можуть бути сильно розсіяними навколо свого середнього значення $M[Q^*]$, тобто дисперсія $D[Q^*]$ може бути чималою. У цьому разі знайдене за даними невеликої кількості випадкових вибірок математичне сподівання $M[Q^*]$ випадкової величини Q^* може виявитися досить віддаленим від самого оцінюваного параметра Q. Тому, прийнявши $M[Q^*]$ як наближене значення оцінюваного параметра, ми припустилися б великої помилки. Якщо ж наполягати на тому, щоб дисперсія $D[Q^*]$ випадкової величини Q^* була малою, то ймовірність припуститися великої помилки виключають. Через це від випадкової величини статистичної оцінки параметра вимагають ефективності.

Визначення 5.17. Випадкову величину Q^* статистичної оцінки параметра Q (за умови заданого обсягу вибірки n) називають ефективною, якщо її дисперсія $D[Q^*]$ є мінімальною, тобто $D[Q^*] = D_{min}$.

Під час розгляду вибірок великого обсягу (n є велике!) від випадкової величини Q^* статистичної оцінки параметра Q вимагають спроможності.

Визначення 5.18. Випадкову величину Q^* статистичної оцінки параметра Q називають спроможною, якщо вона збігається за ймовірністю до оцінюваного параметра Q у разі необмеженого зростання обсягу вибірки n, тобто:

$$\lim_{n\to\infty} P[|Q^* - Q| < \varepsilon] = 1, \tag{5.4}$$

де ε - нескінченно мале додатне число. Для задовільнення вимоги (5.3) достатньо, щоб дисперсія $D[Q^*]$ випадкової величини наближалася до нуля за умови $n\to\infty$, тобто щоб було здійснено умову:

$$\lim_{n\to\infty} D[Q^*] = 0. \tag{5.5}$$

З визначення випливає, що спроможність оцінки означає, що за достатньо великого обсягу вибірки n з нескінченно великою ймовірністю відхилення оцінки від істинного значення параметра є меншим за заздалегідь задану величину, якою б малою вона не була.

Отже, під час розроблення практичних методів опрацювання дослідних даних для отримання оцінок, які приймають за наближені значення шуканих параметрів випадкової величини, необхідно спиратися на сформульовані вище властивості оцінок (5.3), (5.4) і (5.5).

5.3.2. Визначення наближених значень математичного сподівання і дисперсії випадкової величини

Нехай є випадкова величина X з математичним сподіванням $M[X] = m_x$ і дисперсією $D[X] = D_x$; обидва параметри є невідомими. Потрібно на підставі дослідних даних знайти спроможні і незсунені оцінки цих параметрів.

Позначимо через $x_1,\ x_2,\dots,x_n$ значення випадкової величини X, отриманих внаслідок проведення n незалежних рівноточних вимірювань, тобто вимірювань, які проводили в однакових умовах. Зазвичай вважають ці умови виконаними, якщо вимірювання проводили за допомогою одного приладу. Водночас, як ми вже говорили, вибіркові значення x_1, x_2,…, x_n випадкової величини *X*, які отримали внаслідок n незалежних рівноточних вимірювань, можна розглядати також як випадкові величини $X_1, X_2,\ldots, X_n$ (наприклад, під час багаторазового повторення n незалежних рівноточних вимірювань або в теоретичних судженнях). Кожну із спостережуваних випадкових величин $X_1, X_2,\ldots, X_n$ розподілено за тим самим законом, що і випадкову величину X, а, отже, вона має ті самі числові характеристики, які має випадкова величина *X*. Тому в наших подальших міркуваннях значення x_1, x_2,…, x_n випадкової величини *X*, отримані внаслідок проведення n незалежних рівноточних вимірювань, ми будемо розглядати як випадкові величини X_1, $X_2,\ldots, X_n$.

За статистичну оцінку для математичного сподівання m_X випадкової величини *X* ми приймемо середнє арифметичне спостережуваних значень $X_1, X_2,\ldots, X_n$ і позначимо як $\bar{X}$, як наслідок:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}. \qquad (5.6)$$

Покажемо, що ця оцінка для математичного сподівання m_X випадкової величини *X* є спроможною і незміщеною. Справді, відповідно до закону великих чисел:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - m_X\right| < \varepsilon\right] = 1.$$

Це означає, що $\bar{X}$ є спроможною оцінкою. Оцінка $\bar{X}$ є також і незміщеною, оскільки:

$$M[\bar{X}] = M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} M[X_i]}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_X}{n} = m_X.$$

Перейдемо до оцінки дисперсії D_x. Якщо за оцінку D_x вважати статистичну дисперсію вибірки (5.2):

$$D^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M^*[X])^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n},$$

то можна показати (доказ виключаємо), що ця оцінка є спроможною, але не є незміщеною, тобто $M[D^*[X]] \neq D_X$.

Ця оцінка призводить до систематичних помилок, даючи занижені значення генеральної дисперсії. Пояснюють це тим, що середнє арифметичне спостережуваних значень X_1, $X_2,\ldots,X_n$ і математичне сподівання $M[X] = m_X$ випадкової величини X відрізняються. Якщо ж математичне сподівання $M[X] = m_X$ випадкової величини X є відомим, то, природно, що за оцінку для дисперсії D_x випадкової величини X з відомим математичним сподіванням $M[X] = m_X$ необхідно приймати статистичну дисперсію:

$$D^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_X)^2}{n}$$

Для того, щоб виправити цю систематичну помилку, якщо для оцінки D_x використовують не математичне сподівання $M[X] = m_X$ випадкової величини X, а середнє арифметичне $\bar{X}$ спостережуваних значень X_1, $X_2,\ldots,X_n$ і отримати оцінку для генеральної дисперсії D_x, яка є спроможною і незміщеною, для цього достатньо помножити статистичну дисперсію вибірки $D^*[X]$ на дріб $\frac{n}{n-1}$. Зробивши це, отримаємо:

$$M\left[\frac{n}{n-1}D^*[X]\right] = \frac{n}{n-1}\,M[D^*[X]] = D_X.$$

Отже, якщо внаслідок проведених n незалежних рівноточних вимірювань випадкової величини X з невідомим математичним сподіванням $M[X] = m_X$ і дисперсією $D[X] = D_x$ отримують значення X_1, $X_2,\ldots,X_n$, то для визначення цих параметрів потрібно використовувати, відповідно, такі наближені оцінки:

$$\overline{m_X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

$$\overline{D_X} = \frac{n}{n-1}D^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{m_X})^2}{n-1} \qquad (5.7)$$

Ці обидві наближені оцінки є і спроможними, і незміщеними.

Розглянемо приклад застосування оцінок (5.7) на практиці. Під час обробки результатів вимірювання, наприклад фізичної величини, необхідно оцінити істинне значення вимірюваної величини і точність її виміру. Для оцінювання значення вимірюваної величини і точності її виміру застосовують формули (5.7). Оскільки зазвичай результати вимірювань є взаємно незалежними, мають одне і те саме математичне сподівання (істинне значення вимірюваної величини) і однакову дисперсію (в разі рівноточних вимірювань), то можливо застосовувати формули (5.7). Істинне значення вимірюваної величини оцінюють за середнім арифметичним випадкових результатів вимірювань $\bar{X}$, а точність вимірів (похибку вимірів) у теорії помилок заведено характеризувати за допомогою середнього квадратичного відхилення $\sqrt{\overline{D}}$ випадкових результатів вимірювання. Однак визначення $\bar{X}$ і D за формулами (5.7) іноді призводить до складних обчислень, тому на практиці доцільно використовувати формули:

$$\overline{m_X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)}{n} + a,$$

$$\overline{D_X} = \frac{n}{n-1}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2}{n} - \left(\overline{X} - a\right)^2\right], \qquad (5.8)$$

які у разі вдалого підбору числа а (зазвичай воно виражає ймовірне значення вимірюваної величини) значно полегшують опрацювання статистичного матеріалу. Зауважимо, що формули (5.8) з простими перетвореннями перетворюють у формули (5.7).

Приклад. 5.4. Кожну годину вимірювали напругу струму в електромережі. Результати вимірювань у вольтах представлено як статистичний ряд:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i, В	222	219	224	220	218	217	221	220	215	218	223	225

i	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
x_i, В	220	226	221	216	211	219	220	221	222	218	221	219

Потрібно знайти оцінки для значення вимірюваної величини і точності її виміру за такими результатами вимірювань.

Розв'язання. Оцінки $\bar{x}$ і $\overline{d}$ відповідно до значення вимірюваної величини і дисперсії для конкретних результатів вимірювань знайдемо за формулами (5.8), передбачивши, що a = 220 В (значення вимірюваної величини за паспортними даними), і замістивши в них випадкові величини X_i і X конкретними значеннями x_i і $\bar{x}$ цих випадкових величин, отриманих внаслідок вимірювань. Оцінку σ для середнього квадратичного відхилення конкретних вимірювань, тобто точності виміру, знайдемо за формулою $\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{d}}$. Усі необхідні обчислення наведено в таблиці нижче:

Як наслідок:

$$\frac{\sum_{i=1}^{24}(x_i - 220)}{24} + 220 = \frac{6}{24} + 220 = 220.25 \text{ В},$$

$$\overline{d} = \frac{24}{24-1}\left[\frac{\sum_{i=1}^{24}(x_i - 220)^2}{24} - (220{,}25 - 220)^2\right] \approx 7{,}06 \text{ В}^2,$$

$$\overline{\sigma} = \sqrt{7{,}06} \approx 2{,}66 \text{ В}.$$

	$x_i - a$	$(x_i - a)^2$	i	$x_i - a$	$(x_i - a)^2$	i	$x_i - a$	$(x_i - a)^2$
1	2	4	9	–5	25	17	1	1
2	–1	1	10	–2	4	18	–1	1
3	4	16	11	3	9	19	0	0
4	0	0	12	5	25	20	1	1
5	–2	4	13	0	0	21	2	4
6	–3	9	14	6	36	22	–2	4
7	1	1	15	1	1	23	1	1
8	0	0	16	–4	16	24	–1	1
$\sum$	1	35		4	116		1	13

Отже, значення вимірюваної величини в таких вимірюваннях дорівнює 220,25 В, а точність виміру 2,66 В.

Розглянуті вище оцінки (5.7) називають точковими, оскільки їх визначають за одним числом. Зрозуміло, що у разі малого обсягу вибірки n точкові оцінки $\overline{X}$ (3.6) і $\overline{D} = \frac{n}{n-1} D^*[X]$ (5.7) можуть значно відрізнятися від оцінюваних параметрів $M[X]$ і D_x відповідно, тобто призводити до грубих помилок. З цієї причини у разі невеликого обсягу вибірки слід використовувати інтервальні оцінки.

Визначення 5.19. Інтервальною називають оцінку, яку визначають за двома числами – кінцями інтервалу.

Інтервальні оцінки дозволяють встановити точність і надійність оцінки. Розкриємо суть цих понять.

5.3.3. Точність оцінки. Довірча ймовірність (надійність). Довірчий інтервал

Нехай знайдена за даними вибірки статистична характеристика Q^* слугує оцінкою невідомого параметра Q, випадкової величини X. Будемо вважати Q постійним числом (Q може бути і випадковою величиною). Зрозуміло, що Q^* точніше визначатиме параметр Q, якщо дедалі буде зменшуватися абсолютна величина різниці $|Q - Q^*|$. Отже, точність оцінки можна характеризувати за допомогою додатного числа δ>0, яке встановлює, що оцінку Q^* здійснюють з цією точністю, якщо вона задовольняє нерівність $|Q - Q^*| < \delta$. Однак, оскільки оцінка Q^* має випадковий характер, стверджувати, що оцінка задовольняє цю нерівність, можливо лише з певною ймовірністю β.

Визначення 5.20. Надійністю (довірчою ймовірністю) оцінки параметра Q за Q^* називають ймовірність β, з якою виконують нерівність$|Q - Q^*| < \delta$.

Нехай ймовірність того, що$|Q - Q^*| < \delta$. Дорівнює β (зазвичай для β вибирають числа, близькі до одиниці, наприклад, 0,95, 0,99): $P[|Q - Q^*| < \delta] = \beta$. Замінивши нерівність $|Q - Q^*| < \delta$ рівносильною до неї подвійною нерівністю $-\delta < Q - Q^* < \delta$ або $Q^* - \delta < Q < Q^* + \delta$, маємо:

$$P[Q^* - \delta < Q < Q^* + \delta] = \beta. \qquad (5.9)$$

Зауважимо, що в рівності (5.9) невідоме значення параметра Q є невипадковою величиною, а інтервал $(Q^* - \delta, Q^* + \delta)$ є випадковою величиною, оскільки положення інтервалу на числовій осі залежить від випадкової величини Q^* (центр інтервалу); довжина інтервалу 2δ теж в загальному є випадковою величиною. Тому в такому разі ймовірність β краще тлумачити не як ймовірність потрапляння невідомого параметра Q в інтервал $(Q^* - \delta, Q^* + \delta)$, а як ймовірність того, що випадковий інтервал $(Q^* - \delta, Q^* + \delta)$ покриває невідомий параметр Q. Інакше кажучи, довірчу ймовірність не слід пов'язувати з оцінюваним параметром; вона пов'язана лише з границями довірчого інтервалу, які змінюються з кожною новою вибіркою.

Визначення 5.21. Інтервал $(Q^* - \delta, Q^* + \delta)$, який покриває невідомий параметр із заданою надійністю (довірчою ймовірністю) β, називають довірчим інтервалом.

Як приклад розглянемо задачу про довірчий інтервал для математичного сподівання.

5.3.4. Побудова довірчого інтервалу для оцінки математичного сподівання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом з відомою дисперсією

Нехай кількісну ознаку X генеральної сукупності розподілено за нормальним законом $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, причому середнє квадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{D[X]}$ (або дисперсія $D[X]$) цього розподілу є відомим. Потрібно оцінити невідоме математичне сподівання a генеральної сукупності за вибірковою середньою випадковою величиною $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, де $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – випадкові величини незалежних рівноточних вимірювань. Зробимо нашим завданням пошук довірчих інтервалів, що покривають параметр a з надійністю (довірчою ймовірністю) β, і визначення точності σ^δ оцінки параметра a залежно від обсягу n вибірки.

Оскільки величину X розподілено за нормальним законом, то вибіркову середню випадкову величину $\bar{X}$, знайдену за допомогою незалежних спостережень, також розподілено нормально (приймемо це твердження без доведення). Параметри розподілу $\bar{X}$ є такі: $M[\bar{X}] = a$, $D[\bar{X}] = \frac{D[X]}{n}$, $\sigma[\bar{X}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Потребуємо тепер, щоб було виконано співвідношення

$$P\left[\left|\bar{X} - a\right| < \delta\right] = \beta. \qquad (5.10)$$

З огляду на те, що випадкову величину $\bar{X}$ розподілено нормально, виразимо довірчу імовірність β в лівій частині рівності (5.10) через нормовану функцію Лапласа:

$$P\left(a-\delta<\overline{X}<a+\delta\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-\delta\sqrt{n}}{\sigma}}^{\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\left[\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right]. \quad (5.11)$$

Нагадаємо, що нормована функція Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ дозволяє визначити ймовірність $P(x_1<x<x_2)$ потрапляння випадкової величини X, розподіленої нормально, у заданий інтервал (x_1, x_2):

$$P(x_1<X<x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{x_1-a}{\sigma}}^{\frac{x_2-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{x_2-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{x_1-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]=$$

$$=\left[\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right)\right].$$

У такому разі $x_1=a-\delta,\ x_2=a+\delta$.

Оскільки функція Лапласа є непарною, то рівність (5.11) набуває вигляду:

$$P\left(a-\delta<\overline{X}<a+\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Беручи до уваги, що ймовірність $P\left(a-\delta<\overline{X}<a+\delta\right)$ є заданою і дорівнює β, тоді з рівняння $2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)=\beta$ знаходимо точність $\delta=\delta_\beta$ оцінки параметра a: $\delta_\beta=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right)$, де $\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right)$ – значення зворотної нормованої функції Лапласа. Позначимо значення $\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right)$ через t_β: $\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right)=t_\beta$. Число t_β визначають за таблицею функції Лапласа (додаток 2). Знаходять аргумент t_β, якому відповідає значення функції Лапласа, що дорівнює $\frac{\beta}{2}$. Тепер для точності δ оцінки параметра а отримаємо $\delta=\delta_\beta=\frac{\sigma t_\beta}{\sqrt{n}}$.

Отже, поставлене вище завдання є повністю вирішеним, і його остаточне розв'язання має вигляд:

$$P\left(\overline{X}-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}<a<\overline{X}+\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)=\beta.$$

Зміст отриманого співвідношення є таким: з надійністю β можна стверджувати, що довірчі інтервали $\left(\overline{X}-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}};\overline{X}+\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right)$ покривають невідомий параметр a; точність оцінки $\delta=\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$ - половина довжини довірчого інтервалу, симетричного відносно X.

Пояснимо зміст заданої надійності. Надійність, наприклад, β = 0,95 вказує, що якщо здійснили досить велику кількість вибірок, то 95% з них визначає такі довірчі інтервали, які справді включають параметр; лише в 5% випадків він може вийти за границі довірчого інтервалу.

Зауваження 1. Якщо потрібно оцінити математичне сподівання з заздалегідь заданою точністю δ і надійністю β, то мінімальний обсяг вибірки, який забезпечить цю точність, знаходять за формулою: $n=\frac{\sigma^2t^2}{\delta^2}$ $\left(\textit{наслідок рівняння } \delta=\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right)$.

Величина довірчих інтервалів залежить від обсягу n вибірки і, як наслідок, від вибіркової середньої випадкової величини $\overline{X}$. Під час розрахунку довірчого інтервалу для конкретної вибірки з обсягом n у виразі $\left(\overline{X}-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}};\overline{X}+\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right)$ вибіркову середню випадкову величину $\overline{X}$ потрібно замінити на її конкретне значення $\bar{x}$ для цієї вибірки: $\left(\bar{x}-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}};\bar{x}+\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right)$.

Зауваження 2. Оцінку $\left|\overline{X}-a\right|<\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$ називають класичною. Із формули $\delta=\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$, яка визначає точність класичної оцінки, можна зробити такі висновки:

1) під час зростання обсягу n вибірки число δ зменшується, отже, точність оцінки збільшується;

2) збільшення надійності оцінки $\beta=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$ призводить до збільшення $\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$ (Ф (x) – функція, що зростає), і, як наслідок, до зростання δ; інакше кажучи, збільшення надійності класичної оцінки спричиняє зменшення її точності.

Приклад. 5.5. Випадкова величина X має нормальний розподіл з відомим середнім квадратичним відхиленням σ = 3. Потрібно знайти довірчі інтервали для оцінки невідомого математичного сподівання a за вибірковим середнім $\bar{x}$ випадкової величини $\overline{X}$, якщо обсяг вибірки n = 36 і задано надійність оцінки β = 0,95.

Розв'язання. Знайдемо $t_\beta = \Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right)$. Зі співвідношення 2Ф($t_\beta$) = 0,95 отримаємо Ф($t_\beta$) = 0,475. За таблицею для значень функції Лапласа (додаток 2) знаходимо t_β = 1,96.

Знайдемо точність оцінки: $\delta_\beta = \frac{\sigma t_\beta}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96\cdot 3}{\sqrt{36}} = 0{,}98$.

Тепер можемо записати довірчий інтервал: $(\bar{x} - 0{,}98; \bar{x} + 0{,}98)$. Наприклад, якщо $\bar{x} = 4{,}1$, то довірчий інтервал має такі довірчі границі: $\bar{x} - 0{,}98 = 3{,}12$; $\bar{x} + 0{,}98 = 5{,}08$.

Отже, значення невідомого параметра а, що узгоджуються з даними вибірки, задовольняють нерівність 3,12 <а < 5,08. Підкреслимо, що було б помилкою написати Р(3,12 <а < 5,08) = 0,95. Справді, оскільки a – постійна величина, то вона або перебуває в знайденому інтервалі (тоді подія 3,12 < а < 5,08 є достовірною, і її ймовірність дорівнює одиниці), або не перебуває в ньому (в цьому разі подія 3,12 < а < 5,08 є неможливою, і її ймовірність дорівнює нулю). Отже, як ми вже говорили, довірчу ймовірність не слід пов'язувати з оцінюваним параметром; вона пов'язана лише з границями довірчого інтервалу, які змінюються з кожною новою вибіркою.

5.3.5. Побудова довірчого інтервалу для оцінки математичного сподівання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом з невідомою дисперсією

Нехай кількісну ознаку X генеральної сукупності розподілено за нормальним законом $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, причому середнє квадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{D[X]}$ (або дисперсія $D[X]$) цього розподілу є невідомим. Потрібно оцінити невідоме математичне сподівання a генеральної сукупності за допомогою довірчих інтервалів. Зрозуміло, неможливо використати результати попереднього параграфу, в якому σ вважали відомим.

Для точної побудови довірчого інтервалу необхідно знати закон розподілу вибіркової середньої випадкової величини $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, де X_1, $X_2, \dots, X_n$ – випадкові величини незалежних рівноточних вимірювань, який загалом залежить від самих невідомих параметрів величини X.

Виявлено, що інколи від випадкової величини $\bar{X}$ можна переходити до іншої випадкової величини, що є функцією спостережуваних значень X_1, $X_2, \dots, X_n$, закон розподілу якої не залежить від невідомих параметрів величини X, а залежить тільки від обсягу вибірки n і від виду закону розподілу випадкової величини X.

Наприклад, доведено, що за нормального розподілу величини X випадкова величина (її можливі значення будемо позначати через t):

$$T = \sqrt{n}\frac{\bar{X}-a}{\sqrt{\overline{D}}}, \tag{5.12}$$

де $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, $\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$ – оцінки невідомих параметрів a і $D[X]$, випадкової величини X, підпорядковується розподілу Стьюдента з $k = n - 1$ ступенями свободи. Щільність ймовірності розподілу Стьюдента має вигляд:

$$S_{n-1}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \tag{5.13}$$

де $\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}\,du$ – гамма-функція.

З формули (5.13) бачимо, що розподіл Стьюдента не залежить від оцінок $\bar{X}$ і $\overline{D}$, а залежить тільки від обсягу вибірки n (або від числа ступенів свободи $k = n - 1$, що є тим самим); ця особливість є його великою перевагою. Водночас $S_{n-1}(t)$ є парною функцією від t.

Розглянемо застосування розподілу Стьюдента під час побудови довірчого інтервалу для математичного сподівання.

Нехай здійснили вибірку з обсягом n для випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом з невідомими математичним сподіванням a і дисперсією D. На підставі дослідних даних для цих параметрів побудовано оцінки $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ і $\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$, які розглядають як випадкові величини.

Потрібно побудувати довірчий інтервал, що відповідає довірчій ймовірності β, для математичного сподівання випадкової величини X.

Позначимо через δ^{β} половину довжини довірчого інтервалу, симетричного відносно X. Тоді матимемо: $P\left(\left|\bar{X} - a\right| < \delta_{\beta}\right) = \beta$. Перейдемо в лівій частині цієї рівності від випадкової величини X до випадкової величини T, розподіленої за законом Стьюдента. Для цього помножимо обидві частини нерівності $\left|\bar{X} - a\right| < \delta_{\beta}$ на позитивну величину $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\overline{D}}}$, отримаємо:

$$P\left(\sqrt{n}\frac{\left|\bar{X} - a\right|}{\sqrt{\overline{D}}} < \frac{\delta_{\beta}}{\sqrt{\frac{\overline{D}}{n}}}\right) = P\left(|T| < \frac{\delta_{\beta}}{\sqrt{\frac{\overline{D}}{n}}}\right) = \beta.$$

З огляду на парність функції $S_{n-1}(t)$, отримаємо, що ймовірність β виконання нерівності $|T| < t_{\beta} = \frac{\delta_{\beta}}{\sqrt{\frac{\overline{D}}{n}}}$ дорівнює:

$$P\left(\,|T| < t_{\beta}\right) = 2\int_{0}^{t_{\beta}} S_{n-1}(t)dt = \beta. \qquad (5.14)$$

Рівність (5.14) визначає величину t_{β} залежно від довірчої ймовірності β. Для цього необхідно скористатися спеціальною таблицею (додаток 3), використовуючи яку, за довірчою ймовірністю β і обсягом вибірки n знаходять величину t_{β}.

Визначивши величину t_{β} за формулою $\delta_{\beta} = t_{\beta}\sqrt{\frac{\overline{D}}{n}}$, знаходимо половину ширини довірчого інтервалу. Після цього, замінивши в рівності $P\left(\left|\overline{X}-a\right|<t_\beta\sqrt{\frac{\overline{D}}{n}}\right)=\beta$ нерівність в круглих дужках рівносильною до неї подвійною нерівністю, отримуємо:

$$P\left(\overline{X}-t_\beta\sqrt{\frac{\overline{D}}{n}}<a<\overline{X}+t_\beta\sqrt{\frac{\overline{D}}{n}}\right)=\beta.$$

Отже, використавши розподіл Стьюдента, ми знайшли довірчий інтервал $P\left(\left|\overline{X}-a\right|<t_\beta\sqrt{\frac{\overline{D}}{n}}\right)=\beta$, що покриває невідомий параметр а з надійністю β. Тут випадкові величини $\overline{X}$ і $\overline{D}$ замінили на конкретні значення цих величин, відповідно, на $\overline{x}$ і $\overline{d}$, знайдених за вибіркою.

Приклад 5.6. Нехай кількісну ознаку X генеральної сукупності розподілено за нормальним законом. За вибіркою $x_1, x_2, \ldots, x_{16}$ з обсягом n=*16* знаходять вибіркову середню x = 20,2 і «виправлену» дисперсію вибірки $\overline{d}=\frac{\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=0{,}64$. Потрібно оцінити невідоме математичне сподівання за допомогою довірчого інтервалу з надійністю β = 0,95.

Розв'язання. Знайдемо t_β. Користуючись таблицею додатка 2, за β = 0,95 і n = 16 знаходимо t_β = 2,13.

Знайдемо довірчі границі:

$$\overline{x}-t_\beta\sqrt{\frac{\overline{d}}{n}}=20{,}2-2{,}13\sqrt{\frac{0{,}64}{16}}=19{,}774,$$

$$\overline{x}+t_\beta\sqrt{\frac{\overline{d}}{n}}=20{,}2+2{,}13\sqrt{\frac{0{,}64}{16}}=20{,}626.$$

Отже, невідомий параметр a з надійністю 0,95 перебуває в довірчому інтервалі $19{,}774<a<20{,}626$.

Приклад 3.4. Здійснено 10 незалежних дослідів над випадковою величиною X, розподіленою нормально з невідомими параметрами a і σ. Результати дослідів представлено як статистичний ряд:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2,5	2	–2,3	1,9	–2,1	2,4	2,3	–2,5	1,5	–1,7

Потрібно знайти оцінку χ для математичного сподівання і оцінити невідоме математичне сподівання а за допомогою довірчого інтервалу з надійністю β = 0,95.

Розв'язання. Маємо: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 0{,}4$; $\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2}{10-1} \approx 4{,}933$.

Користуючись таблицею додатка 3, за β = 0,95 і n =10 знаходимо t_β = 2,26 і записуємо довірчі границі:

$$\bar{x} - t_\beta\sqrt{\frac{\overline{d}}{n}} = 0{,}4 - 2{,}26\sqrt{\frac{4{,}933}{10}} = -1{,}18,$$

$$\bar{x} + t_\beta\sqrt{\frac{\overline{d}}{n}} = 0{,}4 + 2{,}26\sqrt{\frac{4{,}933}{10}} = 1{,}98.$$

Отже, невідомий параметр а з надійністю 0,95 перебуває в довірчому інтервалі $-1{,}18 < a < 1{,}98$.

Приклад 5.7. Над випадковою величиною X здійснюють 20 дослідів. Результати дослідів наведено в таблиці нижче.

Потрібно оцінити невідоме математичне сподівання a випадкової величини X за допомогою довірчого інтервалу з надійністю β = 0,95. Водночас довірчі інтервали потрібно побудувати з використанням функції Лапласа і розподілу Стьюдента і порівняти ці оцінки.

i	x_i	i	x_i
1	10,9	11	10,8
2	10,7	12	10,3
3	11,0	13	10,5
4	10,5	14	10,8
5	10,6	15	10,9
6	10,4	16	10,6
7	11,3	17	11,3
8	10,8	18	10,8
9	11,2	19	10,9
10	10,9	20	10,7

Розв'язання:

1) Побудова за допомогою функції Лапласа. Маємо: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = 10{,}78$. З таблиці функції Лапласа (додаток 2) знаходимо аргумент $t_{0,95} = \Phi^{-1}\left(\frac{0{,}95}{2}\right) \approx 1{,}96$, якому відповідає значення функції Лапласа, що дорівнює 0,475. Потім за формулою $\delta_\beta = \frac{\sigma t_\beta}{\sqrt{n}}$ знаходимо половину довжини довірчого інтервалу. В останній формулі для середнього квадратичного відхилення σ випадкової величини *X*, яке не було задано, використаємо його оцінку $\overline{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2}{20-1}} \approx 0{,}253$. Тоді $\delta_\beta = 0{,}253 \frac{1}{\sqrt{20}} 1{,}96 \approx 0{,}111$..

Тепер можемо записати довірчі границі:

$$\overline{x} - \delta_\beta = 10{,}78 - 0{,}111 \approx 10{,}669, \overline{x} + \delta_\beta = 10{,}78 + 0{,}111 \approx 10{,}891.$$

Отже, невідомий параметр а з надійністю 0,95 перебуває в довірчому інтервалі $10{,}669 < a < 10{,}891$.

2) Побудова за допомогою розподілу Стьюдента. Маємо: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} =$

$$10{,}78;\ \overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2}{20-1} \approx 0{,}064.$$

Користуючись таблицею додатка 3, за $\beta = 0{,}95$ и $n = 20$ знаходимо $t_\beta = 2{,}093$ і записуємо довірчі границі:

$$\overline{x} - t_\beta \sqrt{\frac{\overline{d}}{n}} = 10{,}78 - 2{,}093 \sqrt{\frac{0{,}064}{20}} \approx 10{,}78 - 0{,}118 \approx 10{,}662,$$

$$\overline{x} + t_\beta \sqrt{\frac{\overline{d}}{n}} = 10{,}78 + 2{,}093 \sqrt{\frac{0{,}064}{20}} \approx 10{,}78 + 0{,}118 \approx 10{,}898.$$

Отже, невідомий параметр *a* з надійністю 0,95 перебуває в довірчому інтервалі $10{,}662 < a < 10{,}898$.

Зауваження. Результати останнього прикладу показують, що використання функції Лапласа замість розподілу Стьюдента (5.13) для оцінки математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини *X*, вважаючи, що вибіркову середню випадкової величини, як і випадкову величину X, розподілено також за нормальним законом, призводить до невиправданого звуження довірчого інтервалу, тобто до підвищення точності оцінки. Ця розбіжність трапляється за малих обсягів вибірки (n<30), особливо за малих n. У разі необмеженого зростання обсягу вибірки n розподіл Стьюдента прагне до нормального розподілу. Справді:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}};\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Тому практично за умови n<30 для вибіркової середньої випадкової величини $\bar{X}$ можна замість розподілу Стьюдента під час визначення t_β у виразі (5.14) використовувати нормальний розподіл, тобто функцію Лапласа.

Розглянемо приклад застосування довірчого інтервалу для оцінки математичного сподівання випадкової величини X на практиці. Нехай здійснюють n незалежних рівноточних вимірювань деякої фізичної величини, істинне значення a якої є невідомим. Будемо розглядати результати окремих вимірювань як випадкові величини X_1, $X_2,\ldots,X_n$. Ці величини незалежні (вимірювання незалежні), мають одне і те саме математичне сподівання a (істинне значення вимірюваної величини), однакові дисперсії σ^2 (вимірювання рівноточні) і їх розподілено нормально (таке припущення підтверджено дослідом). Отже, всі припущення, які були зроблені під час виведення довірчих інтервалів в двох попередніх параграфах, справджуються, а отже, ми можемо використовувати отримані в них формули з урахуванням зауваження, зробленого в попередньому параграфі. Інакше кажучи, істинне значення вимірюваної величини можна оцінювати за середнім арифметичним результатів окремих вимірювань за допомогою довірчих інтервалів.

Приклад 5.8. За даними дев'яти незалежних рівноточних вимірювань фізичної величини знайдено середнє арифметичне результатів окремих вимірювань $\overline{x}=42{,}319$ і «виправлене» середнє квадратичне відхилення $\overline{\sigma}=5{,}0$.

Потрібно оцінити істинне значення вимірюваної величини з надійністю.

Розв'язання. Істинне значення вимірюваної величини дорівнює математичному сподіванню a випадкової величини *X*, значеннями якої є результати вимірювань. Тому завдання зведено до оцінки математичного сподівання a випадкової величини *X* з невідомим σ і малим обсягом вибірки $n = 9$ за допомогою довірчого інтервалу $\left(\overline{x} - t_\beta\sqrt{\frac{\overline{d}}{n}} < a < \overline{x} + t_\beta\sqrt{\frac{\overline{d}}{n}}\right)$, що покриває невідомий параметр a із заданою надійністю β=0,95.

Користуючись таблицею додатка 3 (обсяг вибірки малий), за β=0,95 і $n = 9$ знаходимо $t_\beta = 2{,}31$. Тепер знаходимо точність оцінки $\delta_\beta = t_\beta\sqrt{\frac{\overline{d}}{n}} = t_\beta \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{n}} = 2{,}31 \frac{5}{\sqrt{9}} = 3{,}85$ і записуємо довірчі границі:

$$\overline{x} - t_\beta\sqrt{\frac{\overline{d}}{n}} = 42{,}319 - 3{,}85 = 38{,}469,$$

$$\overline{x} + t_\beta\sqrt{\frac{\overline{d}}{n}} = 42{,}319 + 3{,}85 = 46{,}169.$$

Отже, істинне значення вимірюваної величини з надійністю 0,95 перебуває в довірчому інтервалі $38{,}469 < a < 46{,}169$.

5.3.6. Побудова довірчого інтервалу для оцінки середнього квадратичного відхилення випадкової величини, розподіленої за нормальним законом

Нехай кількісну ознаку *X* генеральної сукупності розподілено нормально. Потрібно оцінити невідоме генеральне середнє відхилення σ за «виправленим» вибірковим середнім квадратичним відхиленням σ. Поставимо для себе завдання знайти довірчі інтервали, що покривають параметр σ із заданою надійністю.

Потрібно, щоб виконувалося співвідношення:

$$P(|\sigma-\overline{\sigma}|<\delta)=\beta,\ \ \text{или}\ \ P(\overline{\sigma}-\delta<\sigma<\overline{\sigma}+\delta)=\beta.$$

Для того, щоб можливо було використовувати готову таблицю, перетворимо подвійну нерівність $\overline{\sigma}-\delta<\sigma<\overline{\sigma}+\delta$ в рівносильну нерівність $\overline{\sigma}\left(1-\frac{\delta}{\overline{\overline{\sigma}}}\right)<\sigma<\overline{\sigma}\left(1+\frac{\delta}{\overline{\overline{\sigma}}}\right)$. Припускаючи $\frac{\delta}{\overline{\overline{\sigma}}}=\mu$, отримаємо:

$$\overline{\sigma}(1-\mu)<\sigma<\overline{\sigma}(1+\mu). \qquad (5.15)$$

Залишилося знайти μ. Для цього розглянемо випадкову величину $\chi=\frac{\overline{\Omega}}{\sigma}\sqrt{n-1}$, де $\overline{\Omega}$ – випадкова величина, набутими значеннями якої є «виправлені» вибіркові середні квадратичні відхилення σ, n – обсяг вибірки.

Щільність розподілу X має вигляд:

$$R(\chi,n)=\frac{\chi^{n-2}e^{-\frac{\chi^3}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \qquad (5.16)$$

де $\Gamma(x)=\int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}\,du$ – гамма-функція. Цей розподіл не залежить від оцінюваного параметра σ, а залежить лише від обсягу вибірки n.

Перетворимо нерівність (5.15) так, щоб вона набула вигляду: $\chi_1<\chi<\chi_2$. Імовірність такої нерівності дорівнює заданій ймовірності β, тобто:

$$P(\chi_1<\chi<\chi_2)=\int_{\chi_1}^{\chi_2}R(\chi,n)d\chi.$$

Припускаючи, що $\mu<1$, перепишемо нерівність (5.15) у такий спосіб:

$$\frac{1}{\overline{\overline{\Omega}}(1+\mu)}<\frac{1}{\sigma}<\frac{1}{\overline{\overline{\Omega}}(1-\mu)}.$$

Помноживши всі члени нерівності на $\overline{\Omega}\sqrt{n-1}$, отримаємо $\frac{\sqrt{n-1}}{(1+\mu)}<\frac{\overline{\Omega}\sqrt{n-1}}{\sigma}<\frac{\sqrt{n-1}}{(1-\mu)}$ *или* $\frac{\sqrt{n-1}}{(1+\mu)}<\chi<\frac{\sqrt{n-1}}{(1-\mu)}$. $\frac{1}{\Omega(1+\mu)}<\frac{1}{\sigma}<\frac{1}{\Omega(1-\mu)}$.

Імовірність того, що ця нерівність, а, отже, і рівносильна до неї нерівність (5.15) буде виконаною, дорівнює:

$$\int_{\frac{\sqrt{n-1}}{(1+\mu)}}^{\frac{\sqrt{n-1}}{(1-\mu)}}R(\chi,n)d\chi=\beta.$$

Із цього рівняння можна за заданими n і β знайти μ. Практично для відшукання μ користуються таблицею додатка 4.

Обчисливши за вибіркою σ і знайшовши з таблиці μ, отримаємо шуканий довірчий інтервал (5.15), що покриває σ із заданою надійністю β, тобто інтервал $\overline{\sigma}(1-\mu) < \sigma < \overline{\sigma}(1+\mu)$.

Приклад 5.9. Кількісну ознаку X генеральної сукупності розподілено нормально. За вибіркою з обсягом n = 25 знайдено «виправлене» середнє квадратичне відхилення σ =0,8. Потрібно знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє відхилення σ з надійністю β = 0,95.

Розв'язання. З таблиці додатка 3 за даними β = 0,95 і n = 25 знайдемо μ =0,32. Отже, шуканий інтервал (5.15) є таким:

$$0{,}8(1-0{,}32) < \sigma < 0{,}8(1+0{,}32), \textit{или}\ 0{,}544 < \sigma < 1{,}056.$$

Зауваження. Вище було припущено, що μ < 1. Якщо μ < 1, то нерівність (5.15) набуде вигляду $\sigma > 0)$ $0 < \sigma < \overline{\sigma}(1+\mu)$, (враховуючи, що σ > 0) або $\mu < 1)$ $\frac{\sqrt{n-1}}{(1+\mu)} < \chi < \infty$ (після перетворень, аналогічних до випадку μ < 1). Отже, значення μ > 1 можуть бути знайдені з рівняння:

$$\int_{\frac{\sqrt{n-1}}{(1+\mu)}}^{\infty} R(\chi, n)d\chi = \beta.$$

Для відшукання значень μ > 1 використовують таблицю додатка 3.

Приклад 5.10. Кількісну ознаку *X* генеральної сукупності розподілено нормально. За вибіркою з обсягом n = 10 знайдено «виправлене» середнє квадратичне відхилення σ =0,16. Потрібно знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє відхилення σ з надійністю β = 0,95.

Розв'язання. З таблиці додатка 3 за даними β = 0,95 і n = 10 знайдемо μ =1,80. Отже, шуканий інтервал (3.14) є таким:

$$0 < \sigma < 0{,}16(1+1{,}80), \text{або}\ 0 < \sigma < 0{,}448.$$

Приклад 5.11. З 15 рівноточних вимірювань знайдено «виправлене» середнє квадратичне відхилення $\overline{\sigma} = 0{,}12$. Потрібно знайти точність вимірів з надійністю 0,99.

Розв'язання. Точність виміру характеризують за середнім квадратичним відхиленням σ випадкових помилок вимірювань, тому задачу зводять до відшукання довірчого інтервалу (3.14), що покриває σ із заданою надійністю 0,99.

З таблиці додатка 3 за даними β = 0,959 і n = 15 знайдемо μ =0,73. Отже, шуканий інтервал (5.15) є таким:

$$0{,}12(1 - 0{,}73) < \sigma < 0{,}12(1 + 0{,}73), \quad \text{або } 0{,}03 < \sigma < 0{,}21.$$

5.3.7. Оцінка ймовірності (біномного розподілу) за відносною частотою

Нехай здійснюють незалежні випробування з невідомою ймовірністю р виникнення події в кожному випробуванні. Потрібно оцінити невідому ймовірність p за відносною частотою, тобто необхідно знайти її точкову та інтервальну оцінки.

Точкова оцінка. Як точкову оцінку невідомої ймовірності p визначають випадкову відносну частоту $W = \frac{X}{n}$, де X – випадкова величина з біномінальним розподілом, значеннями якої є число m виникнення події A, n – число випробувань.

Ця оцінка є незміщеною, тобто її математичне сподівання дорівнює оцінюваній ймовірності. Справді, з огляду на те, що для біномного розподілу *M (X) =n p*, отримаємо:

$$M(W) = M\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{M(X)}{n} = \frac{np}{n} = p.$$

Знайдемо дисперсію оцінки, взявши до уваги, що для біномного розподілу $D(X) = npq$, де $q = 1 - p$:

$$D(W) = D\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{D(X)}{n^2} = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}.$$

Звідси середнє відхилення $\sigma_W = \sqrt{D(W)} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$.

Інтервальна оцінка. Знайдемо довірчий інтервал для оцінки ймовірності p події A за випадковою відносною частотою W. Для цього визначимо ймовірність $P(|W - p| < \delta)$ того, що абсолютна величина відхилення випадкової відносної частоти W від ймовірності p не перевищуватиме додатне число δ. Скористаємося формулою, отриманою в теорії ймовірностей, що дозволяє знайти ймовірність потрапляння значень випадкової величини X, розподіленої нормально з математичним сподіванням a і середнім квадратичним відхиленням, в інтервал (x_1, x_2):

$$P(x_1 < X < x_2) = \left[\Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)\right],$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Припускаючи в цій формулі $x_1 = a - \delta,\ x_2 = a + \delta$ і враховуючи, що функція Лапласа є парною, доходимо до формули:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (5.17)$$

Якщо n є достатньо великим, і ймовірність p не дуже наближується до нуля і до одиниці, то можна вважати, що випадкову відносну частоту W розподілено наближено нормально, причому, як показано вище, $M(W) = p$.

Отже, замінивши в співвідношенні (5.17) випадкову величину X і її математичне сподівання a, відповідно, на випадкову величину W і її математичне сподівання p, отримаємо наближене (оскільки відносну частоту W розподілено наближено нормально) рівність:

$$P(|W - p| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_W}\right). \qquad (5.18)$$

Почнемо будувати довірчий інтервал (p_1, p_2), який з надійністю β покриває оцінюваний параметр p. Для цього нам потрібно, щоб з надійністю β виконувалося співвідношення (5.18):

$$P(|W - p| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_W}\right) = \beta.$$

Замінивши σ_W через $\sqrt{\frac{pq}{n}}$, отримаємо: $P(|W - p| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = 2\Phi(t) = \beta$, Де $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}$. Звідси $\delta = t\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}$ і, як наслідок,

$$P\left(|W - p| < t\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \beta.$$

Отже, з надійністю β виконується нерівність:

$$|W - p| < t\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}.$$

Щоб отримати робочу формулу, випадкову величину W замінимо на невипадкову спостережувану відносну частоту $\omega = \frac{m}{n}$, де m – число виникнення події A у n випробуваннях і підставимо 1 - p замість q:

$$|\omega - p| < t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}.$$

З огляду на те, що ймовірність p невідома, вирішимо цю нерівність відносно p. Припустимо, що $\omega > p$. Тоді $\omega - p < t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$. Обидві частини нерівності є додатними; звівши їх у квадрат, одержимо рівносильну квадратну нерівність відносно p:

$$\left(\frac{t^2}{n} + 1\right)p^2 - 2\left(\omega + \frac{t^2}{n}\right)p + \omega^2 < 0.$$

Дискримінант трьохчлена позитивний, тому його корні дійсні і різноманітні:

менший корінь $p_1 = \frac{n}{t^2+n}\left[\omega + \frac{t^2}{2n} - t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right]$, (5.19)

більший корінь

$$p_2 = \frac{n}{t^2+n}\left[\omega + \frac{t^2}{2n} + t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right]. \quad (5.20)$$

Отже, шуканий довірчий інтервал $p_1 < p < p_2$, де p_1 і p_2 відшукують за формулами (5.19) і (5.20).

Під час виведення ми припустили, що $\omega > p$; той самий результат отримаємо за умови $\omega < p$.

Приклад. 5.12. Здійснюють незалежні випробування з однаковою, але невідомою ймовірністю p виникнення події A в кожному випробуванні. Потрібно знайти довірчий інтервал для оцінки ймовірності p з надійністю 0,95, якщо у 80 випробуваннях подія A виникла 16 разів.

Розв'язання. За умовою n = 80, m = 16, β=95. Знайдемо відносну частоту появи події A: $\omega = \frac{m}{n} = \frac{16}{80} = 0{,}2$.

Знайдемо t зі співвідношення $2\Phi(t) = 0{,}95$; з таблиці функції Лапласа (див. додаток 1) знаходимо $t=1{,}96$.

Підставивши n=80, ω=0,2, t=1,96 у формули (5.19) і (5.20), отримаємо відповідно $p_1 = 0{,}128$, $p_2 = 0{,}299$.

Отже, шуканий довірчий інтервал интервал $0{,}128 < p < 0{,}299$.

5.3.8. Визначення наближених значень числових характеристик системи двох випадкових величин

Нехай над системою випадкових величин (X,Y) здійснено в однакових умовах n незалежних випробувань. Результати випробувань (X_1, Y_1), (X_2, Y_2),…, (X_n, Y_n) є незалежними системами випадкових величин $X_1, X_2,…, X_n$ и Y_1, $Y_2,…, Y_n$, математичні сподівання, дисперсія і кореляційні моменти яких однакові, тобто $M[X_i] = m_X$, $M[Y_i] = m_Y$, $D_{X_i} = D_X$, $D_{Y_i} = D_Y$, $k_{X_iY_i} = k_{XY}$. Потрібно через обробку дослідних даних знайти наближені значення зазначених числових характеристик.

Цю задачу вирішують аналогічно до того, як ми вирішували її для однієї випадкової величини.

Оскільки невідомі математичні сподівання m_X і m_Y, а також дисперсії D_X і D_Y є характеристиками окремих випадкових величин, що входять до системи, то для визначення наближених до них значень, застосовуючи формули (5.7), отримаємо:

$$\overline{m_X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \qquad \overline{D_X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{m_X})^2}{n-1};$$

$$\overline{m_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}, \qquad \overline{D_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{m_Y})^2}{n-1}.$$

Оскільки кореляційний момент є математичним сподіванням добутку відхилень випадкових величин X і Y від своїх математичних сподівань, то наближене значення кореляційного моменту ми шукаємо як лінійну комбінацію, що має вигляд:

$$\overline{k_{XY}} = \sum_{i=1}^{n} C_i (X_i - \overline{m_X})\,(Y_i - \overline{m_Y}), \qquad (5.21)$$

де C_i – постійні коефіцієнти, причому, з огляду на рівноточні вимірювання, $C_i = C$.

Невідомий коефіцієнт C визначаємо з умови, щоб величина $\overline{k_{XY}}$ була незміщеною оцінкою для кореляційного моменту $\overline{k_{XY}}$ тобто щоб:

$$M\left[\overline{k_{XY}}\right] = M\left[\sum_{i=1}^{n} C_i (X_i - \overline{m_X})\,(Y_i - \overline{m_Y})\right] = C\sum_{i=1}^{n} M[(X_i - \overline{m_X})(Y_i - \overline{m_Y})] = \\ = k_{XY}.$$

Можна показати, що ця умова виконується, і оцінка є незміщеною, якщо $C = \frac{1}{n-1}$.

Знайшовши дисперсію цієї оцінки $D\left[\overline{k_{XY}}\right] = D\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{m_X})(Y_i - \overline{m_Y})}{n-1}\right]$, можна показати, що за умови $n \to \infty$ дисперсія цієї оцінки $D\left[\overline{k_{XY}}\right] \to 0$, а це означає, що оцінка кореляційного моменту (5.21) за умови $C = \frac{1}{n-1}$ є також спроможною.

Отже:

$$\overline{k_{XY}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{m_X})\,(Y_i - \overline{m_Y})$$

є незміщеною і спроможною оцінкою для кореляційного моменту k_{xy} системи випадкових величин (X,Y). Дослідний коефіцієнт кореляції $\overline{r_{XY}}$ визначають за формулою:

$$\overline{r_{XY}} = \frac{\overline{k_{XY}}}{\overline{\sigma_X} \cdot \overline{\sigma_Y}}.$$

Водночас середнє квадратичне відхилення дослідного коефіцієнта кореляції обчислюють за формулою:

$$\sigma_{\overline{r_{XY}}} = \frac{1 - r_{XY}^2}{\sqrt{n-1}} \approx \frac{1 - \overline{r}_{XY}^2}{\sqrt{n-1}}.$$

5.3.9. Метод найбільшої правдоподібності для знаходження оцінок параметрів розподілу

Крім точкових методів оцінки параметрів розподілу, розглянутих нами в розділі 5.2, існують й інші методи точкової оцінки невідомих параметрів розподілу. До них належать один з найважливіших методів для відшукування оцінок параметрів за даними досліду, який має назву: метод найбільшої правдоподібності.

Дискретні випадкові величини. Нехай X – дискретна випадкова величина, яка внаслідок випробувань набула значень x_1, x_2, …,x_n. Припустимо, що задано вид закону розподілу величини X, але невідомий параметр θ, який визначає цей закон. Потрібно знайти його точкову оцінку.

Позначимо ймовірність того, що внаслідок випробування величина X набуде значення x_i $(i = 1,2, \dots, n)$, через $p(x_i; \theta)$.

Визначення 5.22. Функцією правдоподібності дискретної випадкової величини X називають функцію аргументу θ:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = p(x_1; \theta) \cdot p(x_2; \theta) \cdot \dots \cdot p(x_n; \theta),$$

де x_1, x_2, …,x_n – фіксовані числа.

За точкову оцінку параметра вважають таке значення $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$, з яким функція правдоподібності досягає максимуму. Оцінку θ^* називають оцінкою найбільшої правдоподібності.

Функції L і lnL досягають максимуму за одного і того самого значення θ, тому замість відшукування максимуму функції L шукають (що є зручнішим) максимум функції lnL, яку називають логарифмічною функцією правдоподібності.

Як відомо, точку максимуму функції lnL аргументу θ можна шукати, наприклад, у такі способи:

1) знайти похідну $\frac{d \ln L}{d\theta}$;

2) прирівняти похідну до нуля і знайти стаціонарну точку – корінь отриманого рівняння (його називають рівнянням правдоподібності);

3) знайти другу похідну $\frac{d^2 \ln L}{d\theta^2}$; якщо друга похідна за умови $\theta = \theta^*$ є від'ємною, то θ^* – точка максимуму.

Знайдену точку максимуму θ^* приймають за оцінку найбільшої правдоподібності параметра θ.

Метод найбільшої правдоподібності має низку переваг: він завжди веде до спроможних (хоча іноді й зміщених) оцінок, які мають найменшу можливу дисперсію порівняно з іншими, і у найкращий спосіб використовує дані вибірки про оцінюваний параметр.

Недолік методу полягає в тому, що він часто вимагає складних обчислень.

Зауваження. Функція правдоподібності – функція від аргументу θ; оцінка найбільшої правдоподібності – функція від незалежних аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Приклад 5.13. Потрібно знайти через метод найбільшої правдоподібності оцінку параметра λ розподілу Пуассона:

$$P_m(X = x_i) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda},$$

де x_i – число появ події в i-ому (i = 1,2, ..., n) досліді (дослід складається з m випробувань), m – число здійснених випробувань.

Розв'язання. Складемо функцію правдоподібності, враховуючи, що $\theta = \lambda$:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda) = p(x_1; \lambda) \cdot p(x_2; \lambda) \cdot \ldots \cdot p(x_n; \lambda) =$$
$$= \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} e^{-\lambda} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} e^{-\lambda}.$$

Знайдемо логарифмічну функцію правдоподібності:

$$\ln L = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \ln \lambda - n\lambda - \ln(x_1! \cdot x_2! \cdot \ldots \cdot x_n!).$$

Знайдемо першу похідну за λ і напишемо рівняння правдоподібності, для чого прирівняємо першу похідну до нуля:

$$\frac{d \ln L}{d\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} - n = 0.$$

Знайдемо стаціонарну точку, для цього вирішимо отримане рівняння відносно λ:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x_в}.$$

Знайдемо другу похідну за λ : λ: $\frac{d^2 \ln L}{d\lambda^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2}$.

За умови $\lambda = \overline{x_в}$ друга похідна є від'ємною; отже, $\lambda = \overline{x_в}$ – точка максимуму, і виходить, що за оцінку найбільшої правдоподібності параметра λ розподілу Пуассона потрібно приймати вибіркову середню $\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

Приклад 5.14. Потрібно знайти через метод найбільшої правдоподібності оцінку параметра p біноміального розподілу:

$$p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

якщо в n_1 незалежних випробуваннях подія *A* виникла $x_1 = m_1$ разів, і в n_2 незалежних випробуваннях подія *A* виникла $x_2 = m_2$ разів.

Розв'язання. Складемо функцію правдоподібності, враховуючи, що $\theta = p$:

$$L = P_{n_1}(m_1) \cdot P_{n_2}(m_2) = C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} p^{m_1+m_2} (1-p)^{[(n_1+n_2)-(m_1+m_2)]}.$$

Знайдемо логарифмічну функцію правдоподібності:

$$\ln L = \ln\left(C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2}\right) + (m_1+m_2)\ln p + [(n_1+n_2)-(m_1+m_2)]\ln(1-p).$$

Знайдемо першу похідну за p:

$$\frac{d \ln L}{dp} = \frac{m_1+m_2}{p} - \frac{[(n_1+n_2)-(m_1+m_2)]}{1-p}.$$

Напишемо рівняння правдоподібності, для цього прирівняємо першу похідну до нуля:

$$\frac{m_1+m_2}{p} - \frac{[(n_1+n_2)-(m_1+m_2)]}{1-p} = 0.$$

Знайдемо стаціонарну точку, для цього вирішимо отримане рівняння відносно p: $p = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$.

Знайдемо другу похідну за p :

$$\frac{d^2 \ln L}{dp^2} = -\frac{m_1+m_2}{p^2} - \frac{[(n_1+n_2)-(m_1+m_2)]}{(1-p)^2}.$$

Легко переконатися, що за умови $p = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2} \leq 1$ друга похідна є від'ємною; отже, $p = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$ – точка максимуму, і, виходить, що її потрібно вважати за оцінку найбільшої правдоподібності невідомої ймовірності p біноміального розподілу: $p^* = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$.

Отже, оцінка ймовірності p за методом найбільшої правдоподібності збігається з відносною частотою $\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$ появи події A під час випробувань.

Неперервні випадкові величини. Нехай X – неперервна випадкова величина, яка внаслідок n випробувань набула значень x_1, x_2, …,x_n. Припустимо, що задано вид щільності розподілу величини X, але невідомим є параметр θ, який визначає цю функцію. Потрібно знайти його точкову оцінку.

Визначення 5.23. Функцією правдоподібності неперервної випадкової величини X називають функцію аргументу θ:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n; \theta),$$

де x_1, x_2, …,x_n – фіксовані числа.

Оцінку найбільшої правдоподібності невідомого параметра розподілу неперервної випадкової величини шукають так само, як і у разі дискретної величини.

Приклад 5.15. Потрібно знайти через метод найбільшої правдоподібності оцінку параметра λ показового розподілу:

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \qquad (0 < x < +\infty),$$

якщо внаслідок n випробувань випадкова величина X, яку розподілено за показовим законом, набула значень x_1, x_2, …,x_n.

Розв'язання. Складемо функцію правдоподібності, враховуючи, що $\theta = \lambda$:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \left(\lambda\, e^{-\lambda x_1}\right) \cdot \left(\lambda\, e^{-\lambda x_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(\lambda\, e^{-\lambda x_n}\right).$$

Знайдемо логарифмічну функцію правдоподібності:

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Знайдемо першу похідну за λ:

$$\frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

Напишемо рівняння правдоподібності, для цього прирівняємо першу похідну до нуля: $\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i.=0.$

Знайдемо стаціонарну точку, для цього вирішимо отримане рівняння відносно λ:

$$\lambda=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i.}=\frac{1}{\overline{x_в}}.$$

Знайдемо другу похідну за λ: $\frac{d^2\ln L}{dp^2}=-\frac{n}{\lambda^2}.$

За умови $\lambda=\frac{1}{\overline{x}_в}$ друга похідна є від'ємною: отже, $\lambda=\frac{1}{\overline{x}_в}$ – точка максимуму, і виходить, що за оцінку найбільшої правдоподібності параметра λ показового розподілу потрібно приймати величину, зворотню до вибіркової середньої: $\lambda^*=\frac{1}{\overline{x}_в}.$

Зауваження. Якщо щільності розподілу *f(x)* неперервної випадкової величини X визначають за двома невідомими параметрами θ_1 і θ_2, то функція правдоподібності є функцією двох незалежних аргументів θ_1 і θ_2:

$$L(x_1,x_2,\dots,x_n;\theta_1,\theta_2)=f(x_1;\theta_1,\theta_2)\cdot f(x_2;\theta_1,\theta_2)\cdot\dots\cdot f(x_n;\theta_1,\theta_2),$$

де $x_1,x_2,\dots,x_n-$ спостережувані значення *X*. Далі знаходять логарифмічну функцію правдоподібності, і для відшукання її максимуму складають і вирішують систему:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta_1}=0,\\[2mm]\dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta_2}=0.\end{cases}$$

Приклад 5.16. Потрібно знайти через метод найбільшої правдоподібності оцінку параметрів a і σ нормального розподілу:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

якщо внаслідок n випробувань величина X набула значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Розв'язання. Складемо функцію правдоподібності, враховуючи, що $\theta_1 = a$ і $\theta_2 = \sigma$:

$$L = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Звідси:

$$L = \frac{1}{\sigma^n\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Знайдемо логарифмічну функцію правдоподібності:

$$\ln L = -n\ln\sigma + \ln\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\right) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{2\sigma^2}.$$

Знайдемо часткові похідні за a і σ:

$$\ln L = -n\ln\sigma + \ln\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\right) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{2\sigma^2}.$$

Прирівнявши часткові похідні до нуля і вирішивши отриману систему двох рівнянь відносно a і σ, отримаємо:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x_в}; \quad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_в})^2}{n} = D_B.$$

Отже, шукані оцінки найбільшої правдоподібності: $a^* = \overline{x_в}$; $\sigma^* = \sqrt{D_B}$. Зауважимо, що перша оцінка є незміщеною, а друга є зміщеною.

5.4. Статистична перевірка гіпотез

На практиці часто доводиться на підставі вибіркових спостережень перевіряти різноманітні припущення (гіпотези) щодо параметрів або закону розподілу генеральної сукупності.

Визначення 5.24. Гіпотезу про вид невідомого розподілу або про параметри відомого розподілу випадкової величини, яку перевіряють за вибірковими даними, називають статистичною гіпотезою. Приклади статистичних гіпотез:

1) генеральну сукупність розподілено за законом Пуассона;

2) дисперсії двох нормальних сукупностей є рівними між собою.

У першій гіпотезі зроблено припущення про вид невідомого розподілу, у другій - про параметри двох відомих розподілів.

Поряд з висунутою гіпотезою розглядають і гіпотезу, що суперечить їй. Якщо висунута гіпотеза буде відхилена, то виникає суперечна гіпотеза. З цієї причини ці гіпотези доцільно розрізняти.

Визначення 5.25. Висунуту (ту, яку перевіряють) статистичну гіпотезу називають нульовою (основною) і позначають H_0 , суперечну до неї гіпотезу називають альтернативною (тою, що конкурує) і позначають H_1.

Наприклад, якщо нульова статистична гіпотеза полягає в припущенні, що математичне сподівання а нормального розподілу дорівнює 5, то гіпотеза, що конкурує, зокрема, може полягати в припущенні, що $a \neq 5$. Коротко це записують так: H_0: $a = 5$; H_1: $a \neq 5$.

Статистичні гіпотези розрізняють також і за кількістю припущень, які містить гіпотеза.

Визначення 5.26. Статистичну гіпотезу називають простою, якщо вона містить тільки одне припущення щодо параметра або розподілу випадкової величини. В іншому разі статистичну гіпотезу називають складною.

Наприклад, гіпотеза H_0 : а = 5 - проста, гіпотеза H_0: $a > 5$ - складна, оскільки передбачає безліч можливих значень параметра а.

Процедура зіставлення висунутих статистичних гіпотез з вибіркою та ухвалення рішення щодо прийнятності цих гіпотез отримала назву перевірки статистичних гіпотез.

Перш ніж формулювати завдання перевірки статистичних гіпотез загалом, розглянемо два приклади.

Приклад 5.17. Є склад готової продукції. Відомо, що продукція надходить до складу партіями з двох фірм, що випускають продукцію різної якості, і такими самими партіями її видають споживачеві. Якість продукції фірми характеризує ймовірність р того, що навмання вибраний з партії продукт є дефектним. Для однієї фірми $p = p_0$, для іншої $p = p_1$ ($p_0 > p_1$). Споживач навмання вибирає одну партію продукції. Потрібно на підставі результатів контролю вирішити, на якій фірмі виготовлено вибрану партію продукції.

Розв'язання. Нехай H_0 – гіпотеза, яка полягає в тому, що вибрана партія продукції поганої якості, тобто ймовірність браку дорівнює p_0; H_1 – протилежна гіпотеза, ймовірність браку дорівнює p_1 . Будемо називати H_0 нульовою, а H_1 – гіпотезою, що конкурує.

Відберемо з партії навмання n одиниць товару. Позначимо y кількість бракованих товарів серед відібраних. Зрозуміло, що всі можливі значення y: 0, 1, 2, ..., n визначають випадкову величину, яку позначимо Y. Під розв'язанням поставленого завдання розуміють створення вирішального правила (критерію), яке зіставляє кожне можливе значення випадкової величини Y з однією із гіпотез H_0 або $H_{1.}$

Позначимо набір можливих значень випадкової величини Y через Δ, тоді відповідно до сказаного вище шукане вирішальне правило полягає в деякому розбитті множини Δ на частини Δ_0 і Δ_1. У разі потрапляння можливого значення випадкової величини Y в множину Δ_0 приймають гіпотезу $H_{0,}$ і, навпаки, у разі потрапляння можливого значення в множину Δ_1 приймають гіпотезу H_1.

Питання полягає в тому, який критерій для розбиття множини Δ на частини Δ_0 і Δ_1 необхідно вибрати.

Приклад 5.18. До входу приймального пристрою в певний момент часу надходить випадкова величина Y, яка є або сумою відомого сигналу X і випадкової перешкоди Z, або однієї перешкодою. Здійснюють вимір величини Y. За отриманим числовим значенням у потрібно вирішити, чи був присутнім на вході сигнал X, тобто вибрати одну з двох ймовірностей: $y = x + z$ або $y = z$.

Розв'язання. Як нульову гіпотезу H_0 беремо відсутність сигналу, а як гіпотезу, що конкурує, H_1,– наявність сигналу. Завдання полягає в перевірці гіпотези H_0 відносно гіпотези H_1.

Множина Δ можливих значень випадкової величини Y становить усю множину дійсних чисел R, яку відображають усі точки координатної осі Oy. Шукане вирішальне правило полягає в розбитті координатної осі Oy на дві частини: Δ_0 і Δ_1. Потрібно вибрати одне з таких розбиттів, що веде до найменшого можливого в цій задачі ризику під час розв'язання.

Загальна постановка задачі. Є дві протилежні статистичні гіпотези H_0 і H_1. Потрібно здійснити перевірку нульової гіпотези H_0 відносно гіпотези H_1, що конкурує з нею, на підставі результатів випробування.

Для перевірки нульової гіпотези використовують спеціально підібрану випадкову величину, точний або наближений розподіл якої є відомим.

Визначення 5.27. Випадкову величину, яка слугує для перевірки нульової статистичної гіпотези, називають статистичним критерієм (критерієм узгодженості або вирішальним правилом).

Після вибору певного критерію, наприклад, випадкової величини Y множину Δ всіх можливих значень випадкової величини Y розбивають на дві непересічних підмножини Δ_0 і Δ_1, схвалюючи гіпотезу H_0 у разі потрапляння отриманого значення у випадкової величини Y в Δ_0 внаслідок проведеного експерименту і гіпотезу H_1 – у разі потрапляння y в Δ_1.

Визначення 5.28. Сукупність значень критерію, за яких гіпотезу приймають, називають областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень); за яких нульову гіпотезу відхиляють, називають критичною областю.

Оскільки критерій Y – одновимірна випадкова величина, всі її можливі значення y належать до деякого інтервалу, тому вибір вирішального правила, тобто правила розбиття множини Δ на дві частини Δ_0 і Δ_1 в будь-якій задачі перевірки гіпотез є можливим у такий спосіб. У прикладі 5.18 можна задати будь-яке число I_1 і припустити $\Delta_0 = (-\infty, l_1)$, $\Delta_1 = (l_1, +\infty)$ (рис. 5.4).

Інший варіант вирішального правила зображено на рис. 5.5.

Запитують, якому з цих розбиттів необхідно віддати перевагу, або, відволікаючись від розглянутого прикладу, яке з усіх можливих розбиттів в кожній конкретній задачі вважати найкращим, тобто таким, що веде до найменшого можливого в цій задачі ризику під час розв'язання?

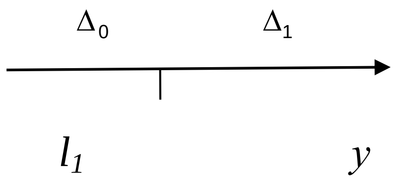

Рис. 5.4

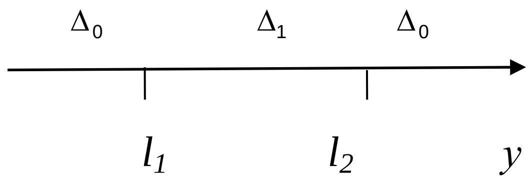

Рис. 5.5

Внаслідок статистичної перевірки гіпотези у двох випадках можна неправильно вибрати розв'язок, тобто можуть бути допущені помилки двох типів.

Помилка першого типу полягає в тому, що буде відхилена правильна гіпотеза.

Помилка другого типу полягає в тому, що буде схвалена неправильна гіпотеза.

Зауваження 1. Правильний розв'язок може бути вибраний також у двох випадках:

1) гіпотезу приймають, причому вона дійсно правильна;

2) гіпотезу відхиляють, причому вона дійсно є неправильною.

Зауваження 2. Імовірність припущення помилки першого типу заведено позначати α; її називають рівнем значущості. Найчастіше рівень значущості вважають рівним 0,05 або 0,01. Якщо, наприклад, рівень значущості вважати рівним 0,05, то це означає, що в п'яти випадках зі ста є ризик припуститися помилки першого типу (відкинути правильну гіпотезу).

Отже, основний принцип перевірки статистичної гіпотези можна сформулювати у такий спосіб: якщо спостережуване значення критерію належить критичній області – гіпотезу відкидають, якщо спостережуване значення критерію належить області прийняття гіпотези – гіпотезу схвалюють.

5.5. Поняття про критерії узгодженості

У багатьох випадках практики на підставі тих чи тих даних роблять припущення про вид закону розподілу цікавої для нас випадкової величини X. Однак для остаточного вирішення питання про вид закону розподілу в такому разі доцільно перевірити, наскільки зроблене припущення узгоджується з дослідом. Водночас з огляду на обмежену кількість спостережень дослідний закон розподілу зазвичай буде деякою мірою відрізнятися від передбачуваного, навіть якщо припущення про закон розподілу зроблено правильно. У зв'язку з цим виникає потреба вирішити таке завдання: чи є розбіжність між дослідним законом розподілу і передбачуваним законом розподілу наслідком обмеженого числа спостережень, або вона є суттєвою і пов'язана з тим, що дійсний розподіл випадкової величини відрізняється від передбачуваного. Для вирішення поставленого завдання слугують так звані «критерії узгодженості».

Ідея застосування критеріїв узгодженості має таке пояснення.

Нехай, наприклад, на підставі цього статистичного матеріалу ми мусимо перевірити гіпотезу H, яка полягає в тому, що випадкова величина X має функцію розподілу $F(x)$.

Для того, щоб схвалити або спростувати гіпотезу H, будемо розглядати випадкову величину Y, що характеризує ступінь розбіжності теоретичного і статистичного розподілів. Величину Y можна вибирати різними способами. Наприклад, за Y можна взяти максимальне відхилення статистичної функції розподілу $F^*(x)$ від теоретичної $F(x)$. Вочевидь, закон розподілу випадкової величини Y залежить від закону розподілу випадкової величини X, над якою здійснювали досліди, і від числа дослідів n.

Припустимо, що закон розподілу випадкової величини X нам відомий.

Нехай внаслідок n проведених дослідів над випадковою величиною X величина Y набуває деякого значення y. Запитують, чи можна пояснити набуте значення $Y = y$ за допомогою випадкових причин, або ж це значення є занадто великим і вказує на наявність суттєвої різниці між теоретичним і статистичним розподілами, тобто на непридатність гіпотези *H*? Для відповіді на це запитання припустимо, що правильною є гіпотеза *H*, і обчислимо ймовірність того, що випадкова величина Y завдяки випадковим причинам, пов'язаним з обмеженим обсягом дослідного матеріалу, набуде значення не менше за спостережуване значення y, тобто обчислимо ймовірність $P(Y \geq y)$. Якщо ця ймовірність мала, то гіпотезу *H* слід відхилити як не дуже правдоподібну, а якщо ця ймовірність є суттєвою, то експериментальні дані не суперечать гіпотезі *H*.

Для розрахунку ймовірності $P(Y \geq y)$ необхідно знати закон розподілу випадкової величини Y, який, як ми вже відзначали, залежить від закону розподілу випадкової величини *X* (розподілу функції $F(x)$) і від числа експериментів n. Виявлено, що у деяких способах вибору випадкової величини Y її закон розподілу за досить великого n практично не залежить від закону розподілу випадкової величини *X*. Самі такі способи розбіжності і використовують у математичній статистиці як критерії узгодженості.

Найпростішим критерієм перевірки гіпотез про вид закону розподілу є критерій Колмогорова, що являє собою максимальне значення абсолютної величини різниці між статистичною функцією розподілу $F^*(x)$ та відповідною теоретичною функцією розподілу $F(x)$ тобто $D = max|F^*(x) - F(x)|$.

А. Н. Колмогоров довів, що хоч який вигляд не мала неперервна функція розподілу $F(x)$ у разі необмеженого зростання числа незалежних спостережень n, ймовірність нерівності $D\sqrt{n} \geq \lambda$ прагне до границі:

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \, e^{-2k^2\lambda^2}. \qquad (5.22)$$

Для ймовірності $P(\lambda)$ складено таблицю, невеликий фрагмент якої наведено нижче:

λ	0,828	1,224	1,358	1,627	1,950
$P(\lambda)$	0,5	0,1	0,05	0,01	0,001

Схема застосування критерію Колмогорова є такою.

1. За результатами *n* проведених вимірювань будують статистичну функцію розподілу $F^*(x)$.

2. На тому самому графіку будують ймовірну теоретичну функцію розподілу $F(x)$.

3. Визначають максимальну величину модуля різниці їхніх ординат D (рис. 5.6).

4. Обчислюють величину $\lambda = D\sqrt{n}$.

5. З вищевказаній таблиці знаходять ймовірність $P(\lambda)$, яка полягає в тому, що завдяки випадковим причинам максимальна розбіжність між $F^*(x)$ і $F(x)$ буде не меншою, ніж та, яку фактично спостерігають.

Якщо ймовірність дуже мала, гіпотезу бракують: у разі порівняно великої ймовірності $P(\lambda)$ гіпотезу вважають сумісною з результатами досліду.

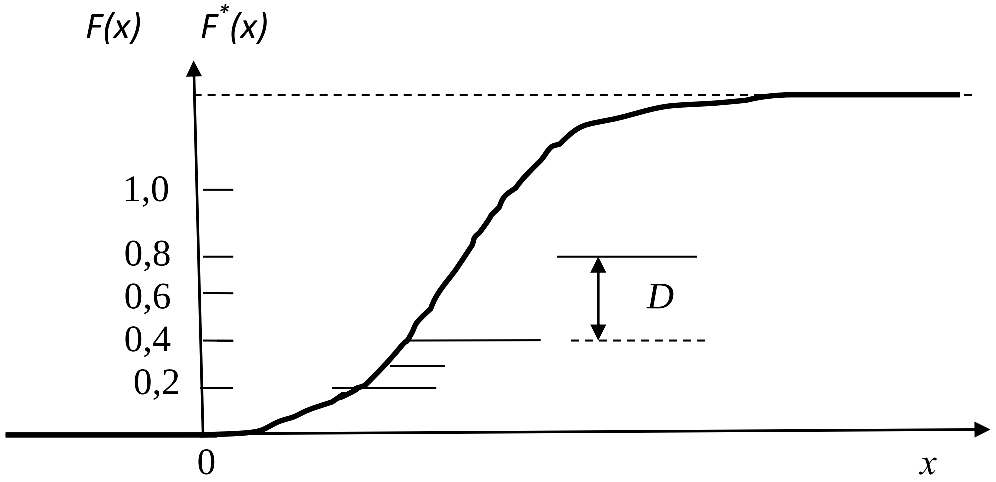

Рис. 5.6

Зауважимо, що критерій Колмогорова можна застосовувати тільки в разі, коли гіпотетичний розподіл $F(x)$ є цілком відомим, тобто відомим є не тільки вигляд функції розподілу $F(x)$, але всі параметри, що входять до неї. Якщо параметри передбачуваного закону розподілу визначають на підставі дослідних даних, то застосовують інші критерії узгодженості, наприклад, критерій χ^2 (хі-квадрат).

Питання для самоконтролю до глави 5

1. Чим займається математична статистика? Основні її поняття та завдання.

2. Дайте визначення генеральної і вибіркової сукупності. Перерахуйте способи вибірки і її призначення.

3. Що називається варіаційним рядом і статистичним розподілом вибірки? У чому полягає відмінність в понятті розподілення у теорії ймовірностей і математичній статистиці?

4. Що називається статистичної функцією розподілу? У чому полягає відмінність і збіг функції розподілу генеральної сукупності і статистичної функції розподілу вибірки?

5. Що таке полігон і гістограма вибірки і способи їх побудови?

6. Назвіть числові характеристики статистичного розподілу. Дайте визначення цих характеристик.

7. Що являють собою статистичні оцінки параметра розподілу випадкової величини?

8. Яка оцінка параметра розподілу випадкової величини називається заможною і несмещенною?

9. Яка оцінка параметра розподілу випадкової величини називається ефективною?

10. Яка оцінка для математичного очікування має властивості спроможності і незсуненості в разі прямих равноточних вимірювань?

11. Яка оцінка для дисперсії має властивості спроможності і незсуненості?

12. Що називається довірчим інтервалом і довірчою ймовірністю (надійністю)?

13. Як будується довірчий інтервал для математичного очікування випадкової величини, розподіленої за нормальним законом?

14. У чому сутність методу найбільшої правдоподібності для знаходження оцінок параметрів розподілу?

15. Сформулюйте задачу статистичної перевірки гіпотез.

16. У чому полягає ідея застосування критеріїв згоди при вирішенні задач про узгодженість теоретичного і статистичного розподілу?

Список використаної та рекомендованої літератури

Основна література

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. – М. : Наука, 1969. – 576 с.
2. Гурский Е. И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М. : Высшая школа, 1971.– 328 с.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М. : Высшая школа, 2003. – 479 с.
4. Румшиский Л. З. Элементы теории вероятностей. – М. : Наука, 1966. – 155 с.

Додаткова література

1. Володин И. Н. Лекции по теории вероятностей и математической статистики. – Казань : Казанский ун-т, 2006. – 271 с.
2. Колемаев В. А., Калинина В. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. – М. : КНОРУС, 2009. – 384 с.
3. Кибзун А. И., Горяинова Е. Р., Наумов А. В., Сиротин А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002 – 224 с.

Д О Д А Т К И

Додаток 1

Таблиця значень функції Лапласа $\overline{\Phi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt.$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	1,00	0,8427	2,00	0,9953
0,05	0,0564	1,05	0,8624	2,05	0,9963
0,10	0,1125	1,10	0,8802	2,10	0,9970
0,15	0,1680	1,15	0,8961	2,15	0,9976
0,2	0,2227	1,20	0,9103	2,20	0,9981
0,25	0,2763	1,25	0,9229	2,25	0,9985
0,3	0,3286	1,30	0,9340	2,30	0,9988
0,35	0,3794	1,35	0,9438	2,35	0,9991
0,40	0,4284	1,40	0,9523	2,40	0,9993
0,45	0,4755	1,45	0,9597	2,45	0,9995
0,50	0,5205	1,50	0,9661	2,50	0,9996
0,55	0,5633	1,55	0,9716	2,55	0,9997
0,60	0,6039	1,60	0,9736	2,60	0,9998
0,65	0,6420	1,65	0,9804	2,65	0,9998
0,70	0,6778	1,70	0,9838	2,70	0,9999
0,75	0,7112	1,75	0,9867	2,75	0,9999
0,80	0,7421	1,80	0,9891	2,80	0,9999
0,85	0,7707	1,85	0,9911	3,00	1,0000
0,90	0,7969	1,90	0,9928		
0,95	0,8209	1,95	0,9942		

Додаток 2

Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0,00	0,00000	0,50	0,19146	1,00	0,34134	1,50	0,43319	2,00	0,47725	3,00	0,49865
0,01	0,00399	0,51	0,19497	1,01	0,34375	1,51	0,43448	2,02	0,47831	3,05	0,49886
0,02	0,00798	0,52	0,19847	1,02	0,34614	1,52	0,43574	2,04	0,47932	3,10	0,49903
0,03	0,01197	0,53	0,20194	1,03	0,34849	1,53	0,43699	2,06	0,48030	3,15	0,49918
0,04	0,01595	0,54	0,20540	1,04	0,35083	1,54	0,43822	2,08	0,48124	3,20	0,49931
0,05	0,01994	0,55	0,20884	1,05	0,35314	1,55	0,43943	2,10	0,48214	3,25	0,49942
0,06	0,02392	0,56	0,21226	1,06	0,35543	1,56	0,44062	2,12	0,48300	3,30	0,49952
0,07	0,02790	0,57	0,21566	1,07	0,35769	1,57	0,44179	2,14	0,48382	3,35	0,49960
0,08	0,03188	0,58	0,21904	1,08	0,35993	1,58	0,44295	2,16	0,48461	3,40	0,49966
0,09	0,03586	0,59	0,22240	1,09	0,36214	1,59	0,44408	2,18	0,48537	3,45	0,49972
0,10	0,03983	0,60	0,22575	1,10	0,36433	1,60	0,44520	2,20	0,48610	3,50	0,49977
0,11	0,04380	0,61	0,22907	1,11	0,36650	1,61	0,44630	2,22	0,48679	3,55	0,49981
0,12	0,04776	0,62	0,23237	1,12	0,36864	1,62	0,44738	2,24	0,48745	3,60	0,49984
0,13	0,05172	0,63	0,23565	1,13	0,37076	1,63	0,44845	2,26	0,48809	3,65	0,49987
0,14	0,05567	0,64	0,23891	1,14	0,37286	1,64	0,44950	2,28	0,48870	3,70	0,49989
0,15	0,05962	0,65	0,24215	1,15	0,37493	1,65	0,45053	2,30	0,48928	3,75	0,49991
0,16	0,06356	0,66	0,24537	1,16	0,37698	1,66	0,45154	2,32	0,48983	3,80	0,49993
0,17	0,06749	0,67	0,24857	1,17	0,37900	1,67	0,45254	2,34	0,49036	3,85	0,49994
0,18	0,07142	0,68	0,25175	1,18	0,38100	1,68	0,45352	2,36	0,49086	3,90	0,49995
0,19	0,07535	0,69	0,25490	1,19	0,38298	1,69	0,45449	2,38	0,49134	3,95	0,49996

Додаток 3

Таблиця значень t_β, які є розв'язком рівняння $2\int_0^{t_\beta} S_{n-1}(t)dt = \beta$ із заданими β і n, де $S_{n-1}(t)$ - розподіл Стьюдента

n	β			n	β		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,6	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток 4

Таблиця значень μ, які є розв'язком рівняння $\int_{\frac{\sqrt{n-1}}{(1+\mu)}}^{\frac{\sqrt{n-1}}{(1-\mu)}} R(\chi, n) d\chi = \beta$

із заданими β і n, де $R(\chi, n)$ – розподіл «хі»

n	β			n	β		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,168	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,21
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Навчальне видання

ТЮРИН Олександр Валентинович
АХМЕРОВ Олександр Юрійович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

В авторській редакції

Підп. до друку 2019. Формат 60х84/16.
Ум. друк. арк. 9,88. Тираж пр. **50**
Зам. № .

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова
Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.

Тел.: (048) 723 28 39. E–mail: druk@onu.edu.ua