Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2003.– Т. 8, вип. 2. Фіз.-мат. науки.– С. 121–128

УДК 517.928

В. Н. Гиско
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

ОБ УСРЕДНЕНИИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару
кафедри оптимального керування та економічної кібернетики ОНУ 26.12.2002 р.

В роботі обгрунтовується схема повного усереднення для розв'язку одного класу задач оптимального керування виду $\dot{x} = \varepsilon\left[f(x,t) + A(x)\varphi(t,u) + hv\right]$ з необмеженим керуванням v.

В работе обосновывается схема полного усреднения для решения одного класса задач оптимального управления вида $\dot{x} = \varepsilon\left[f(x,t) + A(x)\varphi(t,u) + hv\right]$ с неограниченным управлением v.

In the present article the full averaging sequence for solving of one class of optimal control problem $\dot{x} = \varepsilon\left[f(x,t) + A(x)\varphi(t,u) + hv\right]$ with unbounded control v is grounding.

Введение. Уравнения движения во многих задачах ракетодинамики [1], математической экономики [2], лазерной технологии [3] содержат линейно входящие управления, на которые не накладываются геометрические ограничения. Эти задачи обычно не имеют решений в традиционном классе абсолютно непрерывных траекторий. В работе для задач, в которых минимизирующие последовательности сходятся к разрывным траекториям [4], обосновывается применимость метода усреднения уравнений управляемого движения [5] для построения асимптотически оптимальных решений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу оптимального управления с терминальным критерием качества

$$\dot{x} = \varepsilon\left[f(x,t) + A(x)\varphi(t,u) + hv\right], \quad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

$$J[u,v] = \Phi\left(x\left(L\varepsilon^{-1}\right)\right) \to \min, \tag{1.2}$$

где $x \in R^n$ – фазовый вектор, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $u \in U \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^r)$, $v \in \mathbb{R}^k$ – измеримые управления, $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ – время, $f(x,t)$ – n-мерная, 2π-периодичная по t вектор-функция, $A(x)$ – $n \times m$ матрица, $\varphi(t,u)$ – m-мерная, 2π-периодичная по t вектор-функция, h – $n \times k$ матрица.

Построим семейство задач оптимального управления

$$\dot{x}_n = \varepsilon\left[f(x_n,t) + A(x_n)\varphi(t,u_n) + hv_n\right], \quad x_n(0) = x_0, \tag{1.3}$$

$$J[u_n,v_n] = \Phi\left(x_n\left(L\varepsilon^{-1}\right)\right), \tag{1.4}$$

где последовательность управлений $\left\{v_n(\cdot)\right\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$v_n \in S_{\gamma_n}(0), \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \infty. \tag{1.5}$$

Сделав замену переменных $\tau = \varepsilon t$, $\tau \in [0, L]$, поставим в соответствие задачам оптимального управления (1.1),(1.2) и (1.3),(1.4) усредненные задачи

$$\frac{dy}{d\tau} = \bar{f}(y) + A(y)q + hv, \quad y(0) = x_0, \tag{1.6}$$

$$\bar{J}[q,v] = \Phi\big(y(L)\big), \tag{1.7}$$

и

$$\frac{dy_n}{d\tau} = \bar{f}(y_n) + A(y_n)q_n + hv_n, \quad y_n(0) = x_0, \tag{1.8}$$

$$\bar{J}[q_n,v_n] = \Phi\big(y_n(L)\big), \tag{1.9}$$

где

$$\bar{f}(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y,t)dt .$$

Управления q и q_n выбираются из компактного и выпуклого множества [5]

$$Q = \left\{ q \in R^m \,\middle|\, q = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(s,u(s))ds, \quad u(s) \in U \right\}. \tag{1.10}$$

Соответствие между исходной $u(t)$ и усредненной $q(t)$ функциями управления установим с помощью соотношения

$$\int_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \varphi(s,u(s))ds = \int_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} q(\varepsilon s)ds, \quad i = 0,\ldots,\left[\frac{L}{2\varepsilon\pi}\right]+1, \tag{1.11}$$

доопределяя $u(t) = u(L\varepsilon^{-1})$ при $t > L\varepsilon^{-1}$ и $q(t) = q(L)$ при $t > L$.

Рассмотрим случай, когда оптимальное управление задачи (1.8), (1.9) имеет вид

$$\|v_n(\tau)\| = \begin{cases} \gamma_n, & t \in I_n \\ 0, & t \notin I_n, \end{cases} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\theta_i^n}^{\theta_i^n+\delta_i^n} hv_n(\tau)d\tau = c_i, \quad \left\| \int_{\theta_i^n}^{\theta_i^n+\delta_i^n} hv_n(\tau)d\tau \right\| \le C_i, \tag{1.12}$$

где $I_n = \left\{ \tau \in [\theta_i^n, \theta_i^n + \delta_i^n] \,\middle|\, \theta_i^n \in [0,L), \quad i = 1,\ldots,p \quad \delta_i^n \to 0, \quad \theta_i^n \to \theta_i \right\}$.

Определение [6]. Функцию $x(\cdot)$, непрерывную слева на промежутке $\left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$, назовем *обобщенным решением системы* (1.1), если существует последовательность допустимых управлений $\{u_n(\cdot)\}$, сходящаяся по норме L_1 к допустимому управлению $u(\cdot)$, и $\{v_n(\cdot)\}$, удовлетворяющая (1.12), так что для соответствующей последовательности решений системы (1.3) $\{x_n(\cdot)\}$ имеет место поточечная сходимость к функции $x(\cdot)$ во всех точках непрерывности.

2. Существование обобщенного решения. Исследуем вопрос о существовании обобщенного решения, то есть условия, при которых сходимость управлений $\{u_n(\cdot)\}$, $\{v_n(\cdot)\}$ будет гарантировать и сходимость соответствующих решений.

Лемма 1. *Пусть в* $\Omega = \left\{ t \ge 0, x, y \in D, u \in U \in \mathrm{comp}\,(\mathbb{R}^r), v \in \mathbb{R}^k, q \in Q \in \mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^r) \right\}$ *выполнены следующие условия:*

1) *вектор-функция* $f(x,t)$ *– непрерывна,* 2π*-периодична по* t*, равномерно ограничена константой* K *и удовлетворяет условию Липшица по* x *с константой* λ

$\|f(x,t)\| \le K, \quad \|f(x,t)-f(y,t)\| \le \lambda \|x-y\|$;

2) *функция* $\varphi(t,u)$ *–* 2π*-периодична по* t*, ограничена константой* P *и удовлетворяет условию Липшица по переменной* u *с константой* β

$\|\varphi(t,u)\| \le P, \quad \|\varphi(t,u)-\varphi(t,w)\| \le \beta \|u-w\|$;

3) *матрица* $A(x)$ *– ограничена константой* H *и удовлетворяет условию Липшица по переменной* x *с константой* α

$\|A\| \le H, \quad \|A(x)-A(y)\| \le \alpha \|x-y\|$;

4) *управления* $v_n(t)$ *имеют структуру, описываемую соотношением* (1.12)

$\sum\limits_{i=1}^{k} C_i \le M$;

5) *последовательности* $u_n(t)$ *и* $q_n(t)$ *сходятся по норме* L_1*, а соответствующие решения* $x_n(t)$ *и* $y_n(t)$ *лежат вместе с* ρ*-окрестностью в области* D.

Тогда последовательности $\{x_n(t)\}$ *и* $\{y_n(t)\}$ *поточечно сходятся к кусочно непрерывным функциям* $x(t)$ *и* $y(t)$*, лежащим в области* D*, во всех их точках непрерывности.*

Доказательство. Докажем поточечную сходимость последовательности $\{x_n(t)\}$. Выберем две произвольные сходящиеся подпоследовательности $\{x_n^1(t)\}$, $\{x_n^2(t)\}$ и покажем, что в каждой точке непрерывности они сходятся к одной и той же величине. Составим для них интегральные уравнения:

$$x_n^1(t) = x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t \left[f(s, x_n^1(s)) + A(x_n^1(s))\varphi(s, u_n^1(s)) + h v_n^1(s) \right] ds,$$

$$x_n^2(t) = x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t \left[f(s, x_n^2(s)) + A(x_n^2(s))\varphi(s, u_n^2(s)) + h v_n^2(s) \right] ds.$$

Обозначим $\tilde\theta_1^n = \min(\theta_1(x_n^1), \theta_1(x_n^2))$, тогда при $t < \tilde\theta_1^n \varepsilon^{-1}$

$$\|x_n^2(t) - x_n^1(t)\| \le \varepsilon \int\limits_0^t \|f(s, x_n^2(s)) - f(s, x_n^1(s))\| ds +$$

$$+\varepsilon \int\limits_0^t \|A(x_n^2(s))\varphi(s, u_n^2(s)) - A(x_n^1(s))\varphi(s, u_n^1(s))\| ds \le$$

$$\le \varepsilon\lambda \int\limits_0^t \|x_n^2(s) - x_n^1(s)\| ds + \varepsilon\alpha P \int\limits_0^t \|x_n^2(s) - x_n^1(s)\| ds + \varepsilon\beta H \int\limits_0^t \|u_n^2(s) - u_n^1(s)\| ds \le$$

$$\le \varepsilon\beta H e^{(\lambda+\alpha P)L} \int\limits_0^{\tilde\theta_1^n/\varepsilon} \|u_n^2(s) - u_n^1(s)\| ds = O_1(n). \tag{2.1}$$

Учитывая сходимость последовательности $\{u_n(t)\}$, получаем, что $O_1(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначив $\Delta_1 = \theta_1^n \varepsilon^{-1}$, $\Delta_2 = (\theta_1^n + \delta_1^n)\varepsilon^{-1}$, для последовательности $\{x_n(t)\}$ получим

$$\|x_n(\Delta_2) + x_n(\Delta_1) - c_1\| \le \varepsilon \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \|f(s, x_n(s))\| + \|A(x_n(s))\| \|\varphi(s, u_n(s))\| dt +$$

$$+ \left\| \varepsilon \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} hv_n^1(s) ds - c_1 \right\| \le \varepsilon(\Delta_2 - \Delta_1)(K + PH) + O_2(n) = O(\delta_n) + O_2(n).$$

Отсюда для точки $t = (\theta_1^n + \delta_1^n)\varepsilon^{-1}$ получаем

$$\left\| x_n^2(\theta_1^n \varepsilon^{-1} + \delta_1^n \varepsilon^{-1}) - x_n^1(\theta_1^n \varepsilon^{-1} + \delta_1^n \varepsilon^{-1}) \right\| \le O_1(n) + O(\delta_n) + O_2(n) = O(n),$$

где $O(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, для промежутка $\left((\theta_1^n + \delta_1^n)\varepsilon^{-1}, \theta_2^n \varepsilon^{-1}\right)$ оценка (2.1) примет вид

$$\left\| x_n^2(t) - x_n^1(t) \right\| \le \varepsilon\beta H e^{(\lambda + \alpha P)L} \left\{ O(n) + \int_{(\theta_1^n + \delta_1^n)/\varepsilon}^{\theta_2^n/\varepsilon} \left\| u_n^2(s) - u_n^1(s) \right\| ds \right\}. \tag{2.2}$$

Индукцией легко показать выполнение неравенства (2.2) и на остальных промежутках непрерывности, а учитывая конечность количества точек разбиения θ_i, получаем поточечную сходимость на промежутке $\left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ при $t \ne \theta_i$. Применяя аналогичные рассуждения для последовательности $\{y_n(t)\}$, получаем утверждение леммы.

3. Усреднение задачи с неограниченным управлением. Теперь исследуем связь между найденным обобщенным решением усредненной системы и решением исходной системы (1.1).

Теорема 1. *Пусть в области* Ω *выполнены условия леммы* 1.

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *существует* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in \left(0, \varepsilon_0\right]$ *и* $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$, $t \ne \theta_i$ *справедливо неравенство*

$$\|x(t) - y(\varepsilon t)\| \le \eta, \tag{3.1}$$

где $x(t)$ *и* $y(\varepsilon t)$ *– обобщенные решения систем* (1.1) *и* (1.6) *соответственно.*

Доказательство. Согласно лемме 1 последовательность $y_n(t)$ сходится и определяет обобщенное решение $y(t)$. Управления $u_n(t) \in U$ строим исходя из соотношения (1.11). Заменив системы (1.3),(1.8) системами интегральных уравнений:

$$x_n(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t \left[f(x_n(s), s) + A(x_n)\varphi(s, u_n) + hv_n(s) \right] ds,$$

$$y_n(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t \left[\overline{f}(y_n(s)) + A(y_n) q_n + hv_n(s) \right] ds,$$

получим для $t \notin I_n$

$$\left\|x_n(t)-y_n(t)\right\|\le \varepsilon\lambda\int\limits_0^t\left\|x_n(t)-y_n(t)\right\|ds+\left\|\int\limits_0^t\left[A(x_n)\varphi(s,u_n(s))-A(y_n)q_n(s)\right]ds\right\|+$$

$$+\varepsilon\left\|\int\limits_0^t\left[f(y_n(s),s)-\overline{f}(y_n(s))\right]ds\right\|. \tag{3.2}$$

Разделим отрезок $\left[0,L\varepsilon^{-1}\right]$ на m равных частей точками $t_0=0,t_1=\frac{L}{\varepsilon m},\ldots,t_i=\frac{Li}{\varepsilon m},\ldots,t_m=L\varepsilon^{-1}$. Причем разбиение произведем таким образом, чтобы $I_n\bigcap\left\{t_1,\ldots,t_{m-1}\right\}=\varnothing$.

Предположим, что $t\in\left[t_k,t_{k+1}\right)$, где $0\le k\le m-1$. Пусть $z(y,t)=f(y,t)-\overline{f}(y)$. Тогда для третьего слагаемого в (3.2) имеем

$$\left\|\varepsilon\int\limits_0^t z(y_n(s),s)ds\right\|\le\varepsilon\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}[z(y_n(s),s)-z(y_n(t_i),s)]ds+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t_k}^{t}\left[z(y_n(s),s)-z(y_n(t_k),s)\right]ds+\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}z(y_n(t_i),s)ds+\int\limits_{t_k}^{t}z(y_n(t_k),s)ds\right\|\le$$

$$\le\varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|z(y_n(s),s)-z(y_n(t_i),s)\right\|ds+\varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}\left\|z(y_n(s),s)-z(y_n(t_k),s)\right\|ds+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}\left[\left\|\int\limits_0^{t_{i+1}}z(y_n(t_i),s)ds\right\|+\left\|\int\limits_0^{t_i}z(y_n(t_i),s)ds\right\|\right]+\left\|\int\limits_0^{t}z(y_n(t_i),s)ds\right\|+\left\|\int\limits_0^{t_k}z(y_n(t_k),s)ds\right\|. \tag{3.3}$$

Так как $\left\|z(x,t)-z(y,t)\right\|\le 2\lambda\left\|x-y\right\|$, то

$$\left\|y_n(s)-y_n(t_i)\right\|=\varepsilon\left\|\int\limits_{t_i}^{s}\left[\overline{f}(y_n(t))+A(y_n(t))q_n(t)+hv_n(t)\right]dt\right\|\le$$

$$\le\varepsilon\left\|\int\limits_{t_i}^{s}\overline{f}(y_n(t))dt\right\|+\varepsilon\left\|\int\limits_{t_i}^{s}A(y_n(t))q_n(t)dt\right\|+\varepsilon\left\|\int\limits_{t_i}^{s}hv_n(t)dt\right\|\le$$

$$\le\varepsilon(K+HP)(s-t_i)+\omega(i),$$

где $\omega(i)=\sum\limits_{\theta_j\in(t_i;s)}C_j$.

Тогда

$$\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|z(y_n(s),s)-z(y_n(t_i),s)\right\|ds\le 2\lambda\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|y_n(s)-y_n(t_i)\right\|ds\le$$

$$\le 2\lambda\varepsilon^2(K+HP)\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}(s-t_i)ds+\frac{2\lambda L}{m}\omega(i)=\frac{\lambda(K+HP)L^2}{m^2}+\frac{2\lambda L}{m}\omega(i) \tag{3.4}$$

Для любого $y\in D$, $t^*\in[0,L\varepsilon^{-1}]\setminus I_n$ имеем

$$\varepsilon\left\|\int_0^t f(y_n(t^*),s)-\overline{f}(y_n(t^*))ds\right\|\le$$

$$\le\varepsilon\sum_{j=0}^{d-1}\left\|\int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} f(y_n(t^*),s)-\overline{f}(y_n(t^*))ds\right\|+\varepsilon\left\|\int_{2\pi d}^{t} f(y_n(t^*),s)-\overline{f}(y_n(t^*))ds\right\|=$$

$$=\varepsilon\left\|\int_{2\pi d}^{t} f(y_n(t^*),s)-\overline{f}(y_n(t^*))ds\right\|\le 4K\varepsilon\pi\,,$$

где d – целая часть от $t/2\pi$.

Следовательно

$$\left\|\varepsilon\int_0^{t_i} z(y_n(t_i),s)ds\right\|\le 4K\varepsilon\pi\,,$$

$$\left\|\varepsilon\int_0^{t} z(y_n(t_k),s)ds\right\|\le 4K\varepsilon\pi\,.$$

Таким образом, из (3.3),(3.4) имеем

$$\left\|\varepsilon\int_0^{t} z(y_n(s),s)ds\right\|\le\frac{\lambda(K+HP)L^2}{m}+8mK\varepsilon\pi+\frac{2\lambda LMN}{m}\,. \tag{3.5}$$

Теперь перейдем к рассмотрению второго слагаемого в формуле (3.2). Разобьем отрезок $\left[0,L\varepsilon^{-1}\right]$ точками $t_0=0,t_1,\dots,t_{k+1}=L\varepsilon^{-1}$ таким образом, чтобы $I_n\cap\left\{t_1,\dots,t_k\right\}=\varnothing$ и точки t_i были кратны 2π. Пусть $x_n^i=x_n(t_i)$, тогда

$$\varepsilon\left\|\int_0^t\left[A(x_n(s))\varphi(s,u_n(s))-A(y_n(s))q_n(s))\right]ds\right\|\le\varepsilon\left\|\int_0^t A(x_n(s))\left[\varphi(s,u_n(s))-q_n(s))\right]ds\right\|+$$

$$+\varepsilon\int_0^t\left\|A(x_n(s))-A(y_n(s))\right\|\cdot\left\|q_n(s)\right\|ds\le\varepsilon\alpha P\int_0^t\left\|x_n(s)-y_n(s)\right\|ds+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}\left\|\int_{t_i}^{t_{i+1}}A(x_n(s))\left[\varphi(s,u_n(s))-q_n(s))\right]ds\right\|+\varepsilon\left\|\int_{t_k}^{t}A(x_n(s))\left[\varphi(s,u_n(s))-q_n(s))\right]ds\right\|\le$$

$$\le\varepsilon\alpha P\int_0^t\left\|x_n(s)-y_n(s)\right\|ds+\varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}\left\|\int_{t_i}^{t_{i+1}}A(x_n^i)\left[\varphi(s,u_n(s))-q_n(s))\right]ds\right\|+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}\left\|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[A(x_n(s))-A(x_n^i)\right]\left[\varphi(s,u_n(s))-q_n(s))\right]ds\right\|+\varepsilon\left\|\int_{t_k}^{t}A(x_n^i)\left[\varphi(s,u_n(s))-q_n(s))\right]ds\right\|+$$

$$+\varepsilon\left\|\int_{t_k}^{t}\left[A(x_n(s))-A(x_n^i)\right]\left[\varphi(s,u_n(s))-q_n(s))\right]ds\right\|\le$$

$$\le\varepsilon\alpha P\int_0^t\left\|x_n(s)-y_n(s)\right\|ds+\varepsilon(12PH\pi+2HL(K+PH)+M) \tag{3.6}$$

Подставив оценки (3.5),(3.6) в (3.2) и используя лемму Гронуолла – Беллмана, получим

$$\|x_n(t)-y_n(t)\|\le \varepsilon\lambda\int_0^t\|x_n(s)-y_n(s)\|ds+\varepsilon\alpha P\int_0^t\|x_n(s)-y_n(s)\|ds+8mK\varepsilon\pi+$$

$$+\frac{\lambda(K+HP)L^2}{m}+\varepsilon(12PH\pi+2HL(K+PH)+M)+\frac{2\lambda LM}{m}\le$$

$$\le\left[\frac{\lambda(K+HP)L^2}{m}+8mK\varepsilon\pi+\frac{2\lambda LM}{m}+4\pi\varepsilon HP\right]e^{(\lambda+\alpha P)L} \qquad (3.7)$$

Выберем m таким образом, чтобы выполнялось

$$\left[\frac{\lambda(K+HP)L^2}{m}+\frac{2\lambda LM}{m}\right]e^{(\lambda+\alpha P)L}<\frac{\eta}{2}.$$

Зафиксировав m, выберем ε_0 так, чтобы при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ было верно неравенство

$$\{8mK\varepsilon\pi+4\pi\varepsilon HP\}e^{(\lambda+\alpha P)L}<\frac{\eta}{2}.$$

Таким образом, $\|x_n(t)-y_n(t)\|<\eta$ для любого $n\ge m$. Этим доказана попарная близость всех членов последовательностей $\{y_n\}$ и $\{x_n\}$. Отсюда следует, что предельные функции для последовательностей $\{x_n(t)\}$ и $\{y_n(t)\}$ так же будут различаться не более чем на η:

$$\|x(t)-y(t)\|\le\eta,\forall t\in\left[0,L\varepsilon^{-1}\right].$$

Тем самым доказано утверждение теоремы для обобщенных решений систем (1.1) и (1.6).

Таким образом, при выборе управлений $u(t)$, $q(t)$, связанных соотношением (1.10), соответствующие траектории $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют неравенству (3.1) во всех точках непрерывности.

Теорема 2. *Пусть в области* Ω *выполнены условия леммы* 1, *а также:*

1) *функция* $\Phi(x)$ *непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с константой* β*:*

$$\|\Phi(x)-\Phi(y)\|\le\beta\|x-y\|;$$

2) *существуют оптимальные обобщенные решения* $x^*(t)$, $y^*(t)$ *задач* (1.1),(1.2) *и* (1.6),(1.7) *соответственно.*

Тогда для любого $\mu>0$ *существует* $\varepsilon_0(\mu,L)>0$ *такое, что для всех* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *справедливы неравенства*

$$J_0-J^*\le\mu,$$

$$\left|\bar{J}^*-J^*\right|\le\mu,$$

где $J^*=\Phi(x^*(L\varepsilon^{-1}))$, $\bar{J}^*=\Phi(y^*(L))$, $J_0=\Phi(x_0(L\varepsilon^{-1}))$, $x_0(t)$ *– обобщенное решение, соответствующее оптимальному обобщенному решению* $y^*(\tau)$.

Доказательство. Пусть $y_0(t)$ – обобщенное решение, соответствующее оптимальному обобщенному решению $x^*(t)$. На основании теоремы 1, используя условие 2) теоремы 2, получаем, что

$$\left|\bar{J}(y_0) - J(x^*)\right| = \left|\Phi(y_0(L)) - \Phi(x^*(L\varepsilon^{-1}))\right| \le \beta \left\|y_0(L) - x^*(L\varepsilon^{-1})\right\| \le \beta\eta$$

и

$$\left|\bar{J}(y^*) - J(x_0)\right| = \left|\Phi(y^*(L)) - \Phi(x_0(L\varepsilon^{-1}))\right| \le \beta \left\|y^*(L) - x_0(L\varepsilon^{-1})\right\| \le \beta\eta .$$

Очевидно, что для выбранных управлений выполняются неравенства

$$\bar{J}\left[y^*\right] \le \bar{J}[y_0],$$

$$J\left[x^*\right] \le J[x_0].$$

Следовательно, выполняются неравенство

$$\bar{J}[y_0] \ge \bar{J}\left[y^*\right] \ge J\left[x_0\right] \ge J[x^*] \ge \bar{J}[y_0] - \beta\eta$$

либо неравенство

$$J\left[x_0\right] \ge J[x^*] \ge \bar{J}[y_0] \ge \bar{J}\left[y^*\right] \ge J\left[x_0\right] - \beta\eta .$$

То есть

$$\left|\bar{J}\left[y^*\right] - J[x^*]\right| = \left|\bar{J}^* - J^*\right| \le \beta\eta ,$$

$$J\left[x_0\right] - J[x^*] = J_0 - J^* \le \beta\eta .$$

Выбрав ε_0 в (3.1) так, чтобы $\eta < \mu/\beta$, получаем утверждение теоремы.

Заключение. Таким образом, обоснована схема усреднения для задач оптимального управления с неограниченным, линейно входящим управлением. Показана близость решений исходной и усредненной задач. Очевидно, что данный алгоритм можно обобщить на случай измеримых по t функций $f(t,x)$ и $\varphi(t,x)$, а также функций $f(t,x)$, разрывных по некоторой поверхности $\Phi(t,x) = 0$.

1. **Лоуден Д.** Оптимальные траектории для космической навигации.– М.: Мир, 1966.– 356 с.
2. **Kamien M. I., Schwartz N. L.** The Calculus of Variation and Optimal Control in Economics and Management.– North Holland, NY-Oxford, 1981.– 331 p.
3. **Краснов И. В., Шанарев Н. Я.** Оптимальное управление лазерными воздействиями.– Новосибирск: Наука, СО, 1989.– 92 с.
4. **Дыхта В. А., Самсонюк О. Н.** Оптимальное импульсное управление с приложениями.– М.: Физматлит, 2000.– 256 с.
5. **Плотников В. А.** Метод усреднения в задачах управления.– Одесса: Лыбедь, 1992.– 188 с.
6. **Миллер Б. М.** Оптимизация динамических систем с обобщенным управлением // АиТ.– 1989.– № 6.– С. 23–34.

Получено 27.12.2002 г.