

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра диференціальних рівнянь, топології та геометрії

Дипломна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

на тему: **Асимптотичні властивості розв'язків
нелінійних неавтономних систем звичайних
диференціальних рівнянь**

The asymptotics for solution of nonlinear non-autonomous systems of ordinary differential equations

Виконала: студентка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика

Шлепакова Марина Володимирівна

Керівник: д. ф.-м. н., проф. Євтухов В. М. _____

Рецензент: к. ф.-м. н., доц. Шарай Н.В.

Рекомендовано до захисту:

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол засідання кафедри

Протокол № ____ від _____ 2019 р.

№ ____ від _____ 2019 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Завідувач кафедри

Голова ЕК

Одеса — 2019 р.

ЗМІСТ

Вступ		3
1	Основні теоретичні відомості та результати попередніх досліджень.	5
1.1	Правильно змінні функції.	5
1.2	Теореми існування.	8
1.3	Попередні дослідження.	9
2	Асимптотичні зображення $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$-розв'язків системи диференціальних рівнянь (1.6) в особливому випадку	19
2.1	Допоміжні означення та формулювання основних результатів	19
2.2	Допоміжні твердження	25
2.3	Доведення теорем	34
2.4	Застосування отриманих результатів.	49
Висновки		56
Список літератури		58

ВСТУП

Актуальність дипломного дослідження. Однією з найактуальніших задач сучасної теорії звичайних диференціальних рівнянь є вивчення нелінійних, істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь та систем таких рівнянь. Серед робіт в цій тематиці, що стосуються встановлення асимптотичних властивостей розв'язків, більшу частину складають дослідження рівнянь та систем зі степеневими нелінійностями та нелінійностями, які асимптотично близькі до степеневих. Вивчення цих питань було розпочато з дослідження рівняння Емдена-Фаулера, окремі випадки якого зустрічаються в ядерній фізиці, газовій динаміці, механіці рідин та інших розділах природознавства. В монографії Р. Белмана та Дж. Сансоне, що вийшла в 1954 році, було викладено основні результати для рівняння Емдена-Фаулера, які отримали на початку ХХ сторіччя. В роботах F.V. Atkinsov, Т.І. Кігурадзе, М.М. Арипова, Т.А. Чантурія, А.В. Костіна, В.М. Євтухова та багатьох інших авторів розглядалися узагальнення рівняння Емдена-Фаулера другого та n -го порядків. Для цих рівнянь, при природних обмеженнях на коефіцієнти, було встановлено асимптотичні властивості всіх можливих типів правильних та сингулярних розв'язків. В 1990 році, вийшла монографія І.Т. Кігурадзе та Т.А. Чантурія, де для неавтономних звичайних диференціальних рівнянь n -го порядку загального виду була дана їх класифікація за осциляційними властивостями їх розв'язків, знайдені умови наявності або відсутності в нелінійних рівнянь сингулярних, правильних, монотонних розв'язків різних типів, які коливаються, приведені оцінки правильних розв'язків в околі нескінченності, вказані асимптотичні формули для рішень достатньо широкого класу нелінійних рівнянь. Також варто відзначити роботи А.В. Костіна та В.М. Євтухова, що були присвячені встановленню точних асимптотичних формул для широкого класу монотонних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь зі степеневими нелінійностями.

Питання асимптотичної поведінки розв'язків систем нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь досліджені значно менше. В роботах Т.А. Чантурія для систем диференціальних рівнянь, в деякому сенсі близьких до циклічних, було встановлено аналоги деяких результатів, які було раніше

отримано для диференціального рівняння n -го порядку. В роботах Д.Д. Мірзова, Ч.А. Схаліхо та В.М. Євтухова було вивчено двовимірні циклічні системи зі степеневими нелінійностями, які отримали назву систем типу Емдена-Фаулера. В роботах О.С. Владової, вивчалися n -мірні циклічні системи диференціальних рівнянь з нелінійностями відмінними від степеневих. В даних роботах, у випадку коли нелінійності є диференційованими правильно змінними функціями, при природних обмеженнях, отримано асимптотичні зображення для так званих \mathcal{P}_ω -розв'язків.

В данній дипломній роботі, розглядаються системи диференціальних рівнянь більш загального виду які, в деякому сенсі, близьки до циклічних. Метою роботи є встановлення для деяких випадків таких систем існування \mathcal{P}_ω -розв'язків та їх асимптотичних властивостей.

ВИСНОВКИ

Дана робота присвячена дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків систем істотно нелінійних диференціальних рівнянь наступного виду

$$\begin{aligned} y'_i &= f_i(t, y_1, \dots, y_n) \\ i &= \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

де $f_i : [a, \omega[\times \prod_{i=1}^n \Delta(Y_i^0) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, - неперервні функції.

Перші результати про асимптотичні властивості таких систем були отримані в роботах Т.А. Чантурія. В його роботах розглядався випадок коли система рівнянь асимптотично близька до відповідної циклічної системи. В роботах Дж. Д. Мирзова, Ч.А. Схаляхо та В.М. Євтухова були одержані точні асимптотичні формули для розв'язків систем другого порядку.

В поточній роботі вперше було виписано точні асимптотичні формули для одного з класів розв'язків системи n -ого порядку. У випадку, коли $\Lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n-1}$ та серед них є ті, що дорівнюють нулю було отримано необхідні й достатні умови існування у системи (2.1) $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$ -розв'язків, за умови, що ця система задовольняє умові $N(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$. Отримані неявні асимптотичні зображення для цих розв'язків, а при накладенні додаткових умов асимптотичні зображення розв'язків були виписані в явному вигляді.

Результати, отримані в даній дипломній роботі доповнюють результати, отримані в роботі Талимончак, для системи (2.1), коли вона задовольняє умові $N(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$, при $\Lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = \overline{1, n-1}$. Також варто зазначити, що коли функції $f_i(t, y_1, \dots, y_n) = \alpha_i p_i(t) \varphi_{i+1}(y_{i+1})$, $i = \overline{1, n}$, то результати даної дипломної роботи співпадають з результатами, отриманими в роботах О.С. Владової.

Доведення теореми, сформульованої як основний результат роботи, призвело до необхідності використання принципу Шаудера і доведення допоміжної лемми 2.1.

Результати роботи доповідалися на міжнародній конференції присвя-

ченій якісній теорії диференціальних рівнянь "QUALITDE – 2019" (Тбілісі, 2019 р.) та були опубліковані в тезах цієї конференції.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Владова Е.С. Асимптотические представления решений циклических систем дифференциальных уравнений с правильно изменяющимися нелинейностями [текст]/ Е.С. Владова // Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2010. – Т. 15, вип. 19 – С.33 - 56.
2. Владова Е.С. Асимптотическое поведение решений нелинейных циклических систем обыкновенных дифференциальных уравнений [текст]/ Е.С. Владова // Нелінійні коливання. – 2011. – Т.14, №3. – С.299 - 317.
3. Евтухов В.М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 [текст]/ Евтухов Вячеслав Михайлович. – Киев, 1998. – 295 с.
4. Евтухов В.М. Асимптотические представления правильных решений одной двумерной системы дифференциальных уравнений [текст]/ В.М. Евтухов// Доповіді НАН України. - 2002. - N 4. - С. 11 - 17.
5. Евтухов В.М. Асимптотические представления правильных решений одной полулинейной двумерной системы дифференциальных уравнений [текст]/ В.М. Евтухов // Доповіді НАН України. - 2002. - N 5. - С. 11 - 17.
6. Евтухов В.М. Об исчезающих на бесконечности решениях неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений //Дифференц. уравнения. - 2003. - 39, №4. - С. 441-452.
7. Евтухов В.М., Самойленко А.М. Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений//Укр. Мат. Ж. - 2010. - Т.62, №1. - С. 52 - 80.
8. Евтухов В.М. Асимптотические представления решений существенно нелинейных циклических систем обыкновенных дифференциальных уравнений [текст]/ В.М. Евтухов, Е.С. Владова // Дифференц. уравнения. – 2012. - Т. 48, № 5. – С. 622 - 639.
9. Евтухов В.М. Асимптотическое поведение решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [текст]/В.М. Евтухов, М.А. Талимончак // Нелінійні коливання. – 2014. – Т.17, №2. – С.213 -

227.

10. Кигурадзе И.Т. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений [текст]/ И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия. – М.: Наука, 1990. – 430 с.
11. Мирзов Дж.Д. О некоторых асимптотических свойствах решений двумерных дифференциальных систем [текст]/ Дж.Д. Мирзов //Сообщ. АН ГССР. – 1975.– Т.80, №3. – С. 545 - 548.
12. Мирзов Дж.Д. Некоторые замечания об асимптотическом поведении решений двумерных нелинейных дифференциальных систем [текст]/ Дж.Д. Мирзов //В сб.: Исследования некоторых уравнений математической физики. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1976.– С. 131 - 152.
13. Мирзов Дж.Д. Об асимптотических свойствах решений двумерных дифференциальных систем [текст]/ Дж.Д. Мирзов //Диф. уравнения. – 1977.– Т.13, №12. – С. 2188 - 2198.
14. Мирзов Дж.Д. Некоторые асимптотические свойства решений одной системы типа Эмдена-Фаулера [текст]/ Дж.Д. Мирзов //Диф. уравнения. – 1987.– Т.23, №9. – С. 1519 - 1532.
15. Мирзов Дж.Д. О главных и неглавных решениях одной нелинейной системы [текст]/ Дж.Д. Мирзов //Тр. Ин-та прикл. мат. им. И.Н. Векуа Тбилис. ун-та. – 1988.– Т.31. – С. 100 - 117.
16. Мирзов Дж.Д. Асимптотические свойства решений систем нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений [текст]/ Дж.Д. Мирзов //Майкоп: Адыгейское книжное издательство, 1993. – 132 с.
17. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука.- 1985. - 144с.
18. Схалыхо Ч.А. О колеблемости и неколеблемости решений одной системы нелинейных дифференциальных уравнений [текст]/ Ч.А. Схалыхо //Диф. уравнения. – 1980.– Т.16, №8. – С. 1523 - 1526.
19. Схалыхо Ч.А. О правильных решениях многомерных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [текст]/ Ч.А. Схалыхо //Тр. Ин-та прикл. мат. им. И.Н. Векуа Тбилис. ун-та. – 1983.– Т.14. – С. 146 - 162.

20. Чантурия Т.А. Об осцилляционных свойствах систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [текст]/ Т.А. Чантурия // Тр. Ин-та прикл. мат. им. И.Н. Векуа Тбилис. ун-та. – 1983.– Т.14. – С. 163 - 206.
21. Bingham N.H. Regular variation . Encyclopedia of mathematics and its applications [text]/ N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels. – Cambridge University Press. – 1987. – 494p.
22. Chanturia T.A. On singular solutions of strongly nonlinear systems of ordinary differential equations [text]/ Т.А. Chanturia//Funct. theor. math. different. equat. London.- 1976. - P. 196-204.
23. Evtukhov V.M. On the asymptotics of solutions of nonlinear cyclic systems of ordinary differential equations in special cases. [text]/ V.M. Evtukhov, O.S. Vladova // Mem. Differential Equations Math. Phys. - Tbilisi: Georgian academy of sciences. – 2011. – V.54. – P.1 - 25.
24. Karamata J. Sur une mode de croissance reguliere de fonctions [text]/ J. Karamata // Math. (Cluj) – 1930. – V. 4. – P. 38 - 53.
25. Shlyepakova M. Asymptotic Representations for Solutions of Non-Linear Systems of Ordinary Differential Equations. [text]/ M. Shlyepakova // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2019" December 7 - 9, 2019: Abstracts. – Tbilisi, 2019. – P.174-178