МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА

Н. А. Якімова

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Частина 1

Теорія множин. Теорія графів

КУРС ЛЕКЦІЙ

ОДЕСА
ОНУ
2022

УДК 510.3:519.171/.173(042.4)
Я453

*Рекомендовано навчально-методичною радою
Одеського національного університету імені І. І. Мечнікова.
Протокол № 2 від 14.04.2022 р.*

Автор:

Н. А. Якімова, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Рецензенти:

Б. Є. Панченко, доктор фізико-математичних наук, доцент, т. в. завідувача кафедри інженерії програмного забезпечення Державного університету інтелектуальних технологій і зв'язку;

П. Д. Варбанець, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики ОНУ імені І.І. Мечникова.

Якімова Н.А.

Я453 Дискретна математика. Частина 1. Теорія множин. Теорія графів: курс лекцій / Н. А. Якімова. – Одес. нац. ун-т ім І. І. Мечнікова. – Одеса, 2022. – 101 с.

ISBN 978-617-689-541-1

У пропонованому курсі лекцій розглядаються деякі основні поняття теорії множин та теорії графів. Весь викладений матеріал ілюструється дуже докладними прикладами, схемами та алгоритмами, що полегшує розуміння студентами як самого теоретичного матеріалу, так і його значення для обраної ними спеціальності. В даному курсі лекцій викладені основні поняття теорії множин і теорії графів, основні операції над множинами та графами, а також спеціальні розділи, що мають особливо важливе значення при вивченні дискретної математики студентами спеціальностей саме комп'ютерного напрямку.

Курс лекцій складений для студентів першого (бакалаврського) рівня освіти спеціальностей 113 «Прикладна математика», 122 «Комп'ютерні науки», 123 «Комп'ютерна інженерія», 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології».

УДК 510.3:519.171/.173(042.4)

ISBN 978-617-689-541-1

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Сьогодення ставить перед наукою все більшу кількість задач, пов'язаних із комп'ютеризацією. Курс дискретної математики є базовою математичною дисципліною при підготовці студентів, які обрали собі фах, що передбачає комп'ютерний напрям підготовки. Дискретна математика складається з багатьох розділів. Даний курс лекцій своєю першою частиною охоплює два з них: теорію множин та теорію графів.

Перший розділ пропонованого курсу лекцій присвячений елементам теорії множин. Розглянуто основні поняття та операції над множинами. Особливу увагу приділено методу включень та вилучень, бо саме він найбільш наочно демонструє роботу основних операцій над множинами та потужностей тих множин, які отримано в результаті цих операцій. Також досить докладно розглянуто застосування кругів Ейлера як при виконанні операцій над множинами, так і при доведенні теоретико-множинних тотожностей. Навички роботи з таким конструкціями дуже стають у нагоді при подальшому вивченні елементів математичної логіки, полегшуючи їх розуміння. Безумовно, неможливо в одному курсі висвітлити всі можливі розділи та застосунки теорії множин. Деякі з них вивчаються студентами як окремі дисципліни на старших курсах, тому в даному курсі лекцій їм не приділялося достатньо уваги.

Другий розділ пропонованого курсу лекцій присвячено елементам теорії графів. Це дуже важливий розділ дискретної математики, що має подальше застосування в теорії алгоритмів, електротехніці тощо. Велику увагу приділено різним способам задання графів, їх взаємозв'язку та характеристиці графів у залежності від їх початкового подання. Докладно розглянутий такий особливий різновид графів як дерева.

В умовах дистанційного навчання, що в теперішній час стає все більш затребуваним, велике значення має візуалізація теоретичного матеріалу. Це досягається за допомогою розробки презентацій, якими супроводжується викладання лекцій. Цей курс лекцій складений із використанням цих напрацювань, зроблених за останні роки. Тому він містить дуже багато кольорових ілюстрацій, схем і таблиць, бо саме за рахунок цього досягаються зручна візуалізація та глибше засвоєння досить незвичного для студентів першого курсу математичного матеріалу. Базовий курс математики загальноосвітньої середньої школи не передбачає вивчення подібних математичних конструкцій. А саме для студентів-першокурсників і складений пропонований курс лекцій. Майже усі твердження, леми та теореми мають суворе математичне доведення. Їх робота проілюстрована багатьма докладними прикладами.

Глава 1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

1.1. ПОНЯТТЯ МНОЖИНИ

1.1.1. Множина та її елементи

Поняття множини належить до аксіоматичних понять математики, і точне його визначення дати неможливо. Часто приймається формулювання інтуїтивного поняття множини Г. Кантора – засновника теорії множин.

Означення. *Множина* – це довільне об'єднання окремих предметів або об'єктів нашої інтуїції, або інтелекту, які можна розрізнити і які є єдиним цілим.

Означення. Предметы, що входять до складу множини, називаються її елементами [4].

Основна увага тут переноситься з окремих предметів на об'єднання предметів, які, у свою чергу, можна розглядати як предмети. Поняття множини відноситься до категорії найбільш загальних, основних понять математики. Тому замість суворого означення зазвичай приймається деяке основне положення про множину та її елементи: множина утворюється із елементів, яким притаманні деякі властивості і які знаходяться в деяких відношеннях між собою або з елементами інших множин [1].

Твердження, що множина складається із елементів, які можна розрізнити $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, …, $\boldsymbol{a_n}$ (і лише із цих елементів), умовно записується A=$\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}\}$. Приналежність елемента множині (*відношення приналежності*) позначається символом «∈», тобто $\boldsymbol{a_1} \in A$, $\boldsymbol{a_2} \in A$, …, $\boldsymbol{a_n} \in \boldsymbol{A}$ або $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, …, $\boldsymbol{a_n} \in \boldsymbol{A}$. Якщо $\boldsymbol{b}$ не є елементом A, то пишуть $\boldsymbol{b} \notin \boldsymbol{A}$ або $\boldsymbol{b} \,\overline{\in}\, \boldsymbol{A}$. Якщо $\boldsymbol{a_1} \in A$, то в складі множини A цей елемент вказується лише один раз, тобто записи A=$\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}\}$ і A=$\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}\}$ є еквівалентними.

Для будь-яких двох предметів, що розглядаються як елементи даної множини, повинна існувати можливість з'ясувати, різні ці предмети чи однакові. З іншого боку, якщо задані деяка множина і деякий предмет, то повинна існувати можливість визначити, є цей предмет елементом даної множини чи ні. Звідси випливає, що будь-яка множина повністю визначається своїми елементами. Цю «конторівську» вимогу формулюють у вигляді аксіоми [4].

<u>Аксіома екстенціональності</u> (*інтуїтивний принцип об'ємності*). Дві множини A і $\boldsymbol{B}$ *рівні* (*тотожні*) $\boldsymbol{A=B}$ тоді й тільки тоді, коли кожний елемент множини A є елементом множини $\boldsymbol{B}$ і навпаки, тобто коли вони складаються з одних і тих самих елементів.

Цю аксіому можна розглядати як аналог означення тотожних множин.

<u>Приклад 1.1</u>. Розглянемо множини $\boldsymbol{A_1}$=$\{1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{A_2}$=$\{1, 2, 3, 4\}$, $\boldsymbol{A_3}$=$\{1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{A_4}$=$\{a, b, c\}$, $\boldsymbol{A_5}$=$\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$, $\boldsymbol{A_6}$=$\{\{1, 2, 3\}\}$ і $\boldsymbol{A_7}$=$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$. Визначити, які з цих множин дорівнюють одна одній.

<u>Розв'язання</u>. Серед цих множин рівними є тільки множини $\boldsymbol{A_1}$=$\boldsymbol{A_3}$, тому що вони складаються з одних і тих самих елементів. Множина $\boldsymbol{A_7}$ не збігається з цими множинами, як це може здаватися на перший погляд. Її елементами є не числа **1**, **2** і **3**, а одноелементні множини $\{1\}$, $\{2\}$ і $\{3\}$. Тому $\boldsymbol{A_1} \neq \boldsymbol{A_7}$ і $\boldsymbol{A_3} \neq \boldsymbol{A_7}$. Множина $\boldsymbol{A_2}$, окрім усіх елементів множин $\boldsymbol{A_1}$ і $\boldsymbol{A_3}$, містить ще й інші елементи. Тому $\boldsymbol{A_2} \neq \boldsymbol{A_1}$ і $\boldsymbol{A_2} \neq \boldsymbol{A_3}$. Множини $\boldsymbol{A_2}$ і $\boldsymbol{A_4}$ також містять різну кількість елементів, тому не можуть бути рівними, тобто $\boldsymbol{A_2} \neq \boldsymbol{A_4}$. Множини $\boldsymbol{A_1}$ і $\boldsymbol{A_4}$, хоч і складаються із однакової кількості елементів, але ці елементи не збігаються. Тому $\boldsymbol{A_1} \neq \boldsymbol{A_4}$. З

тієї ж причини $A_3 \neq A_4$. Для множин A_4 і A_5 рівність також не виконується, тобто $A_4 \neq A_5$, тому що множина A_4 складається із елементів a, b і c, а множина A_5 – із елементів $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ і $\{a, c\}$. Для множин A_1 і A_6, а також для множин A_3 і A_6 рівність також не виконується, тобто $A_1 \neq A_6$ і $A_3 \neq A_6$, тому що множини A_1 і A_3 складаються з трьох елементів (**1**, **2** і **3**), а множина A_6 – з одного елемента ($\{1, 2, 3\}$). З цієї ж причини не виконується рівність між множинами A_4 і A_6, тобто $A_4 \neq A_6$. Таким чином, необхідно розрізняти сукупність елементів множини і множину, єдиним елементом якої є вся ця сукупність [4]. Усі розглянуті порівняння можна звести до підсумку, який можна подати, як відповідь до цієї задачі.

Відповідь.

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} = A_7 \neq A_1 = \{1, 2, 3\} = A_3 \neq A_7 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

$$\{1, 2, 3, 4\} = A_2 \neq A_1 = \{1, 2, 3\} = A_3 \neq A_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\{1, 2, 3, 4\} = A_2 \neq A_4 = \{a, b, c\}$$

$$\{a, b, c\} = A_4 \neq A_1 = \{1, 2, 3\} = A_3 \neq A_4 = \{a, b, c\}$$

$$\{a, b, c\} = A_4 \neq A_5 = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$$

$$\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\} = A_5 \neq A_1 = \{1, 2, 3\} = A_3 \neq A_5 = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$$

$$\{a, b, c\} = A_4 \neq \{\{1, 2, 3\}\} = A_6 \neq A_1 = \{1, 2, 3\} = A_3 \neq A_6 = \{\{1, 2, 3\}\} \neq A_4 = \{a, b, c\}$$

$$\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\} = A_5 \neq A_6 = \{\{1, 2, 3\}\}$$

Означення. Множина, елементами якої, в свою чергу, є також множини, називається *класом* або *сімейством* [16].

Наприклад, множини $A_5=\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$, $A_6=\{\{1, 2, 3\}\}$ і $A_7=\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ з прикладу 1.1 є сімействами.

Рівність множин має наступні *властивості* [7]:

- ***рефлексивність***: $A=A$;
- ***симетричність***: якщо $A=B$, то $B=A$;
- ***транзитивність***: якщо $A=B$ і $B=C$, то $A=C$.

Множина може містити будь-яку кількість елементів – скінченну або нескінченну.

Означення. Множина є *скінченною*, якщо містить скінченну кількість елементів.

Означення. Множина є *нескінченною*, якщо складається з нескінченної кількості елементів.

Означення. *Одинична* (*одноелементна*) множина $A=\{a\}$ містить лише один елемент. Одиничну множину іноді називають *сінглетоном* [17].

Наприклад, сінглетоном є множина $A_6=\{\{1, 2, 3\}\}$ із прикладу 1.1. Множина $A_7=\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ сінглетоном не є, тому що містить три різні елементи. Однак кожний з її елементів сам по собі сінглетоном є, тому що вони є множинами, що містять по одному елементу кожна: $\{1\}$, $\{2\}$ і $\{3\}$

Означення. *Порожня* множина $\{\ \}$ не містить жодного елемента. Порожня множина позначається спеціальним символом $\varnothing$.

Згідно з аксіомою екстенціональності, існує єдина порожня множина.

Роль порожньої множини аналогична ролі числа «**0**». Це поняття використовується для визначення заздалегідь неіснуючої сукупності елементів. Більш суттєвим мотивом введення порожньої множини є той факт, що заздалегідь не завжди відомо (або невідомо зовсім), чи існують елементи, що визначають якусь множину.

Означення. Кількість елементів скінченної множини $\boldsymbol{A}$ називається її *потужністю* та позначається як $|A|$ [18].

Означення. Потужності довільних множин називаються *кардинальними числами*. Кардинальні числа скінченних множин вважаються скінченними, а нескінченних множин – відповідно, нескінченними.

Як правило, кардинальні числа нескінченних множин теж називають потужністю, якщо з контексту зрозуміло, про яку саме множину йдеться.

Означення. Множини $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ називаються *рівнопотужними*, якщо між їх елементами існує взаємно-однозначна відповідність [4].

Означення. Множини $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$, що мають однакову потужність, тобто для яких $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$, вважаються *еквівалентними* і позначаються як $\boldsymbol{A \sim B}$ [4, 13].

Еквівалентність *множин* має ті ж самі *властивості*, що й рівність множин. А саме [13]:

- ***рефлексивність***: $\boldsymbol{A \sim A}$;

- ***симетричність***: якщо $\boldsymbol{A \sim B}$, то $\boldsymbol{B \sim A}$;

- ***транзитивність***: якщо $\boldsymbol{A \sim B}$ і $\boldsymbol{B \sim C}$, то $\boldsymbol{A \sim C}$.

Однак, слід розрізняти поняття рівності (тотожності) і поняття еквівалентності множин. Наприклад, множини $\boldsymbol{A_1=\{1, 2, 3\}}$, $\boldsymbol{A_3=\{1, 2, 3\}}$, $\boldsymbol{A_4=\{a, b, c\}}$, $\boldsymbol{A_5=\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}}$, і $\boldsymbol{A_7=\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}}$ із прикладу 1.1 є попарно еквівалентними, тому що містять однакову кількість елементів. Таким чином, $|\boldsymbol{A_1}|=|\boldsymbol{A_3}|=|\boldsymbol{A_4}|=|\boldsymbol{A_5}|=|\boldsymbol{A_7}|$ і, як наслідок, $\boldsymbol{A_1 \sim A_3 \sim A_4 \sim A_5 \sim A_7}$. Але, як було показане в прикладі 1.1, рівними серед них є лише множини $\boldsymbol{A_1}$ і $\boldsymbol{A_3}$, тобто $\boldsymbol{A_1=A_3}$. Таким чином, можна стверджувати, що рівні (тотожні) множини завжди є еквівалентними. Але зворотне твердження в загальному випадку хибне, тобто не всі еквівалентні між собою множини є тотожними одна одній. Множина $\boldsymbol{A_2=\{1, 2, 3, 4\}}$ містить чотири елементи, тобто $|\boldsymbol{A_2}|\boldsymbol{=4}$. Тому її неможна вважати еквівалентною жодній з решти розглянутих в прикладі 1.1 множин.

Деякі множини мають стандартні позначення [18]:

$\mathbb{N}$ - множина усіх натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ - множина усіх цілих чисел;

$\mathbb{Z}_+$ - множина усіх невід'ємних чисел;

$\mathbb{Q}$ - множина усіх раціональних чисел;

$\mathbb{R}$ - множина усіх дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ - множина усіх комплексних чисел;

$\mathbb{B}=\{0, 1\}$ – булевий відрізок.

Означення. Якщо $\boldsymbol{A \sim \mathbb{N}}$, то множина $\boldsymbol{A}$ називається *зліченною* [13].

Іншими словами, зліченна множина – це така множина $\boldsymbol{A}$, всі елементи якої можуть бути перенумеровані в нескінченну послідовність $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots}$ таким чином, щоб кожний елемент отримав лише один свій порядковий номер $\boldsymbol{n}$ і кожне натуральне число $\boldsymbol{n}$ було б номером лише одного елемента множини $\boldsymbol{A}$. Потужність зліченних множин позначається як $\boldsymbol{\aleph_0}$. *Порожня множина* відноситься до *зліченних* множин.

Означення. Множина $\boldsymbol{A}$ називається *незліченною*, якщо її потужність більша за потужність множини натуральних чисел, тобто $|\boldsymbol{A}|>|\boldsymbol{\mathbb{N}}|$.

Теорема 1.1 (***теорема Кантора***). *Формулювання*. Множина усіх дійсних чисел із інтервалу **(0, 1)** є незліченною.

Доведення. Доведення цієї теореми засноване на ***діагональному методі Кантора*** [22]. Як відомо, будь-якому дійсному числу із інтервалу (0, 1) можна однозначно поставити у відповідність правильний нескінченний десятковий дріб $\mathbf{0.}\,\boldsymbol{a_1 a_2} \ldots \boldsymbol{a_n} \ldots$, який має нескінченно багато відмінних від нуля цифр. Якщо число – скінченний десятковий дріб, наприклад **0.745**, то йому ставиться у відповідність нескінченний десятковий дріб виду **0.74499…99…** . Припустимо, що теорема хибна, тобто множина дійсних чисел із інтервалу (0, 1) є зліченною. Тоді для елементів цієї множини повинна існувати наступна нумерація:

$$\boldsymbol{x_1 = 0.\,a_{11}\,a_{12} \ldots\, a_{1n}} \ldots,$$
$$\boldsymbol{x_2 = 0.\,a_{21}\,a_{22} \ldots\, a_{2n}} \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\boldsymbol{x_n = 0.\,a_{n1}\,a_{n2} \ldots\, a_{nn}} \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Просуваючись головною діагоналлю, тобто по елементах $\boldsymbol{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}, \ldots}$, складаємо нову дріб $\mathbf{0.}\,\boldsymbol{a'_{11} a'_{22}} \ldots \boldsymbol{a'_{nn}} \ldots$, таку, що $\boldsymbol{a_{ii} \neq a'_{ii}}$ для будь-якого $\boldsymbol{i}$**=1, 2, …** . Нова побудована дріб не входить до розглянутої нумерації, тому що відрізняється від будь-якого елементу $\boldsymbol{x_i}$ числом $\boldsymbol{a_{ii}}$, яке лежить на головній діагоналі. Таким чином, нумерації для усіх чисел із інтервалу (0, 1) не існує. Отже, припущення про зліченність цієї множини є хибним. Це означає, що множина чисел із інтервалу (0, 1) є незліченною. **Теорему доведено**.

Наслідок 1. Множина усіх ірраціональних чисел є незліченною.

Наслідок 2. Множина $\mathbb{R}$ усіх дійсних чисел є незліченною.

Означення. Якщо $\boldsymbol{B=2^{\aleph_0}}$ і $\boldsymbol{A \sim B}$, то множина $\boldsymbol{A}$ називається *континуальною* або *континуумом* [13].

Континуальні множини не є зліченними, тому що $\boldsymbol{2^{\aleph_0} > \aleph_0}$.

Теорема 1.2 (***теорема Кантора-Бернштейна***). *Формулювання*. Для будь-яких двох множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ виконується точно одне з наступних трьох співвідношень: $|\boldsymbol{A}|<|\boldsymbol{B}|$, або $|\boldsymbol{A}|>|\boldsymbol{B}|$, або $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

1.1.2. Задання множин

Означення. Зазвичай в конкретних міркуваннях елементи усіх множин беруться із деякої однієї, достатньо великої множини $\boldsymbol{U}$ (індивідуальної для кожного конкретного випадку), яка називається *універсальною множиною* або *універсумом* [16].

Щоб задати множину, необхідно вказати, які елементи їй належать. Для цього існують різні способи:

- ***переліком елементів***: $\boldsymbol{A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}}$;
- ***характеристичним предикатом*** (***формою від x***): $\boldsymbol{A=\{x: P(x)\}}$ ***або*** $\boldsymbol{A=\{x \mid P(x)\}}$;
- ***породжуючою процедурою***: $\boldsymbol{A=\{x: x=f\}}$;
- ***графічно***.

Переліком елементів можна задавати тільки скінченні множини. Але для задання нескінченних множин, і навіть у випадку скінченних множин, цей спосіб часто практично неможливо реалізувати. Нескінченні множини задаються виключно характеристичною властивістю, породжуючою процедурою або графічно [16].

Найбільш загальний спосіб задання конкретних множин полягає в описуванні елементів **характеристичним предикатом *P*(*x*) (формою від *x*)**, загальним для всіх елементів [14]. При цьому передбачається, що розглядаються лише ті множини, елементи яких є елементами універсуму $\boldsymbol{U}$.

Означення. *Характеристичний предикат* (*форма від* $\boldsymbol{x}$) – це деяке висловлювання, в якому дещо стверджується про $\boldsymbol{x}$, або деяка функція змінної $\boldsymbol{x}$. Якщо при заміні $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{a}$ висловлювання $\boldsymbol{P(a)}$ стає істинним або функція в заданій області визначення задовольняється, то $\boldsymbol{a}$ є елементом даної множини. Множина, задана за допомогою форми $\boldsymbol{P(x)}$, позначається як $\boldsymbol{A=\{x \mid P(x)\}}$, або $\boldsymbol{A=\{x\colon P(x)\}}$, причому $\boldsymbol{a\in\{x\colon P(x)\}}$, якщо $\boldsymbol{P(a)}$ істинне.

Означення. Властивість, що виражається за допомогою цього предиката, називається *характеристичною* (*визначальною*) *властивістю*.

Нехай $\boldsymbol{P(x)}$ означає деякий характеристичний предикат. Тоді заміною $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{a}$ отримуємо відповідну йому характеристичну властивість $\boldsymbol{P(a)}$. Задання множини в термінах властивостей досягається за допомогою аксіоми згортки.

Аксіома згортки (***інтуїтивний принцип абстракції***). Будь-яка властивість $\boldsymbol{P(x)}$ визначає єдину множину $\boldsymbol{A}$ за допомогою наступної умови: елементами множини $\boldsymbol{A}$ є ті й лише ті предмети $\boldsymbol{a}$, що мають властивість $\boldsymbol{P}$ [4].

Згідно з принципом абстракції, будь-яка властивість $\boldsymbol{P(x)}$ визначає єдину множину, що позначається $\boldsymbol{\{a \mid P(a)\}}$ і читається як «*множина всіх тих предметів* ***a****, для яких* ***P(a)***». Слід зазначити, що властивість $\boldsymbol{P}$ може являти собою спосіб побудови елементів множини $\boldsymbol{\{a \mid P(a)\}}$. Нехай $\boldsymbol{A}$ – деяка множина, а $\boldsymbol{P(x)}$ має вигляд $\boldsymbol{x\neq x}$. Тоді множина $\boldsymbol{\{a\in A \mid P(a)\}=\{a\in A \mid a\neq a\}}$, очевидно, не містить елементів. Як вже зазначалося, із принципу об'ємності випливає, що може існувати лише одна множина, що не містить елементів. Це порожня множина.

Наприклад, нехай $\boldsymbol{A=\{x\colon x^3=8\}}$. Для цієї множини характеристичним предикатом є $\boldsymbol{P(x)}$=«$\boldsymbol{x^3=8}$» і характеристичною властивістю – $\boldsymbol{P(a)}$=«***Множина всіх таких чисел а, куб яких дорівнює восьми***». Зазвичай вже в самому означенні конкретної множини явно або неявно обмежується сукупність припустимих об'єктів.

Якщо множина виділяється із деякої множини $\boldsymbol{A}$ за допомогою форми $\boldsymbol{P(x)}$, то запис $\boldsymbol{A'=\{x\colon x\in A,\, P(x)\}}$ часто спрощується: $\boldsymbol{A'=\{x\in A\colon P(x)\}}$. В термінах характеристичних властивостей цей запис означає: «***множина всіх таких елементів множини А, для яких виконується властивість Р***».

Запис $\boldsymbol{A=\{f(x)\colon P(x)\}}$ означає множину всіх таких $\boldsymbol{y=f(x)}$, для яких є $\boldsymbol{x}$, що має властивість $\boldsymbol{P(x)}$. Наприклад, $\boldsymbol{A=\{x^3\colon x}$ **– просте число}** означає множину кубів простих чисел [3].

Слід зазначити, що такі вирази як, наприклад, **«*для всіх x, y: x+y=y+x*»**, **«*існує таке x, що* 3*x*+1<0»** не можуть бути характеристичними предикатами, тому що їх неможливо характеризувати як істинні або хибні для певного $\boldsymbol{x}$.

Задання множин характеристичним предикатом може призводити до протиріч. В розглянутих прикладах жодна множина не містить саму себе в якості елемента. Навіть розглянута в прикладі 1.1 множина $\boldsymbol{A_1=\{1, 2, 3\}}$ є елементом множини $\boldsymbol{A_6=\{\{1, 2, 3\}\}}$, а не елементом самої себе. Розглянемо тепер множину, що складається із всіх множин, що не містять саму себе в якості елемента: $\boldsymbol{B=\{A \mid A\notin A\}}$. Якщо множина $\boldsymbol{B}$ існує, то повинна існувати можливість отримати відповідь на питання, чи належить множина $\boldsymbol{B}$ самій собі, тобто чи є множина $\boldsymbol{B}$ елементом самої себе: $\boldsymbol{B\in B}$? Нехай відповідь на це питання буде позитивною, тобто $\boldsymbol{B\in B}$. Але тоді, згідно зі своїм характеристичним предикатом $\boldsymbol{P(B)}$=«$\boldsymbol{B\notin B}$». Нехай тепер

$\boldsymbol{B \notin B}$. Тоді, згідно з все тим ж своїм характеристичним предикатом, $\boldsymbol{B \in B}$. Отримане логічне протиріччя, яке неможливо усунути, називається ***парадоксом Рассела***. Існує три способи уникнути цього парадоксу [16].

1. Обмежити характеристичні предикати, які застосовуються, виглядом $\boldsymbol{P(x) = x \in U | Q(x)}$, тобто $\boldsymbol{A = \{a \in U | Q(a)\}}$, де $\boldsymbol{U}$ – відомий, заздалегідь існуючий універсум. Для $\boldsymbol{B}$ універсум не вказаний. Отже, $\boldsymbol{B}$ множиною не є.
2. Другий спосіб використовує теорію типів. Вважається, що предмети мають тип «0», множини мають тип «1», множина множин (наприклад, множини $\boldsymbol{A_5}$ і $\boldsymbol{A_6}$ із прикладу 1.1) – тип «2» тощо. $\boldsymbol{B}$ тип не присвоєно. Отже, $\boldsymbol{B}$ не є множиною.
3. Характеристичну властивість $\boldsymbol{P(a)}$ задано у вигляді обчислюваної функції (алгоритма). Спосіб обчислення предиката для $\boldsymbol{A \in A}$ не задано. Отже, $\boldsymbol{B}$ не є множиною. На цьому способі заснований так званий конструктивізм – напрямок в математиці, що розглядає лише ті об'єкти, для яких відомі процедури (алгоритми) їх породження. В конструктивній математиці вилучаються із розглядання деякі поняття і методи класичної математики, що можуть привести до парадоксів.

При заданні множини **породжуючою процедурою**, як правило, задається деякий алгоритм (як правило, програмний) пошуку його елементів.

Означення. *Породжуюча процедура* – це процедура, яка, якщо вона активована, породжує деякі предмети (об'єкти), що є елементами множини, що визначається [16].

Наприклад, для множини $\boldsymbol{A_2 = \{1, 2, 3, 4\}}$ із прикладу 1.1 породжуюча процедура має вигляд: $\boldsymbol{A_2 = \{a |}$ **for** $\boldsymbol{a}$ **from 1 to 4 yield** $\boldsymbol{a\}}$.

Графічно множини можна задавати за допомогою кругів Эйлера (або діаграм Венна) [3, 4]. На цих діаграмах множини зображуються у вигляді областей деякої площини (універсуму). Якщо множина нескінченна, то вважається, що всі її елементи знаходяться всередині деякої замкненої фігури (рис. 1.1*а*). Якщо множина скінченна, то її елементи позначаються точками всередині деякої замкненої фігури (рис. 1.1*б*). Якщо якісь елементи є спільними для декількох множин, то вони лежать всередині декількох фігур. При цьому геометрично ці фігури можуть мати як однакову форму, так і різну (рис. 1.1*в*). Якщо множини не мають жодного спільного елемента, то вони зображуються двома фігурами довільної форми (як однакової, так і різної), причому кожна фігура містить точки – елементи відповідної множини (рис. 1.1*г*).

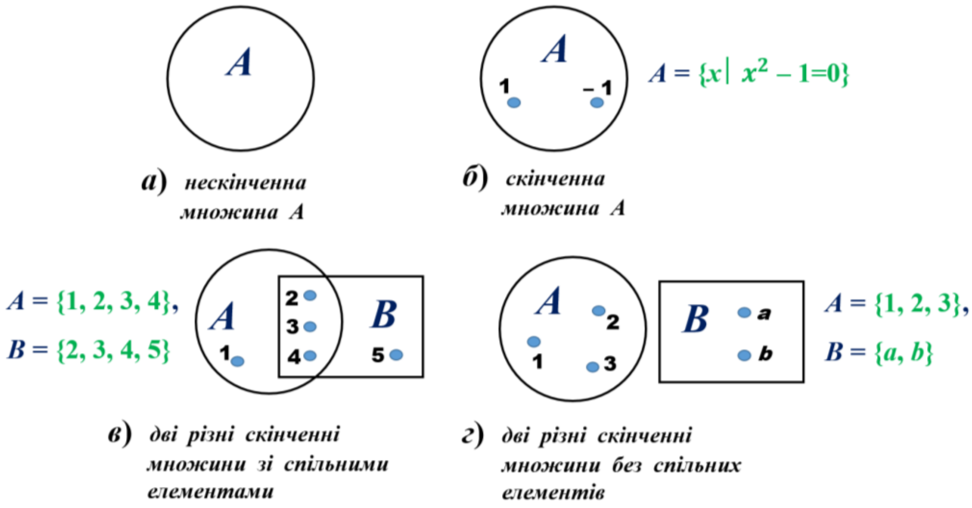


Рис. 1.1. – Графічне задання множин

1.1.3. Підмножини. Відношення включення

<u>Означення</u>. Множина ***B*** називається *підмножиною* (*частиною*) множини ***A*** тоді й тільки тоді, коли будь-який елемент множини ***B*** належить множині ***A*** [19].

<u>Означення</u>. Описане відношення між множиною ***A*** і множиною ***B*** називається *включенням* і позначається символом ⊂, тобто ***B⊂A*** (***B*** *включено до* ***A***) або ***A⊃B*** (***A*** *включає* або *містить* ***B***).

<u>Означення</u>. При цьому множина ***A*** називається *надмножиною* множини ***B*** (рис. 1.2*а*).

Відношення <u>*включення*</u> множин має наступні <u>*властивості*</u> [3]:

- ***A⊂A*** (*будь-яка множина є підмножиною самої себе*);
- ***A=B тоді й тільки тоді, коли A⊂B і B⊂A***;
- ***якщо B⊂A і C⊂B***, ***то C⊂A*** (*транзитивність*).

Разом з ***B⊂A*** в літературі можна зустріти й інше позначення: ***B⊆A***. При цьому під ***B⊂A*** розуміють таке відношення включення, яке не дозволяє рівності ***A=B*** (*суворе включення*) (рис. 1.2*а*). Якщо дозволяється ***A=B***, то пишуть ***B⊆A*** (*несуворе включення*) (рис. 1.2*б*).

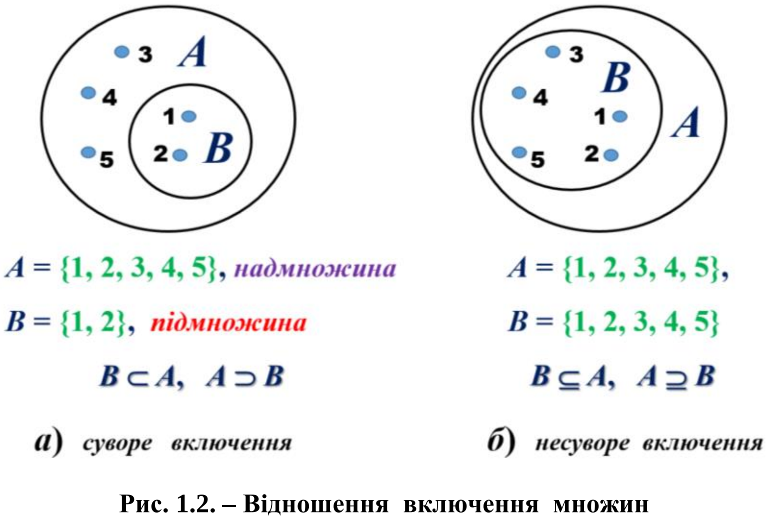


Рис. 1.2. – Відношення включення множин

Теорема 1.3. *Формулювання*. Порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини A [19].

Доведення. Припустимо, що включення $\varnothing \subseteq A$ не виконується. Це може трапитися лише в тому випадку, коли існує деякий елемент порожньої множини $\varnothing$, який при цьому не є елементом множини A. Але це неможливо, тому що порожня множина $\varnothing$ не містить жодного елемента. Отже, наше припущення є хибним, тобто включення $\varnothing \subseteq A$ виконується. Множину A було обрано довільно, тому порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої іншої множини A. **Теорему доведено**.

Теорема 1.4. *Формулювання*. Будь-яка підмножина зліченної множини є або скінченною, або зліченною [13].

Доведення. Нехай A – зліченна множина і $B \subseteq A$. Якщо $B=\varnothing$, то вона є зліченною. Нехай $B \neq \varnothing$. В зв'язку з тим, що множина A є зліченною, всі її елементи перенумеровані, а сама множина A може бути поданою у вигляді нескінченної послідовності $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. В силу того, що виконується включення $B \subseteq A$, то a_{n_1} – перший елемент множини B, що є одночасно членом послідовності $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; a_{n_2} – другий елемент множини B тощо. При цьому можливі два випадки. В першому випадку після скінченної кількості кроків всі елементи множини B будуть вичерпані. Множина B при цьому буде скінченною. В другому випадку буде отримано нескінченну послідовність $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$. При цьому множина B буде зліченною. **Теорему доведено**.

Означення. Будь-яка непорожня множина A має, принаймні, дві різні підмножини: саму множину A і порожню множину $\varnothing$. Ці підмножини називаються *не власними*, а решта підмножин множини A називаються *власними*.

Скінченні власні підмножини утворюються всілякими поєднаннями по одному, два, три тощо елементів даної множини. Елементи множини самі можуть бути деякими множинами. Тут слід звернути увагу на те, що мова йде про елементи множини, а не про підмножини.

Означення. Множина, елементами якої є всі підмножини множини A, називають *множиною підмножин* (*множиною-ступенем* або *булеаном*) множини A і позначають через $P(A)$ [3].

Теорема 1.5. *Формулювання*. Булеан $P(A)$ множини $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, що складається із n елементів, у свою чергу складається із 2^n підмножин множини A, тобто $|P(A)| = 2^n$ [19].

Доведення. Очевидно, що є єдина порожня підмножина $\varnothing$ і єдина підмножина, що містить усі елементи множини A. Кількість підмножин, що містять $1, 2, \ldots, n-1$ елементів, визначається кількістю поєднань по $1, 2, \ldots, n-1$ із n елементів. Загальна кількість підмножин буде дорівнювати сумі цих поєднань плюс ще два. Таким чином,

$$N = \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i + 2 = \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i + C_n^0 + C_n^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n.$$

Теорему доведено.

Наприклад, для множини $A_4=\{a, b, c\}$ із прикладу 1.1, що складається із трьох елементів, маємо булеан $P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$, що складається із $2^3=8$ елементів.

Теорема 1.6. *Формулювання*. Булеан деякої зліченної множини $P(U)$ є незліченною множиною [4].

Доведення. Враховуючи, що множина $\boldsymbol{U}$ є зліченною, візьмемо $\boldsymbol{U}=\mathbb{N}$. Поставимо у відповідність кожній підмножині $\boldsymbol{N_j} \subset \mathbb{N}$ послідовність, що складається із нулів та одиниць, наступним чином: елемент $\boldsymbol{a_{ij}}$, що стоїть на i-тому місці в множині $\boldsymbol{N_j}$, дорівнює нулю, якщо $\boldsymbol{a_{ij}} \in \boldsymbol{N_j}$, і дорівнює одиниці, якщо $\boldsymbol{a_{ij}} \notin \mathbb{N}$. Очевидно, що така відповідність буде взаємно-однозначною. Використовуючи діагональний метод Кантора, побудуємо нову послідовність $\boldsymbol{a'_{11} a'_{22} \dots a'_{nn}} \dots$, де

$$a'_{ii} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{якщо } \ \boldsymbol{a_{ii} = 0}, \\ \mathbf{0}, & \text{якщо } \ \boldsymbol{a_{ii} \neq 0}, \end{cases} \quad \boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n, \dots} \ .$$

Очевидно, що така послідовність не збігається з жодною послідовністю для множини $\boldsymbol{N_j}$ і відповідає деякій підмножині $N' \subset \mathbb{N}$, яка не збігається з жодною множиною $\boldsymbol{N_j}$, $\boldsymbol{i=1, 2, \dots, n, \dots}$. Отже, елементи множини $\boldsymbol{P(U)}$ неможливо перенумерувати. Таким чином, множина $\boldsymbol{P(U)}$ є незліченною. **Теорему доведено**.

Наслідок. *Формулювання*. Для будь-якої множини $\boldsymbol{A}$ виконується нерівність $|\boldsymbol{P(A)}|>|\boldsymbol{A}|$ [23].

Доведення. Очевидно, що для будь-якої кількості елементів $\boldsymbol{n}$ виконується нерівність $\boldsymbol{2^n>n}$. Як випливає із доведеної теореми, ця нерівність зберігається навіть для нескінченних множин. Для порожньої множини $\boldsymbol{n=0}$. Але нульовий ступінь будь-якого числа дорівнює одиниці, в тому числі й $\boldsymbol{2^0 = 1 > 0}$. **Наслідок доведено**.

Слід підкреслити розбіжності між відношенням приналежності і відношенням включення. Множина $\boldsymbol{A}$ може бути своєю підмножиною ($\boldsymbol{A \subset A}$), але вона не може входити до складу своїх елементів ($\boldsymbol{A \notin A}$). Навіть у випадку одноелементних підмножин слід розрізняти множину $\boldsymbol{A=\{a\}}$ та її єдиний елемент $\boldsymbol{a}$. Відношення включення має властивість транзитивності (якщо $\boldsymbol{A \subset B}$ і $\boldsymbol{B \subset C}$, то $\boldsymbol{A \subset C}$). Відношення приналежності цією властивістю не володіє. Наприклад, множина $\boldsymbol{A=\{1, \{2, 3\}, 4\}}$ серед своїх елементів містить множину $\boldsymbol{\{2, 3\}}$, тому можна записати $\boldsymbol{2, 3 \in \{2, 3\}}$ і $\boldsymbol{\{2, 3\} \in A}$. Але з цього зовсім не випливає, що елементи **2** і **3** містяться в $\boldsymbol{A}$ (в цьому прикладі немає елементів **2** і **3** серед елементів множини $\boldsymbol{A}$, тобто $\boldsymbol{2,3 \notin A}$).

1.1.4. Верхня та нижня границі множини

Маючи справу з множиною дійсних чисел, можна порівнювати елементи цієї множини за їх значенням і, зокрема, знаходити найбільший та найменший елементи множини. Для скінченних множин, що задані переліком своїх елементів, ця задача не є важкою. Наприклад, для множини $\boldsymbol{A_2=\{1, 2, 3, 4\}}$ із прикладу 1.1 маємо $\mathbf{max}(\boldsymbol{A})\mathbf{=4}$, $\mathbf{min}(\boldsymbol{A})\mathbf{=1}$. Однак якщо множину задано характеристичним предикатом $\boldsymbol{P(x)}$, наприклад, вказане лише правило обчислення числових значень її елементів, то задача визначення найбільшого та найменшого її елементів значно ускладнюється. Більш легкою задачею є задача знаходження області, всередині якої лежать всі елементи множини. При розв'язанні цієї задачі дуже корисними стають поняття верхньої та нижньої границь множини [7].

Означення. *Верхньою границею* множини $\boldsymbol{A}$ є число $\boldsymbol{S}$ таке, що для будь-якого $\boldsymbol{a \in A}$ виконується нерівність $\boldsymbol{a<S}$.

Чисел, що можуть бути розглянуті в якості верхньої границі множини, може бути нескінченно багато, а може й не бути зовсім [13]. Множина всіх цілих чисел взагалі не має ані нижньої, ані верхньої границі.

Означення. *Точною верхньою границею* (*точною верхньою гранню*) або *супремумом* множини $\boldsymbol{A}$, що позначається як $\mathbf{sup}\,\boldsymbol{A}$, називається така верхня границя, що не перевищує будь-яку іншу верхню границю.

Множина може мати тільки один супремум $\boldsymbol{S}$, тому що якщо $\boldsymbol{S_1}$ і $\boldsymbol{S_2}$ – два супремуми однієї й тієї ж самої множини, то за означенням супремуму $\boldsymbol{S_1}<\boldsymbol{S_2}$ і $\boldsymbol{S_2}<\boldsymbol{S_1}$ і, як наслідок, $\boldsymbol{S_1}=\boldsymbol{S_2}$.

Означення. *Нижньою границею* множини $\boldsymbol{A}$ є число $\boldsymbol{I}$ таке, що для будь-якого $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{A}$ виконується нерівність $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{I}$.

Означення. *Точною нижньою границею* (*точною нижньою гранню*) або *інфінумом* множини $\boldsymbol{A}$, що позначається як $\mathbf{inf}\,\boldsymbol{A}$, називається така нижня границя, яка не менша за будь-яку іншу нижню границю цієї множини.

Множина може мати лише єдиний інфінум $\boldsymbol{I}$, тому що якщо $\boldsymbol{I_1}$ і $\boldsymbol{I_2}$ – два інфінуми однієї й тієї ж самої множини, то за означенням інфінуму $\boldsymbol{I_1}>\boldsymbol{I_2}$ і $\boldsymbol{I_2}>\boldsymbol{I_1}$ і, як наслідок, $\boldsymbol{I_1}=\boldsymbol{I_2}$.

Означення. Точка $\boldsymbol{P}$ називається *межевою точкою* нескінченної множини $\boldsymbol{A}$, якщо в будь-якій околиці точки $\boldsymbol{P}$ є, принаймні, ще одна точка множини $\boldsymbol{A}$, окрім точки $\boldsymbol{P}$.

Очевидно, що будь-яка околиця межевої точки містить нескінченну кількість точок множини $\boldsymbol{A}$. сама ж межева точка може як належати, так і не належати множині $\boldsymbol{A}$ [20].

Означення. Множина називається *замкненою,* якщо вона містить усі свої межеві точки [21].

Якщо множина не має жодної межевої точки, то вона вважається замкненою. Наприклад, нескінченна множина $\boldsymbol{A}=\{\mathbf{0},\ \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a}=\mathbf{1}/\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{i}=\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \ldots\}$ є замкненою, тому що вона має єдину межеву точку $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, яка є елементом цієї ж множини $\boldsymbol{A}$. Для всіх множин, зображених на рис. 1.3, їхні точні верхні та точні нижні границі, якщо вони існують, є їх межевими точками.

Означення. *Ізольованою точкою множини* називається така її точка, для якої існує околиця, яка не містить інших точок із цієї множини, окрім неї самої [20].

Окрім своїх межевих точок, замкнена множина може також містити ізольовані точки. Очевидно, що будь-яка скінченна множина точок є замкненою, тому що жоден її елемент не є її межевою точкою.

Означення. Множина називається *відкритою,* якщо кожна її точка є для неї внутрішньою.

Очевидно, що якщо замкнена множина є обмеженою зверху, то вона містить свою верхню границю. Також є очевидним, що якщо замкнена множина є обмеженою знизу, то вона містить свою нижню границю.

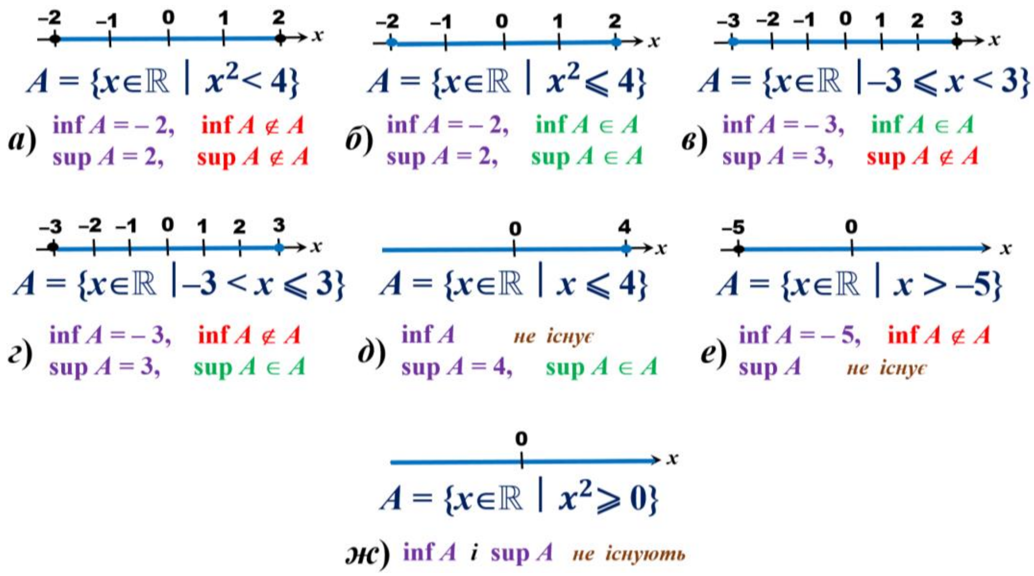


Рис. 1.3. – Точні верхні та нижні границі множин

Множини, подані на рис. 1.3*а*, рис. 1.3*в*, рис. 1.3*г* і рис. 1.3*е* є відкритими. Це видно з того, що множина на рис. 1.3*а* не містить жодну свою точну границю; множина на рис. 1.3*в* не містить свій супремум; множини на рис. 1.3*г* і рис. 1.3*е* не містять свої інфінуми. Множини на рис. 1.3*б*, рис. 1.3*д* і рис. 1.3*ж* є замкненими, тому що містять всі свої межеві точки, в тому числі й точні границі, якщо вони існують.

Теорема 1.7 (***про верхню та нижню границі підмножини***). *Формулювання*. Якщо $\boldsymbol{B \subseteq A}$, то $\mathbf{inf}\, \boldsymbol{B} \geqslant \mathbf{inf}\, \boldsymbol{A}$, $\mathbf{sup}\, \boldsymbol{B} \leqslant \mathbf{sup}\, \boldsymbol{A}$ [13].

Доведення. Позначимо через $\boldsymbol{b'}$ елемент множини $\boldsymbol{B}$, що має найменше значення, тобто $\boldsymbol{b'} \in \boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{b'} = \mathbf{inf}\, \boldsymbol{B}$. Але $\boldsymbol{B \subseteq A}$, тобто $\boldsymbol{b'} \in \boldsymbol{A}$. Нехай $\boldsymbol{a'}$ – елемент множини $\boldsymbol{A}$, що має найменше значення, тобто $\boldsymbol{a'} \in \boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{a'} = \mathbf{inf}\, \boldsymbol{A}$. При цьому якщо $\boldsymbol{b'} = \boldsymbol{a'}$, то $\boldsymbol{b'} = \mathbf{inf}\, \boldsymbol{A}$. Якщо ж $\boldsymbol{b'} \neq \boldsymbol{a'}$, то $\boldsymbol{b'} > \boldsymbol{a'} = \mathbf{inf}\, \boldsymbol{A}$. Таким чином, $\boldsymbol{b'} > \mathbf{inf}\, \boldsymbol{A}$ або $\mathbf{inf}\, \boldsymbol{B} > \mathbf{inf}\, \boldsymbol{A}$.

Позначимо через $\boldsymbol{b''}$ елемент множини $\boldsymbol{B}$, що має найбільше значення, тобто $\boldsymbol{b''} \in \boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{b''} = \mathbf{sup}\, \boldsymbol{B}$. Але $\boldsymbol{B \subseteq A}$, тобто $\boldsymbol{b''} \in \boldsymbol{A}$. Нехай $\boldsymbol{a''}$ – елемент множини $\boldsymbol{A}$, що має найбільше значення, тобто $\boldsymbol{a''} \in \boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{a''} = \mathbf{sup}\, \boldsymbol{A}$. При цьому якщо $\boldsymbol{b''} = \boldsymbol{a''}$, то $\boldsymbol{b''} = \mathbf{sup}\, \boldsymbol{A}$. Якщо ж $\boldsymbol{b''} \neq \boldsymbol{a''}$, то $\boldsymbol{b''} < \boldsymbol{a''} = \mathbf{sup}\, \boldsymbol{A}$. Таким чином, $\boldsymbol{b'} < \mathbf{sup}\, \boldsymbol{A}$ або $\mathbf{sup}\, \boldsymbol{B} < \mathbf{sup}\, \boldsymbol{A}$.

Теорему доведено.

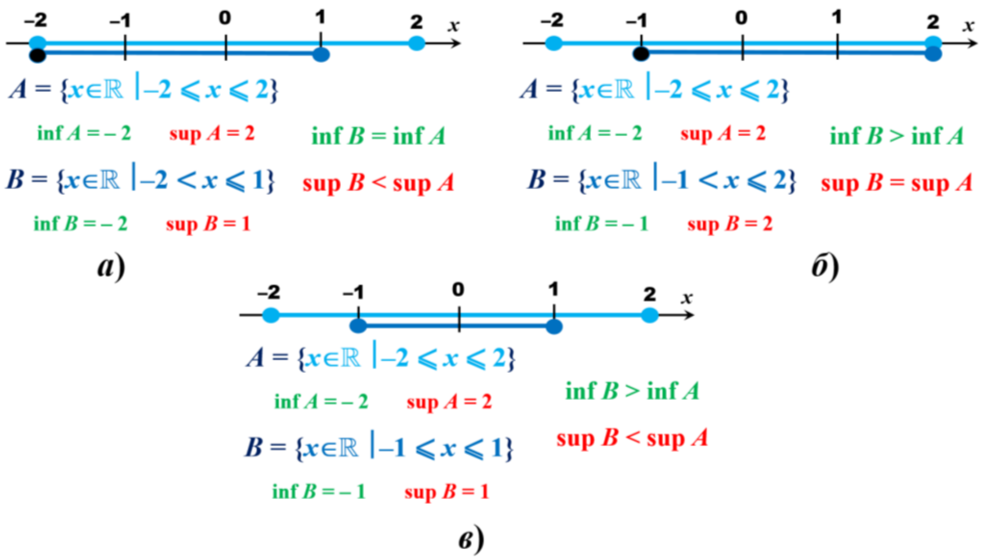


Рис. 1.4. – Співвідношення для точних границь множини та підмножини

Результати, отримані в теоремі 1.7, показано на рис. 1.4. Якщо $\boldsymbol{B \subseteq A}$, то хоча б одна точна границя для множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ може бути різною. Це може бути супремум (рис. 1.4*а*), інфінум (рис. 1.4*б*) або обидві точні границі одночасно (рис. 1.4*в*). Якщо ж $\boldsymbol{A=B}$, то у цих множин обов’язково будуть збігатися обидві точні границі.

1.2. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

1.2.1. Означення операцій над множинами

Нові множини можна визначати також за допомогою операцій над деякими іншими множинами. Для наочного зображення співвідношень між підмножинами якого-небудь універсуму $\boldsymbol{U}$ використовують, як правило, круги Ейлера. При цьому зазвичай універсум подається множиною точок прямокутника, а його підмножини зображають у вигляді кругів або інших простих областей всередині цього прямокутника. Таким чином, множини, отримані в результаті операцій над іншими множинами, також можуть бути задані в будь-який можливий спосіб.

Означення. *Перетин* (*добуток*) $\boldsymbol{A \cap B}$ – це множина всіх тих і лише тих елементів, що належать одночасно і множині $\boldsymbol{A}$, і множині $\boldsymbol{B}$, тобто $\boldsymbol{C=A \cup B=\{c\text{: } c \in A \text{ і } c \in B\}}$.

Наприклад, для множини $\boldsymbol{A_2=\{1, 2, 3, 4\}}$ із прикладу 1.1 і множини $\boldsymbol{B=\{3, 4, 5, 6\}}$ їх перетином буде множина $\boldsymbol{C=A_2 \cap B=\{3, 4\}}$.

Графічно операцію перетину двох множин подано на рис. 1.5*а*.

Означення. Множини, що не мають спільних елементів, називаються такими, що *не перетинаються* (*розділеними*) [1].

Означення. *Об’єднання* (*сума*) $\boldsymbol{A \cup B}$ – це множина всіх тих і лише тих елементів, що належать або множині $\boldsymbol{A}$, або множині $\boldsymbol{B}$, або обом множинам одночасно, тобто $\boldsymbol{C=A \cup B=\{c\text{: } c \in A \text{ або } c \in B\}}$ [15].

Наприклад, якщо взяти множину $\boldsymbol{A_2=\{1, 2, 3, 4\}}$ із прикладу 1.1 і множину $\boldsymbol{B=\{3, 4, 5, 6\}}$, то їх об’єднанням буде множина $\boldsymbol{C=A_2 \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$.

Графічно операцію об’єднання двох множин подано на рис. 1.5*б*.

Означення. *Різниця* $A \backslash B$ (*або* $A\text{-}B$) – це множина, що складається із всіх тих і лише тих елементів множини A, що не містяться в множині B, тобто $C=A\backslash B=\{c\text{: } c\in A \text{ і } c\notin B\}$. Її можна розуміти як *відносне доповнення* множини B до множини A.

Означення. Якщо $A\in U$, то множина $U\backslash A$ називається *абсолютним доповненням* (або просто *доповненням*) множини A і позначається через $\overline{A}$. Вона містить всі елементи універсуму U, окрім елементів A, тобто $\overline{A}=U\backslash A=\{c\text{: } c\notin A\}$.

Графічно абсолютне доповнення множини A подино на рис. 1.5*в*.

Очевидно, що $A\backslash B=A\cap\overline{B}$.

<u>Наприклад</u>, для множини $A_2=\{1, 2, 3, 4\}$ із прикладу 1.1 і множини $B=\{3, 4, 5, 6\}$ їх різницею буде множина $C=A_2\backslash B=\{1, 2\}$.

Графічно операцію різниці двох множин подано на рис. 1.5*г*.

Означення. *Диз'юнктивна сума* (*симетрична різниця*) $A+B$ (або $A\oplus B$) – це множина всіх тих і лише тих елементів, що належать або множині A, або множині B, але не обом множинам одночасно, тобто $C=A\oplus B=\{c\text{: } c\in A \text{ і } c\in B \text{ і } c\notin(A\cap B)\}$ [1].

<u>Наприклад</u>, для множини $A_2=\{1, 2, 3, 4\}$ із прикладу 1.1 і множини $B=\{3, 4, 5, 6\}$ їх різницею буде множина $C=A_2\oplus B=\{1, 2, 5, 6\}$.

Диз'юнктивну суму можна отримати об'єднанням елементів множин за винятком тих, що зустрічаються двічі. Графічно диз'юнктивну суму двох множин A і B подано на рис. 1.5*д*.

На рис. 1.2 було показане відношення включення на прикладі деяких скінченних множин. Для нескінченних множин графічне подання цієї операції за допомогою кругів Ейлера зображене на рис. 1.5*е*.

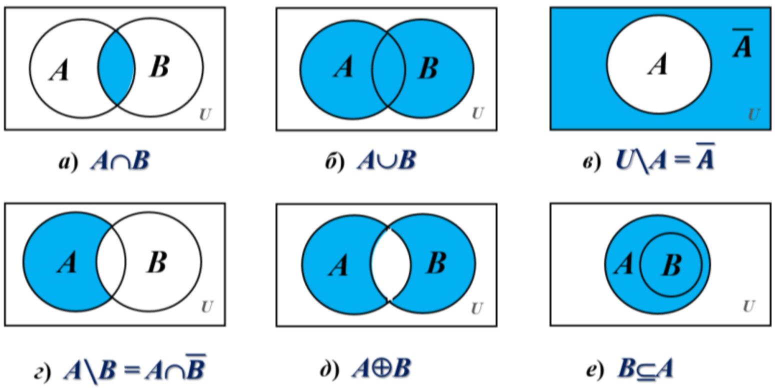


Рис. 1.5. – Основні операції над множинами

1.2.2. Властивості операцій над множинами

Розглянуті вище <u>*операції над множинами*</u> мають ряд <u>*властивостей*</u>.
комутативність:

$$A \cup B = B \cup A, \tag{1.1}$$

$$A \cap B = B \cap A, \tag{1.2}$$

асоціативність:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \tag{1.3}$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \tag{1.4}$$

дистрибутивність:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \tag{1.5}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \tag{1.6}$$

властивості порожньої множини:

$$A \cup \varnothing = A, \tag{1.7}$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing, \tag{1.8}$$

$$A \cap \overline{A} = \varnothing, \tag{1.9}$$

$$\overline{\varnothing} = U, \tag{1.10}$$

властивості універсуму:

$$A \cup \overline{A} = U, \tag{1.11}$$

$$A \cup U = U, \tag{1.12}$$

$$A \cap U = A, \tag{1.13}$$

$$\overline{U} = \varnothing, \tag{1.14}$$

ідемпотентність:

$$A \cup A = A, \tag{1.15}$$

$$A \cap A = A, \tag{1.16}$$

елімінація (*поглинання*):

$$A \cup (A \cap B) = A, \tag{1.17}$$

$$A \cap (A \cup B) = A, \tag{1.18}$$

закони де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \tag{1.19}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \tag{1.20}$$

властивості доповнення:

$$\underline{\textit{якщо}}\ \ A \cup B = U\ \ \underline{\textit{и}}\ \ A \cap B = \varnothing,\ \ \underline{\textit{то}}\ \ B = \overline{A}, \tag{1.21}$$

$$\overline{A} = U \setminus A, \tag{1.22}$$

$$\overline{\overline{A}} = A, \tag{1.23}$$

властивість різниці:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}, \tag{1.24}$$

властивості диз'юнктивної суми:

$$A \oplus B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B), \tag{1.25}$$

$$A \oplus B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}), \tag{1.26}$$

$$A \oplus B = B \oplus A, \tag{1.27}$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C), \tag{1.28}$$

$$A \oplus \varnothing = \varnothing \oplus A = A, \tag{1.29}$$

властивість включення:

$$A \subset B,\ \ \underline{\textit{якщо й тільки якщо}}\ \ A \cap B = A\ \ \underline{\textit{або}}\ \ A \cup B = B\ \ \underline{\textit{або}}\ \ A \cap \overline{B} = \varnothing, \tag{1.30}$$

властивість рівності:

$$\boldsymbol{A = B}, \ \underline{\textbf{\textit{якщо й тільки якщо}}} \ \boldsymbol{(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \varnothing}. \qquad (1.31)$$

Доведення цих тотожностей може бути **засноване на відношенні приналежності**. Важливо відзначити, що будь-яка теорема алгебри множин і, зокрема, співвідношення (1.11) – (1.31) можуть бути отримані із властивостей (1.1) – (1.10), які, у свою чергу, доводяться лише в термінах відношення приналежності. Це можна розуміти як ілюстрацію аксіоматичного підходу до алгебри множин.

Доведемо, наприклад, **властивості (1.1) – (1.14)**.

Доведення.

Покажемо справедливість ***комутативності*** перетину множин $\boldsymbol{A \cap B = B \cap A}$, тобто тотожності (1.2). Нехай $\boldsymbol{a \in (A \cap B)}$. Звідси випливає, що $\boldsymbol{a \in A}$ і $\boldsymbol{a \in B}$ одночасно. Це означає, що $\boldsymbol{a \in (B \cap A)}$, що, у свою чергу, викликає виконання приналежності $\boldsymbol{(A \cap B) \subseteq (B \cap A)}$. Аналогічно виводиться, що $\boldsymbol{(B \cap A) \subseteq (A \cap B)}$. Ці два включення і доводять рівність $\boldsymbol{A \cap B = B \cap A}$. В аналогічний спосіб доводиться й тотожність (1.1). Отже, ***властивості комутативності доведено***.

Покажемо справедливість ***асоціативності*** перетину множин $\boldsymbol{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$, тобто тотожності (1.4). Нехай $\boldsymbol{a \in (A \cap (B \cap C))}$. Звідси випливає, що $\boldsymbol{a \in A}$ і $\boldsymbol{a \in (B \cap C)}$, тобто також виконується приналежність $\boldsymbol{a \in B}$ і $\boldsymbol{a \in C}$. В силу того, що елемент $\boldsymbol{a}$ належить одночасно і множині $\boldsymbol{A}$, і множині $\boldsymbol{B}$, то за означенням операції перетину множин елемент $\boldsymbol{a \in (A \cap B)}$. Але в зв'язку з тим, що одночасно з цим $\boldsymbol{a \in C}$, то можна стверджувати, що $\boldsymbol{a \in ((A \cap B) \cap C)}$ і, як наслідок, $\boldsymbol{(A \cap (B \cap C)) \subseteq ((A \cap B) \cap C))}$.

Нехай тепер $\boldsymbol{a \in ((A \cap B) \cap C)}$. Це означає, що одночасно виконується приналежність $\boldsymbol{a \in (A \cap B)}$ і $\boldsymbol{a \in C}$. З того, що $\boldsymbol{a \in (A \cap B)}$ випливає, що $\boldsymbol{a \in A}$ і $\boldsymbol{a \in B}$. Із одночасної приналежності елемента $\boldsymbol{a}$ множинам $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ випливає, що $\boldsymbol{a \in (B \cap C)}$. З цього відношення приналежності і з того, що $\boldsymbol{a \in A}$ випливає, що $\boldsymbol{a \in (A \cap (B \cap C))}$. Це означає, що $\boldsymbol{((A \cap B) \cap C) \subseteq (A \cap (B \cap C))}$. Враховуючи властивості відношення включення, можна стверджувати, що тотожність (1.4) виконується. Аналогічно доводиться тотожність (1.3). Отже, ***властивості асоціативності доведено***.

Покажемо тепер справедливість першої ***дистрибутивності***, тобто властивості (1.5). З одного боку, в силу того, що $\boldsymbol{(B \cap C) \subseteq B}$, виконується відношення приналежності $\boldsymbol{(A \cup (B \cap C)) \subseteq (A \cup B)}$. Аналогічно із приналежності $\boldsymbol{(B \cap C) \subseteq C}$ випливає приналежність $\boldsymbol{(A \cup (B \cap C)) \subseteq (A \cup C)}$. Це означає, що $\boldsymbol{(A \cup (B \cap C)) \subseteq ((A \cup B) \cap (A \cup C))}$.

З іншого боку, якщо $\boldsymbol{a \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))}$, то одночасно виконуються приналежності $\boldsymbol{a \in (A \cup B)}$ і $\boldsymbol{a \in (A \cup C)}$. Якщо $\boldsymbol{a \in A}$, то $\boldsymbol{a \in (A \cup (B \cap C))}$. Якщо ж $\boldsymbol{a \notin A}$, то $\boldsymbol{a \in B}$ і $\boldsymbol{a \in C}$, звідки випливає, що $\boldsymbol{a \in (B \cap C)}$. Отже, $\boldsymbol{((A \cup B) \cap (A \cup C)) \subseteq (A \cup (B \cap C))}$. Враховуючи властивості відношення включення, можна стверджувати, що тотожність (1.5) виконується. Аналогічно доводиться тотожність (1.6). Таким чином, ***властивості дистрибутивності доведено***.

Покажемо тепер справедливість властивостей ***порожньої множини*** і ***універсуму***, тобто властивостей (1.7) – (1.14). За означенням універсуму $\boldsymbol{U}$ і порожньої множини $\varnothing$, для будь-якого елементу $\boldsymbol{a \in A}$ виконуються приналежності $\boldsymbol{a \in U}$ і $\boldsymbol{a \notin \varnothing}$. Отже, у множини $\boldsymbol{A}$ і порожньої множини $\varnothing$ немає жодного спільного елемента, а спільними для множини $\boldsymbol{A}$ і універсуму $\boldsymbol{U}$ є всі елементи множини $\boldsymbol{A}$ і лише вони. Це означає, що виконуються тотожності $\boldsymbol{A \cap \varnothing = \varnothing}$ (властивість (1.8)) і $\boldsymbol{A \cap U = A}$ (властивість (1.13)). В той же час за означенням універсуму $\boldsymbol{U}$ і порожньої множини $\varnothing$, порожня множина не містить жодного елемента, а універсум містить абсолютно всі допустимі елементи. Е означає, що ці множини є доповненнями одна одної (властивості (1.10) і (1.14)). В той же час, якщо $a \in A$, то $a \in (A \cup \varnothing)$ і $a \in (A \cup U)$. Елементів порожньої множини в множині $(A \cup \varnothing)$ немає. Отже, виконується тотожність $A \cup \varnothing = A$ (властивість (1.7)). Але множина $A \subseteq U$. Отже, $A \cup U = U$ (властивість (1.12)). За означенням множина $\overline{A}$ містить ті й лише ті елементи універсуму, що не належать множині A. Отже, спільних елементів у множини A і множини $\overline{A}$ немає (властивість (1.9)), а разом вони містять всі допустимі елементи (властивість (1.11)). Таким чином, ***властивості порожньої множини*** і ***універсуму доведено***.

Властивості (1.1) – (1.14) доведено.

Доведені властивості можна використовувати при виконанніи **тотожних перетворень**, щоб **довести**, наприклад, **властивості (1.15) – (1.18)**.

Доведення.

Доведемо за допомогою вже доведених тотожностей властивості ***ідемпотентності***:

$$A = A \cup \varnothing = A \cup (A \cap \overline{A}) = (A \cup A) \cap (A \cup \overline{A}) = (A \cup A) \cap U = A \cup A,$$

$$A = A \cap U = A \cap (A \cup \overline{A}) = (A \cap A) \cup (A \cap \overline{A}) = (A \cap A) \cup \varnothing = A \cap A.$$

Ідемпотентність доведено.

Тепер доведемо ***елімінацію (поглинання)***.

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B) = A \cap U = A,$$

$$A \cap (A \cup B) = (A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) = A \cup (\varnothing \cap B) = A \cup \varnothing = A.$$

Елімінацію доведено.

Властивості (1.15) – (1.18) доведено.

Круги Ейлера також можна використовувати для **доведення** співвідношень між множинами. Для цього необхідно побудувати області, що відповідають лівій та правій частинам виразу, і з'ясувати, збігаються ці області чи ні. Якщо ці області збігаються, тотожність виконується, а якщо не збігаються – не виконується. Доведемо за допомогою кругів Ейлера **закони де Моргана (властивості (1.19) і (1.20))**.

Доведення. Для 1-го закону де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ графічне доведення має вигляд, зображений на рис. 1.6.

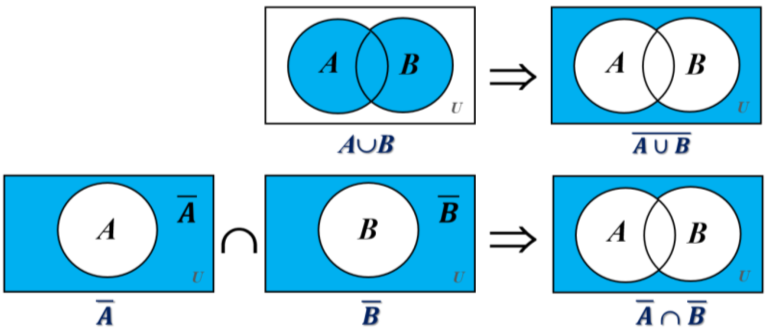


Рис. 1.6. – Графічне доведення 1-го закону де Моргана

Доведення 2-го закону де Моргана $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ зображено на рис. 1.7.

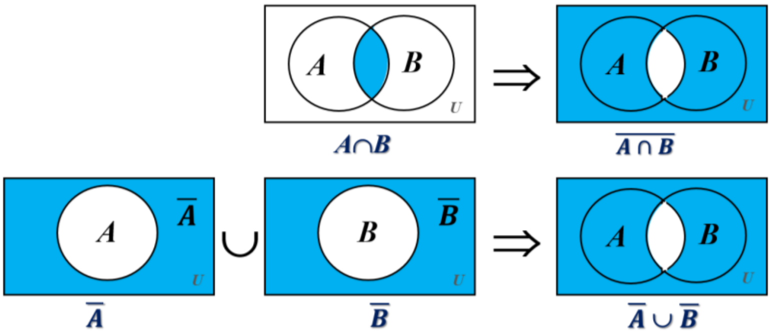


Рис. 1.7. – Графічне доведення 2-го закону де Моргана

Закони де Моргана доведено.

Також графічно можна довести і **<u>властивості диз'юнктивної суми (1.25) і (1.26)</u>**. Процес цього доведення зображений на рис. 1.8.

<u>Доведення</u>. В ході доведення було враховано, що схему для множини $\overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$ було вже побудовано при доведенні 2-го закону де Моргана. Схему для лівої частини цих тотожностей також вже зображено на рис. 1.5*д*. Очевидно, що схемі для правих частин тотожностей (1.25) і (1.26), отримані на рис.1.8, збігаються зі схемою на рис. 1.5*д*.

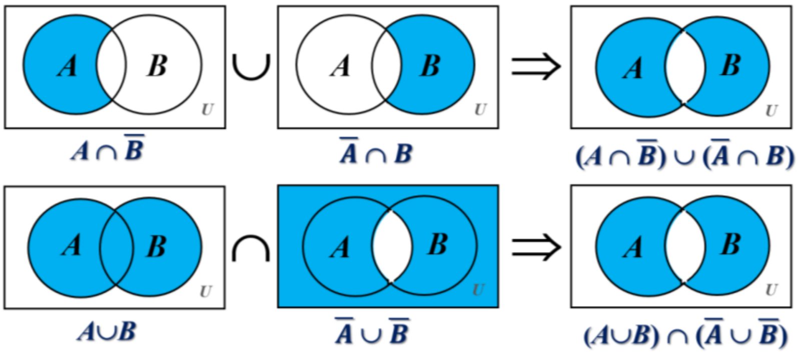


Рис. 1.8. – Графічне доведення властивостей диз'юнктивної суми

Комутативність (1.27) і асоціативність (1.28) диз'юнктивної суми, а також диз'юнктивну суму з порожньою множиною може бути доведено або графічно за допомогою кругів Ейлера, або через відношення приналежності аналогічно властивостям (1.1) – (1.4). Таким чином, можна вважати, що **властивості диз'юнктивної суми доведено**.

1.2.3. Узагальнення операцій над множинами

Із комутативності та асоціативності операції об'єднання випливає, що об'єднання декількох множин можна виконати, послідовно об'єднуючи ці множини, причому порядок, в якому беруться ці множини, не впливає на результат [1]. Так, якщо розглядати, наприклад, три множини $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$, то $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})$ тощо, збільшуючи кількість множин в розгляданні. Отже, *об'єднання сукупності множин* можна подати співвідношенням

$$\boldsymbol{A_1} \cup \boldsymbol{A_2} \cup \ldots \cup \boldsymbol{A_n} = \bigcup_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A_i}\,,$$

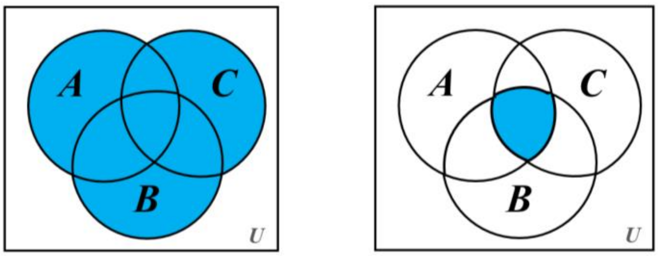
яке являє собою множину елементів, що належать хоча б одній з множин $\boldsymbol{A_i}$, $\boldsymbol{i}=\overline{\boldsymbol{1},\boldsymbol{n}}$ даної сукупності.

Аналогічним чином узагальнюється і операція перетину, що має ті ж самі властивості, що й об'єднання. *Перетин сукупності множин* подається співвідношенням

$$\boldsymbol{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i}\,,$$

яке являє собою множину елементів, що належать одночасно усім множинам $\boldsymbol{A_i}$, $\boldsymbol{i}=\overline{\boldsymbol{1},\boldsymbol{n}}$ даної сукупності.

Графічно узагальнення цих операцій подано на рис. 1.9.



$$\boldsymbol{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i} \qquad \boldsymbol{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i}$$

***а)** узагальнення операції об'єднання множин* ***б)** узагальнення операції перетину множин*

Рис. 1.9. – Узагальнення операцій об'єднанняя та перетину множин

<u>Теорема 1.8</u>. <u>*Формулювання*</u>. Результат об'єднання скінченної або зліченної кількості зліченних множин є зліченною множиною [4].

<u>*Доведення*</u>. Розглянемо спочатку випадок скінченної кількості зліченних множин. Нехай $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_k}$ – зліченні множини і $\boldsymbol{a_{ij} \in A_i}$ – їх елементи. Розглянемо послідовність

$$\boldsymbol{a_{11}, \ldots, a_{k1}, \ldots, a_{12}, \ldots, a_{k2}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{kn}, \ldots}\ .$$

Таку послідовність можна перенумерувати. При цьому якщо деякий елементт при переліку вже зустрічався раніше й отримав номер, то в подальшому його пропускаємо. Отже, множина $\boldsymbol{\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A}$ є зліченною.

Розглянемо тепер випадок зліченної кількості зліченних множин $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots}$, де $\boldsymbol{A_i}$=$\boldsymbol{\{a_{i1}, a_{i2}, \ldots\}}$. Існує лише зліченна кількість елементів $\boldsymbol{a_{ik}}$, для яких $\boldsymbol{i+k=2}$. Аналогічно існує лише зліченна кількість елементів $\boldsymbol{a_{ik}}$, для яких $\boldsymbol{i+k=3}$ тощо. Перенумеруємо спочатку всі елементи, для яких $\boldsymbol{i+k=2}$ (наприклад, за зростанням значення коефіцієнта $\boldsymbol{i}$), а потім (за допомогою інших чисел) – елементи, для яких $\boldsymbol{i+k=3}$ тощо. При цьому кожен елемент $\boldsymbol{a_{ik}}$ отримає деякий номер, і різні елементи будуть мати різні номери. Отже, і в цьому випадку елементи множиниа $\boldsymbol{\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A}$ можна перенумерувати, тобто ця множина є зліченною. **Теорему доведено**.

<u>Наслідок 1</u>. Множина $\mathbb{Z}$ усіх цілих чисел є зліченною.

<u>*Доведення*</u>. Множину $\mathbb{Z}$ можна подати у вигляді $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$, де $\mathbb{N}'$=$\boldsymbol{\{-1, -2, \ldots, -n, \ldots\}}$. Очевидно, що множина $\mathbb{N}'$ є зліченною. При об'єднанні зі зліченною множиною $\mathbb{N}$ вона дає зліченну множину. **Наслідок 1 доведено**.

<u>Наслідок 2</u>. Множина $\mathbb{Q}$ усіх раціональних чисел є зліченною.

<u>Доведення</u>. Множину $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел можна подати як об'єднання $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \boldsymbol{R_2} \cup \boldsymbol{R_3} \cup \ldots \cup \boldsymbol{R_i} \cup \ldots$, де $\boldsymbol{R_i} = \{\boldsymbol{m/i} \mid \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{i} = 2, 3, \ldots\}$. Очевидно, що кожна із множин $\boldsymbol{R_i}$ є зліченною. Кількість різних множин $\boldsymbol{R_i}$ також є зліченною. Таким чином, множина $\mathbb{Q}$ подається як об'єднання зліченної кількості зліченних множин. Отже, вона також є зліченною. **Наслідок 2 доведено**.

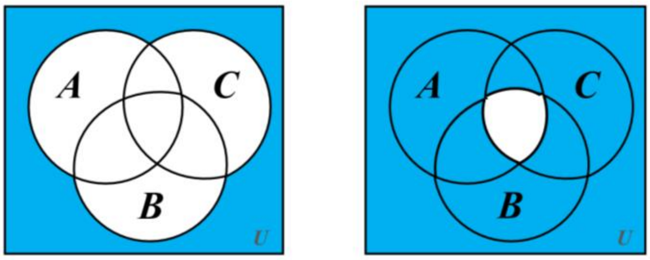
<u>Наслідок 3</u>. Якщо $\boldsymbol{A}$ – незліченна множина і $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$ – деяка зліченна підмножина множини $\boldsymbol{A}$, то множина $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$ є незліченною.

<u>Доведення</u>. Припустимо, що множина $\boldsymbol{C}$ є зліченною. Тоді за теоремою 1.7 і теоремою 1.1 (теоремою Кантора) множина $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{B}$ також є зліченною, що протирічить умові наслідку 3. Це означає, що наше припущення є хибним, і множина $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$ є незліченною. **Наслідок 3 доведено**.

Використовуючи наведені співвідношення для об'єднання та перетину множин, можна узагальнити будь-які інші співвідношення, до яких входять операції об'єднання та перетину. Так, закони де Моргана для сукупності множин запишуться наступним чином:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\,, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i\,.$$

Графічно цей результат зображено на рис. 1.10.



$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A_i}} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\boldsymbol{A}}_i \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} \boldsymbol{A_i}} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\boldsymbol{A}}_i$$

***а)** узагальнення **1-го** закону де Моргана* ***б)** узагальнення **2-го** закону де Моргана*

Рис. 1.10. – Узагальнення законів де Моргана

Більш за те, такого роду співвідношення можна використовувати і у випадках, коли сукупність містить нескінченну кількість множин. При цьому зазвичай замість $\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A_i}$ пишуть $\bigcup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{A_i}$.

Узагальнення об'єднання і перетину множин на будь-яку кількість множин дозволяє ввести ще одну операцію над множинами, а саме операцію розбиття множини.

<u>Означення</u>. *Розбиття* множини $\boldsymbol{A}$ – це така система $\boldsymbol{S}$ множин $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_n}$, що задовольняє наступним умовам [19]:

- будь-яка множина $\boldsymbol{A_i}$ системи $\boldsymbol{S}$ є підмножиною множини $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{A_i} \in \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{n}}$;
- будь-які дві множини $\boldsymbol{A_i}$ і $\boldsymbol{A_j}$ системи $\boldsymbol{S}$ є такими, що не перетинаються: $\boldsymbol{A_i} \cap \boldsymbol{A_j} = \varnothing$;
- об'єднання усіх множин із системи $\boldsymbol{S}$ дає множину $\boldsymbol{A}$:

$$\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A_i} = \boldsymbol{A}.$$

Можливі приклади такого розбиття різних множин зображені на рис. 1.11.

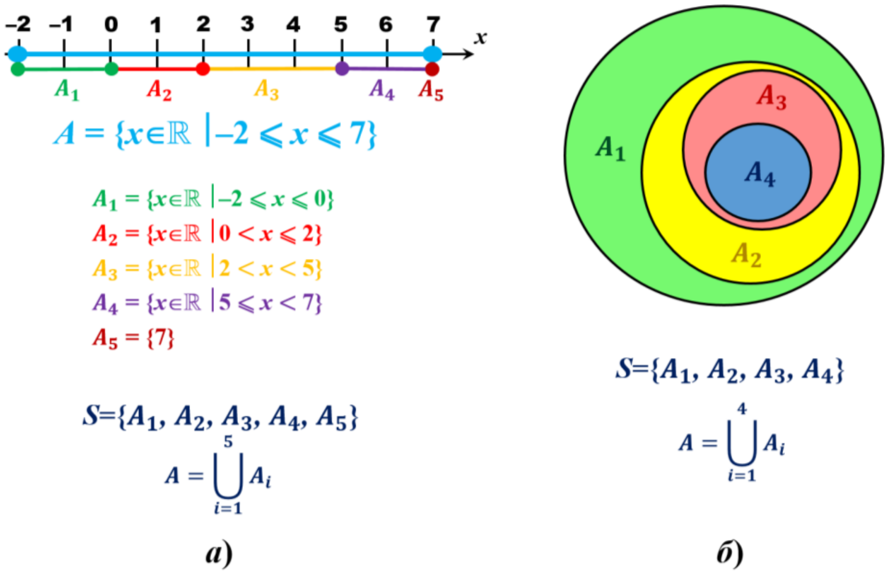


Рис. 1.11. – Розбиття множини на підмножини, що не перетинаються

1.3. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ В АЛГЕБРІ МНОЖИН

Алгебра множин є теоретико-множинний аналог звичайної алгебри дійсних чисел і заснована на властивостях операцій над множинами. За допомогою тотожних перетворень можна спрощувати або подавати в зручному вигляді різні вирази, що містять множини. Такі перетворення здійснюються послідовним застосуванням відповідних властивостей операцій над множинами [1].

<u>Приклад 1.2</u>. За допомогою тотожних перетворень з використанням властивостей операцій над множинами спростити наступні вирази:

а) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C)$;

б) $(M \setminus N) \cap (N \setminus M)$.

<u>Розв'язання</u>.

а) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) = (A \cap B \cap C) \cup ((\overline{A} \cup \overline{B}) \cap C) =$

$= ((A \cap B) \cup (\overline{A} \cup \overline{B})) \cap C = ((A \cap B) \cup (\overline{A \cap B})) \cap C = U \cap C = C.$

б) $(M \setminus N) \cap (N \setminus M) = (M \cap \overline{N}) \cap (N \cap \overline{M}) =$

$= M \cap (\overline{N} \cap N) \cap \overline{M} = M \cap \varnothing \cap \overline{M} = \varnothing.$

<u>Відповідь</u>. ***а***) C; ***б***) $\varnothing$.

Приклад 1.2*б*, зокрема, ілюструє важливість введення поняття порожньої множини. Від самого початку зовсім не зрозуміло, що множина, яку задано виразом $(M \setminus N) \cap (N \setminus M)$, є порожньою. Це стає очевидним лише після виконання відповідних перетворень. Якщо б порожню множину не було б введено, то подібні вирази не мали би сенсу.

1.4. РІВНЯННЯ З МНОЖИНАМИ

Разом з тотожностями, що є справедливими при будь-яких значеннях множин, які входять до складу цих тотожностей (підмножин універсуму $\boldsymbol{U}$), алгебра множин розглядає рівняння, що містять фіксовані підмножини $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$, і підмножини $\boldsymbol{X_1, X_2, \ldots, X_n}$, що підлягають визначенню. В найпростішому випадку до складу рівняння входить одна така підмножина $\boldsymbol{X}$. Потрібно відповісти на питання, за яких умов рівняння має розв'язок і, якщо ці умови задовольняються, знайти всі таки розв'язки, тобто визначити $\boldsymbol{X}$. Розв'язання рівняння з однією підмножиною $\boldsymbol{X}$, що підлягає визначенню, ґрунтується на послідовності тотожних перетворень [1]:

1. Згідно з властивістю (1.31), рівність перетворюється в диз'юнктивну суму його лівої та правої частин, про яку вважається, що вона дорівнює порожній множині.
2. Отримане рівняння перетворюється до вигляду $(\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{X}) \cup (\boldsymbol{N} \cap \overline{\boldsymbol{X}}) = \varnothing$, де $\boldsymbol{M}$ і $\boldsymbol{N}$ – деякі множини, що не містять $\boldsymbol{X}$ (можна показати, що будь-яке рівняння з правою частиною $\varnothing$ зводиться до такого вигляду).
3. В силу того, що об'єднання множин є порожнім лише за умови, що кожна з них також є порожньою множиною, перетворене рівняння записується залежною системою двох рівнянь: $\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{X} = \varnothing$ і $\boldsymbol{N} \cap \overline{\boldsymbol{X}} = \varnothing$.
4. Пара рівнянь (а, як наслідок, і початкове рівняння) має сенс тоді й тільки тоді, коли $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{X} \subset \overline{\boldsymbol{M}}$.

Приклад 1.3. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$.

Розв'язання. Будемо розв'язувати це рівняння, користуючись наведеним алгоритмом.

1. $(\boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{C}) \oplus \boldsymbol{D} = \varnothing$.

2. $((\boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{C}) \cap \overline{\boldsymbol{D}}) \cup (\overline{(\boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{C})} \cap \boldsymbol{D}) = ((\boldsymbol{X} \cap \overline{\boldsymbol{D}}) \cup (\boldsymbol{C} \cap \overline{\boldsymbol{D}})) \cup (\overline{\boldsymbol{X}} \cap \overline{\boldsymbol{C}} \cap \boldsymbol{D}) =$

$= (\boldsymbol{X} \cap \overline{\boldsymbol{D}}) \cup ((\boldsymbol{C} \cap \overline{\boldsymbol{D}}) \cap (\boldsymbol{X} \cup \overline{\boldsymbol{X}})) \cup (\boldsymbol{D} \cap \overline{\boldsymbol{C}} \cap \overline{\boldsymbol{X}}) =$

$= (\overline{\boldsymbol{D}} \cap \boldsymbol{X}) \cup (\boldsymbol{C} \cap \overline{\boldsymbol{D}} \cap \boldsymbol{X}) \cup (\boldsymbol{C} \cap \overline{\boldsymbol{D}} \cap \overline{\boldsymbol{X}}) \cup (\boldsymbol{D} \cap \overline{\boldsymbol{C}} \cap \overline{\boldsymbol{X}}) =$

$= ((\overline{\boldsymbol{D}} \cup (\boldsymbol{C} \cap \overline{\boldsymbol{D}})) \cap \boldsymbol{X}) \cup (((\boldsymbol{C} \cap \overline{\boldsymbol{D}}) \cup (\boldsymbol{D} \cap \overline{\boldsymbol{C}})) \cap \overline{\boldsymbol{X}}) =$

$= (\overline{\boldsymbol{D}} \cap \boldsymbol{X}) \cup ((\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{D}) \cap \overline{\boldsymbol{X}}) = \varnothing$.

3. $\begin{cases} \overline{\boldsymbol{D}} \cap \boldsymbol{X} = \varnothing\ ; \\ (\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{D}) \cap \overline{\boldsymbol{X}} = \varnothing. \end{cases}$

4. **Умовою існування розв'язку** рівняння $\boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$ є включення $(\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{D}) \subset \boldsymbol{D}$ або $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{D}$, причому рівнянню задовольняє така множина $\boldsymbol{X}$, що $(\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{D}) \subset \boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{D}$. Якщо $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{D}$, то $\boldsymbol{C} \cap \overline{\boldsymbol{D}} = \varnothing$ і $\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{D} = \varnothing \cup (\boldsymbol{C} \cap \overline{\boldsymbol{D}}) = \boldsymbol{D} \cap \overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{D} \setminus \boldsymbol{C}$. Тому $(\boldsymbol{D} \setminus \boldsymbol{C}) \subset \boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{D}$. Отже, будь-яка множина $\boldsymbol{X}$, що входить в $\boldsymbol{D}$, є розв'язком рівняння $\boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$.

Відповідь. Будь-яка така множина $\boldsymbol{X}$, що $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{D}$.

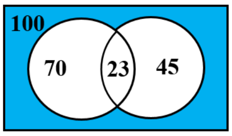
Слід зазначити, що при розв'язанні рівнянь застосування кругів Ейлера пов'язане з принциповими складнощами. Так, наприклад, розв'язуючи розглянуте в прикладі 1.3 рівняння $\boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$, треба побудувати круги для множини $\boldsymbol{X}$ і множини $\boldsymbol{C}$ в такий спосіб, щоб їх об'єднанням була множина $\boldsymbol{D}$. Навіть взявши до уваги, що виконується включення $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{D}$, і виконавши побудову, необхідно пояснити, як саме утворюються області, що відповідають значенням елементів множини X. Таким чином, круги Ейлера не містять повної інформації щодо розв'язку рівняння та його властивостей.

1.5. МЕТОД ВКЛЮЧЕНЬ ТА ВИЛУЧЕНЬ

На практиці круги Ейлера можуть стати у нагоді при розв'язанні задач на знаходження кількості елементів (потужності) деякої скінченної множини, що отримана в результаті виконання описаних операцій над іншими скінченними множинами. При цьому потужності початкових множин вважаються відомими.

Приклад 1.4. В деякій групі із 100 туристів 70 осіб володіють англійською мовою, 45 осіб володіють французькою мовою і 23 особи володіють обома цими мовами. Скільки туристів в цій групі не володіють жодною з вказаних мов?

Розв'язання. Позначимо множину тих туристів групи, що володіють англійською мовою, через A. Тоді із умови задачі випливає, що $|A|=70$. Позначимо множину тих туристів групи,



що володіють французькою мовою, через F. Тоді стає очевидним, що $|F|=45$. В той же час в умові задачі присутні елементи, що не належать жодній з цих множин (саме цю кількість туристів необхідно знайти). В розгляданні беруть участь лише туристи деякої групи. Тому її можна взяти за універсум. Таким чином, маємо, що універсум містить 100 елементів, тобто $|U|=100$. Тепер за допомогою кругів Ейлера необхідно визначити ту множину, потужність якої нас цікавить. З наведеної схеми видно, що туристи групи, які володіють обома вказаними мовами – це елементи множини $A \cap F$. Із умови задачі відомо, що $|A \cap F|=23$. Нам необхідно знайти потужність множини, область якої на схемі пофарбовано блакитним кольором. Позначимо цю множину через X. Із схеми видно, що шукана множина складається зі всіх тих елементів універсуму (туристів групи), що не належать множині A (не володіють англійською мовою) і не належать множині F (не володіють також і французькою мовою). Тому із універсуму необхідно вилучити всі елементи множини A і всі елементи множини F. Але при виконанні цієї операції елементи множини $(A \cap F)$ (група із 23 осіб, що володіють обома мовами), були вилучені двічі. Але в множині вони присутні лише один раз. Після вилучення з U всіх елементів множини A, вони вже не містяться в шуканій множині, тому немає необхідності вилучати їх ще раз вже як елементи множини F. Отже, ці елементи необхідно один раз повернути до множини. Таким чином, кількість елементів шуканої множини обчислюється в наступний спосіб:

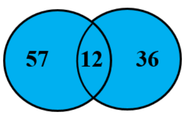
$$|X| = |U| - |A| - |F| + |A \cap F| = 100 - 70 - 45 + 23 = 8.$$

Відповідь. В цій групі 8 туристів не володіють ані англійською, ані французькою мовами.

Однак необхідність брати до розгляду множину-універсум виникає далеко не завжди.

Приклад 1.5. В кондитерській покупці зазвичай купують або один торт, або одну коробку цукерок, або один торт і одну коробку цукерок. Протягом одного дня було продано 57 тортів і 36 коробок цукерок. Скільки було покупців, якщо 12 осіб придбали і торт, і коробку цукерок?

Розв'язання. Позначимо множину покупців, що купували торти, через T. Із умови задачі



випливає, що $|T|=57$. Позначимо множину покупців, що купували цукерки, через K. Очевидно, що $|K|=36$. В умові задачі не фігурують ті елементи, що не належать жодній з цих множин (розглядаються лише справжні покупці). Тому немає потреби визначати множину-універсум $\boldsymbol{U}$. Тепер за допомогою кругів Ейлера необхідно визначити множину, потужність якої нас цікавить. Із схеми можна побачити, що покупці, які придбали і торт, і цукерки – це елементи множини $(\boldsymbol{T} \cap \boldsymbol{K})$. Із умови задачі відомо, що $|\boldsymbol{T} \cap \boldsymbol{K}|=\mathbf{12}$. Нас цікавить загальна кількість покупців, тобто потужність множини $(\boldsymbol{T} \cup \boldsymbol{K})$. Область, що відповідає цій множині, на схемі зафарбовано блакитним кольором. Елементами шуканої множини є всі елементи множини $\boldsymbol{T}$ і всі елементи множини $\boldsymbol{K}$. Але якщо додати потужності цих множин, то елементи, що належать обом цим множинам одночасно, тобто належать множині $\boldsymbol{T} \cap \boldsymbol{K}$, будуть враховані двічі (в складі елементів множини $\boldsymbol{T}$ і в складі елементів множини $\boldsymbol{K}$). Тому один раз ці елементи потрібно вилучити із розгляду, тому що при переліку елементів множини ті елементи, що повторюються, треба враховувати лише один раз. Таким чином, кількість елементів шуканої множини обчислюється в наступний спосіб:

$$|\boldsymbol{T} \cup \boldsymbol{K}| = |\boldsymbol{T}| + |\boldsymbol{K}| - |\boldsymbol{T} \cap \boldsymbol{K}| = \mathbf{57+36-12=81}.$$

<u>Відповідь</u>. Протягом дня в кондитерську відвідав 81 покупець.

Користуючись формулою

$$|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}|, \qquad (1.32)$$

справедливість якої було обґрунтовано при розв’язанні прикладу 1.5, і властивостями операцій над множинами (1.1) – (1.14), можна отримати формулу для кількості елементів будь-якої скінченної сукупності скінченних множин [4].

<u>Приклад 1.6</u>. Необхідно знайти потужність об’єднання трьох скінченних множин.

<u>Решение</u>.

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}| &= |\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})| = |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})| = \\
&= |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}| - |(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})| = \\
&= |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}| - (|\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}| - |(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})| = \\
&= |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}| + |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}|.
\end{aligned}$$

<u>Відповідь</u>. $|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}| + |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}|$.

Процес розв’язання задачі 1.6 за допомогою кругів Ейлера наочно зображений на рис. 1.12. Спочатку множини $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ об’єднуються (рис. 1.12*а*). При цьому області їх попарних перетинів (на рис. 12*б* їх зафарбовано зеленим кольором) враховуються кожна по два рази. Отже, по одному разу їх треба відняти. В процесі цього віднімання область перетину всіх трьох множин одночасно (на рис. 1.12*в* її зафарбовано червоним кольором) віднімається тричі. Таким чином, цю область з самого початку було враховано тричі (з кожною із множин при їх об’єднанні), потім тричі вилучено (з кожним із попарних перетинів при їх вилученні). Отже, при виконаній послідовності дій її не буде враховано жодного разу. Тому елементи цієї області один раз треба додати. Це приводить нас до формули, що отримано як відповідь у прикладі 1.6.

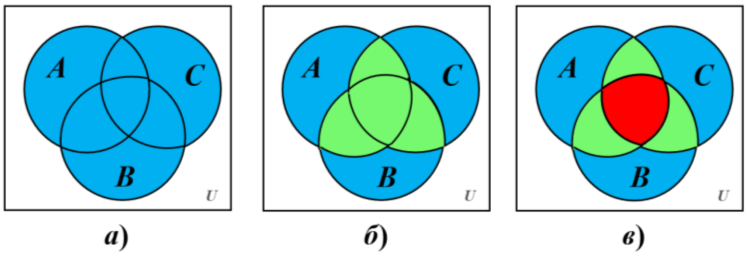


Рис. 1.12. – Метод включень та вилучень для трьох множин

Виходячи з отриманих результатів, можна сформулювати наступну загальну теорему [4].

<u>Теорема 1.9</u>. <u>*Формулювання*</u>. Якщо $A_1, A_2, \dots, A_n$ – деякі скінченні множини, то потужність множини, яку отримано в результаті їх об'єднання, обчислюється за формулою:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} |A_i \cap A_j| + \tag{1.33}$$
$$+ \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} \sum_{\substack{i,j,\ldots,m \\ i \neq j \neq \cdots \neq m}}^{n} |A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_m| \ .$$

<u>*Доведення*</u>. Щоб довести цю теорему, треба показати, що кожен елемент множини $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ враховується в правій частині рівності (1.33) лише один раз. Нехай $a \in (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ – такий елемент, що міститься в складі x множин зі всіх можливих A_i, $i=\overline{1,n}$. Тоді цей елемент a враховується в правій частині рівності (1.33) $C_x^1 - C_x^2 + C_x^3 - \ldots + (-1)^{x-1} C_x^x$ разів. Але в той же час,

$$C_x^1 - C_x^2 + C_x^3 - \ldots + (-1)^{x-1} C_x^x =$$
$$= 1 - (1 - C_x^1 + C_x^2 - C_x^3 + \ldots + (-1)^{x-1} C_x^x) = 1 - (1-1)^x = 1.$$

Цей результат свідчить про те, що кожен елемент $a \in (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ враховується в правій частині виразу (1.33) лише один раз. **Теорему доведено**.

<u>***Означення***</u>. Метод обчислення кількості елементів скінченної множини за формулою (1.33), що полягає в послідовному виконанні операцій додавання та віднімання, які чергуються між собою, називається *методом включень та вилучень*.

1.6. КОРТЕЖІ

1.6.1. Декартовий добуток множин

<u>***Означення***</u>. *Декартовий* (*прямий*) *добуток* множин $A \times B$ – це множина всіх упорядкованих пар елементів (a, b), із яких $a \in A$, $b \in B$, тобто $A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$.

<u>Наприклад</u>, для множин $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ і $B=\{b_1, b_2\}$ їх декартовим добутком буде множина $A \times B=\{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_4, b_1), (a_4, b_2)\}$. Порядок розташування пар може бути довільним, але розташування елементів в кожній парі визначається порядком розташування множин, для яких виконується добуток. Тому

<u>декартовий добуток множин не є комутативним</u>. Тобто ***<u>якщо</u>*** $A \neq B$, ***<u>то</u>*** $A \times B \neq B \times A$.

Слід звернути увагу на суттєву відмінність декартового добутку множин від введених раніше операцій над множинами. В результаті таких операцій як об'єднання, перетин тощо завжди отримуємо множину, елементи якої (якщо вона не порожня) належать початковим множинам. Елементи декартового добутку множин істотно відрізняються від елементів помножувачів і є об'єктами іншої категорії. Тому зобразити графічно за допомогою діаграм Ейлера-Венна декартовий добуток множин неможливо.

Незважаючи на те, що декартовий добуток множин не підкорюється комутативному та асоціативному законам, для нього виконуються *<u>закони дистрибутивності відносно операцій об'єднання, перетину і різниці</u>* [1], а також *<u>властивість порожньої множини</u>* [14]:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C); \tag{1.34}$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C); \tag{1.35}$$

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C); \tag{1.36}$$

$$A \times (B \oplus C) = (A \times B) \oplus (A \times C); \tag{1.37}$$

$$A \times \varnothing = \varnothing \times A = A. \tag{1.38}$$

Для доведення цих властивостей можна використовувати властивості відношення включення [14]. Доведемо **<u>рівність (1.34)</u>**.

<u>Доведення</u>. Якщо $(x, y) \in (A \times (B \cup C))$, то, за означенням декартового добутку, $x \in A$, а $y \in (B \cup C)$. З того, що $y \in (B \cup C)$ випливає, що $y \in B$ або $y \in C$. Якщо $y \in B$, то $(x, y) \in (A \times B)$. Якщо ж $y \in C$, то $(x, y) \in (A \times C)$. Таким чином, $(x, y) \in (A \times B)$ або $(x, y) \in (A \times C)$, тобто $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Отже, $(A \times (B \cup C)) \subseteq ((A \times B) \cup (A \times C))$.

Нехай тепер $(x, y) \in ((A \times B) \cup (A \times C))$. Тоді за означенням операції об'єднання множин, $(x, y) \in (A \times B)$ або $(x, y) \in (A \times C)$. Якщо $(x, y) \in (A \times B)$, то, за означенням декартового добутку множин, $x \in A$ і $y \in B$. Якщо ж $(x, y) \in (A \times C)$, то $x \in A$ і $y \in C$. Таким чином, в будь-якому випадку $x \in A$, а для y може виконуватися будь-яке відношення приналежності з $y \in B$ і $y \in C$, тобто $y \in (B \cup C)$. Отже, $((A \times B) \cup (A \times C)) \subseteq (A \times (B \cup C))$.

З урахуванням властивостей відношення включення, $(A \times (B \cup C)) = ((A \times B) \cup (A \times C))$. Таким чином, **рівність (1.34) доведено**.

Доведемо тепер **<u>властивість (1.35)</u>**.

<u>Доведення</u>. Якщо $(x, y) \in (A \times (B \cap C))$, то, за означенням декартового добутку, $x \in A$, а $y \in (B \cap C)$. З того, що $y \in (B \cap C)$ випливає, що одночасно $y \in B$ і $y \in C$. Таким чином, одночасно виконуються два відношення приналежності: $(x, y) \in (A \times B)$ і $(x, y) \in (A \times C)$, тобто $(x, y) \in ((A \times B) \cap (A \times C))$. Отже, $(A \times (B \cap C)) \subseteq ((A \times B) \cap (A \times C))$.

Нехай тепер $(x, y) \in ((A \times B) \cap (A \times C))$. Тоді за означенням операції перетину множин, $(x, y) \in (A \times B)$ і $(x, y) \in (A \times C)$ одночасно. З того, що $(x, y) \in (A \times B)$ випливає, що $x \in A$ і $y \in B$. В свою чергу, з того, що $(x, y) \in (A \times C)$ випливає, що $x \in A$ і $y \in C$. Таким чином, для y одночасно виконуються два відношення приналежності: $y \in B$ і $y \in C$, тобто $y \in (B \cap C)$. З урахуванням того, що $x \in A$, можна стверджувати, що $(x, y) \in (A \times (B \cap C))$. Отже, $((A \times B) \cap (A \times C)) \subseteq (A \times (B \cap C))$. Одночасне виконання двох отриманих відношень включення доводить рівність $(A \times (B \cap C)) = ((A \times B) \cap (A \times C))$. Таким чином, **рівність (1.35) доведено**.

Доведемо тепер **<u>властивість (1.36)</u>**.

Доведення. Якщо $(x, y) \in (A \times (B \setminus C))$, то, за означенням декартового добутку, $x \in A$, а $y \in (B \setminus C)$. З того, що $y \in (B \setminus C)$ випливає, що $y \in B$ і $y \notin C$. Таким чином, $(x, y) \in (A \times B)$ і $(x, y) \notin (A \times C)$, тобто $(x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$. Отже, $(A \setminus (B \times C)) \subseteq ((A \times B) \setminus (A \times C))$.

Нехай тепер $(x, y) \in ((A \times B) \setminus (A \times C))$. Це означає, що, за означенням операції різниці множин, $(x, y) \in (A \times B)$ і $(x, y) \notin (A \times C)$. З того, що $(x, y) \in (A \times B)$ випливає, що $x \in A$ і $y \in B$. В той же час, з того, що $(x, y) \notin (A \times C)$, випливає, що $x \notin A$ або $y \notin C$. Випадок, коли $x \notin A$, протирічить приналежності $(x, y) \in (A \times B)$, тому з розгляду вилучається. Залишається єдиний варіант, коли $x \in A$, а для y одночасно виконується $y \in B$ і $y \notin C$, тобто $x \in A$ і $y \in (B \setminus C)$. З цього випливає, що $(x, y) \in (A \times (B \setminus C))$. Отже, $((A \times B) \setminus (A \times C)) \subseteq (A \times (B \setminus C))$. Одночасне виконання двох отриманих відношень включення доводить рівність $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$. Таким чином, **рівність (1.36) доведено**.

Доведемо **<u>властивість (1.38)</u>**.

<u>Доведення</u>. Множина $A \times \varnothing$ для будь-якої множини A є множиною всіх упорядкованих пар елементів (x, y) таких, що $x \in A$ і $y \in \varnothing$. Але таких елементів y, що $y \in \varnothing$, не існує. Отже, не існує й упорядкованих пар $(x, y) \in (A \times \varnothing)$, тобто $A \times \varnothing = \varnothing$. Аналогічно доводиться, що $\varnothing \times A = \varnothing$. Отже, **рівність (1.38) доведено**.

Із властивості (1.38) випливає, що порожня множина при побудові декартових добутків множин грає ту ж саму роль, що й «0» при добутку чисел [14].

<u>Властивість (1.37)</u> можна довести за допомогою тотожних перетворень з використанням властивостей (1.34) – (1.36):

$$(A \times B) \oplus (A \times C) =$$
$$= ((A \times B) \cup (A \times C)) \cap (\overline{(A \times B)} \cup \overline{(A \times C)}) =$$
$$= (A \times (B \cup C)) \cap (\overline{(A \times B) \cap (A \times C)}) =$$
$$= (A \times (B \cup C)) \cap (\overline{A \times (B \cap C)}) =$$
$$= (A \times (B \cup C)) \setminus (A \times (B \cap C)) =$$
$$= A \times ((B \cup C) \setminus (B \cap C)) = A \times ((B \cup C) \cap \overline{(B \cap C)}) =$$
$$= A \times ((B \cup C) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) = A \times (B \oplus C).$$

Наведені перетворення і **доводять рівність (1.37)**.

1.6.2. Поняття кортежу

Разом з поняттям множини як сукупності елементів важливим поняттям є поняття упорядкованої множини або кортежу [7].

<u>Означення</u>. *Кортежом* називається упорядкована послідовність елементів, тобто сукупність елементів, в якій кожен елемент займає певне місце. Самі елементи при цьому називаються *компонентами кортежу* (перша компонента, друга компонента тощо).

<u>Означення</u>. Кількість елементів кортежу називається його *довжиною*.

Для позначення кортежу використовується запис $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, що позначає кортеж довжини n з елементами $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Означення. Кортежі довжини **2** називаються упорядкованими парами, кортежі довжини **3** – упорядкованими трійками тощо. В загальному випадку кортежі довжини $\boldsymbol{n}$ називають *упорядкованими n-ками* (енками).

Окремим випадком кортежу є кортеж $(\boldsymbol{a})$ довжини **1** і порожній кортеж довжини **0**, що позначається **( )** або **Λ**. На відміну від звичайної множини в кортежі можуть бути й однакові елементи [3].

Означення. Кортежі, елементами яких є дійсні числа, називаються *точками простору* або *векторами*.

Використовуючи поняття кортежу можна узагальнити операцію декартового добутку множин на будь-яку їх кількість.

Означення. *Декартовим добутком множин* $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_n}$ називається множина, що складається із всіх тих і лише тих кортежів $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n})$ довжини $\boldsymbol{n}$, перша компонента яких належить $\boldsymbol{A_1}$, друга – $\boldsymbol{A_2}$ тощо, тобто $\boldsymbol{a_1} \in \boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{a_2} \in \boldsymbol{A_2}$, …, $\boldsymbol{a_n} \in \boldsymbol{A_n}$ [3].

Таким чином, декартовий добуток довільної кількості скінченних множин може бути заданий в наступний спосіб:

$$\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}} .$$

Слід зазначити, що якщо хоча б одна із множин $\boldsymbol{A_i}$ є нескінченною, то її декартовий добуток з будь-якими іншими множинами буде містити нескінченну кількість кортежів.

<u>Теорема 1.10</u>. *<u>Формулювання</u>*. Нехай $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_n}$ – скінченні множини і $|\boldsymbol{A_1}|=\boldsymbol{m_1}$, $|\boldsymbol{A_2}|=\boldsymbol{m_2}$, …, $|\boldsymbol{A_n}|=\boldsymbol{m_n}$, де $\boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{m_2}, \ldots, \boldsymbol{m_n}$ – потужності множин $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_n}$ відповідно. Тоді потужність множини $\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n}$ дорівнює добутку потужностей множин $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, …, $\boldsymbol{A_n}$ [4], тобто

$$\boldsymbol{|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n}.$$

<u>Доведення</u>. Доведення будемо проводити методом математичної індукції. Для $\boldsymbol{n}$=1 теорема є тривіальною. Припустимо, що вона виконується для $\boldsymbol{n=k}$, і доведемо її справедливість для $\boldsymbol{n=k+1}$. За припущенням $\boldsymbol{|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k}$. Візьмемо будь-який вектор $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_k})$ із $\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k}$ та припишемо справа елемент $\boldsymbol{a_{k+1} \in A_{k+1}}$. Це можливо зробити в $\boldsymbol{m_{k+1}}$ спосіб. При цьому буде $\boldsymbol{m_{k+1}}$ різних векторів із $\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k+1}}$. Таким чином, із всіх $\boldsymbol{m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k}$ векторів приписуванням справа елементу із $\boldsymbol{A_{k+1}}$ можна отримати $\boldsymbol{m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k \cdot m_{k+1}}$ векторів із $\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \times A_{k+1}}$. Причому всі вони різні, і ніяких інших векторів в $\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k+1}}$ не міститься. Тому для $\boldsymbol{n=k+1}$ теорема виконується і, як наслідок, виконується для будь-яких $\boldsymbol{n}$. **Теорему доведено**.

Окремим випадком операції декартового добутку є поняття ступенів множини.

Означення. Нехай A – довільна множина. *S-тим ступенем множини A* називається декартовий добуток $\boldsymbol{s}$ однакових множин, що дорівнюють A, тобто $\boldsymbol{A^s = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{s \text{ разів}}}$ [3].

Це означення придатне для $\boldsymbol{s}$**=2, 3, …** . Його можна поширити на будь-яке ціле невід'ємне число $\boldsymbol{s}$, якщо спеціальним означенням покласти $\boldsymbol{A^1}=A$, $\boldsymbol{A^0}$**={Λ}**. Якщо $\boldsymbol{R}$ – множина дійсних чисел, то $\boldsymbol{R^2=R \times R}$ є дійсною площиною, а $\boldsymbol{R^3=R \times R \times R}$ – тривимірний дійсний простір. Так, <u>наприклад</u>, кортеж $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$ довжини **2** може розглядатися як точка на площині або вектор, що проведений із початку координат в дану точку (рис. 1.13*а*). Кортеж довжини **3** $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$ може розглядатися як точка в тривимірному просторі або вектор, що проведений із початку координат в цю точку (рис. 1.13*б*).

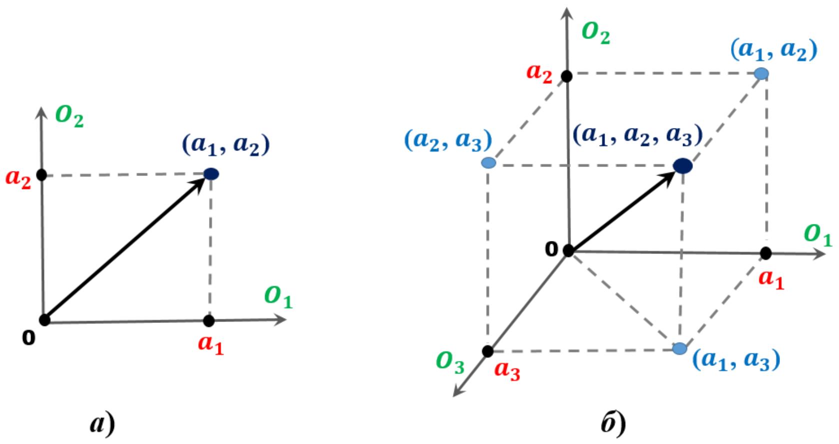


Рис. 1.13. – Кортежі як точки (вектори) на площині або в просторі

Над множинами, елементами яких є кортежі, можна проводити ті ж самі операції, що й над раніше розглянутими множинами. Більш за те, раніше розглянуті множини можна розуміти як множини кортежів одиничної довжини. Наприклад, множини на рис. 1.3, рис. 1.4 і рис. 1.11*а* є множинами точок на числовій прямій, тобто кожен елемент цих множин є кортежем, що складається тільки із однієї компоненти (єдиної координати на прямій).

Приклад 1.7. Задано множини $A=\{(x, y) \mid (x^2-1)+(y^2-2) \leqslant 4\}$ і $B=\{(x, y) \mid y \geqslant |3x|\}$. Знайти їх об'єднання, перетин, різницю й диз'юнктивну суму.

Розв'язання. Цю задачу зручно розв'язувати графічно. Обидві множини задані кортежами довжини **2**. Тому елементи цих множин можуть бути подані точками на площині. З урахуванням цього, множини $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і операції над ними подані як області на декартовій площині (рис. 1.14).

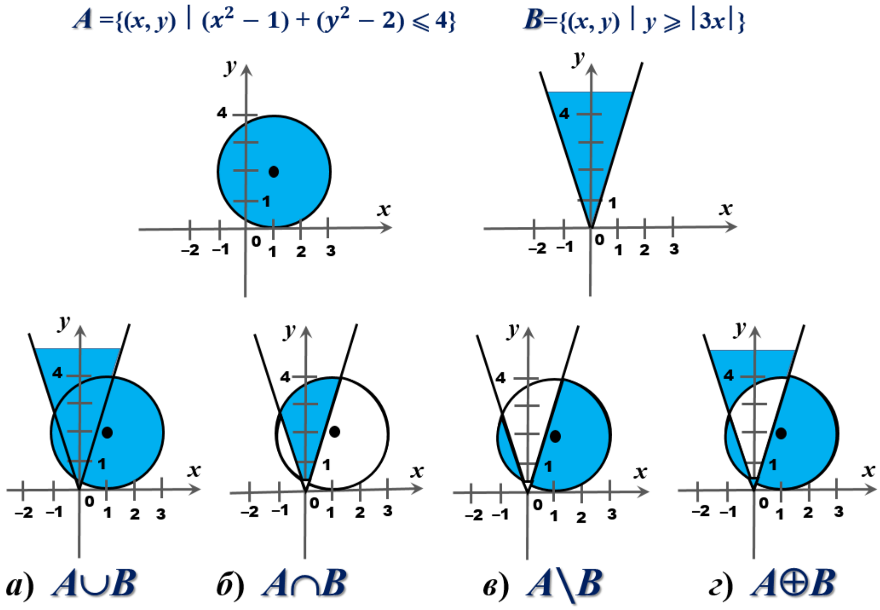


Рис. 1.14. – Приклад операцій над множинами, що задані кортежами

1.6.3. Проекції

Розглядаючи кортежі як точки на площині або в просторі, можна говорити про проекції цих точок. Кожну окрему компоненту кортежу можна інтерпретувати як проекцію кортежу на відповідну вісь. Таким чином, на рис. 1.13*а* компоненти $\boldsymbol{a_1}$ і $\boldsymbol{a_2}$ будуть проекціями вектору $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$ на 1-шу і 2-гу осі. На рис. 1.13*б* компоненти $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ і $\boldsymbol{a_3}$ будуть проекціями вектору $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$ на 1-шу, 2-гу і 3-ю осі відповідно ($\text{Пр}_1(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) = \boldsymbol{a_1}$, $\text{Пр}_2(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) = \boldsymbol{a_2}$, $\text{Пр}_3(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) = \boldsymbol{a_3}$), тобто $\text{Пр}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) = \boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{i}=\overline{\mathbf{1,3}}$.

Однак якщо довжина кортежу більша за **2**, то можна говорити про проекції кортежу відразу на декілька осей. На рис.1.13*б* це можуть бути проекції на осі $\boldsymbol{O_1}$ і $\boldsymbol{O_2}$, осі $\boldsymbol{O_1}$ і $\boldsymbol{O_3}$ або осі $\boldsymbol{O_2}$ і $\boldsymbol{O_3}$. Ці проекції будуть являти собою двоелементні кортежі: $\text{Пр}_{(\mathbf{1,2})}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$, $\text{Пр}_{(\mathbf{1,3})}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_3})$ і $\text{Пр}_{(\mathbf{2,3})}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) = (\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$.

Узагальнюючи поняття проекції, можна розглядати упорядковану $\boldsymbol{n}$-елементну множину як упорядковану множину дійсних чисел $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}\}$ як точку в уявному $\boldsymbol{n}$-вимірному просторі, що іноді називають *гіперпростором* [24], або як $\boldsymbol{n}$-вимірний вектор $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n})$. При цьому компоненти $\boldsymbol{n}$-елементного кортежу $\boldsymbol{a}$ можна розглядати як проекції цього кортежу на відповідні осі: $\text{Пр}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{i}=\overline{\mathbf{1},\boldsymbol{n}}$. Якщо $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \ldots, \boldsymbol{l}$ – номери осей, причому $\mathbf{1}<\boldsymbol{i}<\boldsymbol{j}<\ldots<\boldsymbol{l}<\boldsymbol{n}$, то проекція кортежу $\boldsymbol{a}$ на осі $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \ldots, \boldsymbol{l}$ дорівнює: $\text{Пр}_{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\ldots,\boldsymbol{l})}\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_j}, \ldots, \boldsymbol{a_l})$. При цьому кількість осей, на які відбувається проектування кортежу, є *розмірністю гіперплощини* [24], на яку виконується проекція.

Операція проектування множини тісно пов'язана з операцією проектування кортежу і може застосовуватися тільки до таких множин, елементами яких є кортежі однакової довжини.

<u>Означення</u>. Нехай $\boldsymbol{A}$ – множина, що складається із кортежів довжини $\boldsymbol{n}$. Тоді *проекцією множини* $\boldsymbol{A}$ називається множина проекцій кортежів із $\boldsymbol{A}$.

<u>Приклад 1.8</u>. Нехай $\boldsymbol{A}$**={(1, 2, 3, 4, 5), (2, 1, 3, 5, 5), (3, 3, 3, 3, 3), (3, 2, 3, 4, 3)}**. Знайти проекції цієї множини на 2-гу вісь, на 5-ту вісь, на 2-гу і 4-ту осі.

<u>Розв'язання</u>. Елементами цієї множини є кортежі однакової довжини. Отже, шукані проекції існують. Проекцією на 2-гу вісь буде множина других компонент кортежів. Але у 1-го и 4-го кортежів другі компоненти збігаються. При переліку елементів множини елементи, що повторюються, вказуються лише один раз. Отже, $\text{Пр}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{A}$**={2, 1, 3}**. При переліку елементів множини ці елементи можуть вказуватися в довільному порядку. В даному випадку вони є натуральними числами, які зручно перелічити за зростанням. Таким чином, $\text{Пр}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{A}$**={1, 2, 3}**.

Проекцією на 5-ту вісь буде множина п'ятих компонент кортежів. Але п'яті компоненти збігаються у $\boldsymbol{a_1}$**=(1, 2, 3, 4, 5)** і $\boldsymbol{a_2}$**=(2, 1, 3, 5, 5)**, а також у $\boldsymbol{a_3}$**=(3, 3, 3, 3, 3)** і $\boldsymbol{a_4}$**=(3, 2, 3, 4, 3)** Отже, з урахуванням порядку їх зростання, $\text{Пр}_{\mathbf{5}}\boldsymbol{A}$**={3, 5}**.

Проекцією множини $\boldsymbol{A}$ на 2-гу і 4-ту осі будуть кортежі довжини **2** (за розмірністю гіперплощини проектування), у який перші компоненти будуть являти собою другі компоненти кортежів множини $\boldsymbol{A}$, що проектується. Другі компоненти кортежів проекції будуть являти собою четверті компоненти кортежів множини $\boldsymbol{A}$, для якої виконується проекція. Таким чином, $\text{Пр}_{(\mathbf{2,4})}\boldsymbol{A}$**={(2, 4), (1, 5), (3, 3), (2, 4)}**. Всередині кортежів різні компоненти можуть дорівнювати одна одній. Але, як вже було зазначено, однакові елементи множини вказуються лише один раз. При виконанні даної проекції серед її елементів отримано два однакових кортежі, тобто два однакових елементи множини. Тому такий кортеж, що повторюється, також вказується лише один раз. Отже, $\text{Пр}_{(\mathbf{2,4})}\boldsymbol{A}$**={(2, 4), (1, 5), (3, 3)}**.

Відповідь. Пр$_2$$\boldsymbol{A}$=**{1, 2, 3}**, Пр$_5$$\boldsymbol{A}$=**{3, 5}**, Пр$_{(2,4)}$$\boldsymbol{A}$=**{(2, 4), (1, 5), (3, 3)}**.

Приклад 1.9. Для множин із прикладу 1.7 (рис. 1.14) побудувати їх проекції на координатні осі.

Розв'язання. Як і приклад 1.7, цю задачу також зручніше розв'язувати графічно. Шукані проекції подано на рис. 1.15.

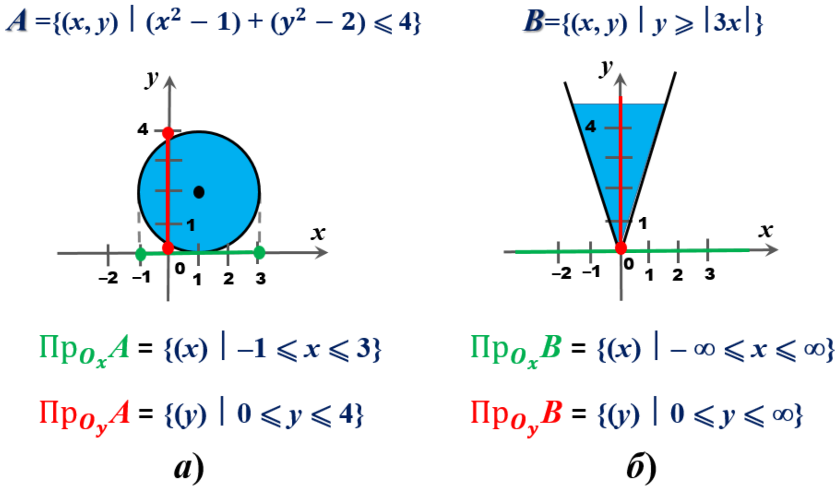


Рис. 1.15. – Проекції множин

З рис. 1.15 можна побачити, що якщо множина, яка проектується, має інфінум і супремум по усіх компонентах своїх кортежів, то її проекції також будуть мати ці точні границі, причому точні границі проекцій будуть збігатися з точними границями множини, для якої виконується проекція. Але якщо множина, що проектується, не має хоча б однієї точної границі хоча б по одній з компонент своїх кортежів, то її проекції на відповідну вісь також не будуть мати цієї точної границі. Множина $\boldsymbol{A}$ на рис. 1.15*а* має обидві точні границі і по першій, і по другій компоненті. Проекції цієї множини на $\boldsymbol{O_x}$ і $\boldsymbol{O_y}$ будуть мати такі ж самі точні границі, що й сама множина $\boldsymbol{A}$. Множина $\boldsymbol{B}$ (рис. 1.15*б*) по 1-й компоненті не має ані супремуму, ані інфінуму. Тому її проекцією на $\boldsymbol{O_x}$ є вся ця числова вісь, тобто Пр$_{\boldsymbol{O_x}}$$\boldsymbol{B}$ також не має ані супремуму, ані інфінуму. По 2-й компоненті множина $\boldsymbol{B}$ має інфінум (він розташований в точці начала координат), але не має супремуму. Тому її проекція на $\boldsymbol{O_y}$ буде мати інфінум, що дорівнює нулю. Супремум для цієї проекції також не існує.

Виходячи із всього сказаного, для множин, що складаються із кортежів однакової довжини, можна ввести поняття точної границі по $\boldsymbol{i}$-тій компоненті.

Означення. *Точною верхньою границею множини по* $\boldsymbol{i}$*-тій компоненті* називається супремум її проекції на $\boldsymbol{i}$-у вісь, тобто $\boldsymbol{sup_i A}$ = **sup** (Пр$_{\boldsymbol{i}}$$\boldsymbol{A}$).

Означення. *Точною нижньою границею множини по* $\boldsymbol{i}$*-тій компоненті* називається інфінум її проекції на $\boldsymbol{i}$-у вісь, тобто $\boldsymbol{inf_i A}$ = **inf** (Пр$_{\boldsymbol{i}}$$\boldsymbol{A}$).

Теорема 1.11. *Формулювання*. Якщо $\boldsymbol{A=B\times C}$, то Пр$_1$$\boldsymbol{A}$=$\boldsymbol{B}$ і Пр$_2$$\boldsymbol{A}$=$\boldsymbol{C}$. Якщо ж $\boldsymbol{A\subseteq (B\times C)}$, то Пр$_1$$\boldsymbol{A\subseteq B}$, Пр$_2$$\boldsymbol{A\subseteq C}$.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}}$, $\boldsymbol{C=\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}}$, $\boldsymbol{A=B\times C}$. Тоді

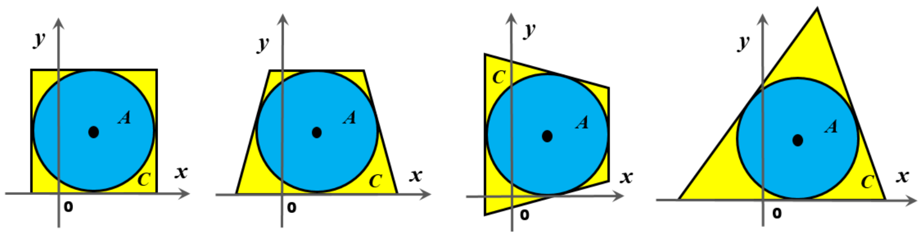
$$A=\{\boldsymbol{a_t=(b_i, c_j), t=\overline{1,k}\mid b_i\in B, i=\overline{1,n}, c_j\in C, j=\overline{1,m}}),$$

тобто множина $\boldsymbol{A}$ складається зі всіх можливих кортежів, в яких перша компонента є елементом множини $\boldsymbol{B}$, а друга – елементом множини $\boldsymbol{C}$. Тоді проекцією множини $\boldsymbol{A}$ на 1-у ось будуть усі перші компоненти усіх кортежів, із яких складається множина $\boldsymbol{A}$, тобто всі елементи множини $\boldsymbol{B}$. Отже, $\text{Пр}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. Проекцією множини $\boldsymbol{A}$ на 2-у вісь будуть усі другі компоненти усіх кортежів, з яких складається множина $\boldsymbol{A}$, тобто всі елементи множини $\boldsymbol{C}$. Отже, $\text{Пр}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$.

Розглянемо тепер множину $\boldsymbol{A'} \subseteq \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$, тобто $\boldsymbol{A'} \subseteq (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$. Таким чином, множина $\boldsymbol{A'}$ складається лише із тих кортежів, що містяться в множині $\boldsymbol{A}$, але не з усіх. Отже, може так трапитися, що деякий елемент $\boldsymbol{B}$ не є першою компонентою жодного кортежу множини $\boldsymbol{A'}$, але при цьому всі перші компоненти цих кортежів в множині $\boldsymbol{B}$ містяться. Таким чином, множина всіх перших компонент кортежів множини $\boldsymbol{A'}$ є підмножиною множини $\boldsymbol{B}$. Аналогічно можливий випадок, коли деякий елемент множини $\boldsymbol{C}$ не є другою компонентою жодного кортежу множини $\boldsymbol{A'}$, але при цьому всі другі компоненти цих кортежів в множині $\boldsymbol{C}$ містяться. Таким чином, множина всіх других компонент кортежів множини $\boldsymbol{A'}$ є підмножиною множини $\boldsymbol{C}$. Два отриманих відношення включення свідчать про те, що у випадку, коли $\boldsymbol{A} \subseteq (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$, маємо $\text{Пр}_1\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$, $\text{Пр}_2\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{C}$.

Теорему доведено.

Результат цієї теореми наочно зображено на рис. 1.16 для двох множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{C}$.



$\text{Пр}_{O_x}A = \text{Пр}_{O_x}C$	$\text{Пр}_{O_x}A \subseteq \text{Пр}_{O_x}C$	$\text{Пр}_{O_x}A = \text{Пр}_{O_x}C$	$\text{Пр}_{O_x}A \subseteq \text{Пр}_{O_x}C$
$\text{Пр}_{O_y}A = \text{Пр}_{O_y}C$	$\text{Пр}_{O_y}A = \text{Пр}_{O_y}C$	$\text{Пр}_{O_y}A \subseteq \text{Пр}_{O_y}C$	$\text{Пр}_{O_y}A \subseteq \text{Пр}_{O_y}C$
$inf_{O_x}A = inf_{O_x}C$	$inf_{O_x}A \geqslant inf_{O_x}C$	$inf_{O_x}A = inf_{O_x}C$	$inf_{O_x}A \geqslant inf_{O_x}C$
$sup_{O_x}A = sup_{O_x}C$	$sup_{O_x}A \leqslant sup_{O_x}C$	$sup_{O_x}A = sup_{O_x}C$	$sup_{O_x}A \leqslant sup_{O_x}C$
$inf_{O_y}A = inf_{O_y}C$	$inf_{O_y}A = inf_{O_y}C$	$inf_{O_y}A \geqslant inf_{O_y}C$	$inf_{O_y}A = inf_{O_y}C$
$sup_{O_y}A = sup_{O_y}C$	$sup_{O_y}A = sup_{O_y}C$	$sup_{O_y}A \leqslant sup_{O_y}C$	$sup_{O_y}A \leqslant sup_{O_y}C$
***а*)**	***б*)**	***в*)**	***г*)**

Рис. 1.16. – Співвідношення проекцій для множин $A \subseteq C$

На рис. 1.16*а* і для множини $\boldsymbol{A}$, і для множини $\boldsymbol{C}$ збігаються проекції на обидві координатні осі, хоча ці множини й не дорівнюють одна одній. Для них виконується включення $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{C}$. Очевидно, що інфінуми і супремуми по обом компонентам кортежів для них при цьому також збігаються. На рис. 1.16*б* для множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{C}$ збігаються проекції на $\boldsymbol{O_y}$. Отже, інфінум і супремум по 2-й компоненті для цих множин також збігаються. По 1-й компоненті $\text{Пр}_{\boldsymbol{O_x}}\boldsymbol{A} \subseteq \text{Пр}_{\boldsymbol{O_x}}\boldsymbol{C}$. Отже, згідно з теоремою 1.7, $\boldsymbol{inf_{O_x}A \geqslant inf_{O_x}C}$, $\boldsymbol{sup_{O_x}A \leqslant sup_{O_x}C}$. На рис. 1.16*в* у множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{C}$ збігаються проекції на $\boldsymbol{O_x}$. Отже, для них збігаються інфінум і супремум по першій компоненті. По 2-й компоненті $\text{Пр}_{\boldsymbol{O_y}}\boldsymbol{A} \subseteq \text{Пр}_{\boldsymbol{O_y}}\boldsymbol{C}$. Це означає, що $\boldsymbol{inf_{O_y}A \geqslant inf_{O_y}C}$, $\boldsymbol{sup_{O_y}A \leqslant sup_{O_y}C}$. На рис. 1.16*в* у множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{C}$ не збігаються проекції на жодну з осей. Тому вказані співвідношення для супремумов і інфінумов по компонентах виконуються і по $\boldsymbol{O_x}$, і по $\boldsymbol{O_y}$.

Глава 2. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

2.1. СПОСОБИ ЗАДАННЯ ГРАФІВ

2.1.1. Перелік ребер або геометрична реалізація графів

2.1.1.1. Графи та їх елементи

Багато задач зводиться до розглядання сукупності об'єктів, суттєві властивості яких описуються зв'язками між ними. В таких випадках зручно об'єкти, що розглядаються, зображати точками, а зв'язки між ними – лініями (довільної конфігурації) [1].

Означення. *Граф* $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ задається множиною точок (*вершин*) $\boldsymbol{V}=\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ та множиною ліній (*ребер*) $\boldsymbol{E}=\{e_1, e_2, \ldots, e_q\}$, що поєднують між собою всі або частину цих точок [2].

Часто зв'язки між об'єктами характеризуються цілком визначеним напрямком. Для позначення напрямку зв'язку між вершинами графа відповідне ребро помічається стрілкою.

Означення. Орієнтоване ребро називається *дугою*, а граф з орієнтованими ребрами – *орієнтованим графом*.

Означення. Якщо пара вершин з'єднана двома або більшою кількістю дуг, то такі дуги називаються *паралельними*. При цьому дві дуги, однаково спрямовані по відношенню до даної вершини, називаються *суворо паралельними*, а протилежно спрямовані дуги – *несуворо паралельними*. Зрозуміло, що несуворо паралельні дуги, що відображають орієнтацію зв'язку в обох напрямках, по суті рівноцінні неорієнтованому зв'язку і можуть бути замінені ребром.

Означення. Якщо граф містить і ребра, і орієнтовані дуги, то він називається *змішаним графом*.

І зворотно, будь-який неорієнтований або змішаний граф можна перетворити в орієнтований заміною кожного ребра парою несуворо паралельних дуг.

Означення. Можливі графічні зображення системи розглянутих елементів графа називаються його *геометричними реалізаціями*.

Граф також може бути заданий переліком своїх ребер $\boldsymbol{e_k(v_i, v_j)}$, $\boldsymbol{k=\overline{1, q}}$; $\boldsymbol{i, j=\overline{1, p}}$. В цьому випадку легко відновлюється його геометрична реалізація.

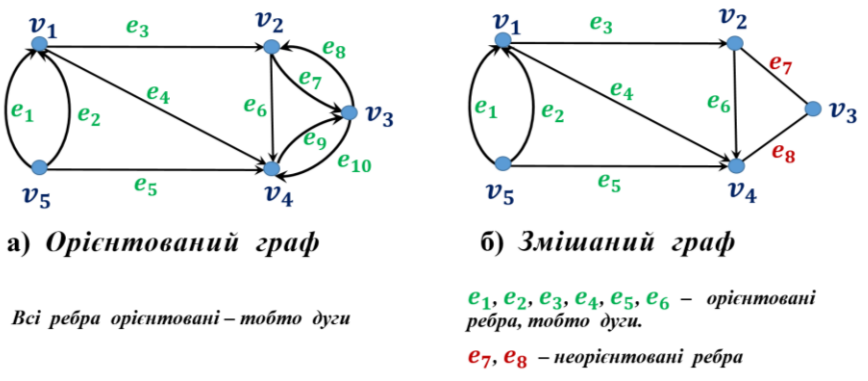
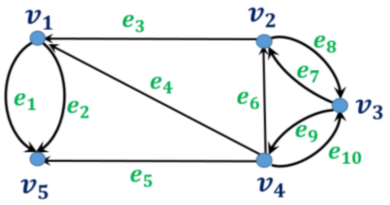


Рис. 2.1 – Геометрична реалізація графів

Означення. Змінивши напрямки усіх дуг орієнтованого графа на протилежні, отримуємо граф, *зворотний* до початкового.

Означення. Якщо напрямки дуг орієнтованого графа не враховуються, і кожна дуга розглядається як неорієнтоване ребро, то він називається *графом, співвіднесеним* (*неорієнтованим*) до початкового графа.

Наприклад, для графа на рис. 2.1*а* зворотним буде граф, зображений на рис. 2.2*а*, а співвіднесеним – граф, зображений на рис. 2.2*б*.



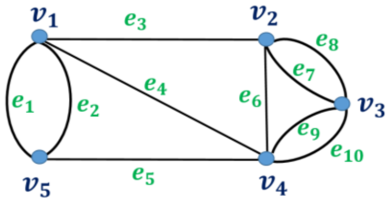


Рис. 2.2 – Зворотний і співвіднесений графи

Означення. Якщо множина вершин графа скінченна, то він називається *скінченним графом*.

В математиці розглядаються також і нескінченні графи, але в практичних застосунках вони зустрічаються рідко. Скінченний граф $\boldsymbol{G=(V,E)}$, що містить $\boldsymbol{p}$ вершин і $\boldsymbol{q}$ ребер, називається $\boldsymbol{(p,q)}$***-графом***.

Означення. Кожне ребро $\boldsymbol{e_k \in E}$ з’єднує пару вершин $\boldsymbol{v_i, v_j \in V}$, що є його *кінцями* (*граничними вершинами*). Для орієнтованого ребра (дуги) розрізняють *початкову вершину*, з якої дуга виходить, і *кінцеву вершину*, в яку дуга заходить.

Означення. Ребро, граничними вершинами якого є одна й та ж сама вершина, називається *петлею*.

Означення. Ребра з однаковими граничними вершинами є паралельними і називаються *кратними*.

Означення. Вершини, що не є кінцями ребер і не зв’язані ані між собою, ані з іншими вершинами, називаються *ізольованими вершинами*.

Подальше узагальнення відображення зв’язків між об’єктами за допомогою графів полягає в приписуванні ребрам і дугам деяких кількісних значень, якісних ознак або характерних властивостей, що називаються *важелями*. В найпростішому випадку це може бути порядкова нумерація ребер і дуг, що вказує на їх чергу при розгляданні (пріоритет або ієрархія). Важіль можна приписувати не лише ребрам і дугам, але й вершинам. Важіль вершини означає будь-яку характеристику відповідного їй об’єкту [1].

2.1.1.2. Ступінь вершини

Означення. Кількість ребер, що пов’язані з вершиною $\boldsymbol{v_i}$ (петля враховується двічі), називають *ступенем* або *валентністю вершини* і позначають через $\boldsymbol{\delta(v_i)}$ або $\boldsymbol{deg(v_i)}$.

Зрозуміло, що ступінь ізольованої вершини дорівнює нулю.

Означення. Вершина, ступінь якої дорівнює одиниці, називається *висячою вершиною*, а єдине ребро, що з нею зв’язане, називається *висячим ребром* [3].

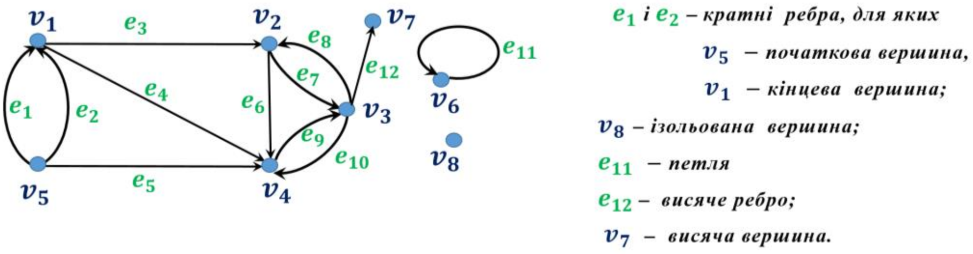


Рис. 2.3 – Елементи графа

<u>Теорема 2.1</u>. <u>*Формулювання*</u>. Для довільного графа сума ступенів усіх вершин дорівнює подвоєній кількості ребер.

<u>*Доведення*</u>. Нехай деяке реброо $\boldsymbol{e_k(v_i, v_j)}$ з'єднує дві різні вершини. Тоді **δ(**$\boldsymbol{v_i}$**)=δ(** $\boldsymbol{v_j}$**)=1**. У випадку, коли $\boldsymbol{e_k}$ – петля, **δ(**$\boldsymbol{v_k}$**)=2**. Таким чином, в довільному випадку внесок кожного ребра до суми ступенів усіх вершин дорівнює двом. Тому подвоєна кількість ребер дорівнює сумі ступенів усіх вершин. **Теорему доведено**.

<u>Означення</u>. В орієнтованому графі *додатні* $\boldsymbol{\delta^+(v_i)}$ і *від'ємні* $\boldsymbol{\delta^-(v_i)}$ ступені (півступені) вершин дорівнюють відповідно кількості дуг, що *виходять із* $\boldsymbol{v_i}$ і що *заходять в* $\boldsymbol{v_i}$.

<u>Теорема 2.2</u>. <u>*Формулювання*</u>. Суми додатних і від'ємних ступенів усіх вершин орієнтованого графа дорівнюють одна одній і дорівнюють також кількості усіх дуг.

<u>*Доведення*</u>. Кожна дуга $\boldsymbol{e_k(v_i, v_j)}$ поєднує дві різні вершини, тобто додає по одиниці до додатного ступеня вершини $\boldsymbol{v_i}$ і до від'ємного ступеня вершини $\boldsymbol{v_j}$. Отже, дуга $\boldsymbol{e_k}$ додає по одиниці до сумарного додатного і сумарного від'ємного ступеня графа. У випадку, коли $\boldsymbol{e_k(v_i, v_i)}$ – петля, вона додає по одиниці до додатного і від'ємного ступеня вершини $\boldsymbol{v_i}$. Таким чином, сумарні додатний і від'ємний ступені графа складаються із однакової кількості одиниць, яка також збігається з кількістю дуг. **Теорему доведено**.

<u>Лема (*про рукопотискання*)</u>. <u>*Формулювання*</u>. Сума ступенів усіх вершин графа є парним числом.

<u>*Доведення*</u>. Як випливає із доведеної теореми,

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\delta^+(v_i)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\delta^-(v_i)} = |\boldsymbol{E}| \ .$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\delta^+(v_i)} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\delta^-(v_i)} = \boldsymbol{2 \cdot |E| \ \vdots \ 2} \ .$$

Лему доведено.

<u>Наслідок</u>. <u>*Формулювання*</u>. В будь-якому графі кількість вершин непарного ступеня завжди є парною.

Дійсно, якщо б це було не так, то сума ступенів усіх вершин графа не могла б бути парним числом, що суперечить лемі про рукопотискання [4].

<u>Наприклад</u>, для графа, що зображений на рис. 2.3, маємо наступні ступені його вершин:

$\boldsymbol{\delta^+(v_1) = 2}$,	$\boldsymbol{\delta^-(v_1) = 2}$,	$\boldsymbol{\delta\,(v_1) = 4}$;
$\boldsymbol{\delta^+(v_2) = 2}$,	$\boldsymbol{\delta^-(v_2) = 2}$,	$\boldsymbol{\delta\,(v_2) = 4}$;
$\boldsymbol{\delta^+(v_3) = 3}$,	$\boldsymbol{\delta^-(v_3) = 2}$,	$\boldsymbol{\delta\,(v_3) = 5}$;

$\delta^+(v_4) = 1$, $\delta^-(v_4) = 4$, $\delta\,(v_4) = 5$;

$\delta^+(v_5) = 3$, $\delta^-(v_5) = 0$, $\delta\,(v_5) = 3$;

$\delta^+(v_6) = 1$, $\delta^-(v_6) = 1$, $\delta\,(v_6) = 2$;

$\delta^+(v_7) = 0$, $\delta^-(v_7) = 1$, $\delta\,(v_7) = 1$;

$\delta^+(v_8) = 0$, $\delta^-(v_8) = 0$, $\delta\,(v_8) = 0$;

$$\sum_{i=1}^{n} \delta^+(v_i) = 12 = |E| \quad \sum_{i=1}^{n} \delta^-(v_i) = 12 = |E| \quad \delta\,(G) = 24 = 2\cdot|E|$$

2.1.1.3. Види графів

Означення. Граф без петель і кратних ребер називається *простим* або *звичайним*.

Означення. Граф без петель, але з кратними ребрами називається *мультиграфом*.

Означення. Найбільш загальний випадок графа, коли припустимі петлі та кратні дуги, називається *псевдографом*.

Означення. Якщо граф взагалі не має ребер ($E=\varnothing$), то всі його вершини є ізольованими ($V\neq\varnothing$), і він називається *порожнім* або *нуль-графом*.

Означення. Звичайний граф, в якому будь-які дві вершини з'єднані ребром, називається *повним*.

Кількість ребер в такому графі дорівнює $\frac{n(n-1)}{2}$ [3]. Повний граф з p вершинами позначається як K_p.

Означення. Граф, ступені усіх вершин якого однакові та дорівнюють r, називається *однорідним* (*регулярним*) *r-того ступеня*.

Повний граф з p вершинами завжди є однорідним ступеня p - 1, а порожній граф – однорідний нульового ступеня.

Означення. Граф третього ступеня називається *кубічним*. Він завжди має парну кількість вершин [1].

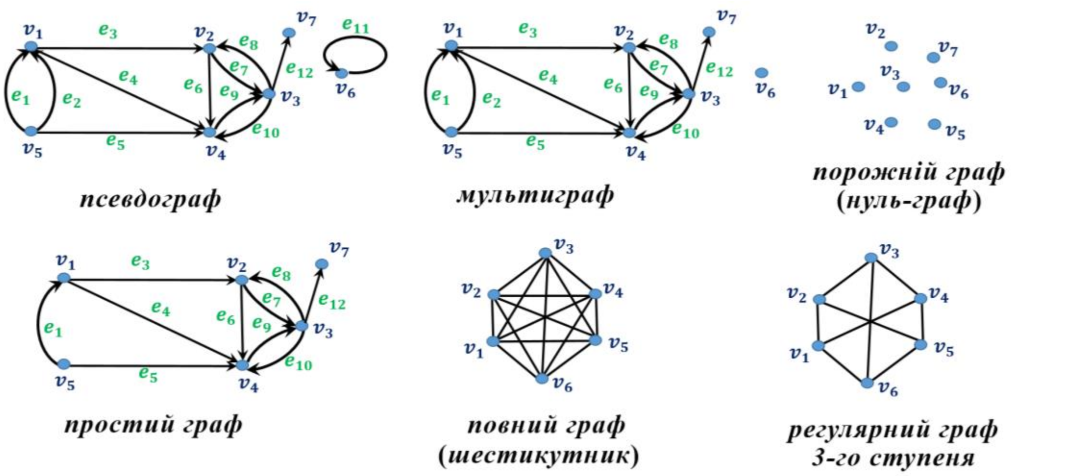


Рис. 2.4 – Види графів

Означення. Якщо множина вершин $\boldsymbol{V}$ простого графа припускає таке розділення на дві підмножини (класи) $\boldsymbol{V_1}$ і $\boldsymbol{V_2}$, що не перетинаються ($\boldsymbol{V_1} \cap \boldsymbol{V_2} = \varnothing$), і що не існує ребер, що з'єднують вершини із однієї й тієї ж підмножини, то він називається *дводольним* або *біграфом*.

Означення. Множини $\boldsymbol{V_1}$ і $\boldsymbol{V_2}$ називаються *долями дводольного графа*.

Означення. Якщо дводольний граф містить усі ребра, що з'єднують підмножини $\boldsymbol{V_1}$ і $\boldsymbol{V_2}$, то такий граф називається *повним дводольним графом*.

Повний дводольний граф, у якого $|\boldsymbol{V_1}| = \boldsymbol{m}$ і $|\boldsymbol{V_2}| = \boldsymbol{n}$, позначають через $\boldsymbol{K_{m,n}}$.

Означення. Повний дводольний граф $\boldsymbol{K_{1,n}}$ називається *зірковим графом*.

Аналогічним чином можна ввести *N*-дольні графи.

Означення. Граф називається *N-дольним*, якщо існує таке розділення множини його вершин на $\boldsymbol{N}$ класів, що не перетинаються, при якому будь-яке ребро графа з'єднує дві вершини із різних класів [4].

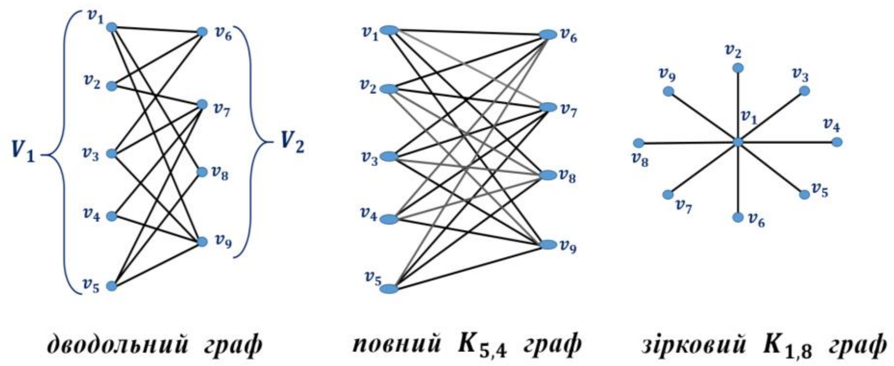


Рис. 2.5 – Види дводольних графів

Щоб дослідити граф на *N*-дольність, необхідно перемалювати його геометричну реалізацію таким чином, щоб вершини однієї долі не були з'єднані ребрами. Наприклад:

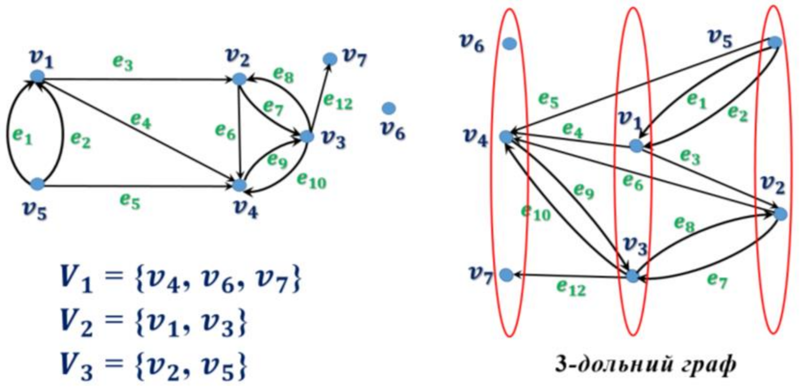


Рис. 2.6 – Дослідження графа на *N*-дольність

2.1.2. Задання графа матрицею суміжності

Означення. Дві вершини $\boldsymbol{v_i}$ і $\boldsymbol{v_j} \in \boldsymbol{V}$ графа $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ називаються *суміжними*, якщо вони є граничними вершинами ребра $\boldsymbol{e_k} \in \boldsymbol{E}$.

Означення. Два ребра, що мають спільну вершину, називаються *суміжними ребрами*.

Відношення суміжності на множині вершин графа можна визначити, якщо подати кожне ребро як пару суміжних вершин, тобто $\boldsymbol{e_k} = (\boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j})$, $\boldsymbol{k} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{q}}$. Для неорієнтованих графів такі пари неупорядковані, тому e_k=(v_i, v_j)=(v_j, v_i), а для орієнтованих графів – упорядковані, причому v_i і v_j означають відповідно початкову і кінцеву вершини дуги e_k. Петля при вершині v_i в обох випадках подається неупорядкованою парою (v_i, v_i). Зрозуміло, що множина вершин V разом з визначеним на ній відношенням суміжності повністю визначає граф.

Граф можна подати також ***матрицею суміжності***. Рядки і стовпці цієї матриці відповідають вершинам графа, а її (***ij***)-елемент дорівнює кількості кратних ребер, що зв'язують вершини v_i і v_j (або спрямованих від вершини v_i до вершини v_j для орієнтованого графа). Отже, матриця суміжності є квадратною. Наприклад, для графа, що наведений на рис. 2.7, матриця суміжності має вигляд:

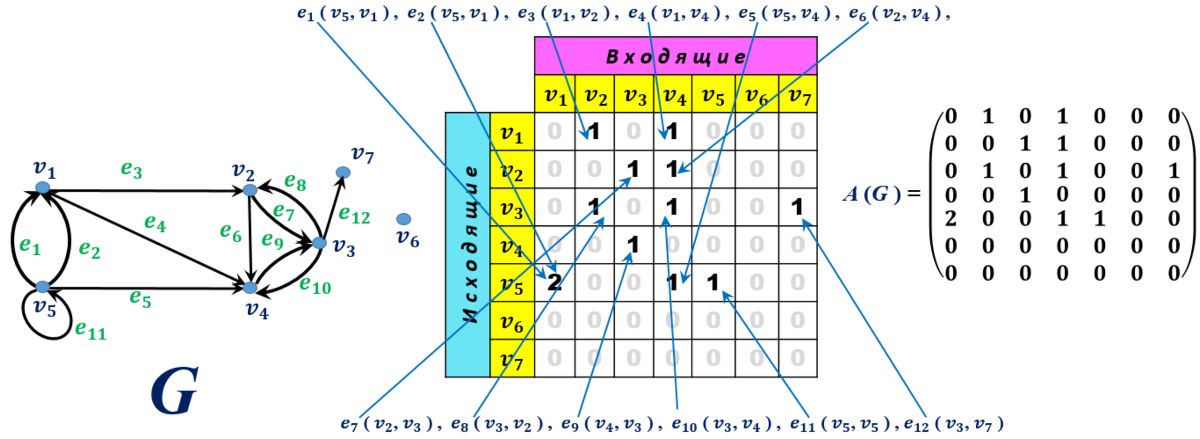


Рис. 2.7 – Схема побудови матриці суміжності для графа

Таким чином, незалежно від того, заданий граф своєю геометричною реалізацією або переліком своїх ребер, кожному ребру графа відповідає ненульовий елемент матриці суміжності. Отже, сума елементів матриці суміжності дорівнює кількості ребер графа:

$$\sum_{i,j} a_{ij} = |E| \ . \tag{2.1}$$

Як вже було зазначено, множина вершин V разом з визначеним на ній відношенням суміжності повністю визначає граф. З цього випливає, що за матрицею суміжності можна повністю охарактеризувати граф, навіть не відновлюючи його геометричну реалізацію. В таблиці 2.1 подана відповідність між ознаками матриці суміжності та характеристиками графа на прикладі матриці для графа, поданого на рис. 2.7.

Таблиця 2.1

Характеристика графа за матрицею суміжності

Початкові \ Кінцеві	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	0	1	0	1	0	0	0
v_2	0	0	1	1	0	0	0
v_3	0	1	0	1	0	0	1
v_4	0	0	1	0	0	0	0
v_5	2	0	0	1	1	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	0
v_7	0	0	0	0	0	0	0

Ознака матриці	Властивість графа
Матриця є симетричною (несиметричною) відносно головної діагоналі	Граф є неорієнтованим (орієнтованим)
В несиметричній матриці є ненульові елементи, що є симетричними відносно головної діагоналі	Граф змішаний
На головній діагоналі є ненульові елементи	Граф містить петлі
В матриці є елементи, що перевищують одиницю	Граф містить кратні ребра
Є повністю нульові рядок і стовпець з однаковими номерами	Граф містить ізольовані вершини
Є рядок (стовпець), що містить єдиний ненульовий елемент, що дорівнює одиниці, при повністю нульовому стовпці (рядку) з тим самим номером	Граф містить висячі вершини
Є повністю нульовий рядок (стовпець) при ненульовому стовпці (рядку) з тим самим номером	Вершина з відповідним номером є стоком (джерелом)
Сума елементів рядка (стовпця) несиметричної матриці	Додатний (від'ємний) ступінь відповідної вершини

Однакові ситуації в таблиці та в матриці позначені однаковими кольорами. Є очевидним, що цей граф є псевдографом, тому що містить петлі та кратні ребра.

Таким чином, алгоритм характеристики графа, заданого матрицею суміжності, можна подати у вигляді блок-схеми, зображеної на рис. 2.8.

Рис. 2.8 – Блок-схема характеристики графа за матрицею суміжності

Елементи матриці простого графа дорівнюють 0 або 1, причому всі елементи головної діагоналі є нульовими. Для зваженого графа, що не містить кратних ребер, можна узагальнити матрицю суміжності таким чином, що кожний її ненульовий елемент дорівнює важелю відповідного ребра або дуги. І навпаки, будь-яка квадратна матриця ***p***-го порядку може бути поданою орієнтованим графом з ***p*** вершинами, дуги якого з'єднують суміжні вершини та мають важелі, що дорівнюють відповідним елементам матриці [1].

Однак за матрицею суміжності можливо також відновити й геометричну реалізацію графа, тобто виконати процедуру, зворотну поданій на рис. 2.7.

Початкові \ Кінцеві	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	0	1	0	1	0	0	0
v_2	0	0	1	1	0	0	0
v_3	0	1	0	1	0	0	1
v_4	0	0	1	0	0	0	0
v_5	2	0	0	1	1	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	0
v_7	0	0	0	0	0	0	0

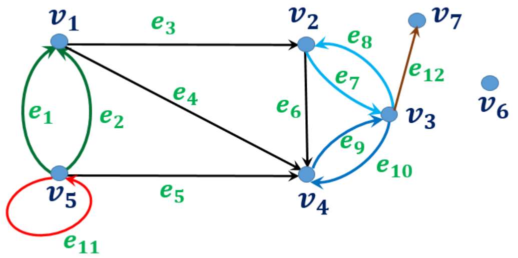


Рис. 2.9 – Відновлення геометричної реалізації графа за його матрицею суміжності

Кількість ребер графа визначається формулою (2.1), кількість вершин співпадає з порядком матриці. При побудові матриці кожному ребру e_k=(v_i, v_j) відповідала одна одиниця в **(*ij*)**-елементі матриці. Тепер кожній одиниці **(*ij*)**-елемента матриці відповідає одне ребро e_k=(v_i, v_j).

2.1.3. Задання графа матрицею інцидентності

<u>Означення</u>. Якщо вершина v_i є кінцем ребра e_k, то говорять, що вони *інцидентні*: вершина v_i інцидентна ребру e_k і ребро e_k інцидентне вершині v_i.

В той час як суміжність є відношенням між однорідними об'єктами (вершинами), інцидентність – це відношення між різнорідними об'єктами (вершинами і ребрами).

<u>Означення</u>. При розгляданні орієнтованих графів розрізняють *додатну інцидентність* (дуга виходить із вершини) і *від'ємну інцидентність* (дуга заходить у вершину).

Розглядаючи інцидентність вершин і ребер (p, q)-графа, можна подати його *матрицею інцидентності* розміру p×q, рядки якої відповідають вершинам, а стовпці – ребрам. Для <u>неорієнтованого графа</u> елементи цієї матриці визначаються за наступним правилом: **(*ik*)**-елемент дорівнює одиниці, якщо вершина v_i інцидентна ребру e_k, і дорівнює нулю, якщо v_i і e_k не інцидентні. Тобто [5]:

$$I_{ik} = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{якщо вершина } v_i \text{ і ребро } e_k \text{ інцидентні;} \\ \mathbf{0}, \text{якщо вершина } v_i \text{ і ребро } e_k \text{ не інцидентні.} \end{cases}$$

У випадку <u>орієнтованого графа</u> ненульовий **(*ik*)**-елемент дорівнює одиниці, якщо v_i – початкова вершина дуги e_k, і дорівнює -1, якщо v_i – кінцева вершина дуги e_k. Тобто

$$I_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{якщо вершина } v_i \text{ є початковою для ребра } e_k; \\ \mathbf{-1}, \text{ якщо вершина } v_i \text{ є кінцевою для ребра } e_{kj}; \\ \mathbf{0}, \text{якщо вершина } v_i \text{ і ребро } e_k \text{ не інцидентні.} \end{cases}$$

В описаному вигляді матриця інцидентності може бути застосована тільки до графа без петель. У випадку наявності петлі цю матрицю при побудові можна розділити на дві півматриці: додатну і від'ємну [7]. Ми будемо поєднувати ці матриці, використовуючи для вершини з петлею значення «± 1».

<u>Наприклад</u>, для графа, зображеного на рис. 2.6, побудова матриці інцидентності відбувається наступним чином.

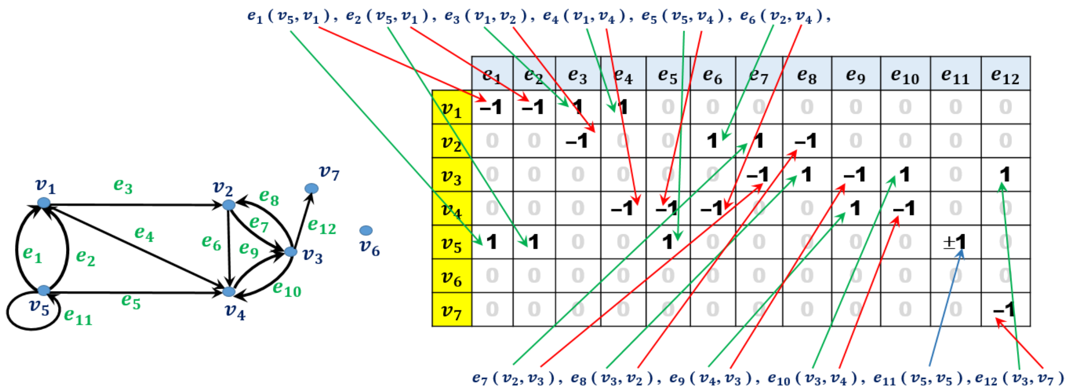


Рис. 2.10 – Схема побудови матриці інцидентності для графа

Таким чином, матриця інцидентності для цього графа має вигляд:

$$
I(G) = \begin{pmatrix}
-1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}.
$$

Відношення інцидентності між множиною вершин $\boldsymbol{V}$ і множиною ребер $\boldsymbol{E}$ повністю визначає граф. Отже, за матрицею інцидентності також можна повністю охарактеризувати граф, не відновлюючи його геометричну реалізацію. Однак, при цьому може бути відсутньою інформація, до якої саме вершини належить петля (якщо граф її містить). В таблиці 2.2 подана відповідність між ознаками матриці інцидентності та характеристиками графа на прикладі матриці для графа, поданого на рис. 7. і рис. 10.

Таблиця 2.2

Характеристика графа за матрицею інцидентності

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}
v_1	–1	–1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
v_2	0	0	–1	0	0	1	1	–1	0	0	0	0
v_3	0	0	0	0	0	0	–1	1	–1	1	0	1
v_4	0	0	0	–1	–1	–1	0	0	1	–1	0	0
v_5	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	± 1	0
v_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–1

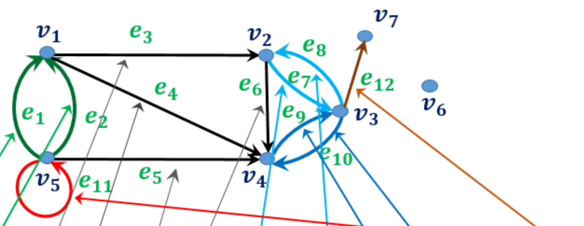
Ознака матриці	Властивість графа
Матриця не містить (містить) елементи, що дорівнюють « – 1».	Граф неорієнтований (орієнтований)
В матриці є протилежні за значеннями стовпці	Граф змішаний
В матриці є нульові стовпці	Граф містить петлі
В матриці є однакові за значеннями стовпці	Граф містить кратні ребра
В матриці є нульові рядки	Граф містить ізольовані вершини
В матриці є рядки, що містять лише один ненульовий елемент	Граф містить висячі вершини
Є рядок, усі ненульові елементи якого дорівнюють « – 1» («+1»)	Вершина з відповідним номером є стоком (джерелом)
Сума додатних (від'ємних) елементів рядка	Додатний (від'ємний) ступінь відповідної вершини

В цьому випадку однакові ситуації в матриці та в таблиці також позначені однаковими кольорами.

Таким чином, для графа, заданого матрицею інцидентності, також можливо подати блок-схему алгоритму його характеристики (рис. 2.11).

Рис. 2.11 – Блок-схема характеристики графа за матрицею інцидентності

За матрицею інцидентності, як і за матрицею суміжності, можливо відновити геометричну реалізацію графа, тобто виконати процедуру, зворотну поданій на рис. 2.10.



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}
v_1	–1	–1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
v_2	0	0	–1	0	0	1	1	–1	0	0	0	0
v_3	0	0	0	0	0	0	–1	1	–1	1	0	1
v_4	0	0	0	–1	–1	–1	0	0	1	–1	0	0
v_5	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	± 1	0
v_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–1

Рис. 2.12 – Відновлення геометричної реалізації графа за його матрицею інцидентності

Кількість вершин графа визначається кількістю рядків матриці інцидентності, а кількість ребер – кількістю її стовпців. Слід мати на увазі, що нульовий стовпець матриці інцидентності лише вказує на наявність петлі, але не містить відомостей про те, з якою саме вершиною ця петля пов’язана (в практичних застосунках це може бути несуттєвим). В розглянутому прикладі ми будували матрицю за наявною геометричною реалізацією, тому з самого початку знали, до якої саме вершини відноситься петля.

2.1.4. Зв’язок між різними способами задання графів

Однак перехід між матрицями суміжності та інцидентності графа можливий і без відновлення його геометричної реалізації. Так, порядок матриці суміжності збігається з кількістю рядків матриці інцидентності (кількість вершин). Сума елементів матриці суміжності збігається з кількістю стовпців матриці інцидентності (кількість ребер).

На рис. 2.13 подано схему побудови матриці інцидентності за матрицею суміжності. Кожний одиничний елемент матриці суміжності відповідає одному стовпцю в матриці інцидентності, в якому елемент, що відповідає початковій вершині, дорівнює «1», а елемент, що відповідає кінцевій вершині, дорівнює «- 1». Однаковим кольором в цих матрицях виділені ситуації, що відповідають одній і тій же самій характеристиці графа.

		Кінцеві						
		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Початкові	v_1	0	1	0	1	0	0	0
	v_2	0	0	1	1	0	0	0
	v_3	0	1	0	1	0	0	1
	v_4	0	0	1	0	0	0	0
	v_5	2	0	0	1	1	0	0
	v_6	0	0	0	0	0	0	0
	v_7	0	0	0	0	0	0	0

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}
v_1	–1	–1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
v_2	0	0	–1	0	0	1	1	–1	0	0	0	0
v_3	0	0	0	0	0	0	–1	1	–1	1	0	1
v_4	0	0	0	–1	–1	–1	0	0	1	–1	0	0
v_5	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	±1	0
v_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–1

Рис. 2.13 – Схема відновлення матриці інцидентності за матрицею суміжності

На рис. 2.14 подано схему побудови матриці суміжності за матрицею інцидентності. При цьому кожен стовпець матриці інцидентності додає одиницю в (***ij***)-елемент матриці суміжності. При цьому номер рядка цього елемента матриці суміжності збігається з номером рядка матриці інцидентності, в якому розташована одиниця в стовпці (рядку), що відображається, матриці інцидентності. Номер стовпця цього елемента матриці суміжності визначається номером рядка елемента стовпця матриці інцидентності, що відображається, і який дорівнює «- 1».

		Кінцеві						
		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Початкові	v_1	0	1	0	1	0	0	0
	v_2	0	0	1	1	0	0	0
	v_3	0	1	0	1	0	0	1
	v_4	0	0	1	0	0	0	0
	v_5	2	0	0	1	1	0	0
	v_6	0	0	0	0	0	0	0
	v_7	0	0	0	0	0	0	0

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}
v_1	–1	–1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
v_2	0	0	–1	0	0	1	1	–1	0	0	0	0
v_3	0	0	0	0	0	0	–1	1	–1	1	0	1
v_4	0	0	0	–1	–1	–1	0	0	1	–1	0	0
v_5	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	±1	0
v_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–1

Рис. 2.14 – Схема відновлення матриці суміжності за матрицею інцидентності

Таким чином, було розглянуто чотири способи задання графів (рис. 2.15):

- геометрична реалізація,
- перелік ребер,
- матриця суміжності,
- матриця інцидентності.

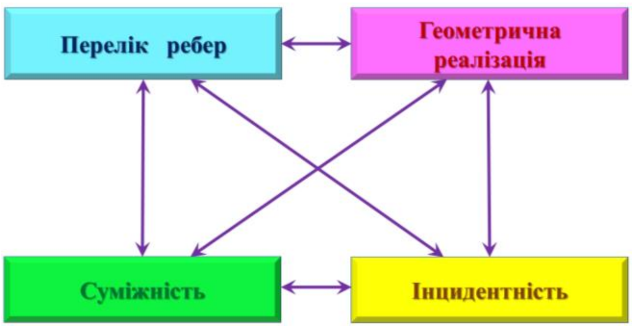


Рис. 2.15 – Способи задання графів

Як було показано вище, можливий прямий перехід між будь-якими двома із перелічених способів. З цього випливає, що будь-який із способів задання може бути адаптований під конкретні цілі прикладної задачі. Геометрична реалізація є більш наочною. Наприклад, мапу доріг людині важко зрозуміти, якщо її подано матрицею. До того ж і порядок цієї матриці буде завеликим для сприйняття. Однак комп'ютерна обробка потребує саме матричного задання графів для подальшої роботи. Незважаючи на те, що задання графів матрицею інцидентності досить широко застосовується в теоретичних дослідженнях, на практиці цей спосіб вельми незручний і неефективний. Стовпці матриці інцидентності містять не більш ніж два ненульових елемента, що робить цей метод неекономічним при великій кількості вершин. Крім того, розв'язання конкретних практичних задач за допомогою матриці інцидентності потребує дуже багато трудових витрат. Матриця суміжності графів застосовується в багатьох випадках при виявленні характеристик графа, при комп’ютерному розв’язанні конкретних оптимізаційних задач для графів.

2.2. ОПЕРАЦІЇ НАД ГРАФАМИ

2.2.1. Видалення ребра

Означення. Нехай $\boldsymbol{G}$=$(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ – граф і $\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}$ – деяке його ребро. Говорять, що граф $\boldsymbol{G_1}$=$\boldsymbol{G}-\boldsymbol{e}$ отриманий із графа $\boldsymbol{G}$ внаслідок операції видалення ребра $\boldsymbol{e}$, якщо $\boldsymbol{G}$=$(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E}\backslash\{\boldsymbol{e}\})$ [4].

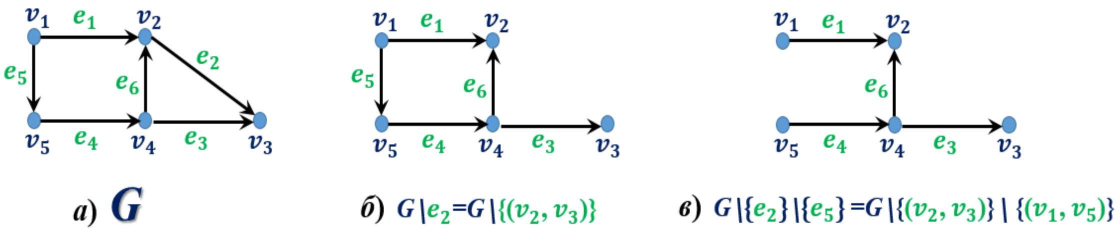


Рис. 2.16 – Видалення ребра

Таким чином, кінці ребра $\boldsymbol{e}$ не видаляються із множини вершин $\boldsymbol{V}$. Для довільних $\boldsymbol{e_i}$ і $\boldsymbol{e_j}$ графа $\boldsymbol{G}$ виконується тотожність

$$\forall\ \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j}\in\boldsymbol{E}:\quad (\boldsymbol{G}-\boldsymbol{e_i})-\boldsymbol{e_j}=(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{e_j})-\boldsymbol{e_i}.$$

Тобто якщо виконуються поспіль декілька операцій видалення ребра, то результат не залежить від порядку видалення ребер із графа.

2.2.2. Видалення вершини

Означення. Нехай $\boldsymbol{G}$=$(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ і $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}$. Говорять, що граф $\boldsymbol{G_1}$=$\boldsymbol{G}-\boldsymbol{v}$, отриманий із графа $\boldsymbol{G}$ внаслідок операції видалення вершини $\boldsymbol{v}$, якщо вершина $\boldsymbol{v}$ видалена із $\boldsymbol{V}$, а із $\boldsymbol{E}$ видалені усі ребра, що інцидентні з вершиною $\boldsymbol{v}$.

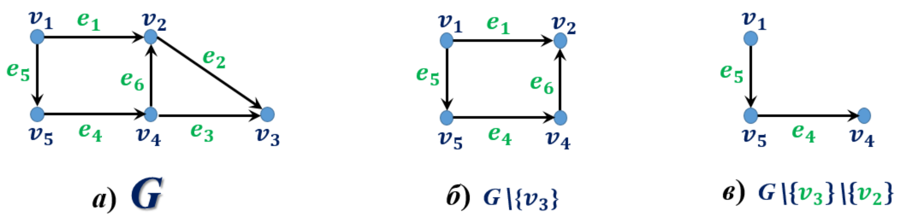


Рис. 2.17 – Видалення вершини

Для довільних вершин $\boldsymbol{v_i}$ і $\boldsymbol{v_j}$ графа $\boldsymbol{G}$ виконується тотожність

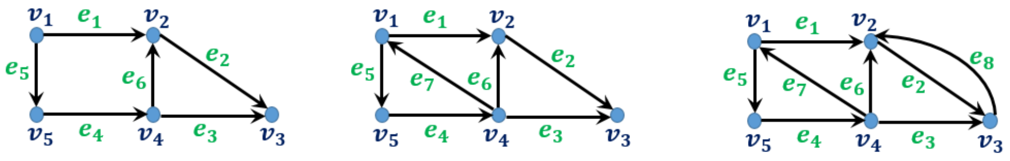
$$\forall\ \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j}\in\boldsymbol{V}:\quad (\boldsymbol{G}-\boldsymbol{v_i})-\boldsymbol{v_j} = (\boldsymbol{G}-\boldsymbol{v_j})-\boldsymbol{v_i}.$$

Тобто операція видалення вершини також не залежить від порядку, в якому вершини видаляються із графа.

2.2.3. Введення ребра

Операції видалення вершини або ребра дозволяють виділити із графа деяку його частину. Операції, зворотні до них, дозволяють доповнити граф новими елементами. Однією з таких операцій є операція введення ребра.

Означення. Якщо $\boldsymbol{v_i\ v_j \in V}$ і $\boldsymbol{(v_i, v_j) \notin E}$ в графі $\boldsymbol{G=(V, E)}$, то граф $\boldsymbol{G+e=(V, E\cup\{e\})}$, де $\boldsymbol{e=(v_i, v_j)}$.



а) $\boldsymbol{G}$ ***б)*** $G+e_7=G+\{(v_4, v_1)\}$ ***в)*** $G+\{e_7\}+\{e_8\}=G+\{(v_4, v_1)\}+\{(v_3, v_2)\}$

Рис. 2.18 – Введення ребра

Внаслідок комутативності операції об’єднання множин, можна стверджувати, що послідовність операцій введення ребер в граф $\boldsymbol{G=(V, E)}$ не залежить від порядку, в якому ці ребра вводяться в граф. Інакше кажучи, має місце тотожність:

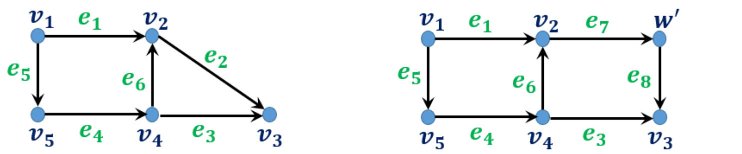
$$\forall\ e_i, e_j \notin E:\quad ((G+e_i)+e_j=(G+e_j)+e_i.$$

2.2.4. Введення вершини в ребро (розтягування графа по ребру) і стиснення (стягування) графів за парою суміжних ребер

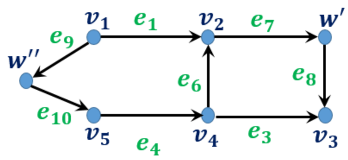
Означення. Нехай $\boldsymbol{(v_i, v_j)}$ – деяке ребро графу $\boldsymbol{G=(V, E)}$. *Введенням вершини* $\boldsymbol{w}$ *в ребро* $\boldsymbol{(v_i, v_j)}$ називається операція, внаслідок якої отримують два ребра $\boldsymbol{(v_i, w)}$ і $\boldsymbol{(w, v_j)}$, а ребро $\boldsymbol{(v_i, v_j)}$ при цьому видаляється із графа $\boldsymbol{G}$.

Таким чином, новий граф отримують із початкового за наступною формулою:

$$G_1=(G\setminus\{(v_i, v_j)\})+w+(v_i, w)+(w, v_j).$$



а) $\boldsymbol{G}$ ***б)*** $G_1=(G\setminus\{e_2\})+w'+e_7+e_8$



в) $G_2=((G\setminus\{e_2\})+w'+e_7+e_8)\setminus\{e_5\})+w''+e_9+e_{10}$

Рис. 2.19 – Введення вершини в ребро

Означення. Операція *стиснення графа за парою суміжних ребер* зворотна до операції введення вершини в ребро.

Наприклад, граф G_1 на рис. 2.19 можна отримати із графа G_2 за допомогою стягування за суміжними ребрами e_9 і e_{10}. При цьому видаляється вершина w'' разом з інцидентними до неї ребрами e_9 і e_{10}, замість яких вводиться ребро e_5. Аналогічно граф G можна отримати із графа G_1 стягуваннями за суміжними ребрами e_7 і e_8. При цьому видаляється вершина w' разом з інцидентними до неї ребрами e_7 і e_8, замість яких вводиться ребро e_2. Таким чином, граф G отримують із графа G_2 стягуванням по парах суміжних ребер (e_7, e_8) і (e_9, e_{10}).

2.2.5. Замикання (ототожнення) вершин і стягування ребра

Означення. Нехай $G=(V, E)$ – граф і w, v – дві його вершини, причому вершини w_1, w_2, …, w_k суміжні з вершиною w, а вершини v_1, v_2, …, v_l суміжні з вершиною v. Тоді граф G_1, отриманий за допомогою додавання нової вершини u до множини вершин графа $H=G-w-v$ і додаванням ребер (u, w_i), (u, v_j), $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,l}$ до множини ребер графа H називається графом, що отриманий із G *ототожненням вершин* w, v [4].

Іншими словами говорять, що пара вершин графу G w і v замикаються (ототожнюються), якщо їх замінюють новою вершиною u. Усі ребра графа G, що інцидентні w і v, стають інцидентними до цієї нової вершини [3].

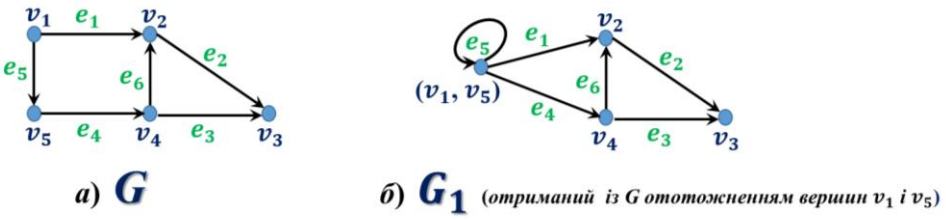


Рис. 2.20 – Замикання вершин

Означення. Операція ототожнення вершин з подальшим видаленням отриманої петлі називається *стягуванням відповідного ребра*.

Наприклад, якщо в графі G_1 видалити отриману петлю e_5, то результатом буде граф, отриманий із G шляхом стягування його ребра e_5.

Означення. Граф G називається таким, що *стягується до графа* G', якщо граф G' можна отримати із графа G в результаті деякої послідовності операцій стягування ребер [5].

Якщо якась вершина графа була суміжною з обома вершинами, що замикаються, то одночасно з ототожненням вершин відбувається ототожнення відповідних ребер.

2.2.6. Розщеплення (роздвоєння) вершини

Означення. Нехай v_i – деяка вершина графа $G=(V, E)$. Розіб’ємо множину суміжних з нею вершин довільним образом на дві частини – M_1 і M_2, а потім виконаємо таке перетворення графа G: виключимо вершину v_i разом з інцидентними до неї ребрами і введемо дві нові вершини v_i' і v_i'' разом з ребром, що з’єднує ці вершини. Вершину v_i' з’єднуємо ребром з кожною вершиною множини M_1, а вершину v_i'' – з кожною вершиною із множини M_2. Отриманий граф позначається як $\widetilde{G}$. Вважається, що він отриманий із графа G внаслідок розщеплення вершини v_i.

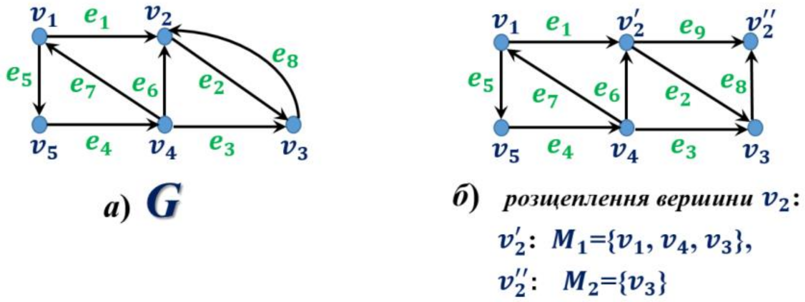


Рис. 2.21 – Розщеплення вершини

2.2.7. Доповнення графа

<u>Означення</u>. *Доповненням графа* $\boldsymbol{G}$=($\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{E}$) називається граф $\overline{\boldsymbol{G}}$=($\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{E}$’), якщо його ребро $\boldsymbol{e_k}$=($\boldsymbol{v_i}$, $\boldsymbol{v_j}$) належить множині $\boldsymbol{E}$’ тоді й тільки тоді, коли воно не належить множині $\boldsymbol{E}$. Інакше кажучи, дві вершини $\boldsymbol{v_i}$ і $\boldsymbol{v_j}$ суміжні в графі $\overline{\boldsymbol{G}}$, якщо вони не суміжні в графі $\boldsymbol{G}$.

Із означення випливає, що коли граф $\boldsymbol{G}$ має $\boldsymbol{p}$ вершин, то граф $\overline{\boldsymbol{G}}$ можна побудувати, виключивши із графа $\boldsymbol{K_p}$ всі ребра, що належать графу $\boldsymbol{G}$ (граф $\boldsymbol{G}$ вважається доповненням графа $\boldsymbol{K_p}$). Зрозуміло також, що доповненням повного графа є порожній граф і, навпаки, доповненням порожнього графа є повний граф. Доповнення регулярного графа також є регулярним графом.

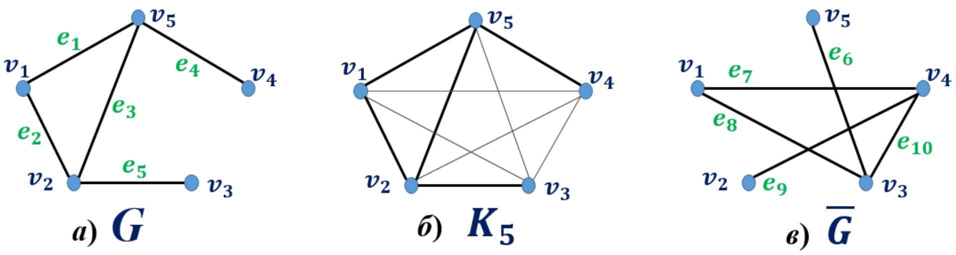


Рис. 2.22 – Доповнення графа

2.2.8. Об’єднання графів

Нехай є два графи $\boldsymbol{G_1}$ і $\boldsymbol{G_2}$ (рис. 2.23).

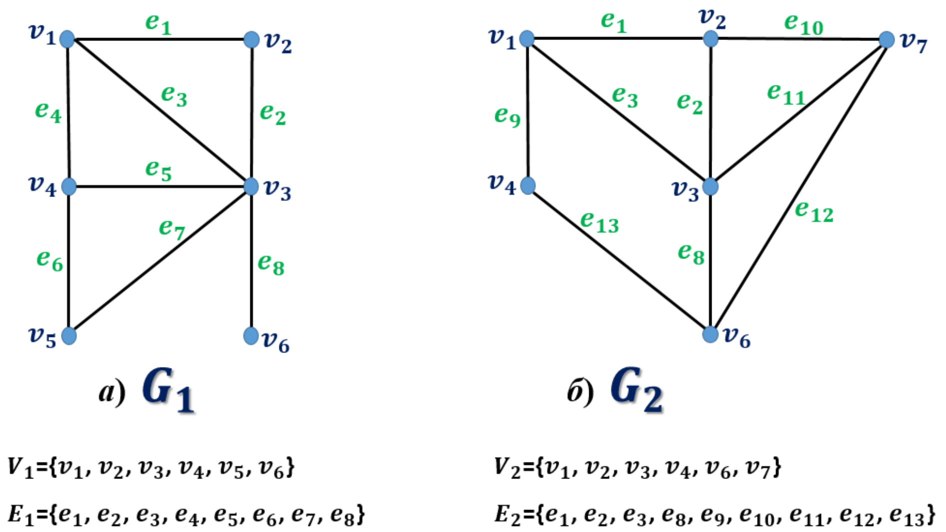


Рис. 2.23 – Графи $G_1(V_1, E_1)$ і $G_2(V_2, E_2)$

Означення. Граф $\boldsymbol{H}$ називається *об'єднанням графів* $\boldsymbol{G_1=(V_1, E_1)}$ і $\boldsymbol{G_2=(V_2, E_2)}$, якщо $\boldsymbol{H=(V_1\cup V_2, E_1\cup E_2)}$. Граф $\boldsymbol{H}$ позначається як $\boldsymbol{G_1\cup G_2}$ (рис. 2.24*а*).

Означення. Об'єднання графів $\boldsymbol{G_1=(V_1, E_1)}$ і $\boldsymbol{G_2=(V_2, E_2)}$ називається *диз'юнктивним*, якщо $\boldsymbol{V_1\cap V_2}=\varnothing$.

2.2.9. Перетин графів

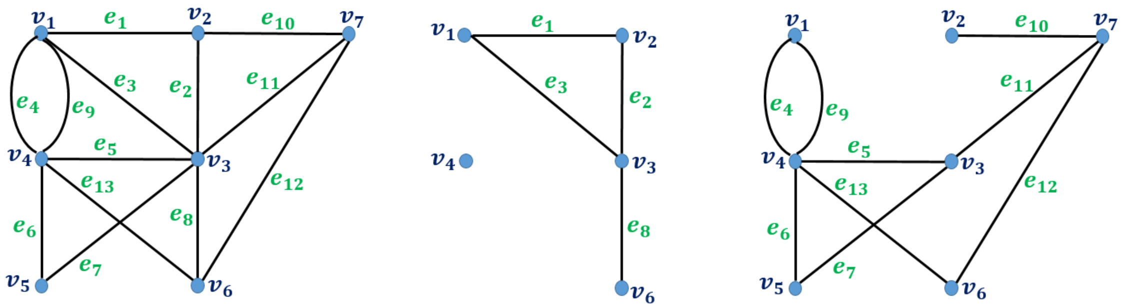
Означення. Граф $\boldsymbol{F}$ називається *перетином графів* $\boldsymbol{G_1=(V_1, E_1)}$ і $\boldsymbol{G_2=(V_2, E_2)}$, якщо $\boldsymbol{F=(V_1\cap V_2, E_1\cap E_2)}$ [6].

Інакше кажучи, множина його вершин містить лише ті вершини, які одночасно містяться і в графі $\boldsymbol{G_1}$, і в графі $\boldsymbol{G_2}$. При цьому множина ребер складається із тих ребер, які одночасно належать і графу $\boldsymbol{G_1}$, і графу $\boldsymbol{G_2}$ (рис. 2.24*б*). Граф $\boldsymbol{F}$ позначається як $\boldsymbol{G_1\cap G_2}$.

2.2.10. Кільцева сума графів

Означення. Граф $\boldsymbol{R}$ називається *кільцевою сумою графів* $\boldsymbol{G_1=(V_1, E_1)}$ і $\boldsymbol{G_2=(V_2, E_2)}$, якщо він не містить ізольованих вершин і складається із ребер, що належать або графу $\boldsymbol{G_1}$, або графу $\boldsymbol{G_2}$, але не обом одразу (рис. 2.24*в*).

Інакше кажучи, множина ребер кільцевої суми графів визначається із співвідношення $\boldsymbol{E_R=\{(E_1\cup E_2)\setminus(E_1\cap E_2)\}}$ [6]. Граф $\boldsymbol{R}$ позначається як $\boldsymbol{G_1\oplus G_2}$.



а) $H = G_1 \cup G_2$ *б*) $F = G_1 \cap G_2$ *в*) $R = G_1 \oplus G_2$

V_H={$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$}
E_H={$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}$}

V_F={v_1, v_2, v_3, v_4, v_6}
E_F={e_1, e_2, e_3, e_8}

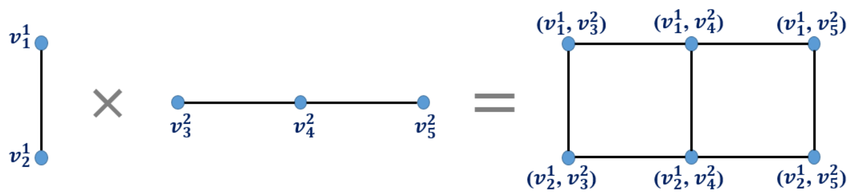
V_R={$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$}
E_R={$e_4, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}$}

Рис. 2.24 – *а*) об'єднання графів; *б*) перетин графів; *в*) кільцева сума графів

Операції об'єднання (в тому числі і диз'юнктивного), перетину і кільцевої суми графів є комутативними, тому їх можна розповсюдити на будь-яку кількість графів.

2.2.11. Добуток графів

Означення. *Добутком графів* $G_1=(V_1, E_1)$ і $G_2=(V_2, E_2)$ називається граф $D=G_1\times G_2$, у якого $V_D=V_1\times V_2$. При цьому E_D визначається наступним чином: вершини (v_i^1, v_j^2) і (v_t^1, v_s^2) суміжні в D тоді й тільки тоді, коли $i=t$ (тобто $v_i^1=v_t^1$), а v_j^2 і v_s^2 суміжні в G_2, або коли $j=s$ (тобто $v_j^2=v_s^2$), а v_i^1 і v_t^1 суміжні в G_1 [4].



G_1 G_2 $D = G_1 \times G_2$

V_1={v_1^1, v_2^1} V_2={v_3^2, v_4^2, v_5^2}

Рис. 2.25 – Добуток графів

2.3. ЧАСТИНИ ГРАФА

Означення. Граф $G'=(V', E')$ є *підграфом* (*частиною графа*) $G=(V, E)$, якщо $V'\subset V$ і $E'\subset E$, тобто граф G містить усі вершини і ребра будь-якої своєї частини (свого підграфа) [5].

Підграфи бувають трьох видів.

Означення. Підграф $G'=(V, E')$, що разом з деякою підмножиною ребер графа, містить усі вершини графа, називається *остовним підграфом* (*суграфом*, *фактором*) графа $G=(V, E)$ [2].

Таким чином, у остовного підграфа множина вершин збігається з множиною вершин графа G ($V'=V$), а множина ребер остовного підграфа є підмножиною множини ребер початкового графа ($E'\subset E$).

Означення. Підграф, що разом з деякою підмножиною вершин графа, містить й усі інцидентні до них ребра, називається *вершинно-породженим*.

Означення. Підграф, що разом з деякою підмножиною ребер графа містить й усі інцидентні до них вершини (і тільки їх), називається *реберно-породженим* [8].

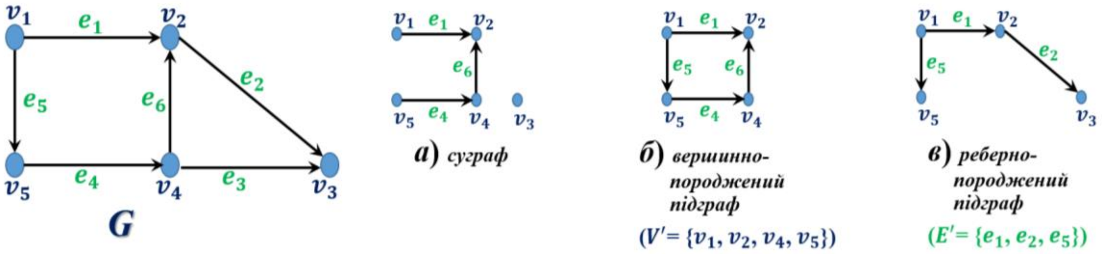


Рис. 2.26 – Види підграфів

Наприклад, на рис. 2.26 подані всі ці підграфи для графа, зображеного на рис. 2.16*а*.

Означення. Початковий граф по відношенню до його підграфа називають *надграфом*, а по відношенню до суграфа – *сверхграфом*.

Означення. Сукупність усіх ребер графа, які не належать його підграфу (разом з інцидентними до них вершинами), утворює *доповнення підграфа*.

Означення. Говорять, що підграфи $\boldsymbol{G'=(V', E')}$ і $\boldsymbol{G''=(V'', E'')}$ *розділені ребрами*, якщо вони не мають спільних ребер $\boldsymbol{(E' \cap E''=\varnothing)}$ і *розділені вершинами*, якщо вони не мають спільних вершин $\boldsymbol{(V' \cap V''=\varnothing)}$ [1].

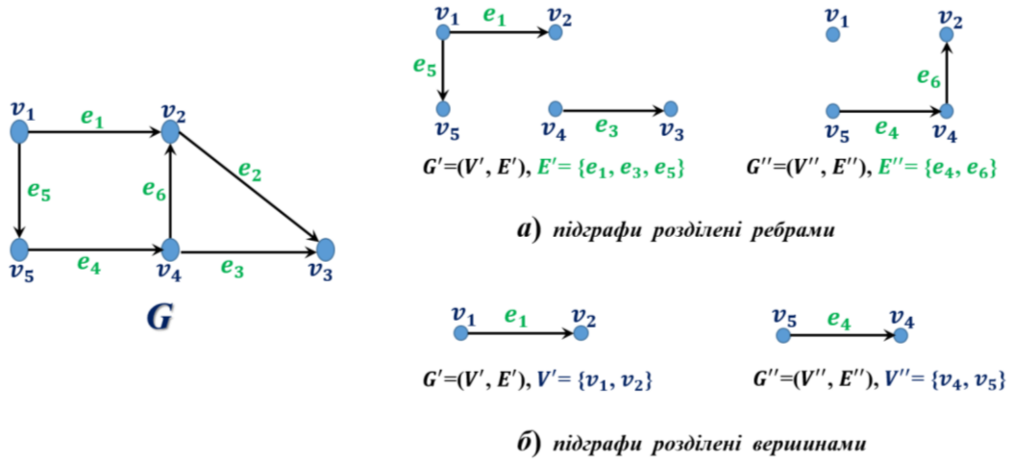


Рис. 2.27 – *а*) реберно-розділені підграфи; *б*) вершинно-розділені підграфи

2.4. МАРШРУТИ

Часто задачі на графах потребують виділення різних маршрутів, яким притаманні певні властивості та характеристики.

Означення. *Маршрут* довжиною $\boldsymbol{m}$ – це послідовність $\boldsymbol{m}$ ребер графа (не обов'язково різних) таких, що граничні вершині двох сусідніх ребер збігаються [1].

Маршрут проходить і через усі вершини, які інцидентні ребрам, що містяться в цьому маршруті. Маршрут із вершини $\boldsymbol{v_i}$ до вершини $\boldsymbol{v_j}$ позначається як $\boldsymbol{M(v_i, v_j)}$.

Означення. *Замкнений маршрут* приводить до тієї ж вершини, із якої він почався.

Означення. Кількість ребер маршруту називається *довжиною маршрута*.

Означення. Маршрут, усі ребра якого є різними, називається *ланцюгом*, а маршрут, для якого є різними усі вершини, окрім, можливо, першої та останньої, – *простим ланцюгом*.

Означення. Замкнений ланцюг називається *циклом*, а простий замкнений ланцюг – *простим циклом*.

Означення. Цикл, що містить усі ребра графа, називається *ейлеревім циклом*, а граф, який має такий цикл – називається *ейлеревим графом*.

Означення. Простий цикл, що проходить скрізь усі вершини графа, називається *гамільтоновим*.

Якщо критерій існування ейлеревого циклу дуже простий – необхідно, щоб ступені усіх вершин були парними, - то для гамільтонових циклів ніякого загального правила не знайдено.

Орієнтовані маршрути на орієнтованому графі визначаються аналогічно з тією різницею, що початкова вершина кожної наступної дуги маршруту має збігатися з кінцевою вершиною попередньої дуги. Іншими словами, рух за маршрутом припустимий лише у напрямках, вказаних стрілками.

Означення. Орієнтований маршрут, який не містить дуг, що повторюються, називається *шляхом*, а маршрут, який не містить вершин, що повторюються, – *простим шляхом*.

Означення. Замкнений шлях називається *контуром*, а простий замкнений шлях – *простим контуром*.

Наприклад, для графа на рис. 7 і рис. 10 можна записати різні *шляхи* із вершини $\boldsymbol{v_1}$ до вершини $\boldsymbol{v_7}$:

1. ***W*1**=$(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_7}) = (\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_7}, \boldsymbol{e_{12}})$, довжина шляху $\boldsymbol{m = 3}$, ***простий шлях***;
2. ***W*2**=$(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_7}) = (\boldsymbol{e_4}, \boldsymbol{e_9}, \boldsymbol{e_{12}})$ довжина шляху $\boldsymbol{m = 3}$, ***простий шлях***;
3. ***W*3**=$(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_7}) = (\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_6}, \boldsymbol{e_9}, \boldsymbol{e_{12}})$, довжина шляху $\boldsymbol{m = 4}$, ***простий шлях***;
4. ***W*4**=$(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_7}) = (\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_7}, \boldsymbol{e_8}, \boldsymbol{e_6}, \boldsymbol{e_9}, \boldsymbol{e_{12}})$, довжина шляху $\boldsymbol{m = 6}$.

Цей граф також містить *цикли* (*контури*):

1. ***C*1**=$(\boldsymbol{v_5}, \boldsymbol{v_5}) = (\boldsymbol{e_{11}})$, довжина контуру $\boldsymbol{m = 1}$, ***простий контур***;
2. ***C*2**=$(\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_2}) = (\boldsymbol{e_7}, \boldsymbol{e_8})$, довжина контуру $\boldsymbol{m = 2}$, ***простий контур***;
3. ***C*3**=$(\boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_3}) = (\boldsymbol{e_{10}}, \boldsymbol{e_9})$, довжина контуру $\boldsymbol{m = 2}$, ***простий контур***;
4. ***C*4**=$(\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_2}) = (\boldsymbol{e_6}, \boldsymbol{e_9}, \boldsymbol{e_8})$, довжина контуру $\boldsymbol{m = 3}$, ***простий контур***.

Означення. Граф (орієнтований граф) називається *ациклічним* (*безконтурним*) або *лісом*, якщо він не містить жодного циклу.

Безпосередньо із означення маршруту та циклу випливають наступні теореми [4].

Теорема 2.3. *Формулювання*. Будь-який маршрут, що з'єднує які-небудь дві вершини графа, містить простий ланцюг, що з'єднує ці дві вершини.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{M(v_1, v_k)=(\ v_1\ e_1\ \dots\ e_{k-1}\ v_k),\ v_1{\neq}v_k}$ – маршрут, що з'єднує дві різні вершини $\boldsymbol{v_1}$ і $\boldsymbol{v_k}$. Якщо всі вершини, що містяться в $\boldsymbol{M(v_1, v_k)}$, різні, то він вже є простим ланцюгом. В протилежному випадку існує вершина $\boldsymbol{v_i}$, що міститься в маршруті $\boldsymbol{M(v_1, v_k)}$ більше за один раз: $\boldsymbol{(v_1\ e_1\ \dots e_{i-1}\ v_i\ \underline{e_i\ \dots\ v_i}\ e_s\ \dots\ e_{k-1}\ v_k)}$. Видалимо ділянку $\boldsymbol{(e_i\ \dots\ v_i)}$ маршруту. Якщо та частина маршруту, що залишилася – прости ланцюг, то теорему доведено. В протилежному випадку описану процедуру слід повторювати доти, поки не буде отриманий простий ланцюг [8]. **Теорему доведено**.

Теорема 2.4. *Формулювання*. Будь-який цикл в графі містить простий цикл.

Доведення. Нехай ребро $\boldsymbol{e=(v_i, v_{i+1})}$ міститься в циклі $\boldsymbol{(v_1\ e_1\ \dots v_i\ e\ v_{i+1}\ \dots\ v_1)}$. Видаливши ребро $\boldsymbol{e}$ із цього циклу, отримаємо маршрут $\boldsymbol{M(v_{i+1}, v_i)=(\ v_{i+1}\ e_{i+1}\ \dots\ v_1\ e_1\ \dots\ v_i)}$

з різними кінцями. Згідно з теоремою 2.3, із маршруту $M(v_{i+1}, v_i)$ можна виділити простий ланцюг з тими ж самими кінцями. Повернення до виділеного простого ланцюга ребра e замкне цей ланцюг в цикл, який буде простим [4, 8]. **Теорему доведено**.

Теорема 2.5. *Формулювання*. Об'єднання двох простих різних ланцюгів з однаковими кінцями містить простий цикл.

Доведення. Нехай $W_1(v_i, v_j)$ і $W_2(v_i, v_j)$ – два різних ланцюги в графі G, а w – вершина, після якої ці ланцюги вперше розходяться. Така вершина обов'язково існує, тому що ці ланцюги різні. В крайньому випадку, це вершина v_i. Нехай ребро $(w, u_1)\in W_1$, а ребро $(u_2, w)\in W_2$, $u_1\neq u_2$. $W_1(u_1, v_j) \cup W_2(v_j, u_2)$ – маршрут з різними кінцями і нехай $W(u_1, u_2)$ – простий ланцюг, що міститься в цьому маршруті. Тоді $(w\,(w, u_1)\,W(u_1, u_2)\,(u_2, w)\,w)$ – простий цикл [8]. **Теорему доведено**.

Поняття ланцюга і циклу можуть бути застосовані і до орієнтованих графів. При цьому напрямки дуг не враховуються, тобто по суті замість орієнтованого графа розглядають неорієнтований співвіднесений до нього граф.

Теорема 2.6. *Формулювання*. Якщо $A(G)$ – матриця суміжності графа G, що має порядок n, то елемент $a_{ij}^{(k)}$ матриці A^k дорівнює кількості маршрутів довжини k, що з'єднують вершини v_i і v_j в графі G [4].

Доведення. Доказ проводиться індукцією за числом k. Для $k=1$ теорема очевидна, тому що маршрут довжини 1 є ребром графа G. Нехай теорема виконується для всіх $k<m$. Покажемо, що вона виконується і для $k=m$. Нехай $a_{iq}^{(m-1)}$ – елемент матриці A^{m-1}, a_{qj} – елемент матриці A. Тоді, згідно з припущенням індукції, $a_{iq}^{(m-1)}\cdot a_{qj}$ дорівнює кількості маршрутів довжини m, що з'єднують вершини v_i і v_j та проходять скрізь вершину v_q. Це означає, що сума $\sum_{q=1}^{n} a_{iq}^{(m-1)}\cdot a_{qj}$ дорівнює кількості маршрутів довжини m, що з'єднують вершини v_i і v_j в графі G. **Теорему доведено**.

Наслідок. *Формулювання*. В графі порядку n маршрут, що з'єднує вершини v_i і v_j, існує тоді і тільки тоді, коли елемент матриці $C = \sum_{k=1}^{n} A^k$, що відповідає цим вершинам, не дорівнює нулю.

Доведення. Якщо відповідний елемент $c=0$, то, згідно з теоремою 2.3, теоремою 2.4 і теоремою 2.6, існує маршрут $M(v_i, v_j)=(v_i, u_1, u_2, \dots v_j)$ довжини $k<n$, що з'єднує ці вершини. За теоремою 2.6 в матриці C відповідний елемент $c\neq 0$, що й було необхідно довести [4]. **Наслідок доведено**.

Наприклад, для графа G, зображеного на рис. 6, квадрат його матриці суміжності має вигляд:

$$A^2(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Елемент $\boldsymbol{a_{54}^{(2)} = 3}$. Це означає, що із вершини $\boldsymbol{v_5}$ до вершини $\boldsymbol{v_4}$ існує три маршрути довжини ***m*=2**. Дійсно, це маршрути

$$M_1(v_5, v_4) = (v_5, v_5, v_4) = (e_{11}, e_5),$$

$$M_2(v_5, v_4) = (v_5, v_1, v_4) = (e_1, e_4),$$

$$M_1(v_5, v_4) = (v_5, v_1, v_4) = (e_2, e_4).$$

Інших маршрутів вказаної довжини між цими вершинами немає.

2.5. ЗВ'ЯЗНІСТЬ

2.5.1. Поняття зв'язності

Зв'язність орієнтованих графів визначається в той же спосіб, що і для неорієнтованих (без урахування напрямку дуг). Тобто для визначення зв'язності орієнтованого графа розглядається співвіднесений до нього граф.

Означення. Дві вершини $\boldsymbol{v_i}$ і $\boldsymbol{v_j}$ графа $\boldsymbol{G}$ називаються *зв'язанимии*, якщо існує маршрут $\boldsymbol{M(v_i, v_j)}$, що з'єднує ці вершини [1].

Означення. Граф, у якого будь-яка пара вершин є зв'язаною, називається *зв'язним графом*.

Очевидно, в зв'язному графі між будь-якими двома вершинами існує простий ланцюг, тому що із маршруту, що їх зв'язує, згідно з теоремою 2.3, завжди можна видалити циклічну ділянку, що проходить через деяку вершину більше за один раз (рис. 2.28*а*, де маршрут між вершинами $\boldsymbol{v_i}$ і $\boldsymbol{v_j}$ зображений товстими лініями).

Якщо граф не зв'язний, то множину його вершин можна в єдиний спосіб розділити на підмножини, що не перетинаються, і кожна з яких містить всі зв'язані між собою вершини і разом з інцидентними до них ребрами утворює зв'язний підграф (рис. 2.28*б*).

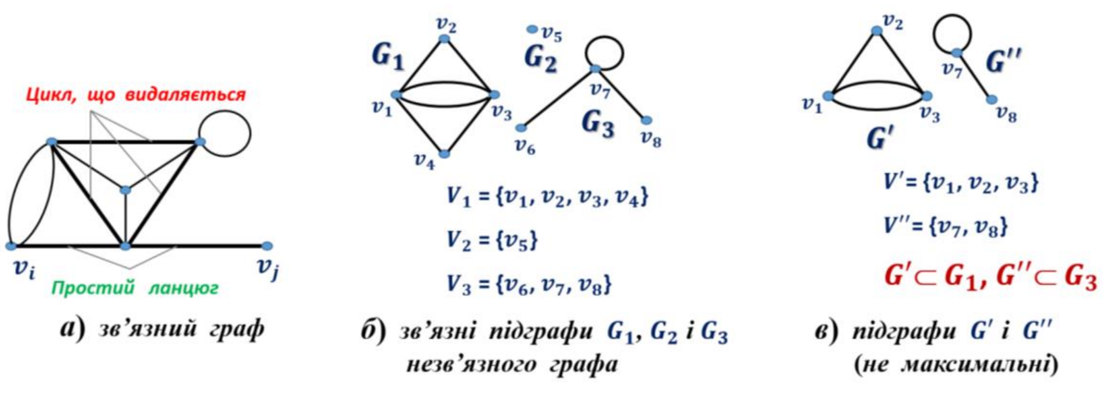


Рис. 2.28 – Зв'язність графів

Означення. Зв'язний підграф $\boldsymbol{G_i}$ графа $\boldsymbol{G}$ називається *максимальним*, якщо $\boldsymbol{G_i}$ не міститься в жодному зв'язному підграфі графа $\boldsymbol{G}$.

Означення. Максимальний зв'язний підграф називається *компонентою зв'язності*.

Наприклад, для графа на рис. 2.28*б* існує три максимальних підграфи: $\boldsymbol{G_1}$, $\boldsymbol{G_2}$ і $\boldsymbol{G_3}$. Підграф, породжений, наприклад, множиною вершин $\{v_1, v_2, v_3\}$, не буде максимальним, тому що він буде міститися в підграфі $\boldsymbol{G_1}$. Підграф, породжений, наприклад, множиною вершин $\{v_7, v_8\}$, також не буде максимальним, тому що він входить до складу підграфу $\boldsymbol{G_3}$ (рис. 2.28*в*).

Теорема 2.7. *Формулювання*. Граф є зв'язним тоді й лише тоді, коли його неможна подати у вигляді диз'юнктивного об'єднання двох графів [4].

Доведення. Нехай граф є зв'язним, тобто будь-які дві його вершини v_i і v_j зв'язані маршрутом. Припустимо, що граф G є диз'юнктивним об'єднанням двох підграфів і вершини v_i і v_j належать різним підграфам. Тоді будь-який простий ланцюг, що з'єднує вершини v_i і v_j, повинен мати ребро, що інцидентне деяким двом вершинам із різних підграфів. Але такого ребра не існує згідно з нашим припущенням.

Припустимо тепер, що граф $\boldsymbol{G}$ неможна подати у вигляді об'єднання двох підграфів, і не існує жодного простого ланцюга, що з'єднував би задану пару вершин v_i і v_j. Тоді вершини v_i і v_j належать різним компонентам зв'язності. А це означає, що граф $\boldsymbol{G}$ можна подати у вигляді об'єднання двох підграфів, - компонента зв'язності, до якої належить вершина v_i, і об'єднання решти компонент.

Отримані протиріччя і доводять теорему. **Теорему доведено**.

Таким чином, незв'язний граф являє собою диз'юнктивне об'єднання скінченної кількості окремих зв'язних підграфів, тобто компонент. Наприклад, граф, зображений на рис. 2.28*б*, є незв'язним. Його можна подати у вигляді диз'юнктивного об'єднання трьох його компонент зв'язності: $\boldsymbol{G_1}$, $\boldsymbol{G_2}$ і $\boldsymbol{G_3}$ (ізольована вершина вважається компонентою).

Нехай $\boldsymbol{G=(V, E)}$ – граф з $\boldsymbol{p}$ вершинами і $\boldsymbol{k}$ компонентами зв'язності. Коли такий граф є зв'язним, кількість ребер в ньому є мінімальною, якщо він ациклічний, і максимальною, якщо він повний [4]. Звідси випливає наступна оцінка для кількості ребер зв'язного графа:

$$\boldsymbol{p-1 \leqslant |E| \leqslant \frac{p(p-1)}{2}}.$$

Однак, існує сильніший варіант.

Теорема 2.8. *Формулювання*. Нехай $\boldsymbol{G=(V, E)}$ – граф з $\boldsymbol{p}$ вершинами і $\boldsymbol{k}$ компонентами зв'язності. Тоді кількість $\boldsymbol{q}$ його ребер задовольняє нерівності:

$$\boldsymbol{p-k \leqslant q \leqslant \frac{(p-k)(p-k+1)}{2}}.$$

Доведення. Нерівність $\boldsymbol{p-k \leqslant q}$ легко довести методом математичної індукції. Дійсно, якщо $\boldsymbol{G}$ повністю незв'язний граф, то нерівність виконується: в цьому випадку $\boldsymbol{k=p}$, $\boldsymbol{q=0}$ і $\boldsymbol{0 \geqslant p-k=0}$. Нехай $\boldsymbol{G}$ містить мінімальну кількість ребер, наприклад, $\boldsymbol{q'}$. Тоді видалення одного ребра призводить до збільшення кількості компонент зв'язності на одиницю. Тобто отриманий граф буде мати $\boldsymbol{p}$ вершин, $\boldsymbol{(k+1)}$ компоненту зв'язності і $\boldsymbol{(q'-1)}$ ребро. За індуктивним припущенням маємо $\boldsymbol{q'-1 \geqslant p-(k+1)}$ або $\boldsymbol{q' \geqslant p-k}$, що й необхідно було довести.

При доведенні верхньої оцінки можна вважати, що кожна компонента зв'язності графа є повним графом. Припустимо, що $\boldsymbol{G_i}$ і $\boldsymbol{G_j}$ – компоненти зв'язності з $\boldsymbol{p_i}$ і $\boldsymbol{p_j}$ вершинами, де

$p_i \geqslant p_j > 1$. Якщо замінити G_i і G_j на повні графи з p_i+1 і $p_j - 1$ вершинами, то загальна кількість вершин не зміниться, а кількість ребер збільшиться на деяку додаткову величину:

$$\frac{(p_i+1)p_i - p_i(p_i-1) - (p_j-1)p_j + (p_j-2)(p_j-1)}{2} =$$

$$= \frac{p_i^2 + p_i - p_i^2 + p_i - p_j^2 + p_j + p_j^2 - 3p_j + 2}{2} =$$

$$= \frac{2p_i - 2p_j + 2}{2} = p_1 - p_j + 1 \ .$$

Таким чином, для того, щоб кількість ребер в графі була максимальною при заданих p і k, граф G повинен складатися із $k-1$ ізольованої вершини і повного графа з $p-k+1$ вершиною. А звідси відразу випливає необхідна нерівність. **Теорему доведено**.

Наслідок. *Формулювання*. Будь-який граф $G=(V, E)$, $|V|=p$, $|E|=q$, для якого

$$q \geqslant \frac{(p-1)(p-2)}{2},$$

є зв'язним.

Доведення. Дійсно, в цьому випадку кількість компонент зв'язності такого графа повинна бути суворо менша двох. Отже, $k=1$, тобто граф є зв'язним [4]. **Наслідок доведено**.

Наприклад, у графа на рис. 28*а* $p=6$, $q=11$. Для нього

$$\frac{(6-1)(6-2)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10 < 11 = q.$$

Є очевидним, що цей граф є зв'язним.

Часто відношення зв'язності ускладнюється додатковими умовами.

Означення. Граф називається *циклічно зв'язним*, якщо будь-які дві його різні вершини містяться в циклі.

Наприклад, граф на рис. 2.21*а* циклічно зв'язний, а на рис. 2.28*а* – ні, тому що вершина v_j не міститься в жодному циклі з іншими вершинами.

Означення. Граф називається *s-зв'язним*, якщо будь-яка пара різних вершин зв'язана, принаймні, s ланцюгами, що не мають спільних вершин (окрім початкової та кінцевої).

Так, граф на рис. 2.28*а* є однозв'язним, а граф G_1 на рис. 2.28*б* – чотирьохзв'язним.

Означення. Зв'язний регулярний граф з вершинами другого ступеня називається *циклічним графом*. Циклічний граф з p вершинами позначається як C_p (рис. 2.29*а*).

Специфічним для орієнтованого або змішаного графа є поняття сильної зв'язності.

Означення. Орієнтований граф називається *сильно зв'язним*, якщо для будь-якої пари його вершин v_i і v_j існує шлях із v_i до v_j та із v_j до v_i.

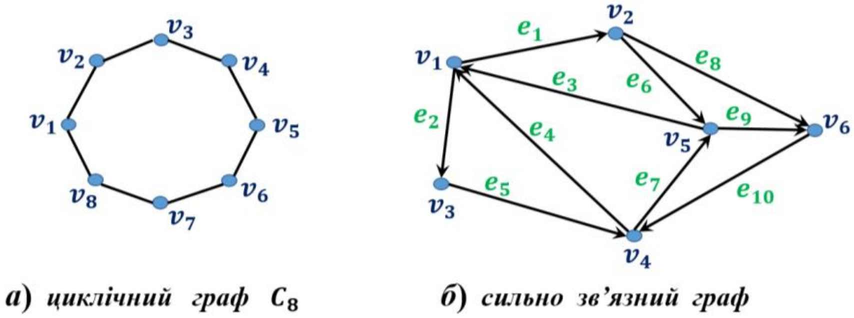


Рис. 2.29 – Циклічний і сильно зв'язний графи

Наприклад, граф на рис. 2.29*б* сильно зв'язний. Граф, що являє собою, наприклад, план міста з одностороннім рухом по деяких вулицях, повинен бути сильно зв'язним, тому що в протилежному випадку знайшлися би вершини (площі та перехрестя), між якими неможливо було б проїхати без порушення правил дорожнього руху [1].

2.5.2. Сепарабельні (подільні) графи

Зв'язний граф може бути розділений на незв'язні підграфи видаленням з нього деяких вершин та ребер (при видаленні вершин вилучаються і всі інцидентні їм ребра, а при видаленні ребер вершини зберігаються).

Означення. *Числом вершинної зв'язності* (*числом зв'язності*) $\boldsymbol{\varkappa(G)}$ графа $\boldsymbol{G}$ називається найменша кількість вершин, видалення яких призводить до незв'язного або одновершинного графу [5].

Наприклад, $\boldsymbol{\varkappa(K_1)=0}$, $\boldsymbol{\varkappa(K_p)=p-1}$, $\boldsymbol{\varkappa(C_p)=2}$. Дійсно, видалення із повного одновершинного графа $\boldsymbol{K_1}$ його єдиної вершини призводить до видалення всього графа. Тому з нього неможливо видалити вершину в такий спосіб, щоб збільшити кількість компонент зв'язності. Видалення із повного графа $\boldsymbol{K_p}$ будь-якої кількості вершин, меншої за $\boldsymbol{p-1}$, не призведе до незв'язного графа, тобто до збільшення кількості компонент зв'язності. Лише видаливши всі вершини, крім однієї, можна отримати одновершинний граф. Із циклічного графа $\boldsymbol{C_p}$ достатньо видалити дві несуміжні між собою вершини, щоб перетворити його в незв'язний. При цьому утворюються дві компоненти зв'язності, кожна з яких є простим ланцюгом. Для графа на рис. 2.29*б* число вершинної зв'язності $\boldsymbol{\varkappa(G)=2}$. Цей граф припиняє бути зв'язним при видаленні множини вершин $\boldsymbol{V_1=\{v_1, v_4,\}}$ (рис. 2.30*а*). Видалення з цього графа меншої кількості вершин не порушить зв'язності графа, тобто не призведе до збільшення кількості компонент зв'язності і не перетворить цей граф в одновершинний.

Нехай $\boldsymbol{p>1}$ – кількість вершин графа $\boldsymbol{G}$.

Означення. *Числом реберної зв'язності* $\boldsymbol{\lambda(G)}$ графа $\boldsymbol{G}$ називається найменша кількість ребер, видалення яких перетворює граф в незв'язний [5].

Прийнято вважати, що для одновершинного графу $\boldsymbol{\lambda(G)=1}$.

Наприклад, для графа на рис. 2.29*б* $\boldsymbol{\lambda(G)=2}$. Цей граф припиняє бути зв'язним при видаленні множини ребер $\boldsymbol{E_1=\{e_2, e_5,\}}$ (рис. 2.30*б*). Видалення з цього графа меншої кількості ребер не порушує зв'язності графу, тобто не призводить до збільшення кількості компонент зв'язності і не перетворює цей граф в одновершинний.

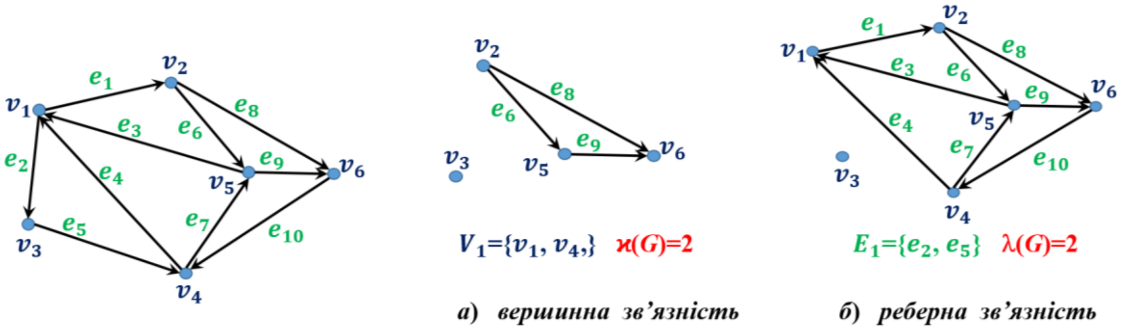


Рис. 2.30 – Число вершинної та реберної зв'язності графа

Означення. Множина ребер **довільного** графа ***G***, видалення якої із графа призводить до збільшення кількості компонент зв'язності, називається *множиною, що розділяє граф*.

Означення. Якщо існує така вершина, видалення якої перетворює зв'язний граф (або компоненту незв'язного графа) в незв'язний, то вона називається *точкою зчленування* (рис. 2.31*а*).

Означення. Якщо існує таке ребро, видалення якого перетворює зв'язний граф (або компоненту незв'язного графа) в незв'язний, то воно називається *мостом* (рис. 2.31*б*).

Очевидно, що за наявності мосту в графі є, принаймні, дві точки зчленування [1].

Означення. Граф називається *неподільним*, якщо він зв'язний і не містить точок зчленування.

Наприклад, граф на рис. 2.29*б* є неподільним.

Означення. Граф, що містить хоча б одну точку зчленування, є подільним і називається *сепарабельним*.

Означення. Максимальні відносно включення елементи множини зв'язних підграфів графа ***G***, що не мають точок зчленування, називаються його *блоками* [5].

Означення. Зв'язний граф без точок зчленування також називається *блоком*.

Означення. Множина вершин блоку називається *блоковою множиною*.

Сепарабельний граф розділюється на блоки, кожний з яких є максимальним неподільним підграфом (на рис. 2.31*в* зображені блоки B_1, B_2, B_3 графа з рис. 2.31*б*).

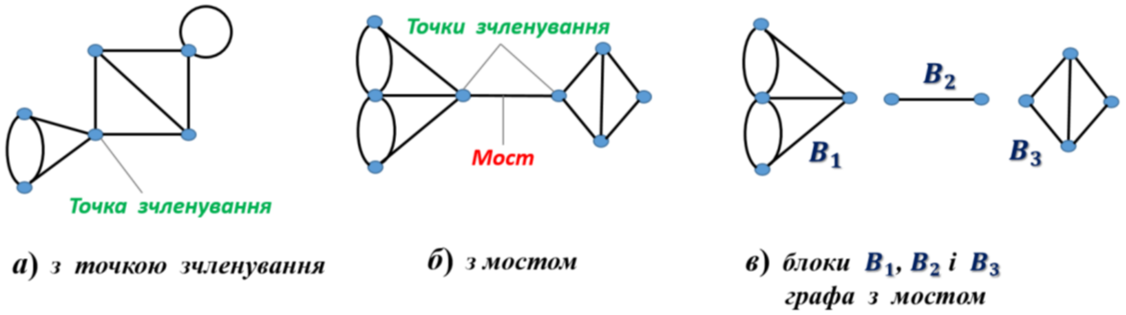


Рис. 2.31 – Сепарабельні (подільні) графи

Блоки графа мають наступні властивості [5].

1. Будь-які два блоки графа мають не більше, ніж одну спільну вершину. Зокрема, будь-яке ребро графа міститься лише в одному його блоці.
2. Якщо блок графа містить вершини v_i і v_j, то він містить будь-який простий ланцюг цього графа, що з'єднує ці вершини.

3. Якщо деяка вершина графа $\boldsymbol{G}$ входить до складу більше, ніж одного його блоку, то ця вершина є точкою зчленування для графа $\boldsymbol{G}$.
4. Результатом об'єднання блокових множин графа $\boldsymbol{G}$ є множина всіх його вершин. Кожна пара блокових множин або не перетинається, або має лише одну спільну вершину, що є точкою зчленування графа $\boldsymbol{G}$.

2.5.3. Розрізи

Означення. Підмножина ребер $\boldsymbol{E'} \subset \boldsymbol{E}$ **зв'язного** графа $\boldsymbol{G}$ називається *розрізом* (*множиною ребер, що розділює граф*), якщо при його видаленні граф розпадається на дві або більше компонент зв'язності [1, 4].

Є очевидним, що розріз графа, який складається лише з одного ребра, є мостом.

Означення. Розріз називається *простим*, якщо ніяка власна підмножина його ребер не є розрізом даного графа [1].

Після видалення з графа ребер простого розрізу утворюється суграф, що складається рівно з двох компонент (компонентою такого суграфа може бути й ізольована вершина). Графічно розріз зазвичай виділяють замкненою лінією, що перетинає ребра, які належать даному розрізу. При цьому множина вершин $\boldsymbol{V}$ графа розділяється на дві непорожніх підмножини $\boldsymbol{V'}$ і $\boldsymbol{V''}$ ($\boldsymbol{V'} \cup \boldsymbol{V''} = \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V'} \cap \boldsymbol{V''} = \varnothing$), зв'язок між якими здійснюється виключно ребрами розрізу.

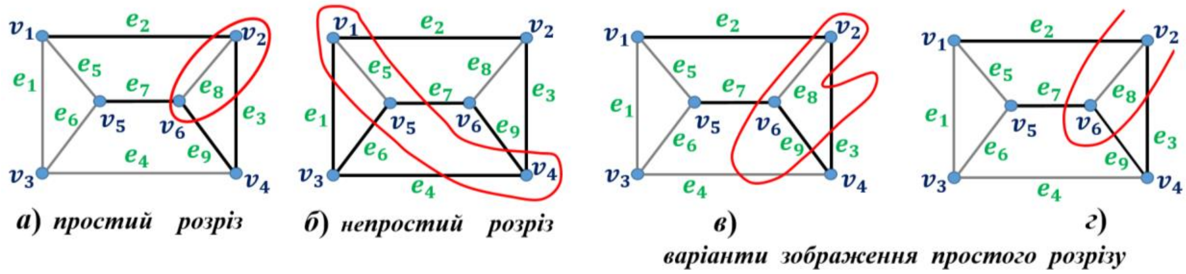
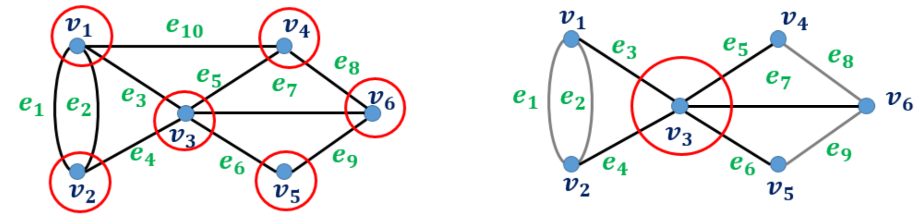


Рис. 2.32 – Розрізи графа

Так, простий розріз $\boldsymbol{E'}=\{\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_7}, \boldsymbol{e_9}\}$, що виділений на рис. 2.32*а* товстими лініями, розділяє множину вершин на підмножини $\boldsymbol{V'}=\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_5}\}$ і $\boldsymbol{V''}=\{\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_6}\}$. Розріз $\boldsymbol{E'}=\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4}, \boldsymbol{e_6}, \boldsymbol{e_7}, \boldsymbol{e_9}\}$, що виділений товстими лініями на рис. 2.32*б*, не є простим, тому що можна знайти його підмножину, наприклад, $\boldsymbol{E''}=\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_4}, \boldsymbol{e_6}\}$, яка також є розрізом. При виділенні розрізу замкненою лінією необхідно мати на увазі, що даному розрізу належать лише ті ребра, що перетинаються цією лінією один раз (або непарну кількість разів). Ребра, що мають з лінією, якою позначено розріз, парну кількість перетинів, розрізу не належать. Для спрощення цю лінію часто обривають, вважаючи умовно, що вона замикається у зовнішній області графа. На рис. 2.32*в* і рис. 2.32*г* зображені варіанти простого розрізу (рис. 2.32*а*), що ілюструють ці положення.

Означення. Сукупність ребер, що інцидентні до деякої вершини графа, є розрізом з центром в цій вершині і називається *центральним*.

В неподільному графі кожний центральний розріз є простим. Його видалення призводить до суграфа з ізольованою вершиною (рис. 2.33*а*). В сепарабельному графі сукупність ребер, що інцидентні до точки зчленування, утворює розріз, який не є простим. При його видаленні граф розділяється на три або більше компонент, одна з яких містить лише точку зчленування в якості ізольованої вершини (рис. 2.33*б*).



а)　　　　　　　　***б***)

Рис. 2.33 – Центральні розрізи графа

В графі з $\boldsymbol{p}$ вершинами є $\boldsymbol{p}$ центральних розрізів, причому кожному з них відповідає рядок матриці інцидентності $\boldsymbol{I}$. Одиничні елементи рядка вказують на сукупність ребер, що утворюють відповідний розріз. Аналогічне подання для будь-якого розрізу можна отримати, сумуючи за модулем 2 ті рядки матриці інцидентності, що відповідають вершинам однієї з підмножин $\boldsymbol{V'}$ або $\boldsymbol{V''}$ (у випадку орієнтованого графа відбувається звичайне арифметичне додавання), на які даний розріз розділює множину вершин графа. При цьому не має значення, якою з цих двох підмножин керуватися, оскільки в силу залежності рядків матриці інцидентності (їх сума рядком, що складається з самих нулів) в обох випадках отримаємо той самий результат. Однак зручніше обирати підмножину, що містить меншу кількість вершин. Так, для графа, поданого на рис. 2.32, матриця інцидентності має вигляд:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
v_1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
v_2	0	1	1	0	0	0	0	1	0
v_3	1	0	0	1	0	1	0	0	0
v_4	0	0	1	1	0	0	0	0	1
v_5	0	0	0	0	1	1	1	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	1	1	1

Для цього графа простий розріз, зображений на рис. 2.32*а*, подається сумою за модулем 2 другого та шостого рядків:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
v_2	0	1	1	0	0	0	0	1	0
v_6	0	0	0	0	0	0	1	1	1
$v_2 \oplus v_6$	0	1	1	0	0	0	1	0	1

.

Підмножина $\boldsymbol{V''}$=$\{\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_6}\}$ обирається для побудови цієї матриці з міркувань зручності, бо вона містить лише дві вершини. Але той самий результат отримуємо й у випадку обрання більш потужної підмножини $\boldsymbol{V'}$=$\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_5}\}$:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
v_1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
v_3	1	0	0	1	0	1	0	0	0
v_4	0	0	1	1	0	0	0	0	1
v_5	0	0	0	0	1	1	1	0	0
$v_1 \oplus v_3 \oplus v_4 \oplus v_5$	0	1	1	0	0	0	1	0	1

.

Таким чином, будь-який розріз можна розглядати як об'єднання деякої сукупності центральних розрізів [1].

Нехай $\boldsymbol{\delta_{min}(G)}$ – мінімальний ступінь вершин графа. Тоді для вершинної та реберної зв'язності графа має місце наступна теорема [5].

Теорема 2.9. *Формулювання*. Для будь-якого графа $\boldsymbol{G}$ виконується нерівність

$$\boldsymbol{\varkappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta_{min}(G)}.$$

Доведення. Нехай в графі $\boldsymbol{G}$ мінімальний ступінь має вершина $\boldsymbol{v_{min}}$. Видалення всіх ребер, що інцидентні до цієї вершини, призводить до збільшення кількості компонент зв'язності, тому що ця вершина стає ізольованою. Отже, в цьому випадку $\boldsymbol{\lambda(G) \leqslant \delta_{min}(G)}$. З'ясуємо тепер зв'язок між числами $\boldsymbol{\varkappa(G)}$ і $\boldsymbol{\lambda(G)}$. Нехай $\boldsymbol{G}$ – зв'язний граф без мостів. Оберемо в цьому графі множину $\boldsymbol{E'}$, що складається з $\boldsymbol{\lambda=\lambda(G)}$ ребер, видалення яких перетворює граф $\boldsymbol{G}$ в незв'язний. Нехай $\boldsymbol{E''\subset E'}$, $\boldsymbol{|E''| = \lambda - 1}$. Граф $\boldsymbol{G\setminus\{E''\}}$ є зв'язним і має міст, який позначимо через $\boldsymbol{e_k=(v_i, v_j)}$. Для кожного ребра із множини $\boldsymbol{E''}$ оберемо яку-небудь інцидентну до нього вершину, що відрізняється від $\boldsymbol{v_i}$ і $\boldsymbol{v_j}$. Видалимо тепер обрані вершини із графа. Цим самим будуть видалені, серед інших, і всі ребра, що входять до множини $\boldsymbol{E''}$. Якщо той граф, що залишився, не є зв'язним, то $\boldsymbol{\varkappa=\varkappa(G)<\lambda}$. Якщо ж він таки є зв'язним, то ребро $\boldsymbol{e_k=(v_i, v_j)}$ є мостом. Тому видалення однієї з вершин $\boldsymbol{v_i}$ або $\boldsymbol{v_j}$ призводить до незв'язного або одновершинного графа. Це означає, що $\boldsymbol{\varkappa \leqslant \lambda}$. **Теорему доведено**.

Кожне ребро графа, як і кожна вершина, (за винятком точок зчленування), належить лише одному з його блоків. Більш за те, лише одному блоку належить і кожний простий цикл. Звідси випливає, що сукупність блоків графа є розбиттям множин ребер і простих циклів на підмножини, що не перетинаються. В ряді застосунків теорії графів блоки можна розуміти як компоненти. Це зазвичай припустимо, коли зв'язки блоків через точку зчленування не є суттєвими або коли суттєві властивості графа пов'язані лише з його простими циклами (контурами). В таких випадках можна розглядати незв'язний граф як зв'язний подільний граф, що утворюється шляхом такого об'єднання компонент, щоб кожна з них була блоком (це завжди можна зробити, об'єднавши, наприклад, по одній вершині кожного блоку в точку зчленування). Такі операції використовуються при розгляданні графів електричних ланцюгів [1].

2.5.4. Метричні характеристики зв'язних графів

Нехай $\boldsymbol{G=(V, E)}$ – зв'язний граф, а $\boldsymbol{v_i}$ і $\boldsymbol{v_j}$ – дві його різні вершини.

Означення. *Відстанню між вершинами* $\boldsymbol{v_i}$ *і* $\boldsymbol{v_j}$ називається довжина найкоротшого маршруту, що з'єднує ці вершини. Цю відстань позначають через $\boldsymbol{d(v_i, v_j)}$.

Вважається також, що $\boldsymbol{d(v_i, v_i)=0}$. Очевидно, що для введеної в такий спосіб відстані виконуються наступні *аксіоми* [4]:

1) $\boldsymbol{d(v_i, v_j) > 0}$**;**

2) $\boldsymbol{d(v_i, v_j) = 0}$ ***тоді й тільки тоді, коли*** $\boldsymbol{v_i = v_j}$**;**

3) $\boldsymbol{d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)}$**;**

4) $\boldsymbol{d(v_i, v_j) + d(v_j, v_t) > d(v_i, v_t)}$ **(*нерівність трикутника*).**

Поняття відстані між вершинами дає можливість дати означення поняття ступеня графа. Нехай $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ – зв'язний граф, $\boldsymbol{k}$ – деяке натуральне число. Граф $\boldsymbol{G^k}$ – *k-тий ступінь графа* G, що має ту ж саму множину вершин, що й $\boldsymbol{G}$, а вершини $\boldsymbol{v_i}$ і $\boldsymbol{v_j}$, що не збігаються, суміжні в графі $\boldsymbol{G^k}$ тоді й лише тоді, коли $\boldsymbol{d(v_i, v_j) \leqslant k}$.

Нехай $\boldsymbol{v_i}$ – деяка фіксована вершина графа $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$.

Означення. Величина $\boldsymbol{e(v_i)}=\mathbf{max}\, \boldsymbol{d(v_i, v_j)}$, $\boldsymbol{v_j \in V}$, називається *ексцентриситетом вершини* $\boldsymbol{v_i}$.

Означення. Максимальний серед усіх ексцентриситетів вершин графа $\boldsymbol{G}$ називається *діаметром графа* $\boldsymbol{G}$ і позначається $\boldsymbol{d(G)}$. Таким чином, $\boldsymbol{d(G)}=\mathbf{max}\, \boldsymbol{e(v_i)}, \boldsymbol{v_i \in V}$.

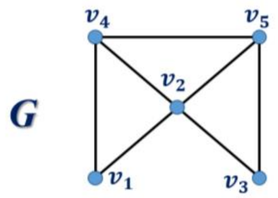
Означення. Вершина $\boldsymbol{v_i}$ графа $\boldsymbol{G}$ називається *периферійною*, якщо $\boldsymbol{e(v_i)=d(G)}$.

Означення. Простий ланцюг довжиною $\boldsymbol{d(G)}$, тобто відстань між початковою та кінцевою вершинами якої дорівнює $\boldsymbol{d(G)}$, називається *діаметральним ланцюгом*.

Означення. Мінімальний серед усіх ексцентриситетів вершин графа $\boldsymbol{G}$ називається *радіусом графа* $\boldsymbol{G}$ та позначається як $\boldsymbol{r(G)}$. Таким чином, $\boldsymbol{r(G)}=\mathbf{min}\, \boldsymbol{e(v_i)}, \boldsymbol{v_i \in V}$ [5].

Означення. Вершина $\boldsymbol{v_i}$ графа $\boldsymbol{G}$ називається *центральноюй*, якщо $\boldsymbol{e(v_i)=r(G)}$.

Означення. Множина всіх центральних вершин графа називається його *центром*.



$$d(v_1, v_2) = d(v_1, v_4) = d(v_2, v_3) = d(v_2, v_4) = d(v_2, v_5) = d(v_3, v_5) = d(v_4, v_5) = 1,$$
$$d(v_1, v_3) = d(v_1, v_5) = d(v_3, v_4) = 2;$$

$$e(v_2) = 1, \quad e(v_1) = e(v_3) = e(v_4) = e(v_5) = 2;$$
$$d(G) = \max\{1, 2\} = 2; \quad r(G) = \min\{1, 2\} = 1;$$

v_1, v_3, v_4, v_5 – *периферійні вершини*;
v_2 – *центральна вершина*;

$(v_1, v_2, v_3), (v_1, v_2, v_5), (v_3, v_2, v_4)$ – *діаметральні ланцюги*.

Рис. 2.34 – Метричні характеристики зв'язного графа

Наприклад, на рис. 34 подано всі метричні характеристики деякого зв'язного графа $\boldsymbol{G}$. У всіх вершин, окрім $\boldsymbol{v_2}$, ексцентриситет дорівнює двом. Для вершини $\boldsymbol{v_2}$ він дорівнює одиниці. Максимальна відстань між вершинами для цього графа (діаметр графа) також дорівнює двом. Отже, всі вершини цього графа, крім вершини $\boldsymbol{v_2}$, є периферійними. Також цей граф містить три ланцюги, довжина яких збігається з діаметром графа. Це ланцюги $\boldsymbol{(v_1, v_2, v_3)}$, $\boldsymbol{(v_1, v_2, v_5)}$ і $\boldsymbol{(v_3, v_2, v_4)}$. Вони є діаметральними. Мінімальна відстань між вершинами цього графа (радіус графа) дорівнює одиниці. Отже, вершина $\boldsymbol{v_2}$ є центральною. Центр графа при цьому складається із єдиної вершини $\boldsymbol{\{v_2\}}$.

Граф може мати одну або декілька центральних вершин. Нарешті, центр графа може збігатися з множиною усіх вершин. Наприклад, центр простого ланцюгу $\boldsymbol{W_p}$ при парній кількості вершин $\boldsymbol{p}$ складається рівно з двох вершин, а при непарній – з однієї. Для циклічного графа $\boldsymbol{C_p}$ усі вершини є центральними.

2.6. ІЗОМОРФІЗМ ГРАФІВ

2.6.1. Поняття ізоморфізму

Означення. Два графи $\boldsymbol{G_1}=(\boldsymbol{V_1},\ \boldsymbol{E_1})$ і $\boldsymbol{G_2}=(\boldsymbol{V_2},\ \boldsymbol{E_2})$ називаються *ізоморфними* $(\boldsymbol{G_1} \cong \boldsymbol{G_2})$, якщо між їх множинами вершин і множинами ребер існує взаємно-однозначні відповідності $\varphi:\boldsymbol{V_1}\rightarrow\boldsymbol{V_2}$ і $\psi:\boldsymbol{E_1}\rightarrow\boldsymbol{E_2}$ такі, що $((\boldsymbol{e^1_{ij}}(\boldsymbol{v^1_i},\ \boldsymbol{v^1_j})\in\boldsymbol{E_1}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{e^2_{\psi(i,j)}}(\boldsymbol{v^2_{\varphi(i)}},\ \boldsymbol{v^2_{\varphi(j)}})\in\boldsymbol{E_2})$.

Але це означення можна сформулювати і по-іншому.

Означення. Два графи $\boldsymbol{G_1}=(\boldsymbol{V_1},\ \boldsymbol{E_1})$ і $\boldsymbol{G_2}=(\boldsymbol{V_2},\ \boldsymbol{E_2})$ називаються *ізоморфними* $(\boldsymbol{G_1} \cong \boldsymbol{G_2})$, якщо між їх множинами вершин існує взаємно-однозначна відповідність, що зберігає інцидентність ребер, тобто якщо існує $\varphi:\boldsymbol{V_1}\rightarrow\boldsymbol{V_2}$ то ребро $\boldsymbol{e^1_{ij}}(\boldsymbol{v^1_i},\ \boldsymbol{v^1_j})\in\boldsymbol{E_1})$ тоді й тільки тоді, коли ребро $\boldsymbol{e^2_{\psi(i,j)}}(\boldsymbol{v^2_{\varphi(i)}},\ \boldsymbol{v^2_{\varphi(j)}})\in\boldsymbol{E_2}$.

Іншими словами, ізоморфізм – це відношення між графами, що зберігає відношення інцидентності з точністю до нумерації вершин.

Наприклад, на рис. 2.35 зображено три графи, що з геометричної точки зору зовсім різні (перетин ребер, якщо його не позначено точкою, не є вершиною). Але по суті вони розрізняються лише зображенням, а відношення інцидентності (при відповідному позначенні вершин і ребер) для них однакові.

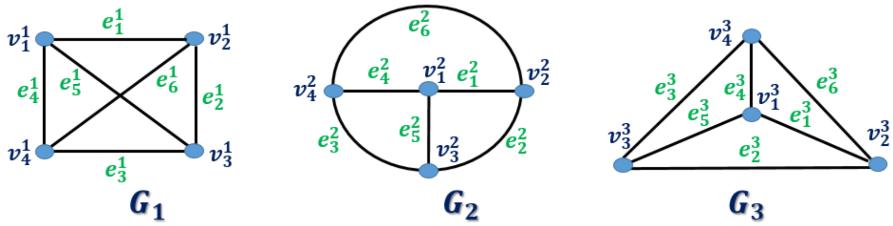


Рис. 2.35. – Ізоморфні графи

Для цих графів можна встановити взаємно-однозначну відповідність (бієкцію) між вершинами, яка зберігає відношення інцидентності. Тобто якщо в одному графі вершини зв’язані ребром, то в ізоморфному графі відповідні їм вершини також зв’язані ребром. Отже, для цих графів бієкція буде мати вигляд:

$\boldsymbol{G_1}$	v_1^1	v_2^1	v_3^1	v_4^1
$\boldsymbol{G_2}$	v_1^2	v_2^2	v_3^2	v_4^2
$\boldsymbol{G_3}$	v_1^3	v_2^3	v_3^3	v_4^3

Очевидно, що матриця інцидентності визначає граф без петель з точністю до ізоморфізму. Зазвичай на її ґрунті можна зобразити різні з геометричної точки зору, але ізоморфні між собою графи, кожний з яких називається *геометричною реалізацією*. Графи, що мають однакові креслення й відрізняються лише нумерацією вершин та ребер, хоч і не є тотожними, є ізоморфними. Якщо суттєві властивості графа не пов’язані зі способом його зображення на площині або нумерацією вершин та ребер, то ізоморфні графи, як правило, не розрізняють між собою.

2.6.2. Візуальне встановлення відсутності ізоморфізму за геометричною реалізацією графів

Якщо буквально наслідувати означення, то потрібно перебрати всі бієкції множини вершин одного з них на множину вершин іншого і для кожної з цих бієкцій перевірити, чи є вона ізоморфізмом. Для $\boldsymbol{p}$ вершин є $\boldsymbol{p!}$ бієкцій, і ця задача стає практично нездійсненною вже для не таких вже й великих $\boldsymbol{p}$ (наприклад, $20! > 2{\cdot}10^{18}$). Однак в багатьох випадках буває досить легко встановити, що два даних графи не є ізоморфними [10]. Для *можливості наявності ізоморфізму в усіх графах, що розглядаються, повинні збігатися наступні характеристики*, які можна визначити візуально:

- кількість компонент зв'язності;
- кількість вершин;
- кількість ребер;
- кількість петель;
- кількість ізольованих вершин;
- кількість висячих вершин;
- кількість кратних ребер;
- кількість циклів однакової довжини.

Розглянемо, наприклад, графи, зображені на рис. 2.36.

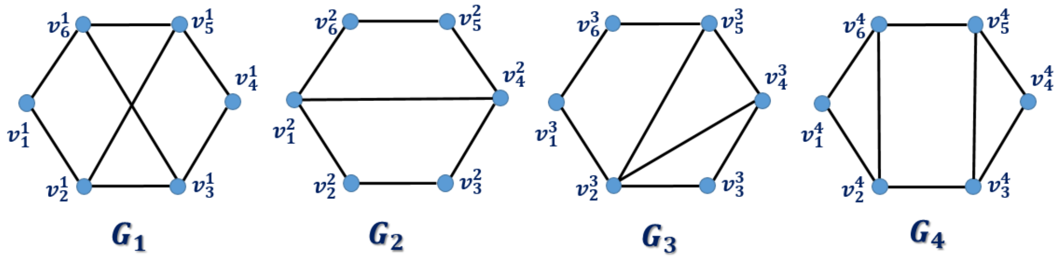


Рис. 2.36. – Неізоморфні графи

У всіх цих графів однакова кількість вершин (6), при цьому у них у всіх відсутні ізольовані й висячі вершини, петлі, а також кратні ребра. Всі ці графи є зв'язними, тобто всі вони мають лише одну компоненту зв'язності. Але загальна кількість ребер графу $\boldsymbol{G_2}$ відрізняється від решти графів: у $\boldsymbol{G_2}$ їх сім, а у решти графів по вісім. Отже, граф $\boldsymbol{G_2}$ не може бути ізоморфним до жодного з решти графів, бо для нього не зберігається відношення інцидентності, яке, можливо, вдасться встановити для решти графів. В графах $\boldsymbol{G_3}$ і $\boldsymbol{G_4}$ присутні по два цикли «3»: $(\boldsymbol{v_2^3}, \boldsymbol{v_3^3}, \boldsymbol{v_4^3}, \boldsymbol{v_2^3})$ і $(\boldsymbol{v_2^3}, \boldsymbol{v_4^3}, \boldsymbol{v_5^3}, \boldsymbol{v_2^3})$ для графу $\boldsymbol{G_3}$ і $(\boldsymbol{v_1^4}, \boldsymbol{v_2^4}, \boldsymbol{v_6^4}, \boldsymbol{v_1^4})$ й $(\boldsymbol{v_3^4}, \boldsymbol{v_4^4}, \boldsymbol{v_5^4}, \boldsymbol{v_3^4})$ для графу $\boldsymbol{G_4}$. В графі $\boldsymbol{G_1}$ цикли довжини «3» відсутні. Отже, граф $\boldsymbol{G_1}$ не може бути ізоморфним до графів $\boldsymbol{G_3}$ і $\boldsymbol{G_4}$. Ці два графи також не є ізоморфними, бо граф $\boldsymbol{G_3}$ містить два цикли довжини «4»: $(\boldsymbol{v_2^3}, \boldsymbol{v_3^3}, \boldsymbol{v_4^3}, \boldsymbol{v_5^3}, \boldsymbol{v_2^3})$ і $(\boldsymbol{v_2^3}, \boldsymbol{v_5^3}, \boldsymbol{v_6^3}, \boldsymbol{v_1^3}, \boldsymbol{v_2^3})$. В графі $\boldsymbol{G_4}$ такий цикл лише один: $(\boldsymbol{v_2^4}, \boldsymbol{v_3^4}, \boldsymbol{v_5^4}, \boldsymbol{v_6^4}, \boldsymbol{v_2^4})$. Ці результати можна звести в наступну таблицю:

ГРАФ	ОЗНАКА								
	Кількість компонент зв'язності	Кількість вершин	Кількість ізольованих вершин	Кількість висячих вершин	Кількість петель	Кількість кратних ребер	Загальна кількість ребер	Кількість циклів довжини 3	Кількість циклів довжини 4
G_1	1	6	-	-	-	-	8	-	
G_2	1	6	-	-	-	-	7		
G_3	1	6	-	-	-	-	8	2	2
G_4	1	6	-	-	-	-	8	2	1

Із усього сказаного випливає, що ніякі з розглянутих на рис. 2.36 чотирьох графів не є ізоморфними.

2.6.3. Встановлення ізоморфізму графів за матрицями суміжності

<u>**Теорема 2.10**</u>. <u>*Формулювання.*</u> Графи є ізоморфними тоді й лише тоді, коли їх матриці суміжності можна отримати одну з іншої одночасними перестановками однойменних рядків та стовпців (тобто одночасно з перестановкою i-того та j-того рядків матриці відбувається й перестановка i-того і j-того стовпців матриці).

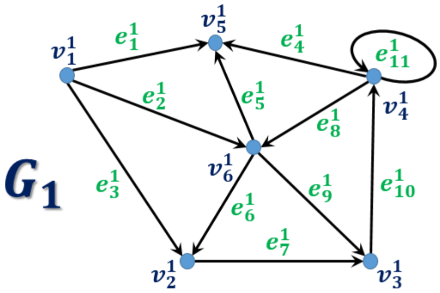
<u>*Доведення*</u>. Перенумеруємо вершини графів $\boldsymbol{G_1}$=$(\boldsymbol{V_1}, \boldsymbol{E_1})$ і $\boldsymbol{G_2}$=$(\boldsymbol{V_2}, \boldsymbol{E_2})$) $(|\boldsymbol{V_1}|=|\boldsymbol{V_2}|=\boldsymbol{p})$ цілими числами від **1** до $\boldsymbol{p}$. Якщо $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{G_1})$=$\boldsymbol{A}''$ $(\boldsymbol{G_2})$, то все доведено. В протилежному випадку графи $\boldsymbol{G_1}$ і $\boldsymbol{G_2}$ відрізняються лише нумерацією вершин. Це означає, що існує така підстановка $\boldsymbol{S}$ на множині вершин $\boldsymbol{V}$, що зберігає суміжність, тобто якщо $\boldsymbol{e^1_{ij}}(\boldsymbol{v^1_i}, \boldsymbol{v^1_j})\in\boldsymbol{E_1}$, то $\boldsymbol{e^2_{s(i,j)}}$ $(\boldsymbol{s(v^1_i)}, \boldsymbol{s(v^1_j)})\in\boldsymbol{E_2}$. Тоді маємо $\boldsymbol{a''_{s(i)s(j)}}$=$\boldsymbol{a'_{ij}}$. **Теорему доведено**.

Перед тим, як встановлювати ізоморфізм за матрицями суміжності, слід перевірити збіг характеристик обох графів, які можна встановити за цими матрицями.

1. Матриці повинні мати однакову розмірність (кількість вершин в обох графах повинна бути однаковою).
2. Сума елементів однієї матриці повинна збігатися з сумою елементів іншої матриці (кількість ребер в обох графах повинна бути однаковою).
3. Кількість ненульових елементів на головній діагоналі однієї матриці повинна збігатися з аналогічним показником для другої матриці (наявність та кількість петель).
4. Кількість нульових стовпців і рядків однієї матриці повинні збігатися з відповідними показниками для другої матриці (кількість джерел та стоків).
5. Кількість однойменних нульових рядків і стовпців в одній матриці повинна збігатися з аналогічною їх кількістю в другій матриці (кількість ізольованих вершин).
6. Кількість та значення елементів, що перевищують одиницю, в одній матриці повинні збігатися з їх кількістю та значенням в другій матриці (кількість кратних ребер).

Якщо хоча б одна з цих умов не задовольняється, то графи не є ізоморфними. Якщо всі умови виконані, то можна проводити подальші дослідження.

<u>**Приклад 2.1**</u>. Нехай задано граф $\boldsymbol{G_1}$.



Необхідно побудувати ізоморфний до нього граф $\boldsymbol{G_2}$, якому буде відповідати матриця суміжності $\boldsymbol{A(G_2)}$, яку отримано із матриці $\boldsymbol{A(G_1)}$ перестановкою 4-х і 6-х рядків та стовпців, а потім 3-х і 4-х рядків та стовпців. Виписати отриманий ізоморфізм (бієкцію).

<u>Розв'язання</u>. Для необхідної побудови слід визначити матрицю суміжності $\boldsymbol{A(G_1)}$, а потім виконати з нею вказані перетворення. Матриця суміжності для графа буде наступною:

		Кінцеві					
		v_1^1	v_2^1	v_3^1	v_4^1	v_5^1	v_6^1
Початкові	v_1^1	0	**1**	0	0	**1**	**1**
	v_2^1	0	0	**1**	0	0	0
	v_3^1	0	0	0	**1**	0	0
	v_4^1	0	0	0	**1**	**1**	**1**
	v_5^1	0	0	0	0	0	0
	v_6^1	0	**1**	**1**	0	**1**	0

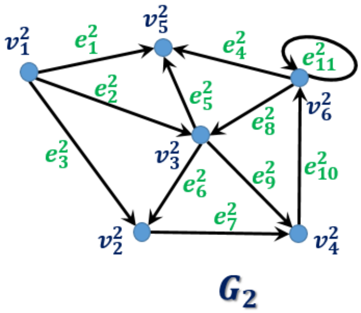
За допомогою вказаних перетворень отримуємо:

$$\boldsymbol{A(G_1)} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&0 \end{pmatrix} \xRightarrow{4\leftrightarrow 6\ \text{рядки}} \begin{pmatrix} 0&1&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1 \end{pmatrix} \xRightarrow{4\leftrightarrow 6\ \text{стовпці}} \begin{pmatrix} 0&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1 \end{pmatrix} \xRightarrow{3\leftrightarrow 4\ \text{рядки}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1 \end{pmatrix} \xRightarrow{3\leftrightarrow 4\ \text{стовпці}} \begin{pmatrix} 0&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A(G_2)}$$

Відновлюючи граф $\boldsymbol{G_2}$ за його матрицею суміжності $\boldsymbol{A(G_2)}$, отримуємо:

		Кінцеві					
		v_1^2	v_2^2	v_3^2	v_4^2	v_5^2	v_6^2
Початкові	v_1^2	0	**1**	**1**	0	**1**	0
	v_2^2	0	0	0	**1**	0	0
	v_3^2	0	**1**	0	**1**	**1**	0
	v_4^2	0	0	0	0	0	**1**
	v_5^2	0	0	0	0	0	0
	v_6^2	0	0	**1**	0	**1**	**1**



Бієкція між вершинами для цих графів буде мати вигляд:

G_1	v_1^1	v_2^1	v_3^1	v_4^1	v_5^1	v_6^1
G_2	v_1^2	v_2^2	v_4^2	v_6^2	v_5^2	v_3^2

<u>Приклад 2.2</u>. Графи G_1 і G_2 задано їх матрицями суміжності $A(G_1)$ і $A(G_2)$ відповідно.

$$A(G_1)=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1&0\\0&1&1&1&0&0\\1&0&1&1&0&0\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&1&0\end{pmatrix},\qquad A(G_2)=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&1\\0&1&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

Визначити, чи є ці графи ізоморфними. Якщо так, то записати отриманий ізоморфізм (бієкцію).

<u>Розв'язання</u>. Згідно з теоремою 2.10, графи є ізоморфними, якщо їх матриці суміжності можна отримати одну з іншої за допомогою вказаних перетворень. Спробуємо переставити 1-ші та 6-ті рядки та стовпці, потім 2-гі та 3-ті й, нарешті, 2-гі й 5-ті. Отримуємо:

$$A(G_1)=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1&0\\0&1&1&1&0&0\\1&0&1&1&0&0\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&1&0\end{pmatrix}\xRightarrow{1\leftrightarrow 6\ \text{рядки}}\begin{pmatrix}0&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\1&0&1&1&0&0\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}\xRightarrow{1\leftrightarrow 6\ \text{стовпці}}\begin{pmatrix}0&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&1&0&1\\0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}\xRightarrow{2\leftrightarrow 3\ \text{рядки}}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&1\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}\xRightarrow{2\leftrightarrow 3\ \text{стовпці}}\begin{pmatrix}0&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1\\0&1&1&1&0&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}\xRightarrow{2\leftrightarrow 5\ \text{рядки}}\begin{pmatrix}0&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&0\\0&1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0&1\\0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}\xRightarrow{2\leftrightarrow 5\ \text{стовпці}}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&1\\0&1&0&1&0&0\end{pmatrix}=A(G_2)$$

За допомогою одночасної перестановки однойменних рядків та стовпців матриця суміжності графа G_1 перетворилася в матрицю суміжності графа G_2. Отже, згідно з теоремою 2.10, ці графи є ізоморфними. Бієкція між вершинами цих графів буде мати вигляд:

G_1	v_1^1	v_2^1	v_3^1	v_4^1	v_5^1	v_6^1
G_2	v_6^2	v_3^2	v_5^2	v_4^2	v_2^2	v_1^2

2.6.4. Встановлення ізоморфізму графів за матрицями інцидентності

<u>Теорема 2.11</u>. *<u>Формулювання</u>*. Графи (орграфи) є ізоморфними тоді й тільки тоді, коли їх матриці інцидентності можна отримати одну з одної довільними перестановками рядків та стовпців.

Доведення. Перестановка будь-яких двох рядків або стовпців в матриці інцидентності просто відповідає перенумеруванню вершин та ребер того ж самого графа [11]. Отже, якщо ми поміняємо місцями будь-які рядки матриці інцидентності, це відповідатиме іншій нумерації вершин. При цьому завжди можна виписати відповідну бієкцію, що перетворює одну нумерацію в іншу. Отже, отримані графи будуть ізоморфними. Якщо поміняти місцями стовпці матриці інцидентності, це відповідатиме іншій нумерації ребер графа. Така перестановка взагалі не порушує нумерації вершин. Отже, будь-яка вершина початкового графа переходитиме в вершину з тим самим номером отриманого графа зі збереженням відношення інцидентності між ними. Отже, отримані графи також будуть ізоморфними. **Теорему доведено**.

Перед тим, як встановлювати ізоморфізм графів за їх матрицями інцидентності, слід перевірити збіг характеристик обох графів, які можна встановити за цими матрицями.

1. Матриці повинні мати однакову розмірність (кількість вершин та ребер).
2. Кількість нульових стовпців однієї матриці повинна збігатися з аналогічним показником для другої матриці (наявність та кількість петель).
3. Кількість рядків, усі ненульові значення яких дорівнюють +1 (або (- 1)) однієї матриці повинна збігатися з відповідним показником для другої матриці (кількість джерел та стоків).
4. Кількість нульових рядків в одній матриці повинна збігатися з аналогічною їх кількістю в другій матриці (кількість ізольованих вершин).
5. Кількість однакових стовпців в одній матриці повинна збігатися з їх кількістю в другій матриці (кількість кратних ребер).

Якщо хоча б одна з цих умов не задовольняється, то графи не є ізоморфними. Якщо ж всі умови виконані, то можна проводити подальші дослідження.

<u>Приклад 2.3</u>. Нехай заданий граф $\boldsymbol{G_1}$ із прикладу 2.1. Знайти ізоморфний до нього граф $\boldsymbol{G_2}$, якому буде відповідати матриця інцидентності $\boldsymbol{I(G_2)}$, яку отримано із матриці $\boldsymbol{I(G_1)}$ перестановкою 4-го і 6-го рядків, 3-го і 4-го стовпців, а потім 1-го та 6-го рядків і 2-го і 4-го стовпців. Записати відповідний ізоморфізм (бієкцію).

Розв'язання. Відновимо для цього графа матрицю інцидентності:

	e_1^1	e_2^1	e_3^1	e_4^1	e_5^1	e_6^1	e_7^1	e_8^1	e_9^1	e_{10}^1	e_{11}^1
v_1^1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
v_2^1	0	0	-1	0	0	-1	1	0	0	0	0
v_3^1	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	1	0
v_4^1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	-1	±1
v_5^1	-1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0
v_6^1	0	-1	0	0	1	1	0	-1	1	0	0

Тепер виконаємо з матрицею інцидентності $\boldsymbol{I(G_1)}$ вказані перетворення:

4 ↔ 6 рядки

3 ↔ 4 стовпці

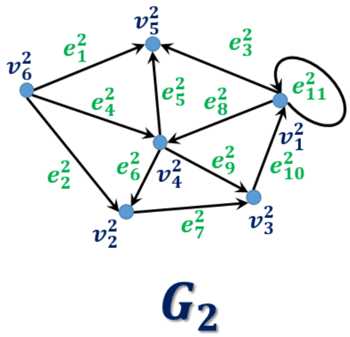
$$\boldsymbol{I(G_1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \pm1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \pm1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overset{1\leftrightarrow 6\text{ рядки}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \pm1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \overset{2\leftrightarrow 4\text{ стовпці}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \pm1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \pm1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I(G_2)}$$

Відновлюючи за матрицею $\boldsymbol{I(G_2)}$ граф $\boldsymbol{G_2}$, отримуємо:

	e_1^2	e_2^2	e_3^2	e_4^2	e_5^2	e_6^2	e_7^2	e_8^2	e_9^2	e_{10}^2	e_{11}^2
v_1^2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	-1	±1
v_2^2	0	-1	0	0	0	-1	1	0	0	0	0
v_3^2	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	1	0
v_4^2	0	0	0	-1	1	1	0	-1	1	0	0
v_5^2	-1	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0
v_6^2	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0



Бієкція для цих графів буде мати вигляд:

G_1	v_1^1	v_2^1	v_3^1	v_4^1	v_5^1	v_6^1
G_2	v_6^2	v_2^2	v_3^2	v_1^2	v_5^2	v_4^2

Приклад 2.4. Графи $\boldsymbol{G_1}$ і $\boldsymbol{G_2}$ задано їх матрицями інцидентності $\boldsymbol{I(G_1)}$ і $\boldsymbol{I(G_2)}$ відповідно.

	e_1^1	e_2^1	e_3^1	e_4^1	e_5^1	e_6^1	e_7^1	e_8^1	e_9^1	e_{10}^1
v_1^1	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0
v_2^1	1	-1	±1	0	0	0	0	0	0	0
v_3^1	0	0	0	-1	-1	0	0	-1	0	1
v_4^1	-1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
v_5^1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	-1
v_6^1	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0	0

$\boldsymbol{I(G_1)}$

	e_1^2	e_2^2	e_3^2	e_4^2	e_5^2	e_6^2	e_7^2	e_8^2	e_9^2	e_{10}^2
v_1^2	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0
v_2^2	-1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
v_3^2	0	0	0	1	1	0	0	0	1	-1
v_4^2	1	-1	±1	0	0	0	0	0	0	0
v_5^2	0	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	1
v_6^2	0	0	0	-1	0	1	-1	0	0	0

$\boldsymbol{I(G_2)}$

Визначити, чи є ці графи ізоморфними. Якщо так, то виписати отриманий ізоморфізм (біекцію).

Розв'язання. Згідно з теоремою 2.11, графи є ізоморфними, якщо їх матриці інцидентності можна отримати одну з одної довільними перестановками рядків та стовпців. Спробуємо в матриці $\boldsymbol{I(G_1)}$ переставити 2-й і 4-й рядки, 4-й і 8-й стовпці, 3-й і 5-й рядки та 4-й і 6-й стовпці. В результаті цих перестановок отримуємо:

2 ↔ 4 рядки

$$I(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \pm1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

3 ↔ 4 стовпці

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \pm1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

3 ↔ 5 рядки

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \pm1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

4 ↔ 6 стовпці

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \pm1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \pm1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I(G_2)$$

Бієкція для вершин цих графів буде мати вигляд:

G_1	v_1^1	v_2^1	v_3^1	v_4^1	v_5^1	v_6^1
G_2	v_1^2	v_4^2	v_5^2	v_2^2	v_3^2	v_6^2

2.6.5. Встановлення ізоморфізму графів за ступенями вершин

Отже, щоб дізнатися, чи є два графи ізоморфними, треба виконати всі можливі перестановки рядків та стовпців матриці одного з графів. Якщо після якої-небудь перестановки буде отримано матрицю другого графа, то ці графи є ізоморфними [12]. В загальному випадку дізнатися, чи є ізоморфними два графи, достатньо складно. Універсальним є алгоритм встановлення ізоморфізму або його відсутності за ступенями вершин графів, що розглядаються. Цей алгоритм не залежить від способу початкового задання графів. Як вже було показане вище, при будь-якому способі задання можна обчислити ступені усіх вершин як для орієнтованого, так і для неорієнтованого графу. Ізоморфні графи повинні мати однакові набори ступенів [10]. Більш за те, вершини різного ступеню відповідати одна одній не можуть, тому що інцидентні до різної кількості ребер (тобто така відповідність не зберігала би інцидентність). Розглянемо роботу цього алгоритму на прикладі.

Приклад 2.5. Нехай два графи задано їх матрицями суміжностей:

$A(G_1) =$

Початкові \ Кінцеві	v_1^1	v_2^1	v_3^1	v_4^1	v_5^1	v_6^1
v_1^1	1	0	0	1	1	1
v_2^1	1	0	0	0	1	0
v_3^1	0	0	1	1	1	0
v_4^1	1	1	0	0	0	0
v_5^1	0	1	1	0	0	1
v_6^1	0	0	1	0	0	0

$A(G_2) =$

Початкові \ Кінцеві	v_1^2	v_2^2	v_3^2	v_4^2	v_5^2	v_6^2
v_1^2	0	0	0	1	1	0
v_2^2	0	0	0	0	0	1
v_3^2	1	0	0	0	1	0
v_4^2	1	1	0	0	0	1
v_5^2	0	1	1	1	1	0
v_6^2	0	0	1	1	0	1

Необхідно встановити, чи є ізоморфними ці графи.

<u>Розв’язання</u>. Сума елементів матриці суміжності для графа $\boldsymbol{G_1}$ дорівнює 15. Це означає, що у першого графа 15 ребер. Сума елементів матриці суміжності графа $\boldsymbol{G_2}$ також дорівнює 15. Це означає, що й у другого графа 15 ребер. Кратних ребер, ізольованих вершин, джерел та стоків у цих графів немає. В обох графах по 2 петлі (однакова кількість). Як наслідок, ізоморфізм можливий.

Запишемо усі ступені вершин для обох графів:

$\boldsymbol{G_1}$			$\boldsymbol{G_2}$		
$\delta^+(v_1)=4$,	$\delta^-(v_1)=3$,	$\delta(v_1)=\mathbf{7}$;	$\delta^+(w_1)=2$,	$\delta^-(w_1)=2$,	$\delta(w_1)=\mathbf{4}$;
$\delta^+(v_2)=2$,	$\delta^-(v_2)=2$,	$\delta(v_2)=\mathbf{4}$;	$\delta^+(w_2)=1$,	$\delta^-(w_2)=2$,	$\delta(w_2)=\mathbf{3}$;
$\delta^+(v_3)=3$,	$\delta^-(v_3)=3$,	$\delta(v_3)=\mathbf{6}$;	$\delta^+(w_3)=2$,	$\delta^-(w_3)=2$,	$\delta(w_3)=\mathbf{4}$;
$\delta^+(v_4)=2$,	$\delta^-(v_4)=2$,	$\delta(v_4)=\mathbf{4}$;	$\delta^+(w_4)=3$,	$\delta^-(w_4)=3$,	$\delta(w_4)=\mathbf{6}$;
$\delta^+(v_5)=3$,	$\delta^-(v_5)=3$,	$\delta(v_5)=\mathbf{6}$;	$\delta^+(w_5)=4$,	$\delta^-(w_5)=3$,	$\delta(w_5)=\mathbf{7}$;
$\delta^+(v_6)=1$,	$\delta^-(v_6)=2$,	$\delta(v_6)=\mathbf{3}$.	$\delta^+(w_6)=3$,	$\delta^-(w_6)=3$,	$\delta(w_6)=\mathbf{6}$.

Ступені обох графів (суми ступенів їх вершин) дорівнюють 30. Це збігається з подвоєною кількістю ребер для обох графів (лема про рукостискання). Це означає, що досить ймовірно, що ступені вершин обчислено правильно. Далі дивимось, із чого складається число 30 для обох графів. Якщо набори доданків є різними, тобто хоча б одна вершина одного графа має ступінь, якого не має жодна вершина в іншому графі, то на цьому процес дослідження закінчується відповіддю «графи не є ізоморфними». Це пов’язане з тим, що ізоморфізм зберігає відношення інцидентності. Тобто, якщо вершина якимось чином зв’язана ребрами з іншими вершинами в початковому графі (початкова – кінцева), то відповідна їй вершина в такий самий спосіб повинна бути зв’язаною з відповідними вершинами в остаточному графі. Тобто ступені відповідних вершин повинні збігатися повністю, з урахуванням розподілу на δ^+ і δ^-. Якщо остаточний ступінь якоїсь вершини в одному графі не має аналогів серед ступенів вершин в іншому графі, то ніяку вершину із іншого графа не вдасться поставити їй у відповідність.

В прикладі, що розглядається, у обох графів ступінь графа складається з однакових наборів доданків: однієї «7», двох «6», двох «4» і однієї «3». Отже, ізоморфізм все ще можливий. Далі починаємо встановлювати відповідність. Починаємо з тих вершин, що відповідають єдиним доданкам. Ступінь «7» в першому графі має єдина вершина $\boldsymbol{v_1^1}$, а в другому – єдина вершина $\boldsymbol{v_5^2}$. Розподіл за півступенями у них однаковий: $\boldsymbol{\delta^+=4}$ і $\boldsymbol{\delta^-=3}$. Якщо б це було не так, процедура встановлення ізоморфізму перервалася б з відповіддю «графи не є ізоморфними». В даному випадку дослідження продовжується. В вершині v_5^2, як і в вершині v_1^1, є петля. Це означає, що між цими вершинами відповідність встановлено. Ступінь «3» мають вершини v_6^1 і v_2^2. Розподіл за півступенями в них також однаковий: **δ⁺=1** і **δ⁻=2**. Петель ці вершини не мають. Це означає, що можна однозначно встановити відповідності $v_1^1 \leftrightarrow v_5^2$ і $v_6^1 \leftrightarrow v_2^2$. Ступінь «6» мають вершини v_3^1, v_5^1 і v_4^2, v_6^2. Розподіл за півступенями у всіх чотирьох вершин однаковий: **δ⁺=3** і **δ⁻=3**. Якщо б вони були попарно різні (у однієї пари, наприклад, 4+2, а в іншій – 2+4; або 5+1 і 1+5; або у однієї пари 3+3, а в іншій 4+2 тощо), то відповідність між вершинами була б очевидною. В нашому прикладі допомагає наявність петлі. Вона є в вершинах v_3^1 і v_6^2. В вершинах v_5^1 і v_4^2 її немає. Тому можна однозначно встановити відповідності $v_3^1 \leftrightarrow v_6^2$ і $v_5^1 \leftrightarrow v_4^2$. Залишилося встановити або спростувати відповідність між двома парами вершин, що мають ступінь «4»: v_2^1, v_4^1 і v_1^2, v_3^2. Розподіл за півступенями у всіх чотирьох вершин знову однаковий: **δ⁺=2** і **δ⁻=2**. Ніяких додаткових властивостей (петля, кратні ребра) у цих вершин немає. Отже, треба перевіряти інцидентність. Припустимо, що має місце відповідність $v_2^1 \leftrightarrow v_3^2$ і $v_4^1 \leftrightarrow v_1^2$. В графі G_1 із вершини v_2^1 виходять ребра до вершин v_1^1 і v_5^1. Вершинам v_1^1 і v_5^1 відповідають вершини v_5^2 і v_4^2. В графі G_2 із вершини v_3^2 до вершин v_5^2 і v_4^2 ребра не виходять. Це свідчить про те, що ця відповідність є хибною. Перевіримо єдиний, що залишився, варіант відповідності: $v_2^1 \leftrightarrow v_1^2$ і $v_4^1 \leftrightarrow v_3^2$. В графі G_2 із вершини v_1^2 до вершин v_5^2 і v_4^2 ребра виходять. В графі G_1 до вершини v_2^1 заходять ребра із вершин v_4^1 і v_5^1. Вершинам v_4^1 і v_5^1 відповідають вершини v_3^2 і v_4^2. В графі G_2 до вершини v_1^2 із вершин v_3^2 і v_4^2 ребра заходять. Відповідність $v_4^1 \leftrightarrow v_3^2$ перевіряється в аналогічний спосіб. Отже, відповідності $v_2^1 \leftrightarrow v_1^2$ і $v_4^1 \leftrightarrow v_3^2$ також однозначно встановлені. Цей процес можна подати за допомогою схеми, зображеної на рис. 2.37.

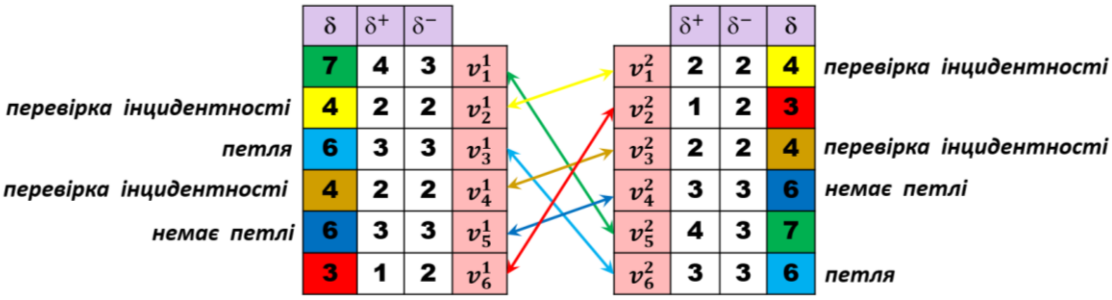


Рис. 2.37. – Встановлення ізоморфізму за ступенями вершин

Таким чином, доказом ізоморфізму розглянутих графів є встановлена бієкція.

G_1	v_1^1	v_2^1	v_3^1	v_4^1	v_5^1	v_6^1
G_2	v_5^2	v_1^2	v_6^2	v_3^2	v_4^2	v_2^2

Слід зазначити, що іноді інцидентність може зберігатися при декількох варіантах відповідності (для тих вершин, що мають однакові загальні ступені, однаковий розподіл за півступенями й однакові, якщо вони наявні, властивості). В цьому випадку відповіддю можуть виступати декілька варіантів бієкцій, що розрізняються за деякими вершинами. Для доведення ізоморфізму достатньо встановити хоча б одну з них.

2.7. ДЕРЕВА ТА ЛІС

2.7.1. Види дерев. Елементи дерева

Особливий інтерес викликає один простий, але дуже важливий тип графів, що відрізняється вкрай простою будовою [13].

Означення. Зв'язні ациклічні графи називаються *деревами*.

Неорієнтовані графи іноді називають *вільними деревами* [16].

Означення. Довільний (не обов'язково зв'язний) граф без циклів називається *лісом*. Таким чином, дерева є компонентами зв'язності лісу.

Є очевидним, що ліс може складатися із однієї єдиної компоненти зв'язності. Таким чином, дерево є окремим випадком лісу.

Означення. Орієнтований безконтурний граф називається *орієнтованим деревом*, якщо у нього півступінь заходу будь-якої вершини не перевищує одиницю, та існує рівно одна вершина, півступінь заходу якої дорівнює нулю. Ця єдина вершина називається *коренем орієнтованого дерева*. Зазвичай її позначають як $\boldsymbol{v_0}$ [14].

Слід зазначити, що коренем неорієнтованого дерева може виступати будь-яка його вершина.

Означення. Неорієнтоване (вільне) дерево, в якості кореня якого обрано довільну вершину $\boldsymbol{v_i}$, називається *підвішеним за вершину* $\boldsymbol{v_i}$.

Усім ребрам неорієнтованого (вільного) дерева можна задати напрямок від кореня до наступних вершин (рис. 2.38).

Означення. Дерево $\boldsymbol{T}$ називається *породженим деревом* $\boldsymbol{T'}$, якщо початкове дерево $\boldsymbol{T'}$ є співвіднесеним до дерева $\boldsymbol{T}$.

Наприклад, на рис. 2.38*б* зображено орієнтоване дерево $\boldsymbol{T}$. Можна вважати, що воно є породженим своїм співвіднесеним деревом $\boldsymbol{T'}$ (рис. 2.38*а*)

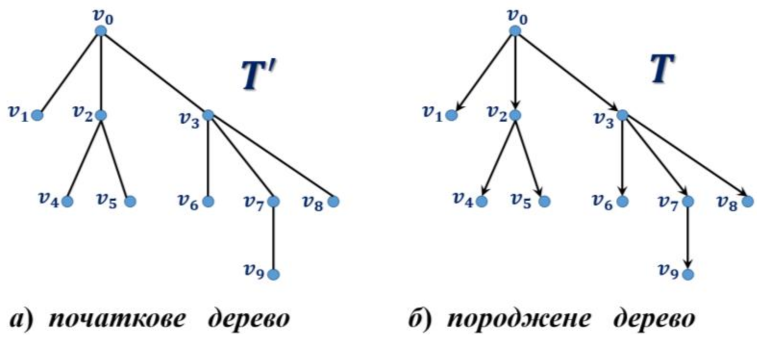


Рис. 2.38. – Породжене дерево

Означення. Вершина $\boldsymbol{v_i}$ орієнтованого дерева називається *нащадком* (*справжнім нащадком*) вершини $\boldsymbol{v_j}$, якщо існує шлях із $\boldsymbol{v_i}$ до $\boldsymbol{v_j}$ (шлях ненульової довжини із $\boldsymbol{v_i}$ до $\boldsymbol{v_j}$). В цьому ж самому випадку вершина $\boldsymbol{v_j}$ називається *предком* (*справжнім предком*) вершини $\boldsymbol{v_i}$.

Означення. Якщо довжина шляху із $\boldsymbol{v_i}$ до $\boldsymbol{v_j}$ дорівнює одиниці, то вершина $\boldsymbol{v_i}$ називається *сином вершини* $\boldsymbol{v_j}$, а вершина $\boldsymbol{v_j}$ називається *батьком вершини* $\boldsymbol{v_i}$.

Означення. Сини того ж самого батька називаються *братами* [3].

Означення. Вершина, що не має потомків, називається *листом* [14].

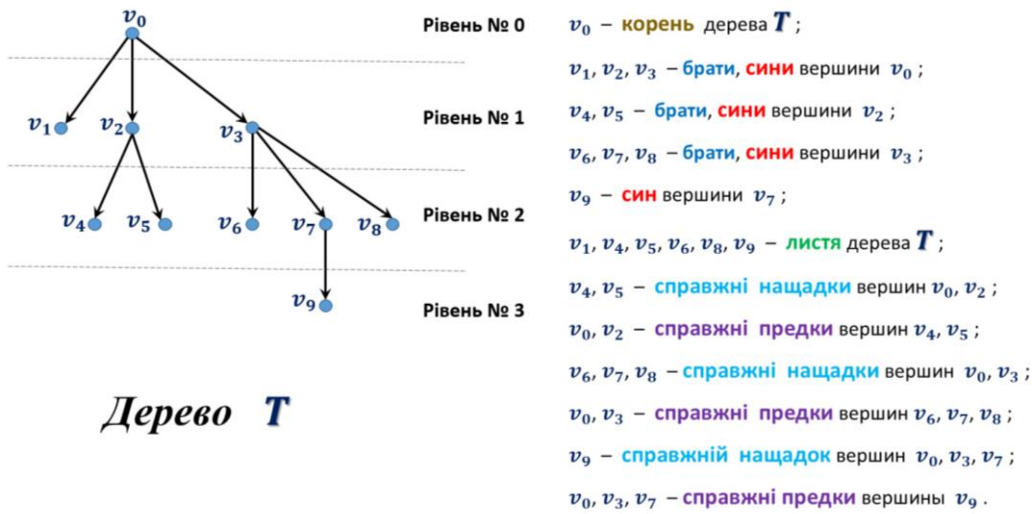


Рис. 2.39. – Дерево та його елементи

Всі подані означення для орієнтованого дерева зображені на рис. 2.39. Взаємно недосяжні вершини (наприклад, вершини $\boldsymbol{v_2}$ і $\boldsymbol{v_9}$) такого дерева не є ані предком, ані нащадком одна для одної. Кожна вершина такого дерева буде сама для себе і нащадком, і предком, але не справжнім.

Форма подання дерева, зображена на рис. 2.39, є стандартною. В ній вершини дерева розподілені за рівнями.

<u>Означення</u>. В орієнтованому дереві *рівень вершини* $\boldsymbol{v_i}$ – це довжина шляху від кореня дерева до цієї вершини [15].

<u>Означення</u>. *Висота* орієнтованого дерева – це довжина найдовшого шляху від кореня до листа.

<u>Наприклад</u>, для графа на рис. 2.39 існує три суттєвих рівня. Рівень № 0 є кореневим, довжина шляху від єдиної вершини цього рівня $\boldsymbol{v_0}$ до кореня дерева (тобто до все тієї ж вершини $\boldsymbol{v_0}$) дорівнює нулю. Для вершин рівня № 1 ($\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ і $\boldsymbol{v_3}$) відстань до кореневої вершини $\boldsymbol{v_0}$ дорівнює одиниці. Для вершин рівня № 2 ($\boldsymbol{v_4}$, $\boldsymbol{v_5}$, $\boldsymbol{v_6}$, $\boldsymbol{v_7}$ і $\boldsymbol{v_8}$) відстань до кореневої вершини $\boldsymbol{v_0}$ дорівнює двом. Для вершини рівня № 3 ($\boldsymbol{v_9}$) відстань до кореневої вершини $\boldsymbol{v_0}$ дорівнює трьом. Найдовший шлях від кореня до листа в цьому графі дорівнює трьом (номеру останнього рівня). Отже, висота дерева $\boldsymbol{T}$ на рис. 2.39 також дорівнює трьом.

При стандартному зображенні орієнтованого дерева напрямок дуг завжди повинен йти від вершин деякого рівня до вершин наступного за ним за номером рівня, тобто спільний напрямок дуг орієнтованого дерева завжди спрямований від кореня до листя.

<u>Означення</u>. Орієнтоване дерево, у якого всі вершини, окрім кореня, є листами, називається *кущем*.

<u>Наприклад</u>, якщо у дерева на рис. 2.39 виділити підграф, породжений підмножиною вершин $\boldsymbol{V'}$=$\{\boldsymbol{v_0}, \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$, то отримане дерево буде кущем.

<u>Означення</u>. Орієнтоване дерево називається *бінарнимм*, якщо додатний півступінь будь-якої його вершини не перевищує двох [14].

<u>Означення</u>. Бінарне орієнтоване дерево називається *повним*, якщо із будь-якої його вершини, що не є листом, виходять рівно дві дуги, а рівні всіх листів збігаються.

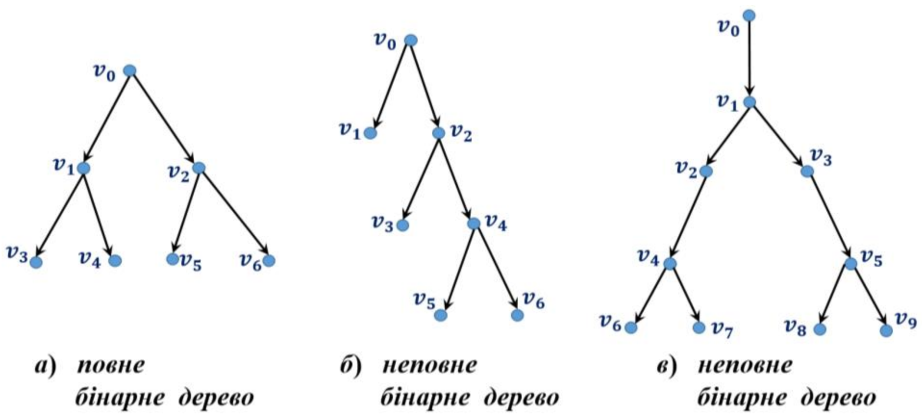


Рис. 2.40. – Бінарні дерева

Наприклад, дерево на рис. 2.40*а* є повним, тому що рівні всіх листів (вершин $\boldsymbol{v_3}$, $\boldsymbol{v_4}$, $\boldsymbol{v_5}$, $\boldsymbol{v_6}$) збігаються: всі листи є вершинами 2-го рівняя. З решти вершин ($\boldsymbol{v_0}$, $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$) виходить рівно по дві дуги. Дерево на рис. 2.40*б* є бінарним. У нього з кожної вершини, що не є листом (вершини $\boldsymbol{v_0}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_4}$, $\boldsymbol{v_6}$), виходить рівно по дві дуги. Але рівні листів (вершини $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_3}$, $\boldsymbol{v_5}$) є різними. Як наслідок, це бінарне дерево не є повним. У дерева на рис. 2.40*в* рівні всіх листів (вершини $\boldsymbol{v_6}$, $\boldsymbol{v_7}$, $\boldsymbol{v_8}$, $\boldsymbol{v_9}$) збігаються, але не зі всіх решти вершин виходить рівно по дві дуги (додатні півступені вершин $\boldsymbol{v_0}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$ дорівнюють одиниці). Отже, це дерево, хоч і є бінарним, але також не є повним.

Лема 2.2. *Формулювання*. В повному бінарному орієнтованому дереві висотою $\boldsymbol{h}$ міститься рівно $\boldsymbol{2^h}$ листів [14].

Доведення. Доводити лему будемо, використовуючи індукцію за висотою дерева. Дійсно, орієнтоване дерево нульової висоти має $\boldsymbol{2^0=1}$ лист. Повне бінарне орієнтоване дерево одиничної висоти має $\boldsymbol{2^1=2}$ листи. Нехай повне бінарне орієнтоване дерево має висоту $\boldsymbol{m}$ і, відповідно, $\boldsymbol{2^m}$ листів. Розглянемо повне бінарне орієнтоване дерево висотою $\boldsymbol{m+1}$. В зв'язку з тим, що в повному бінарному орієнтованому дереві рівні всіх листів збігаються, то очевидно, що орієнтоване дерево висотою $\boldsymbol{m+1}$ можна отримати з повного бінарного орієнтованого дерева висотою $\boldsymbol{m}$, якщо з кожного листа останнього рівня провести рівно по дві дуги. Тоді кількість листів в орієнтованому дереві висотою $\boldsymbol{m+1}$ буде вдвічі більшою, ніж в орієнтованому дереві висотою $\boldsymbol{m}$, тобто $\boldsymbol{2^m \cdot 2=2^{m+1}}$. **Лему доведено**.

Наслідок. *Формулювання*. Довільне бінарне дерево висотою $\boldsymbol{m}$ містить не більше, ніж $\boldsymbol{2^m}$ листів.

Доведення. Повний граф, в тому числі й дерево, містить максимально можливу кількість ребер. Отже, будь-який неповний граф можна отримати з повного видаленням деякої кількості ребер. Це означає, що неповне бінарне дерево буде містити суворо меншу кількість листів, ніж повне бінарне дерево. Таким чином, кількість листів довільного бінарного дерева ні за яких умов не перебільшить величини $\boldsymbol{2^m}$. **Наслідок доведено**.

Доведена лема 2.2 разом із наслідком з неї дають дуже важливий результат.

Теорема 2.12 (***про висоту бінарного орієнтованого дерева із заданою кількістю листів***). *Формулювання*. Бінарне орієнтоване дерево з $\boldsymbol{n}$ листями має висоту, не меншу за $\boldsymbol{\log_2 n}$.

Доведення. Згідно з доведеним наслідком із леми 2.2, для кількості листів довільного бінарного дерева висотою $\boldsymbol{h}$ маємо співвідношення $\boldsymbol{n \leqslant 2^h}$. Логарифмуючи обидві частини цієї нерівності за основою 2, маємо $\boldsymbol{\log_2 n \leqslant h}$, тобто $\boldsymbol{h \geqslant \log_2 n}$. **Теорему доведено**.

Цей результат широко використається при оцінюванні часу роботи алгоритмів.

Наприклад, блок-схеми алгоритмів характеристики графів за матрицями суміжності та інцидентності, зображені на рис. 2.8 і рис. 2.11, можна розділити на підзадачи, кожна з яких вирішує питання про якусь конкретну характеристику. Блок-схема кожної такої підзадачи є неповним бінарним деревом.

2.7.2. Ознаки дерева

Теорема 2.13 (***перший критерій дерева***). *Формулювання*. Зв'язний граф є деревом тоді й лише тоді, коли будь-які дві його вершини з'єднані лише одним ланцюгом [4].

Доведення. ***Необхідність***. Нехай граф є деревом. Якщо припустити існування більше, ніж одного ланцюгу, що з'єднує будь-які дві його вершини, то в такому графі існує цикл, тобто граф не може бути деревом.

Достатність. Оскільки довільні дві вершини графа з'єднані ланцюгом, то такий граф є зв'язним. В силу того, що цей ланцюг є єдиним, граф, що розглядається, не має циклів. Отже, цей граф є зв'язним ациклічним, тобто (за означенням) він є деревом. **Теорему доведено.**

Наслідок 1. Якщо $\boldsymbol{T}$ – дерево і $\boldsymbol{v_i}$ – його висяча вершина (лист), то граф $\boldsymbol{T \backslash \{v_i\}}$ – також дерево.

Доведення. Дійсно, граф $\boldsymbol{T \backslash \{v_i\}}$ є підграфом дерева $\boldsymbol{T}$, для якого задовольняються всі умови теореми 2.13. Отже, цей підграф також є деревом. **Наслідок 1 доведено**.

Наслідок 2. В дереві $\boldsymbol{T}$ кожне ребро є мостом.

Доведення. Розглянемо довільне ребро $\boldsymbol{e(v_i, v_j)}$ дерева $\boldsymbol{T}$. В силу того, що будь-які дві вершини $\boldsymbol{v_i}$ і $\boldsymbol{v_j}$ зв'язані лише одним єдиним ланцюгом, то видалення ребра $\boldsymbol{e(v_i, v_j)}$ призведе до розриву ланцюгу і отриманню двох різних компонент зв'язності, одна з яких буде містити вершину $\boldsymbol{v_i}$, а друга – вершину $\boldsymbol{v_j}$. Таким чином, після видалення ребра $\boldsymbol{e(v_i, v_j)}$ граф $\boldsymbol{T}$ перестає бути зв'язним. Отже, це ребро є мостом. **Наслідок 2 доведено**.

Наслідок 3. Введення одного нового ребра в дерево призводить до виникнення одного циклу.

Доведення. Будь-які дві вершини $\boldsymbol{v_i}$ і $\boldsymbol{v_j}$ дерева $\boldsymbol{T}$ вже зв'язані одним єдиним ланцюгом. Нехай вершини $\boldsymbol{v_i}$ і $\boldsymbol{v_j}$ несуміжні. Якщо ввести в дерево $\boldsymbol{T}$ ребро $\boldsymbol{e(v_i, v_j)}$, що з'єднує ці дві вершини (тобто таке, що робить їх суміжними), то ланцюг, що їх з'єднує, замикається цим ребром і стає циклом. Якщо б при цьому існував ще один цикл, що містить ребро $\boldsymbol{e(v_i, v_j)}$, то це суперечило б тому, що вершини $\boldsymbol{v_i}$ і $\boldsymbol{v_j}$ зв'язані єдиним ланцюгом. Якщо ж вершини $\boldsymbol{v_i}$ і $\boldsymbol{v_j}$ суміжні, то вони вже з'єднані ребром $\boldsymbol{e(v_i, v_j)}$. Введення ще одного такого ж самого ребра робить ці ребра кратними. А наявність кратних ребер – це вже наявність циклу. Отже, введення в дерево одного ребра призводить до виникнення рівно одного циклу. **Наслідок 3 доведено**.

Теорема 2.14 (***другий критерій дерева***). *Формулювання*. Зв'язний граф $\boldsymbol{T}$ є деревом тоді й тільки тоді, коли його кількість вершин $\boldsymbol{p}$ і ребер $\boldsymbol{q}$ пов'язані співвідношенням $\boldsymbol{q=p-1}$ [15].

Доведення. ***Необхідність***. Візьмемо дві вершини графа (наприклад, вершини $\boldsymbol{v_1}$ і $\boldsymbol{v_2}$). Для їх зв'язку потрібно рівно одне ребро. Для зв'язку кожної наступної вершини з вже побудованим деревом також буде потрібно рівно одне ребро. Отже, для зв'язку $\boldsymbol{p}$ вершин потрібно рівно $\boldsymbol{p-1}$ ребро.

Достатність. Якщо граф $\boldsymbol{T}$ містить цикл, в складі якого є ребро $\boldsymbol{e(v_i, v_j)}$, то за теоремою 2.13 існує два шляхи із вершини $\boldsymbol{v_i}$ до вершини $\boldsymbol{v_j}$. Таким чином, ребро $\boldsymbol{e(v_i, v_j)}$

можна із циклу видалити, а шлях із вершини $\boldsymbol{v_i}$ до вершини $\boldsymbol{v_j}$ залишиться. Нехай $\boldsymbol{v_a}$ і $\boldsymbol{v_b}$ – довільні вершини в графі $\boldsymbol{T}$. В силу того, що цей граф є зв'язним, існує шлях із $\boldsymbol{v_a}$ до $\boldsymbol{v_b}$. Якщо ребро $\boldsymbol{e(v_i, v_j)}$ входить до складу цього шляху, то після його видалення шлях із $\boldsymbol{v_a}$ до $\boldsymbol{v_b}$ все одно буде існувати, тому що замість ребра $\boldsymbol{e(v_i, v_j)}$ існує альтернативний шлях із вершини $\boldsymbol{v_i}$ до вершини $\boldsymbol{v_j}$. Якщо після видалення ребра $\boldsymbol{e(v_i, v_j)}$ граф, що залишився, буде містити ще якійсь цикл, то описана процедура повторюватиметься до тих пір, доки не будуть видалені всі цикли графа $\boldsymbol{T}$. В результаті буде отриманий зв'язний ациклічний граф $\boldsymbol{T'}$. За означенням граф $\boldsymbol{T'}$ буде деревом. В процесі знищення циклів за описаною процедурою жодну з вершин не було видалено. Тому, як випливає із доведеної необхідності, дерево $\boldsymbol{T'}$ буде містити $\boldsymbol{q'=p-1}$ ребро. Звідси випливає, що $\boldsymbol{q=q'}$, тобто кількість ребер початкового графа збігається з кількістю ребер отриманого графа. Це означає, що жодне ребро не було видалене. Отже, початковий граф $\boldsymbol{T}$ – дерево. **Теорему доведено.**

Таким чином, $\boldsymbol{q=p-1}$ – це мінімальна кількість ребер, яка потрібна для того, щоб граф був зв'язним.

Наслідок. *Формулювання*. Ліс із $\boldsymbol{k}$ дерев, що містить $\boldsymbol{p}$ вершин, має рівно $\boldsymbol{p-k}$ ребер.

Доведення. Кожне дерево із розглянутого лісу містить $\boldsymbol{p_i}$, $\boldsymbol{i=\overline{1,k}}$, вершин і $\boldsymbol{q_i}$, $\boldsymbol{i=\overline{1,k}}$, ребер. При цьому весь ліс складається із $\boldsymbol{p=\sum_{i=1}^{k} p_i}$ вершин і $\boldsymbol{q=\sum_{i=1}^{k} q_i}$ ребер. В силу того, що кожна компонента зв'язності лісу є деревом, є справедливою формула $\boldsymbol{q_i=p_i-1}$. Отже,

$$\boldsymbol{q=\sum_{i=1}^{k} q_i=\sum_{i=1}^{k} p_i-k=p-k.}$$

Наслідок доведено.

Все сказане ілюструється на прикладі дерева (рис. 2.41*а*), що містить $\boldsymbol{p=11}$ вершин і $\boldsymbol{q=11-1=10}$ ребер. Це дерево перетворюється в циклічний граф введенням ребра (рис. 2.41*б*) і розпадається на ліс із двох дерев $\boldsymbol{T_1}$ і $\boldsymbol{T_2}$ при видаленні ребра $\boldsymbol{e}$ (рис. 2.41*в*).

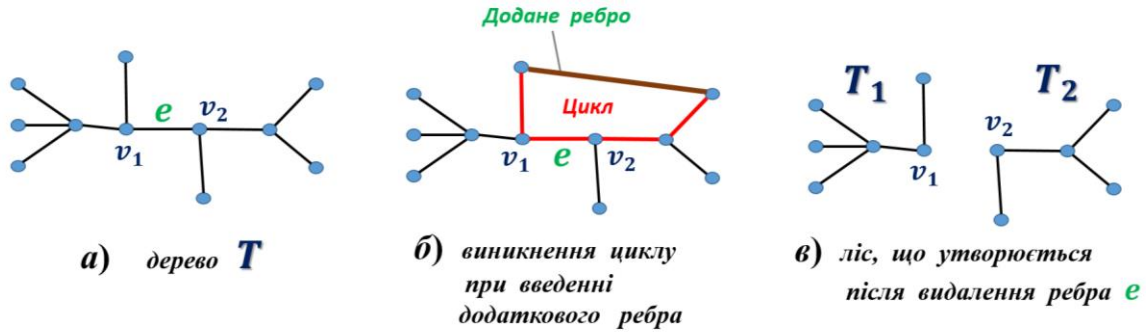


Рис. 2.41. – Критерії дерева

2.7.3. Покриваючі дерева

Означення. Будь-яка зв'язна сукупність ребер, що не містить циклів (контурів), разом з інцидентними до них вершинами утворює *дерево графа* (рис. 2.42*б*).

Означення. Якщо дерево зв'язного графа є суграфом (містить усі вершини графа), то воно називається *покриваючим* (*каркасним*) *деревом* або *остовом* (рис. 2.42*в*).

Означення. Якщо граф не є зв'язним, то сукупність остовівв $\boldsymbol{k}$ його компонент зв'язності утворює *покриваючий* (*остовний*) *ліс*.

В силу того, що петля є найпростішим циклом, що складається із одного єдиного ребра, то вона не може входити до складу жодного дерева графа.

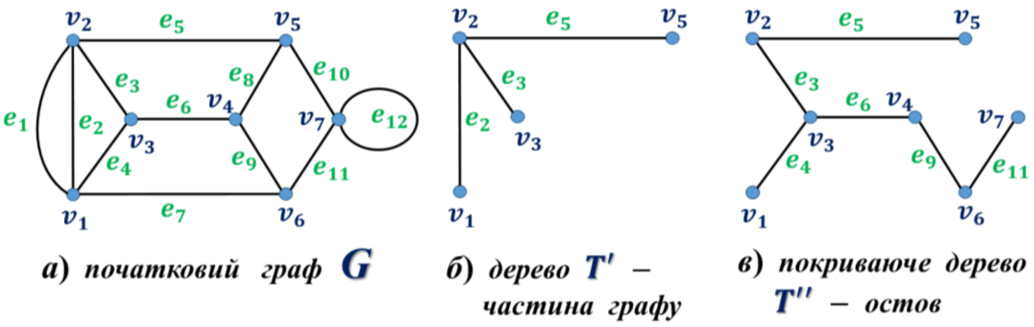


Рис. 2.42. – Дерева графа

Нехай довільний граф складається із $\boldsymbol{k}$ компонент зв'язності.

Означення. *Коцикломатичне число* графа відображає кількість ребер в остовах усіх $\boldsymbol{k}$ компонент зв'язності графа [9]. Воно розраховується за формулою:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}. \qquad (2.2)$$

Досі дерева розглядалися як мінімальні зв'язні графи на множині з $\boldsymbol{p}$ вершин. Важливе значення має й інша точка зору, коли дерева або ліс є частинами деякого графа, тобто утворюються із його ребер [1].

Описана в ході доведення теореми 2.13 процедура дозволяє побудувати із будь-якого графа $\boldsymbol{G}$ деякий його підграф – дерево $\boldsymbol{T'}$.

Означення. *Цикломатичне число* графа показує, скільки ребер треба видалити із графа, щоб в ньому не залишилося жодного циклу [9].

Іншими словами, цикломатичне число показує, скільки ребер треба видалити з графа, щоб побудувати його остовний ліс.

Теорема 2.15 (***про цикломатичне число графа***). *Формулювання*. Кількість ребер довільного неорієнтованого графа $\boldsymbol{G}$, які необхідно видалити для отримання остова, не залежить від послідовності їх видалення і розраховується за формулою [13]:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p} + \boldsymbol{k}. \qquad (2.3)$$

Доведення. Розглянемо i-у компоненту зв'язності $\boldsymbol{G_i}$ графа $\boldsymbol{G}$. Нехай $\boldsymbol{G_i}$ містить $\boldsymbol{p_i}$ вершин. Тоді остов $\boldsymbol{T_i}$ графа $\boldsymbol{G_i}$, що є деревом, містить $\boldsymbol{q_i - 1}$ ребро. Отже, для отримання $\boldsymbol{T_i}$ із компоненти $\boldsymbol{G_i}$ необхідно видалити $\boldsymbol{q_i - (p_i - 1)}$ ребро. Обчисливши суму всіх ребер, що видаляються, за усіма компонентами зв'язності, отримуємо:

$$\sum_{i=1}^{k} q_i = q, \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = p, \quad \sum_{i=1}^{k} (q_i - p_i + 1) = q - p + k.$$

Теорему доведено.

Із теореми 2.15 існують очевидні наслідки [4].

Наслідок 1. Неорієнтований граф G є лісом тоді й тільки тоді, коли $\sigma(G)=0$.

Наслідок 2. Неорієнтований граф G має єдиний цикл тоді й тільки тоді, коли $\sigma(G)=1$.

Наслідок 3. Неорієнтований граф, у якого кількість ребер не менша за кількість вершин, має цикл.

Наслідок 4. *Формулювання*. Будь-яке дерево, що містить не менше двох вершин, має, принаймні, дві висячі вершини і, принаймні, одне висяче ребро.

Доведення. З леми 2.1 (про рукопотискання) і теореми 2.14 (другого критерію дерева) випливає, що сума усіх ступенів вершин дерева дорівнює $2(p-1)$ і кожний ступінь при цьому більший за нуль (дерево не може містити ізольовані вершини). Це означає, що хоча б два числа зі всіх ступенів вершин дерева дорівнюють одиниці. Таким чином, принаймні дві вершини дерева мають одиничний ступінь, тобто є висячими. Якщо ці вершини не суміжні (це відбувається у випадку, коли дерево має суворо більше двох вершин), то до цих вершин інцидентні різні ребра, і, як наслідок, дерево має більше одного висячого ребра. У випадку, коли дерево має рівно дві вершини, вони обидві є висячими, і їх з’єднує одне ребро, що є інцидентним до них обох. Таким чином, в цьому випадку дерево має одне єдине ребро, що й є висячим. **Наслідок 4 доведено**.

В теорії електричних ланцюгів цикломатичне та коцикломатичне числа мають прямий фізичний зміст. Цикломатичне число дорівнює найбільшій кількості незалежних контурів в графі електричного ланцюгу, тобто найбільшій кількості незалежних кругових струмів, що можуть протікати в ланцюгу. Коцикломатичне число дорівнює найбільшій кількості незалежних різниць потенціалів між вузлами електричного ланцюгу [2].

Теорема 2.16. *Формулювання*. Будь-який ациклічний підграф довільного скінченного графа $G(V, E)$ є підграфом його остову T [4].

Доведення. Нехай $T'(V', E')$ – ациклічний підграф графа G. Достатньо розглянути ситуацію, коли G є зв’язним. Припустимо, що T' - не є зв’язним і K – одна з його компонент зв’язності. Тоді в G існує таке ребро $e(v_i, v_j)$, що $v_i \in V^K$, а $v_j \in V' \setminus V^K$, де V^K – множина вершин графа K. В цьому випадку граф $T' + e(v_i, v_j)$ – є ациклічним підграфом графа G, що має меншу кількість компонент зв’язності, ніж T'. Повторюючи цю побудову й далі, ми наприкінці прийдемо до остовного дерева T графу G, яке містить T' в якості підграфа.

Нехай тепер T' є зв’язним, але не є остовом графа G $(T' \neq T)$. В силу того, що T' - зв’язний ациклічний граф, він є деревом. В той же час, в силу того, що $T' \neq T$, в G існує вершина $v_i \notin V'$ (тобто вона не є вершиною підграфа T') і в G існує ребро $e(v_i, v_j)$, що з’єднує вершину v_i з однією з вершин підграфа T' (з вершиною v_j). Тоді граф $T' + e(v_i, v_j)$ є деревом, для якого T' є підграфом. Якщо $T' + e(v_i, v_j)$ – остовне дерево для графа G, то теорему доведено. В протилежному випадку описана процедура побудови повторюватиметься доти, доки не буде отримано остовне дерево T, для якого T' буде підграфом.

У випадку, коли T' вже є остовним деревом для G, теорема також є справедливою. **Теорему доведено**.

<u>Теорема 2.17</u>. *<u>Формулювання</u>*. Якщо $\boldsymbol{T_1}$ і $\boldsymbol{T_2}$ – два остови графа $\boldsymbol{G}$, то для будь-якого ребра $\boldsymbol{e_1}$ остову $\boldsymbol{T_1}$ існує таке ребро $\boldsymbol{e_2}$ остову $\boldsymbol{T_2}$, що граф $\boldsymbol{T_3=(T_1\backslash\{e_1\})+e_2}$ також є остовом графа $\boldsymbol{G}$ [5].

<u>Доведення</u>. Будемо вважати, що граф $\boldsymbol{G}$ є зв'язним. Згідно із наслідком 2 із теореми 2.13 (першого критерію дерева), кожне ребро дерева є мостом. В силу того, що за умовою теореми $\boldsymbol{T_1}$ – дерево, то граф $\boldsymbol{T_1\backslash\{e_1\}}$ буде мати дві компоненти зв'язності: $\boldsymbol{T_1'}$ і $\boldsymbol{T_1''}$. В силу того, що граф $\boldsymbol{T_2}$ є зв'язним, в ньому існує ребро $\boldsymbol{e_2}$, одна з граничних вершин якого належить компоненті $\boldsymbol{T_1'}$, а інша – компоненті $\boldsymbol{T_1''}$. Таким чином, граф $\boldsymbol{T_3=(T_1\backslash\{e_1\})+e_2}$ є зв'язним, і кількість його ребер збігається з кількістю ребер дерева $\boldsymbol{T_1}$. Отже, граф $\boldsymbol{T_3}$ також є деревом. Таким чином, $\boldsymbol{T_3}$ – остов графа $\boldsymbol{G}$. **Теорему доведено.**

<u>Означення</u>. Ребра графа, що належать його остову, називаються *вітками* [1].

Якщо дерево $\boldsymbol{T}$ є остовом графа $\boldsymbol{G}$, то множина ребер графа $\boldsymbol{G}$ розділяється на дві підмножини: підмножину віток і підмножину ребер *доповнення дерева* $\boldsymbol{T}$ до графа $\boldsymbol{G}$.

<u>Означення</u>. Множина ребер графа $\boldsymbol{G}$, які складають доповнення його остову $\boldsymbol{T}$ до графа $\boldsymbol{G}$, називаються *хордами*.

При цьому зв'язний граф $\boldsymbol{G}$ містить $\boldsymbol{r = p - 1}$ віток і $\boldsymbol{\sigma = q - p + 1}$ хорд. Якщо граф не є зв'язним, то кількість віток буде дорівнювати $\boldsymbol{r = p - k}$, а кількість хорд буде дорівнювати $\boldsymbol{\sigma = q - p + k}$. Легко побачити, що кількість віток дорівнює коцикломатичному числу, а кількість хорд – цикломатичному числу графа.

Таким чином, для заданого графа $\boldsymbol{G}$, що містить $\boldsymbol{p}$ вершин і $\boldsymbol{q}$ ребер, процес формування дерева можна здійснювати почерговим розгляданням ребер двома способами:

- чергове ребро графа відноситься до дерева, якщо воно не утворює циклу з уже обраною сукупністю віток, доти, поки не отримуємо $\boldsymbol{p - 1}$ віток, що складають дерево;
- чергове ребро видаляється з графу, якщо воно утворює цикл (контур) з рештою ребер доти, поки не буде видалено $\boldsymbol{q - p+1}$ хорду, що складають доповнення (решта $\boldsymbol{p - 1}$ ребра є вітками).

Нехай $\boldsymbol{T}$ – остовний ліс графа $\boldsymbol{G}$. Якщо в ліс $\boldsymbol{T}$ ввести довільне ребро графа $\boldsymbol{G}$ яке до складу $\boldsymbol{T}$ не входить, то згідно з наслідком 3 із теореми 2.13 (першого критерію дерева) отримаємо єдиний цикл.

<u>Означення</u>. Множина всіх циклів графа $\boldsymbol{G}$, що отримані шляхом введення до лісу $\boldsymbol{T}$ кожного окремого ребра графа $\boldsymbol{G}$, яке не входить до складу $\boldsymbol{T}$, називається *фундаментальною системою циклів графа* $\boldsymbol{G}$, що є асоційованою з остовом $\boldsymbol{T}$ [4].

<u>Наприклад</u>, для графа на рис. 2.42*а* фундаментальна система циклів, що є асоційованою з його остовом на рис. 2.42*в*, зображена на рис. 2.43.

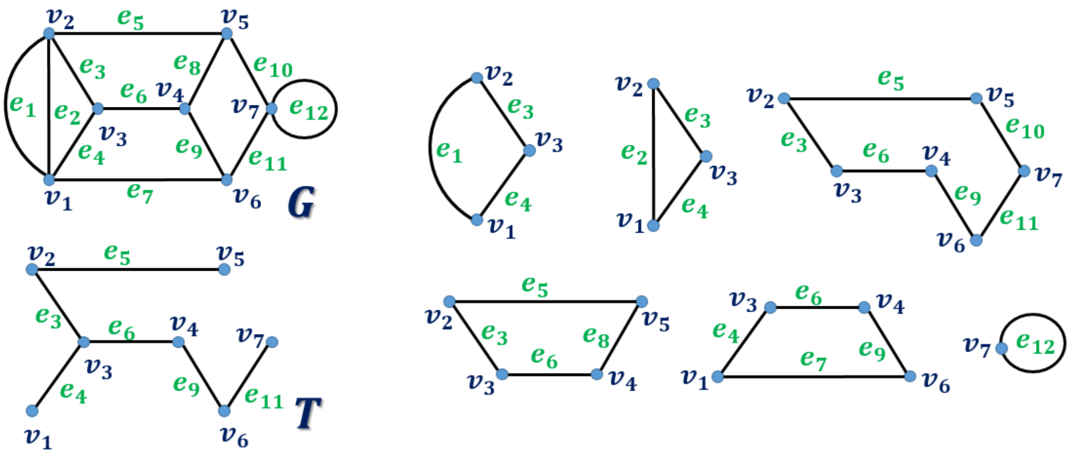


Рис. 2.43. – Фундаментальна система циклів графа *G*, що є асоційованою з його остовом *T*

2.7.4. Кількість дерев

Зі збільшенням кількості вершин кількість різних дерев різко зростає.

<u>**Теорема 2.18**</u> (***теорема Келі***). <u>*Формулювання*</u>. Кількість різних дерев, що можна побудувати на $\boldsymbol{p}$ вершинах, подається формулою [5]:

$$t_p = p^{p-2}. \qquad (2.4)$$

В теоремі Келі, по суті, мова йде про всілякі можливі остови повного графа K_p. <u>Наприклад</u>, для повного графа K_6 (повного шестикутника на рис. 2.4) таких остовів існує $t_6 = 6^{6-2} = 6^4 = 1296$. Але розглядати їх усі з практичної точки зору вельми недоцільно. Багато з них відрізняються одне від одного виключно нумерацією вершин.

<u>***Означення***</u>. Дерева вважаються *істотно різними*, якщо вони не є ізоморфними [1].

Таким чином, якщо знехтувати нумерацією вершин та ребер і розглядати виключно геометричну реалізацію дерев, що побудовані на шести вершинах, то істотно різними будуть дерева, подані на рис. 2.44.

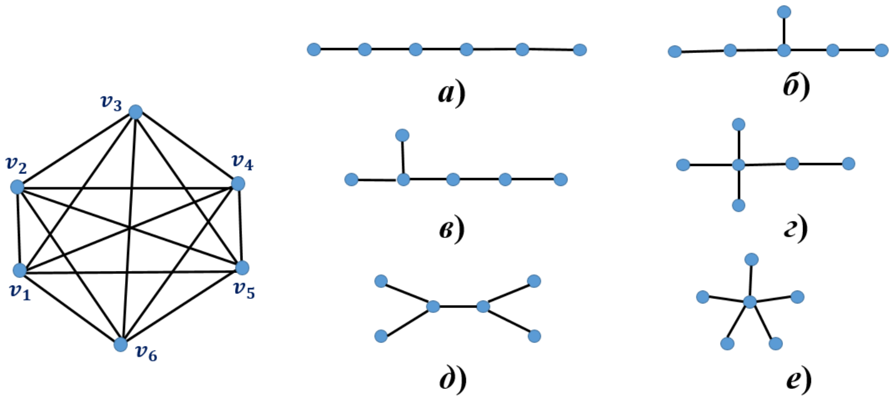


Рис. 44. – Істотно різні дерева з шістьома вершинами

Серед істотно різних дерев виокремлюються два важливі випадки: *послідовне дерево* (рис. 2.44*а*), що є простим ланцюгом, і *зіркове дерево* (рис. 2.44*е*), в якому одна з вершин (центр) є суміжною зі всією рештою вершин.

Однак, коли мова йде не про довільне дерево із заданою кількістю вершин $\boldsymbol{p}$, а про остов конкретного графа, то кількість можливих варіантів істотно скорочується. Це відбувається за рахунок того, що будь-який граф із заданою кількістю вершин $\boldsymbol{p}$ є підграфом повного графа $\boldsymbol{K_p}$. Таким чином, не всі ребра повного графа містяться в множині ребер досліджуваного графа. Отже, кількість ребер, припустимих до використання для побудови дерева із заданою кількістю вершин $\boldsymbol{p}$, для кожного окремого графа менша, ніж для графу $\boldsymbol{K_p}$. Тому для остовів неповних графів часто є можливість їх перелічити та дослідити. Відповідь на запитання про їх кількість для кожного конкретного графа дає наступна теорема.

Теорема 2.19. *Формулювання*. Нехай $\boldsymbol{G}$ – неорієнтований (вільний) граф без петель (мультиграф), що має $\boldsymbol{p}$ вершин. Нехай $\boldsymbol{B}$ – матриця інцидентності графа $\boldsymbol{G'}$, що отриманий із графа $\boldsymbol{G}$ шляхом приписування одного з можливих напрямків кожному його ребру. Тоді $\boldsymbol{B_0}$ – його матриця, яку отримано із $\boldsymbol{B}$ видаленням якого-небудь одного його рядку (тобто вона містить $\boldsymbol{p-1}$ незалежних рядків), а $\boldsymbol{B_0^T}$ – матриця, транспонована до $\boldsymbol{B_0}$. Тоді визначник $|\boldsymbol{B_0} \cdot \boldsymbol{B_0^T}|$ дорівнює кількості різних остовних дерев графа $\boldsymbol{G}$ [2].

Приклад 2.6. Знайти всі остовні дерева для графа, що заданий на рис. 2.45*а*.

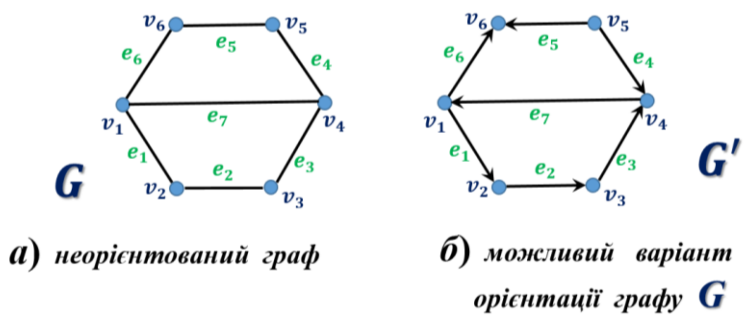


Рис. 2.45. – Граф і одна з його можливих орієнтацій

Розв'язання. Перетворимо $\boldsymbol{G}$ в орієнтований, приписавши кожному його ребру один із двох можливих напрямків. Отриманий граф зображений на рис. 2.45*б*. Матриця інцидентності для цього графу має вигляд:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	0	0	0	0	1	–1
v_2	–1	1	0	0	0	0	0
v_3	0	–1	1	0	0	0	0
v_4	0	0	–1	1	0	0	1
v_5	0	1	0	–1	1	0	0
v_6	0	0	0	0	–1	–1	0

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для отримання матриці $\boldsymbol{B_0}$ видалимо із матриці $\boldsymbol{B}$, наприклад, 1-й рядок. Тоді матриці $\boldsymbol{B_0}$, $\boldsymbol{B_0^T}$ та їх добуток мають вигляд:

$$B_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_0^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_0 \cdot B_0^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Тепер знайдемо визначник матриці $\boldsymbol{B_0 \cdot B_0^T}$.

$$|B_0 \cdot B_0^T| = \overset{\text{По 1-му рядку}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = 2 \cdot \overset{\text{По 1-му рядку}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}} + \overset{\text{По 1-му стовпцю}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}} =$$

$$= 2 \cdot \left(2 \cdot \overset{\text{По 1-му рядку}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}} + \overset{\text{По 1-му стовпцю}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}} \right) + (-1) \cdot \overset{\text{По 1-му рядку}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}} =$$

$$= 2 \cdot \left(2 \cdot \left(3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) - \left(3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot (3 \cdot (4-1) - 2) - (4-1)) - (3 \cdot (4-1) - 2) = 2 \cdot (2 \cdot (3 \cdot 3 - 2) - 3) - (3 \cdot 3 - 2) =$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot 7 - 3) - (9 - 2) = 2 \cdot (14 - 3) - 7 = 2 \cdot 11 - 7 = 22 - 7 = \mathbf{15}$$

Отже, для графа на рис. 2.45*а* можна побудувати **15** різних остовних дерев. Усі вони зображені на рис. 2.46.

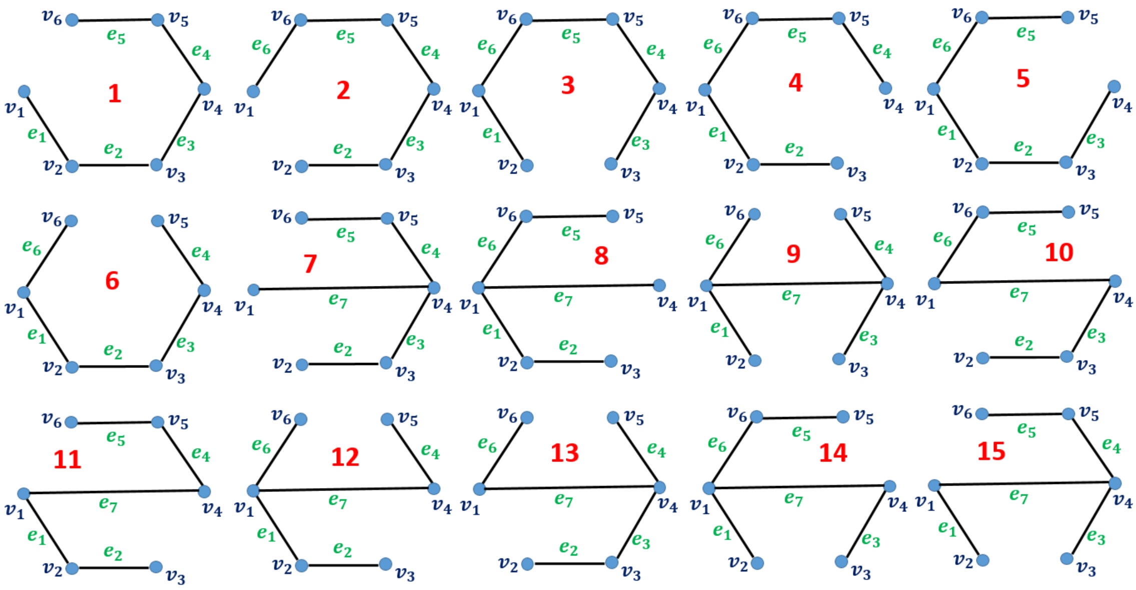


Рис. 2.46. – Усі остови графа *G*

Однак не всі ці остови істотно розрізняються. Наприклад, ізоморфними один до одного будуть дерева №№ 1 – 6, №№ 7 – 8, №№ 10 – 11, №№ 12 – 15.

Якщо ж враховувати обрану орієнтацію дуг, тобто досліджувати остови графу $\boldsymbol{G'}$, то вказаний ізоморфізм порушується. Більш того, не всі 15 вказаних дерев зможуть бути остовами графа $\boldsymbol{G'}$. В якості остовних дерев для графа $\boldsymbol{G'}$ підійдуть лише дерева №№ 1, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15. При цьому кореневою вершиною $\boldsymbol{v_0}$ для кожного конкретного остову зможуть бути різні вершини графа. Ці орієнтовані остови з кореневою вершиною, що однозначно визначається для кожного з них, подано на рис. 2.47.

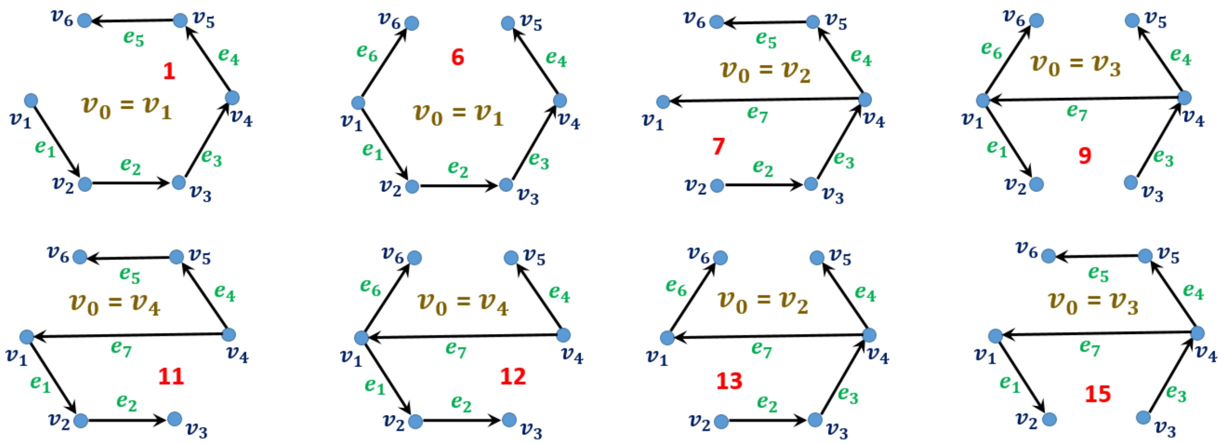


Рис. 2.47. – Орієнтовані остови графа G'

Перемалюємо ці остовні дерева в стандартній формі (рис. 2.48).

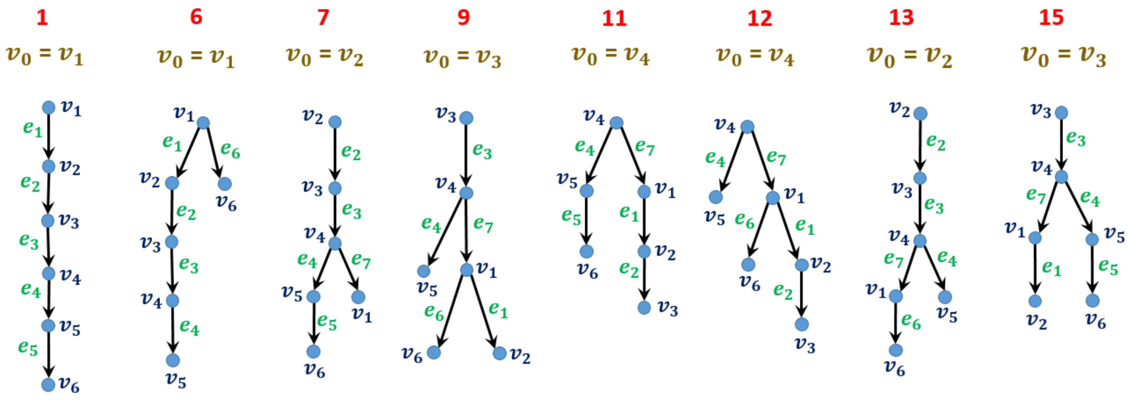


Рис. 2.48. – Стандартна форма остовів графа G'

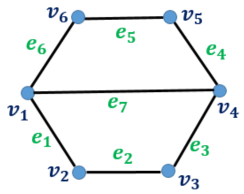
З наведеної геометричної реалізації цих остовів стає очевидним, що остови № 7 і № 13 є ізоморфними. Бієкція, що доводить їх ізоморфізм, має вигляд:

T_7	v_1^7	v_2^7	v_3^7	v_4^7	v_5^7	v_6^7
T_{13}	v_5^{13}	v_2^{13}	v_3^{13}	v_4^{13}	v_1^{13}	v_6^{13}

Теорема 2.18 для обчислення кількості остовних дерев графа використовує матрицю інцидентності. Однак, той же самий результат можна отримати і з використанням іншої матриці.

Теорема 2.20 (***теорема Трента***). *Формулювання*. Для графа G, що містить p вершин, побудуємо квадратну матрицю Трента порядку p в наступний спосіб: елементи головної діагоналі дорівнюють ступеням відповідних вершин. Елементи a_{ij} і a_{ji} дорівнюють кількості ребер, що зв’язують вершини v_i і v_j, але взятому зі знаком «мінус». Кількість остовів графа G дорівнює будь-якому із головних мінорів цієї матриці.

Приклад 2.7. Розглянемо граф G із прикладу 2.6. Побудуємо для нього матрицю Трента.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	3	– 1	0	– 1	0	– 1
v_2	– 1	2	– 1	0	0	0
v_3	0	– 1	2	– 1	0	0
v_4	– 1	0	– 1	3	– 1	0
v_5	0	0	0	– 1	2	– 1
v_6	– 1	0	0	0	– 1	2

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Знайдемо для цієї матриці, наприклад, мінор M_{11}:

$$M_{11} = \overset{\text{По 1-му рядку}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = 2\cdot \overset{\text{По 1-му рядку}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}} - (-1)\cdot \overset{\text{По 1-му стовпцю}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}} =$$

$$= 2\cdot \left(2\cdot \overset{\text{По 1-му рядку}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}} - (-1)\cdot \overset{\text{По 1-му стовпцю}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}} \right) + (-1)\cdot \overset{\text{По 1-му рядку}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}} =$$

$$= 2\cdot (2\cdot (12 + 0 + 0 - 0 - 3 - 2) + (-4 + 0 + 0 - 0 + 1 - 0)) - (12 + 0 + 0 - 0 - 3 - 2) =$$

$$= 2\cdot (2\cdot 7 - 3) - 7 = 2\cdot 11 - 7 = 22 - 7 = \mathbf{15}$$

Цей метод дає ту ж саму кількість остовних дерев графа $\boldsymbol{G}$. Всі вони вже зображені на рис. 2.46 і досліджені в прикладі 2.6.

Таким чином, для кожної конкретної прикладної задачі можна обрати свій найбільш зручний спосіб обчислення кількості остовів в залежності від початкового способу задання графа.

2.8. ПЛАНАРНІСТЬ

2.8.1. Укладання графа

Означення. Граф називається *плоским*, якщо його вершини є точками на площині, а ребра – безперервними плоскими лініями без самоперетинів, які з'єднують відповідні вершини в такий спосіб, що ніякі два ребра не мають спільних точок, окрім інцидентної їм обом вершини [13].

Означення. Граф називається *планарним*, якщо він є ізоморфним до плоского графа [3, 4].

Наприклад, хоч в одному з графів на рис. 2.35 ребра перетинаються, ізоморфні йому графи не мають перетинів ребер. Отже, він планарний.

Означення. Про планарні графи говорять, що вони мають *плоске розташування* або *укладання на площині* (*плоске укладання*) або що вони *розташовані* (*укладені*) *на площині*.

Можна визначити розташування (укладання) графів не лише на площині, але й на інших поверхнях або в просторі. Для цього треба ввести наступні поняття.

Означення. *Жордановою кривою* на площині називається безперервна лінія без самоперетинів.

Означення. *Замкненою жордановою кривою* називається жорданова крива, початок і кінець якої збігаються.

Аналогічним чином можна дати означення жорданової кривої в тривимірному просторі або на таких поверхнях як сфера, тор тощо [4].

Теорема 2.21 (***теорема Жордана***). *Формулювання*. Якщо $\boldsymbol{a}$ – замкнена жорданова крива на площині, а $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ – дві різні точки цієї кривої, то кожна жорданова крива $\boldsymbol{b}$, що з'єднує точки $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$, лежить або повністю всередині $\boldsymbol{a}$, крім точок $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ (рис. 2.49*а*), або зовні кривої $\boldsymbol{a}$, крім точок $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ (рис. 2.49*б*), або перетинає криву $\boldsymbol{a}$ в деякій точці, відмінної від точок $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$

(рис. 2.49*в*).

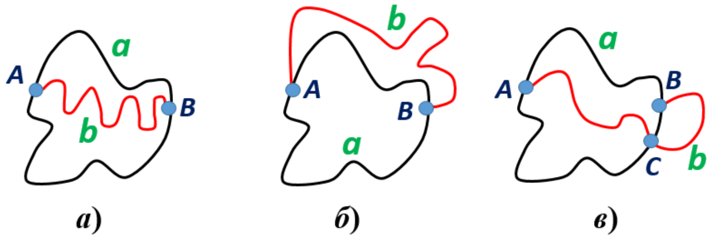


Рис. 2.49. – Жорданова крива

<u>Означення</u>. *Граф **G** розташований в просторі **L***, якщо існує така взаємно однозначна відповідність вершин і ребер графа ***G*** точкам і жордановим кривим цього простору, що різним кривим відповідають різні точки, а криві, що відповідають різним ребрам, перетинаються в інцидентних цим ребрам вершинах. Зображений в такий спосіб граф ***G*** в просторі ***L*** називається *розташуванням* (*укладанням*) *графа **G** в простір **L*** [5].

<u>Теорема 2.22</u>. *<u>Формулювання</u>*. Кожен граф може бути розташований в тривимірному просторі [4, 5] (рис. 2.50*а*).

<u>Доказательство</u>. Розташуємо всі вершини графа $G=(V, E)$ на осі Ox. З пучка площин, що проходять скрізь цю вісь, оберемо $|E|$ різних площин. Потім кожне ребро $(v_i, v_j)\in E$ зобразимо у відповідній площині півколом, що проходить скрізь вершини v_i і v_j (на рис. 2.50*б* такі півкола з різних площин окрашені в різні кольори). Очевидно, що в результаті отримаємо розташування графа ***G*** в тривимірному просторі, бо всі ребра лежать в різних площинах і тому не перетинаються ні в яких точках, окрім вершин. **Теорему доведено**.

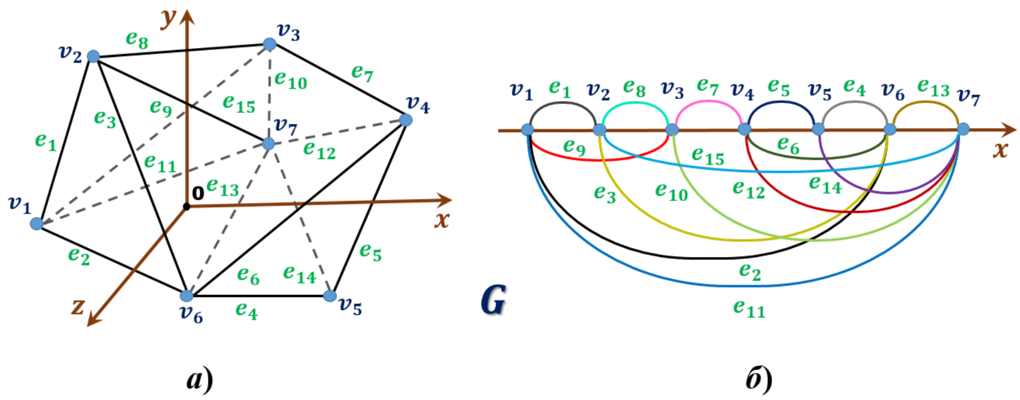


Рис. 2.50. – Укладання графа в тривимірному просторі

<u>Теорема 2.23</u>. *<u>Формулювання</u>*. Граф може бути розташований на сфері тоді й лише тоді, коли він є планарним [4].

<u>Доведення</u>. Нехай граф ***G*** розташований на сфері. Проведемо площину ***Q***, дотичну до сфери, в такий спосіб, щоб точка ***N***, що лежить на цій сфері діаметрально протилежно до точки дотику, не належала жодному ребру і не збігалася з жодною вершиною графа ***G***. Побудуємо граф G' шляхом стереографічної проекції графа ***G*** з точки ***N*** на площину ***Q*** (рис. 2.51). В силу того, що існує взаємно-однозначна відповідність між точками сфери, що відрізняються від точки ***N*** та їх стереографічними проекціями на площину, граф G' є плоским і ізоморфним до графа ***G***. З цього випливає, що граф ***G*** також є плоским.

Зворотне твердження доводиться в аналогічний спосіб з урахуванням встановленої взаємно-однозначної відповідності. **Теорему доведено**.

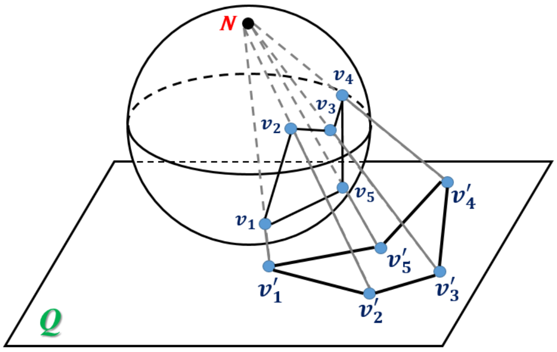


Рис. 2.51. – Укладання графа на сфері

Означення плоского і планарного графів, так само, як і теореми 2.22 і 2.23, зберігаються для мультиграфів та псевдографів.

Очевидно, що справедливими є наступні твердження.

Твердження 2.1. Кожний підграф планарного графа також є планарним.

Твердження 2.2. Якщо граф містить непланарний підграф, то й сам граф є непланарним.

Твердження 2.3. Граф є планарним тоді й тільки тоді, коли кожна зв'язна компонента цього графа є планарним графом [13].

Непланарні графи мають характеристики, що відображають міру непланарності. Якщо граф не є планарним, то для його геометричної реалізації видаляються окремі ребра (переносяться на іншу площину).

Означення. Найменша кількість ребер графа G, видалення яких перетворює цей граф в планарний, називається *числом планарності* або *викривленням* $sk(G)$ *графу* G.

Для числа планарності повного графа, що побудований на p вершинах, справедлива наступна формула:

$$sk(G) = C_p^2 - 3p + 6, n \geqslant 3. \tag{2.5}$$

Означення. *Товщина* $t(G)$ графа G – це найменша кількість планарних підграфів графа G, об'єднання яких призводить до графа G.

Товщина графа дорівнює мінімальній кількості площин x, при якій граф G розділюється на плоскі частини $G_1, G_2, \dots, G_x$. Очевидно, що товщина планарного графа дорівнює одиниці. Для товщини зв'язного графа G, що має p вершин і q ребер, справедливі наступні оцінки:

$$t(G) \geqslant \left]\frac{q}{3p-6}\right[, \quad t(G) \geqslant \left[\frac{q+3p-7}{3p-6}\right], \tag{2.6}$$

де [...] - ціла частина числа, а]...[= [...]+1.

Наприклад, для графа G на рис. 2.50 його товщина $t(G) = 2$. Це наочно видно на рис. 2.52, де ребра графа, які можна розмістити в одній площині, окрашено в однаковий колір. При цьому існує декілька варіантів такого розділення графа G на плоскі підграфи. На рис. 2.52 подано деякі з них.

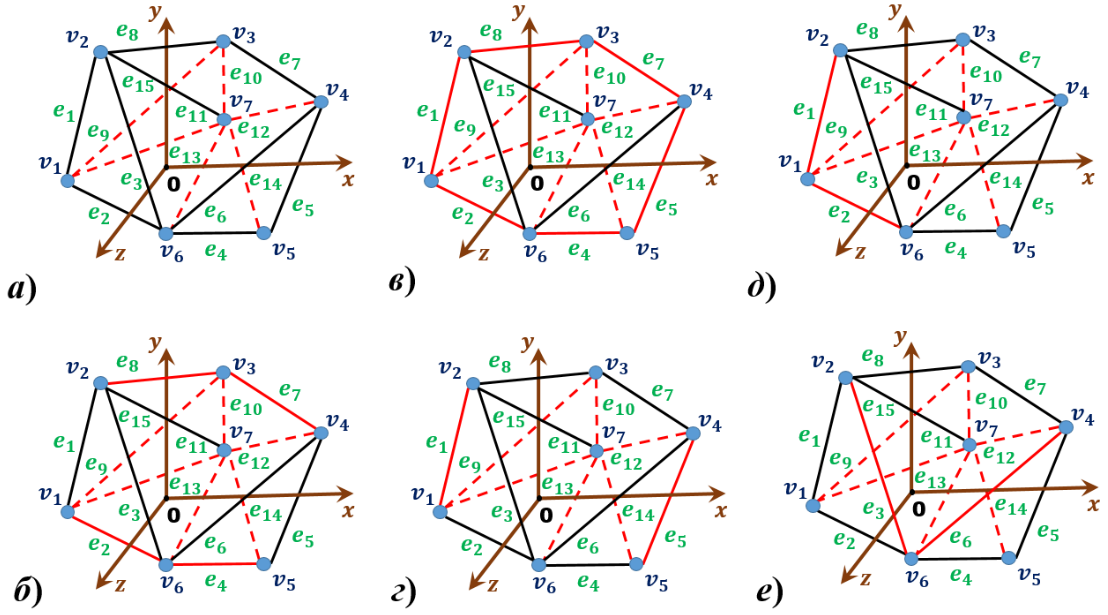


Рис. 2.52. – Товщина графа

Цей граф містить **7** вершин і **15** ребер ($\boldsymbol{p} = 7$, $\boldsymbol{q} = 15$). Тому оцінки для його товщини

$$\boldsymbol{t(G) = 2 \geqslant \left]\frac{15}{3\cdot 7-6}\right[= \left]\frac{15}{21-6}\right[= \left]\frac{15}{15}\right[= 1+1 = 2,}$$

$$\boldsymbol{t(G) = 2 \geqslant \left\lceil\frac{15+3\cdot 7-7}{3\cdot 7-6}\right\rceil = \left\lceil\frac{15+21-7}{21-6}\right\rceil = \left\lceil\frac{29}{15}\right\rceil = 1.}$$

Викривлення цього графа $\boldsymbol{sk(G) = 1}$. Якщо розділити його на два планарні підграфи в спосіб, що показаний на рис. 2.53*а*, то це стає очевидним. Достатньо видалити з цього графа, наприклад, ребро $\boldsymbol{e_{15}}$, щоб перетворити цей граф в планарний (рис. 2.53*б*).

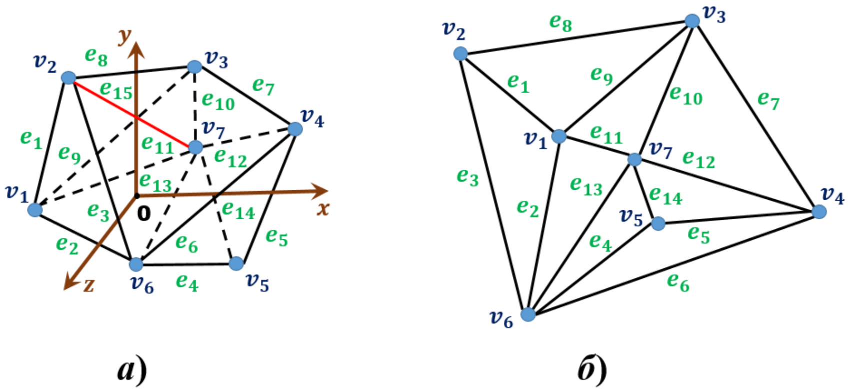


Рис. 2.53. – Викривлення (число планарності) графа

Слід зазначити, що наведені оцінки для товщини графа гарантовано виконуються тільки для графів без кратних ребер. Якщо граф містить кратні ребра, то ці оцінки можуть бути хибними. Наприклад, граф на рис. 2.54 очевидно є планарним, тобто його товщина $\boldsymbol{t(G) = 1}$. Він містить три вершини ($\boldsymbol{p} = 3$) і шість ребер ($\boldsymbol{q} = 6$). Але множина його ребер складається з трьох пар кратних ребер.

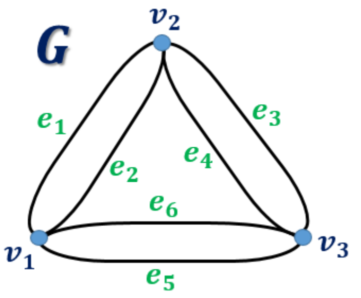


Рис. 2.54. – Плоский граф з кратними ребрами

Наведені оцінки товщини для цього графа порушуються:

$$\boldsymbol{t(G) = 1 \leqslant \left]\frac{6}{3\cdot 3-6}\right[= \left]\frac{6}{9-6}\right[= \left]\frac{6}{3}\right[= 2+1 = 3,}$$

$$\boldsymbol{t(G) = 1 \leqslant \left\lceil\frac{6+3\cdot 3-7}{3\cdot 3-6}\right\rceil = \left\lceil\frac{6+9-7}{9-6}\right\rceil = \left\lceil\frac{8}{3}\right\rceil = 2.}$$

2.8.2. Грані плоского графа. Формула Ейлера

<u>Означення</u>. *Гранню* планарного графа називається множина точок площини, кожна пара з яких може бути з'єднана жордановою кривою, що не перетинає ребер цього графа [5].

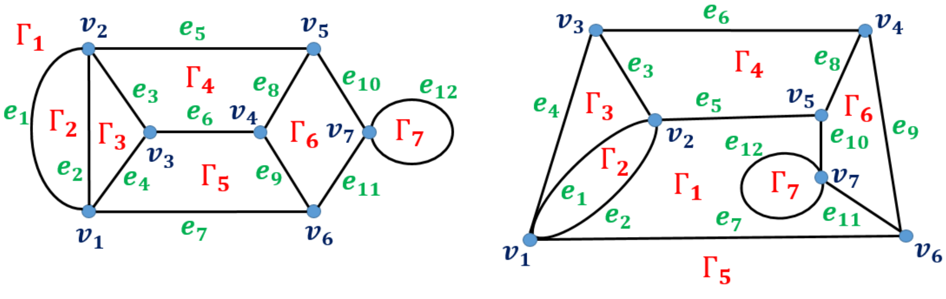
Однак можна дати й інше, еквівалентне наведеному, означення грані.

<u>Означення</u>. *Гранню* планарного графа називається область, що обмежена ребрами і не містить всередині себе вершин і ребер даного графа [3].

<u>Означення</u>. *Границею грані* називається множина вершин і ребер, що належать цій грані [13].

<u>Означення</u>. Необмежена грань називається *зовнішньою*, а решта грані – *внутрішніми* [13].

<u>Наприклад</u>, у графа, зображеного на рис. 2.42 і рис. 2.43, існує сім граней. При цьому грань $\boldsymbol{\Gamma_1}$ є зовнішньою, а решта – внутрішніми (рис. 2.55*а*).



***а*)** ***б*)**

Рис. 2.55. – Грані плоского графа

Будь-яку внутрішню грань плоского графа ***G*** можна перетворити в зовнішню, задавши графу іншу геометричну реалізацію (рис. 2.55*б*). На рис. 2.55 зображено дві геометричні реалізації одного й того ж самого графа. Але для геометричної реалізації на рис. 2.55*б* зовнішньою є грань $\boldsymbol{\Gamma_5}$, а грань $\boldsymbol{\Gamma_1}$ стає внутрішньою.

<u>Плоскі укладання графа мають ряд очевидних властивостей</u> [5].

***Властивість* 1**. Будь-який планарний граф припускає таке розташування на площині, при якому будь-яка обрана вершина або будь-яке обране ребро будуть належать зовнішній грані.

***Властивість* 2**. Нехай граф $\boldsymbol{G}$ складається із двох зв'язних компонент зв'язності $\boldsymbol{G'}$ і $\boldsymbol{G''}$, кожна з яких є плоским графом. Довільно оберемо в кожній з цих компонент вершини $\boldsymbol{v'} \in \boldsymbol{V'}$ і $\boldsymbol{v''} \in \boldsymbol{V''}$. Тоді граф $\widetilde{\boldsymbol{G}}$, отриманий із графп $\boldsymbol{G}$ в результаті ототожнення вершин $\boldsymbol{v'}$ і $\boldsymbol{v''}$ в одну вершину $(\boldsymbol{v'}, \boldsymbol{v''}) = \boldsymbol{v}$, має плоске укладання. При цьому вершина $\boldsymbol{v}$ є точкою зчленування для графа $\widetilde{\boldsymbol{G}}$ (рис. 2.56).

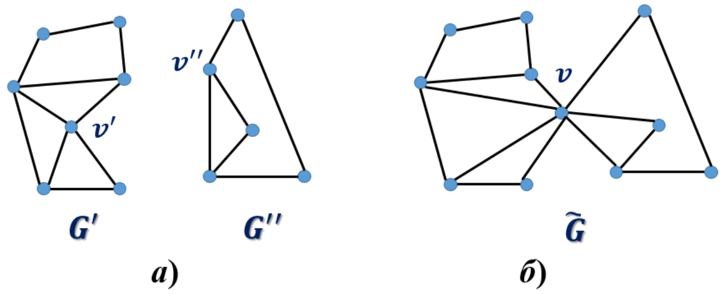


Рис. 2.56. – Склеювання плоского графа

***Властивість* 3**. Будь-які дві вершини, що лежать на границі деякої грані плоского графа, можна з'єднати простим ланцюгом довільної довжини в такий спосіб, що обрана грань буде розділеною на дві різні грані.

***Властивість* 4**. Для будь-якого плоского графа кожна точка площини, що не лежить на жодному його ребрі, входить лише в одну грань. Кожна точка ребра, яка не є вершиною, належить лише одній грані, якщо це ребро є мостом, і рівно двом граням, якщо це ребро – не міст.

Теорема 2.24 (***Теорема Ейлера***). Формулювання. Нехай $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ і $\boldsymbol{f}$ – кількість вершин, ребер і граней відповідно зв'язного планарного графа $\boldsymbol{G}$. Тоді маж місце співвідношення, що має назву ***формули Ейлера*** [4]:

$$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{2}.$$

Доведення. Доведення проводиться методом математичної індукції за кількістю ребер в графі $\boldsymbol{G}$. Якщо $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$, то $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{1}$, тому що граф $\boldsymbol{G}$ за умовою теореми є зв'язним. При цьому у нього існує єдина грань, яка одночасно з тим є зовнішньою, тобто $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{1}$. Таким чином, в цьому випадку $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{1} + \boldsymbol{1} = \boldsymbol{2}$ і $\boldsymbol{q} + \boldsymbol{2} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{2} = \boldsymbol{2}$. Отже, для цього випадку теорема справедлива.

Нехай теорема є справедливою для довільного випадку графа $\boldsymbol{G}$, що має $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{1}$ ребро. Додамо в граф $\boldsymbol{G}$ нове ребро $\boldsymbol{e}$ (слід зазначити, що мова йде не про операцію введення ребра в граф, а саме про додавання довільного ребра). Тоді можливі наступні три випадки.

1. Нове ребро $\boldsymbol{e}$ є петлею. В цьому випадку кількість ребер і кількість граней збільшуються на одиницю, а кількість вершин залишається незмінною. Таким чином, і ліва, і права частини формули Ейлера в результаті цієї операції збільшуються на одиницю. Отже, рівність зберігається і теорема в цьому випадку є справедливою.
2. Ребро $\boldsymbol{e}$ з'єднує дві різні вершини в графі $\boldsymbol{G}$. В цьому випадку одна з граней графа розділюється на дві. Таким чином, як і в попередньому випадку, кількість ребер і кількість граней графа збільшуються на одиницю, тобто рівність зберігається. Отже, в цьому випадку теорема також є справедливою.

3. Ребро $\boldsymbol{e}$ є інцидентним лише до однієї з вершин графа $\boldsymbol{G}$. Тоді в результаті цієї операції кількість вершин і кількість ребер графа збільшуються на одиницю, а кількість граней залишається незмінною. Таким чином, в цьому випадку також і ліва, і права частини формули Ейлера збільшуються на одиницю, тобто рівність не порушується. Отже, і в цьому випадку теорема є справедливою.

Перелічені випадки вичерпують усі можливі ситуації. З цього випливає, що **теорему доведено**.

Цю теорему легко розповсюдити й на незв'язні графи.

Наслідок 1. Нехай $\boldsymbol{G}$ – плоский граф з $\boldsymbol{p}$ вершинами, $\boldsymbol{q}$ ребрами, $\boldsymbol{f}$ гранями і $\boldsymbol{k}$ компонентами зв'язності. Тоді має місце співвідношення [4]:

$$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{k} + \mathbf{1}.$$

Доведення. Цей результат можна отримати, якщо застосувати теорему Ейлера окремо до кожної компоненти зв'язності. При цьому зовнішня грань враховується лише один раз. **Наслідок 1 доведено**.

Наслідок 2. Нехай $\boldsymbol{G}$ – зв'язний планарний граф з $\boldsymbol{p} \geqslant \mathbf{3}$ вершинами і $\boldsymbol{q}$ ребрами, серед яких немає кратних. Тоді має місце співвідношення $\boldsymbol{q} \leqslant \mathbf{3}\boldsymbol{p} - \mathbf{6}$.

Доведення. В силу того, що кратних ребер даний граф не містить, кожна його грань обмежена не менше, ніж трьома ребрами. Тому кількість ребер навкруги кожної грані дає нам нерівність $\mathbf{3}\boldsymbol{f} \leqslant \mathbf{2}\boldsymbol{q}$. Множник «2» в праві частині нерівності виникає в силу того, що кожне ребро обмежує не більше двох граней (лише одну, якщо це ребро є мостом, і рівно дві в протилежному випадку згідно з властивістю 4 плоских укладань графа). Таким чином, згідно з формулою Ейлера, маємо:

$$\mathbf{3}(\boldsymbol{q} + \mathbf{2}) = \mathbf{3}\boldsymbol{q} + \mathbf{6} = \mathbf{3}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{f}) = \mathbf{3}\boldsymbol{p} + \mathbf{3}\boldsymbol{f} \leqslant \mathbf{3}\boldsymbol{p} + \mathbf{2}\boldsymbol{q},$$

тобто $\boldsymbol{q} \leqslant \mathbf{3}\boldsymbol{p} - \mathbf{6}$. **Наслідок 2 доведено.**

Наслідок 3. В будь-якому планарному графі $\boldsymbol{G}$ без кратних ребер існує вершина, ступінь якої не перевищує п'яти [4].

Доведення. Без обмеження загальності можна вважати, що граф $\boldsymbol{G}$ є не лише планарним, але також зв'язним і таким, що містить не менше, ніж три вершини ($\boldsymbol{p} \geqslant \mathbf{3}$). Якщо ступінь кожної його вершини не менший за шість, то отримуємо нерівність $\mathbf{6}\boldsymbol{p} \leqslant \mathbf{2}\boldsymbol{q}$ або $\mathbf{3}\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{q}$, що суперечить наслідку 2 із теореми Ейлера. **Наслідок 3 доведено.**

Наслідок 4. Кількість $\boldsymbol{f}$ граней будь-якого плоского укладання зв'язного планарного графа $\boldsymbol{G}$, що містить $\boldsymbol{p}$ вершин і $\boldsymbol{q}$ ребер, є постійною величиною й дорівнює $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p} + \mathbf{2}$.

Іншими словами, кількість граней планарного графа не залежить від способу укладання цього графа на площині [5].

2.8.3. Критерії планарності графа

Розглянемо дуже стару відому головоломку, так звану ***задачу про три будинки та три колодязі***. Нехай побудовано три будинки і вирито три колодязі. Мешканці усіх трьох будинків хочуть мати доступ до всіх трьох колодязів із кожного будинку. Але в той же час ці мешканці колись посварилися, досі не помирилися і тому зустрічатися не хочуть. Чи можливо прокласти дороги від будинків до колодязів в такий спосіб, щоб вони не перетиналися, і таким чином виключити можливість зустрічі мешканців з різних будинків один з одним? Найбільш очевидну схему прокладки цих доріг подано на рис. 2.57*а* у вигляді повного дводольного графа $K_{3,3}$. Це єдина геометрична реалізація цього графа, за якої всі ребра є прямими лініями. Але в той же час за такої геометричної реалізації всі ребра мають багато точок перетину, що зовсім не відповідає запитам мешканців будинків.

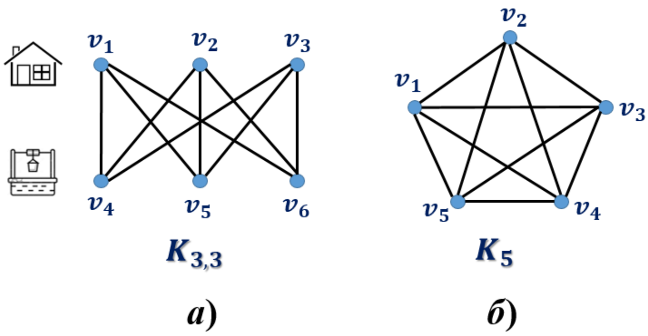


Рис. 2.57. – Графи Понтрягіна-Куратовського

Усі спроби запропонувати іншу геометричну реалізацію цього графа без перетину ребер зазнали поразки. Але безуспішність зроблених спроб ще не є суворим математичним доказом непланарності цього графа.

На рис. 57*б* подано повний п'ятикутник K_5, який є простим неплоским графом з мінімальною кількістю вершин (повний граф з чотирма вершинами – плоский, а видалення із п'ятикутника хоча б одного ребра також перетворює його в плоский граф).

<u>Означення</u>. Графи K_5 і $K_{3,3}$ називаються *графами Понтрягіна-Куратовського* [1].

<u>Теорема 2.25</u>. *<u>Формулювання</u>*. Графи Понтрягіна-Куратовського K_5 і $K_{3,3}$ не є планарними [5].

<u>Доведення</u>. Розглянемо граф K_5. У цього графу $p = 5$, $q = 10$. Тому нерівність $q \leqslant 3p - 6$, яку доведено для наслідку 2 із теореми 2.24 (теореми Ейлера), порушується: $10 \geqslant 3 \cdot 5 - 6 = 9$. Звідси випливає, що цей граф не є планарним.

Розглянемо тепер граф $K_{3,3}$. Для нього $p = 6$, $q = 9$. Якщо він планарний, то згідно з наслідком 4 із теореми 2.24 (теореми Ейлера) кількість його граней повинна дорівнювати $f = 9 - 6 + 2 = 5$. В той же час кожна грань дводольного графу $K_{3,3}$ повинна бути обмеженою принаймні чотирма ребрами. Як наслідок, повинна виконуватися нерівність $2q \geqslant 4f$, тобто $2 \cdot 9 \geqslant 4 \cdot 5$, тобто $18 \geqslant 20$. Отримане протиріччя свідчить про непланарність графу $K_{3,3}$.

Теорему доведено.

<u>Означення</u>. Два графи називаються *гомеоморфними* (ізоморфними з точністю до вершин другого ступеню), якщо їх можна отримати із одного й того ж самого графа за допомогою послідовності операцій введення вершин другого ступеню в ребро (рис. 2.58).

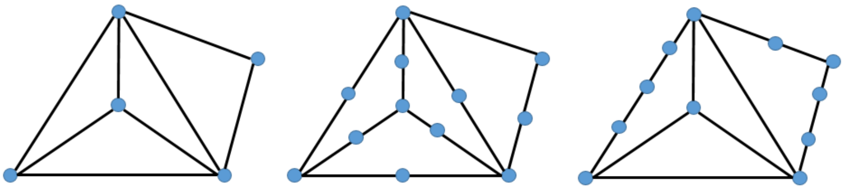


Рис. 2.58. – Гомеоморфні графи

Тепер можна сформулювати ***<u>критерії планарності графів</u>***.

Теорема 2.26 (***критерій Понтрягіна-Куратовського***). *Формулювання*. Граф є планарним тоді й лише тоді, коли він не містить підграфів, що гомеоморфні до графів $\boldsymbol{K_5}$ і $\boldsymbol{K_{3,3}}$ [4].

Наслідок. Граф не є планарним, якщо він містить хоча б один із графів Понтрягіна-Куратовського $\boldsymbol{K_5}$ і $\boldsymbol{K_{3,3}}$ в якості підграфа.

Крім критерію Понтрягіна-Куратовського, існують й інші критерії планарності графів. Наприклад, критерій Вагнера, який дає форму критерію, еквівалентну формі Понтрягіна-Куратовського [13].

Теорема 2.27 (***критерій Вагнера***). *Формулювання*. Граф є планарним тоді й лише тоді, коли він не містить підграфів, що стягуються до графів Понтрягіна-Куратовського $\boldsymbol{K_5}$ або $\boldsymbol{K_{3,3}}$.

Наприклад, граф на рис. 2.50*а* містить в якості підграфа граф $\boldsymbol{G_1}$ (рис. 2.59) При ототожненні вершин $\boldsymbol{v_3}$ і $\boldsymbol{v_4}$ отримуємо повний п'ятикутник $\boldsymbol{G_2}$, що додатково містить петлю $\boldsymbol{e_7}$, в яку перетворилося однойменне ребро. Також при цьому відбулося ототожнення ребер $\boldsymbol{e_{10}}$ і $\boldsymbol{e_{12}}$. Після видалення петлі отримуємо повний п'ятикутник $\boldsymbol{G_3}$, який є ізоморфним до графа $\boldsymbol{K_5}$.

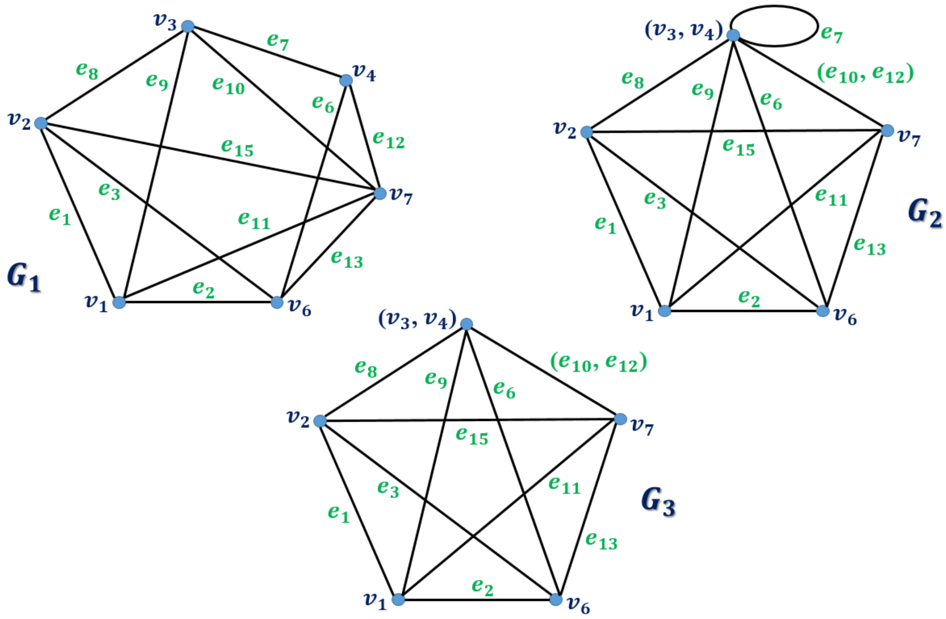


Рис. 2.59. – Стягування підграфа до графа K_5

Таким чином, граф $\boldsymbol{G}$ на рис. 2.50 містить підграф, що стягується до графа $\boldsymbol{K_5}$ в результаті стягування ребра $\boldsymbol{e_7}$. Тому, згідно з критерієм Вагнера, граф $\boldsymbol{G}$ дійсно не є планарним.

Список літератури

1. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. – Киев: «Техника», 1975. – 768 с.
2. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: «Мир», 1978. – 432 с.
3. Михайленко В. М., Федоренко Н. Д., Демченко В. В. Дискретна математика. – Київ: Видавництво Європейського університету, 2003. – 318 с.
4. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М., Печурін М. К. Основи дискретної математики. – Київ: Наукова думка, 2002. – 580 с.
5. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. – М.: «Наука», Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 384 с.
6. Гвоздинський А. М., Якімова Н. А, Губін В. О. Методи оптимізації в системах прийняття рішень: навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2006. – 324 с.
7. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики. – М.: Энергия, 1980. – 424 с.
8. Симонова И. Г. Теория графов: пособие для студентов по специальности «Прикладная математика». – Одесса: «Астропринт», 2010. – 32 с.
9. Хайрова Н. Ф. Розробка математичного і лінгвістичного забезпечення автоматизованих інформаційно-бібліотечних систем: Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. – Харків: ХНУРЕ, 2000. – 20 с.
10. Матвієнко М. П. Комп’ютерна логіка. Навчальний посібник. – К.: Видавництво Ліра-К, 2012, 288 с.
11. Гвоздинський А. М. Лінник О. В. Основи теорії керування в біомедичних системах: навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2014. – 212 с.
12. Федорова Т. М. Алгебро-логічні моделі та метод побудови ланцюгів лексичних одиниць в системах штучного інтелекту: Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. – Харків: ХНУРЕ, 2013. – 20 с.
13. Шапорев С. Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 400 с.
14. Белоусов А. И., Ткачев С. Б. Дискретная математика: Учеб. для ВУЗов/ Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004. – 744 с.
15. Андерсон Дж. А. Дискретная математика и комбинаторика. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 960 с.
16. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. – СПб: Питер, 2001. – 304 с.
17. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. – М.: МЦНМО, 2001. – 960 с.
18. Данилов В. Г., Дубнов В. Л., Лакерник А. Р., Райцин А. М. Дискретная математика. Учебное пособие для ВУЗов. – М.: Горячая линия-Телеком, 2008. – 136 с.
19. Борисенко А. А. Лекции по дискретной математике (множества и логика). – Сумы: 1998. – 136 с.
20. Гвоздінська Н. А. Предикатні моделі логічних просторів в системах подання знань: Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. – Харків: ХНУРЕ, 1999. – 20 с.
21. Зиков. О. О. Лекції з алгебри. – Одеса: «Астропринт», 2007. – 400 с.
22. Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л. Алгебра, языки, программирование. – Киев: Наук. думка, 1985. – 431 с.

23. Булитко В. К. Елементи теорії дискретних систем. – Одеса: «Астропринт», 1997. – 80 с.
24. Дементьєва В. І. Лінійна алгебра: Конспект лекцій. – Одеса: «Астропринт», 1999. – 256 с.

Навчальне видання

Якімова Наталья Анатольевна

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА
Частина 1
Теорія множин. Теорія графів

КУРС ЛЕКЦІЙ

В авторській редакції

Підп. до друку 06.09.2022. Формат 60х84/8.
Ум.-друк. арк. 4,62. Тираж 20.
Зам. № 2476.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова

Україна, 65982, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел.: (048)723 28 39, E-mail: druk@onu.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.