Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

Кафедра математичного та комп'ютерного моделювання

# Дипломна робота

бакалавра

на тему: «Дослідження задач теплопровідності стержня при різних умовах теплообміну по межах»

«Research of the problems of thermal conductivity of the rod under different conditions of heat transfer along the boundaries»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика

Рудніцький Євгеній Вікторович

Керівник канд. фіз.-мат. наук, доц. Гришин В.О.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доц. Вербіцький В.В.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від ______________ р.

Завідувач кафедри

_________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ЕК №_______
протокол № ____ від ____________ р.
Оцінка_____________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

___________ ______________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2022

# Зміст

# ВСТУП.

У дипломній роботі розглядаються завдання теплопроводності щодо термічно тонкого стержня при використанні методів чисельного розв'язання задач для рівнянь у часткових похідних. Предметом таких завдань здебільшого є математичне моделювання фізичних процесів передачі тепла. В рамках дипломної роботи поставлена мета отримати початкові уявлення та навички у найпростіших способах конструювання чисельних алгоритмів для вирішення задач на прикладі розв'язання задачі теплопровідності стержня за різних умов теплообміну. Повна математична постановка задачі поряд із диференціальними рівняннями містить також деякі додаткові умови.

У дипломній роботі як об’єкт розглядаються коректно поставлені завдання, а саме завдання, вирішення яких існує і в деякому класі початкових і граничних умов і безперервно залежить як від цих умов, так і від коефіцієнтів рівнянь.

Вирішення найпростіших завдань може бути проведено аналітичними методами. Аналітичні методи корисні тим, що дають можливість отримувати загальні рішення, які можна використовувати багаторазово. Вони мають також велике значення для побудови чисельних способів. Перевірка різницевих схем на відомих рішеннях найпростіших рівнянь дозволяє оцінити ці схеми, з'ясувати їх сильні та слабкі сторони.

Із чисельних методів будемо розглядати сітковий метод та метод скінчених різниць.

## АНАЛІТИЧНЕ ВИРІШЕННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

### Розподіл температури у стержні з теплоізольованою бічною поверхнею.(Задача 1)

**Постановка задачі**. Припустимо, є теплоізоляційний (крім, можливо, кінців) однорідний нагрітий стержень $0 \quad x \quad l$, де $l$ - довжина стержня. Температура стержня $u = u(x,\ t)$ $u = u(x,\ t)$ для будь-якої точки часу t задовольняє рівняння теплопровідності

**Математична постановка**: Знайти функцію $u(x, y)$ задовольняючу ДР і початковим умовам

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t) \qquad (0 \quad x \quad l), \\ &u(x,t_0) = f(x) \qquad\qquad (0 \quad x \quad l), \end{aligned} \tag{1}$$

де $a$ - константа, яка залежить від фізичних властивостей стержня і в початковий момент $t=t_0$ встановлюється розподіл початкової температури. $u(x,t_0) = f(x)$, функція $F(x,t)$ - густина джерел розподілу тепла.

Задача поширення тепла в стержні, кінці якого теплоізольовані, відповідає граничним умовам

$$\left.\frac{\partial u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=l} = 0. \tag{4}$$

Надалі для простоти розглянемо випадок, коли в стержні немає джерел тепла, тоді рівняння теплопровідності має форму $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . Вводячи новий час $a^2 t = \tau,$ , отримуємо задане рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ . \tag{1*}$$

Розв'язок рівняння (1*) що задовольняє початковій умові

$$u(x,\tau)\,|_{\tau=0} = f(x) \tag{3}$$

і граничним умови (4), ми будемо шукати за допомогою методу Фур'є як добуток двох функцій

$$u(x,\tau)=X(x)T(\tau), \tag{5}$$

де X(x)– функція тільки від x ; T(t) – функції тільки від t. Оскільки

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=X(x)T\ (\tau),\frac{\partial u}{\partial x}=X\ (x)T(\tau),\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X\ \ (x)T(\tau),$$

то заміна відповідних виразів в рівнянні (1*) призводить до відношення (задачі Штурма-Ліувілля)

$$X(x)T\ (\tau)=X\ \ (x)T(\tau),\ \text{ або }\ \frac{X\ \ (x)}{X(x)}=\frac{T}{T(\tau)}.$$

Оскільки функція є розв'язком рівняння (1*), то остання рівність повинна виконуватися для всіх $x$ і $\tau$ (з відповідної області їх варіації). Це можливо тільки тоді, коли обидві частини останньої рівності - константи, бо ліва сторона може залежати тільки від $x$ , а права може залежати тільки від $\tau$ . Позначте цю константу $c$, тоді

$$\frac{X\ \ (x)}{X(x)}=\frac{T}{T(\tau)}=c,$$

звідки

$$T\ (\tau)-cT(\tau)=0; \tag{6}$$

$$X\ \ (x)-cX(x)=0. \tag{7}$$

Рівняння (6) — звичайне диференціальне рівняння першого порядку. Інтегруючи це рівняння, ми отримуємо

$$\ln T(\tau)=c\tau+\ln C, T(\tau)=e^{c\tau+\ln C}, T(\tau)=Ce^{c\tau}.$$

Оскільки температура не може підвищуватися нескінченно з плином часу (немає джерел тепла), функція $T(\tau)$ має таку ж властивість. Отже, в останній формулі $c$ може бути тільки негативним, тобто

$$c=-\lambda^2(\lambda\quad 0). \tag{8}$$

Отже, функція $T(\tau)$ виражається формулою

$$T(\tau)=Ce^{-\lambda^2\tau}. \tag{9}$$

Рівняння (7) беручи до уваги (8) приймає форму

$$X\ \ (x)+\lambda^2 X(x)=0.$$

Це звичайне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами має рішення

$$X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x, \tag{10}$$

де $C_1$та $C_2$ – довільні константи.

Підставляючи функції (9) і (10) у формулу (5), отримуємо

$$u=(\alpha\cos\lambda x+\beta\sin\lambda x)e^{-\lambda^2\tau}, \tag{11}$$

Часткова похідна цієї функції на x виражається формулою

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lambda(-\alpha\sin\lambda x+\beta\cos\lambda x)e^{-\lambda^2\tau}.$$

Числа $\alpha,\beta,l$ виберемо такі, щоб були задоволені умови (4):

$$\lambda(-\alpha\sin 0+\beta\cos 0)e^{-\lambda^2\tau}=0 \qquad -\alpha\sin 0+\beta\cos 0=0$$
$$\lambda(-\alpha\sin\lambda l+\beta\cos\lambda l)e^{-\lambda^2\tau}=0 \qquad -\alpha\sin\lambda l+\beta\cos\lambda l=0.$$

З останніх рівнянь випливає, що $\beta=0,\ \sin\lambda l=0.$ тому

$$\lambda l=n\pi(n=1,2,3,...),$$

$$\lambda_n=\frac{\pi n}{l}(n=1,2,3,...). \tag{12}$$

Приймаються тільки додатні значення $n$, оскільки

$$\cos\lambda x=\cos(-\lambda x),(-\lambda)^2=\lambda^2.$$

Оскільки $b\ =\ 0$ , функція (12) приймає однакові значення при $l$ та $-l$ ; далі, $l>0$ відповідно до умови (11), функція (12) приймає форму

$$u_n(x,\tau)=a_n\cos\lambda_n x e^{-\lambda_n^2\tau}$$

або, враховуючи (12), отримуємо власні функції, що відповідають власним значенням

$$u_n(x,\tau)=a_n\cos\frac{n\pi x}{l}e^{\frac{\pi^2 n^2}{l^2}\tau} \tag{13}$$

Розв'язання рівняння, що задовольняє граничним умовам, - сума ряду, що складається з функцій (13), тобто

$$u(x,\tau)=\underset{n=1}{}u_n(x,\tau)=\underset{n=1}{}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}e^{\frac{\pi^2n^2}{l^2}\tau}. \tag{14}$$

Давайте виберемо коефіцієнти $a_n$ цього ряду таким чином, щоб функція $u(x,\tau)$ також відповідала початковій умові (3):

$$u(x,\tau)|_{\tau=0}=f(x),\quad \underset{n=1}{}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}=f(x).$$

Остання рівність означає, що функція $f(x)$ в інтервалі $[0,1]$ повинна бути розкладена на ряд Фур'є косинусами, коефіцієнти такого розкладання визначаються формулою

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx(n=1,2,3,...). \tag{15}$$

Таким чином, функція (14), для якої $a_n$ визначається формулою (15), є розв'язком рівняння (1 *), що задовольняє початковій умові (3) і граничним умовам (4).

Беручи до уваги рівність $\tau=a^2t$, ми робимо висновок, що функція

$$u(x,t)=\underset{n=1}{}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}e^{\frac{\pi^2n^2}{l^2}t}, \tag{16}$$

для яких $a_n$, яке визначається формулою (15), є розв'язком рівняння (1), що задовольняє початковій умові (3) і граничним умовам (4).

## Теплопровідність стержня з заданою температурою бічної поверхні. (Задача 2).

Як приклад проблеми з теплоізольованою бічною поверхнею розглянемо крайову задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=F(x,t) \qquad (0 \quad x \quad l),$$

$$u(x,t_0)=f(x) \qquad (0 \quad x \quad l),$$

при визначенні температури $u(x,t)$ тонкого однородного ізольованого стержня довжиною $l = 3м$ коли його кінці теплоізольовані, що відповідає граничним умовам,

$$\left.\frac{\partial u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=l} = 0.$$

і чия початкова температура $f(x) = x(3 - x),.$

Визначити температуру стержня в момент часу $t > 0$.

Розподіл температури в стержні описується одновимірним рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Температура стержня залежить від його початкової температури

$$u(x,0) = \varphi(x) = x(3-x).$$

За формулою (21) ми визначаємо $\alpha_n$:

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^1 \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l} = \frac{2}{3}\int_0^3 x(3-x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x(3-x) & du = (3-2x)dx \\ dv = \sin\frac{n\pi x}{3}dx & v = -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{3}\left( \left.\frac{3x(3-x)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\right|_0^3 + \frac{3}{n\pi}\int_0^3 (3-2x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx \right) =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = 3-2x & du = -2dx \\ dv = \cos\frac{n\pi x}{3}dx & v = \frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left( \left.\frac{3(3-2x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right|_0^3 + \frac{6}{n\pi}\int_0^3 \sin\frac{n\pi x}{3}dx \right) = -\frac{12}{n^2\pi^2}\left.\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\right|_0^3 =$$

$$= \frac{36}{(n\pi)^3}\cos(n\pi - 1) = -\frac{36}{(n\pi)^3}\left((-1)^k - 1\right) = \frac{72}{\left(2n-1\right)^3\pi^3} \qquad (22)$$

Знайдені значення $\alpha_n$ підставляються в (20), тоді рішення задачі має форму:

$$u(x,t)=\frac{72}{\pi^3}\ _{n=1}\ \frac{1}{\left(2n-1\right)^3}\sin\frac{\pi(2n-1)x}{3}e^{-\ \frac{\pi(2n-1)a}{3}\ ^{2}t}$$

## Змішана крайова задача для прямокутного стержня (Задача 3)

**Постановка задачі**. Нехай нескінченний однорідний прямокутний стержень прямокутного профілю $0 \quad x \quad p,\ 0 \quad y \quad s,\ - \quad < z < +$ має задану початкову температуру $\varphi(x,y)$. Визначте температуру стержня при t > 0, якщо температура поверхні стержня підтримується на нулі.

**Математична постановка задачі**. : Знайти обмежену функцію $u(x,y;t)$

$$\begin{array}{lll} u_t = a^2(u_{xx}+u_{yy}), & (x,y) & ,\ t>0; \\ u(x,y;0)=\varphi(x,y), & (x,y) & ; \\ u\big|_{(x,y)\ \ \partial} = 0, & 0<t<T, & \end{array} \qquad (1.1)$$

Де через позначений прямокутник

$$=\left\{(x,y):0 \quad x \quad p, 0 \quad y \quad s\right\},$$

Якщо шукати рішення задачі (1.1) у вигляді потрійного ряду

$$u(x,y;t)=\ _{k=1\ n=1}\ X_k\left(x\right)Y_n\left(y\right)T_{kn}\left(t\right), \qquad (1.2)$$

то, якщо підставити ряд до рівняння $u_t = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right),$ ми отримуємо, що воно виконується, якщо члени ряду в лівій і правій частинах з однаковими числами рівні:

$$X_k(x)Y_n(y)T_{kn}(t)=a^2\ \left(X_k(x)Y_n(y)+X_k(x)Y_n(y)\right)T_{kn}(t).$$

Розділив цю рівність на $a^2\ \ X_k(x)Y_n(y)T_{kn}(t),$ отримаємо:

$$\frac{T_{kn}(t)}{a^2T_{kn}(t)}=\frac{X_k(x)}{X_k(x)}+\frac{Y_n(y)}{Y_n(y)}. \qquad (1.3)$$

Оскільки зліва - це функція, яка залежить тільки від $t$, а праворуч від $(x,y)$ тоді це можливо тільки якщо і ліва, і права частина цієї рівності дорівнюють константі, то рішення треба шукати аналітично і цей ряд можна записати як наступне:

$$u(x,y;t) = \sum_{i=1}^{n} X_k(x) \sum_{n=1} Y_n(y) T_{kn}(t)$$

проблема (1.1) повинна починатися з вирішення двох проблем Штурма-Ліувілля - для $X_k(t)$ та $Y_n(y)$ при дотриманні граничних умов

$$X(0) = X(p) = 0,\ \mathrm{Y}(0) = \mathrm{Y}(s) = 0. \tag{1.5}$$

Тобто функції $X_k(x)$ та $Y_n(x)$ є рішення проблеми Штурма-Ліувілля

$$\begin{array}{ll} X_k(x) + \mu_k X_k(x) = 0, & Y_n(y) + v_n Y_n(y) = 0 \\ X(0) = X(p) = 0, & \mathrm{Y}(0) = \mathrm{Y}(s) = 0, \end{array} \tag{1.6}$$

давайте зафіксуємо результат у вигляді багатьох нетривіальних рішень

$$\mu_k = \frac{\pi^2 k^2}{p^2},\ X_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{p},\ v_n = \frac{\pi^2 n^2}{s^2},\ Y_n(x) = \sin \frac{\pi n y}{s},\quad k,n \quad \mathrm{N}.$$

Завдяки співвідношенню $\mu_k + v_n = \lambda_{kn}$ для функцій $T_{kn}$ маємо задачу

$$T_{kn}(t) + \lambda_{kn} a^2 T_{kn}(t) = 0 \qquad t > 0,\ \ \lambda_{kn} = \frac{\pi^2 k^2}{p^2} + \frac{\pi^2 n^2}{s^2} \tag{1.7}$$

Розв'язок цього лінійного однорідного рівняння другого порядку має вид

$$T_{kn}(t) = A_{kn} e^{-a^2 \lambda_{kn} t} \quad t > 0, \tag{1.8}$$

де $A_{kn}$ - довільні константи.

Ми будемо шукати рішення проблеми (1.1) у вигляді ряду (1.2). Оскільки функції, знайдені на кроці 2 $X_k(x)$ та $Y_n(y)$ задовольняють граничним умовам (1.5), то функція

$$u(x,y;t) = \sum_{k=1} \sum_{n=1} X_k(x) Y_n(y) T_{kn}(t)$$

задовольняє граничній умові $u\big|_{(x,y)\ \partial} = 0$. І сила міркувань на кроці $1, u(x,y;t)$ є рішення рівняння $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy})$.

З умов проблеми ми ще не використали лише початкову умову $u(x,y;0)=\varphi(x,y)$. Для функції $u(x,y;t)$ з типу, що шукається (1.2), означає:

$$\varphi(x,y)=u(x,y;0)=\sum_{k=1}\sum_{n=1}\sin\frac{\pi kx}{p}\sin\frac{\pi ny}{s}A_{kn} \tag{1.9}$$

Нехай функція $\varphi(x,y)$ , що входить до початкових умов, розкладається в прямокутнику Р на подвійний ряд Фур'є, по синусам:

$$\varphi(x,y)=\sum_{k=1}\sum_{n=1}a_{kn}\sin\frac{\pi kx}{p}\sin\frac{\pi ny}{s}\ , \tag{1.10}$$

З коефіцієнтами

$$a_{kn}=\frac{4}{ps}(\varphi,X_t,Y_m)=\frac{4}{ps}\int_0^p\int_0^s\varphi(x,y)\sin\frac{\pi kx}{p}\sin\frac{\pi ny}{s}\,dxdy \tag{1.11}$$

Отримуємо формулу (1,11) для розрахунку коефіцієнтів Фур'є для подвійного ряду за синусом. Для цього, як завжди, помножимо (1,10) на $\sin\frac{\pi lx}{p}\sin\frac{\pi my}{s}$ та проінтегруємо по П. З огляду на ортогональність власних функцій задач Штурма-Ліувілля, отримаємо:

$$(\varphi,X_l\ Y_m)=a_{lm}\int_0^p\int_0^s\sin^2\frac{\pi kx}{p}\sin^2\frac{\pi ny}{s}\,dxdy=a_{lm}\int_0^p\sin^2\frac{\pi lx}{p}dx\int_0^s\sin^2\frac{\pi my}{s}dy=$$

$$=\frac{a_{lm}}{4}\int_0^p\left(1-\cos\frac{\pi lx}{p}\right)dx\int_0^s\left(1-\cos\frac{\pi my}{s}\right)dy=a_{lm}\frac{ps}{4}$$

З рівнянь (1.9), (1.10) і (1.11) отримуємо

$$A_{kn}=a_{kn}=\frac{4}{ps}\int_0^p\int_0^s\varphi(x,y)\sin\frac{\pi kx}{p}\sin\frac{\pi ny}{s}\,dxdy \tag{1.12}$$

Отже, ми знаємо функції $T_{kn}(t)$ повністю:

$$T_{kn}(t)=\left(\frac{4}{ps}\int_0^p\int_0^s\varphi(x,y)\sin\frac{\pi kx}{p}\sin\frac{\pi ny}{s}\,dxdy\right)e^{-a^2\lambda_{kn}t},\ t>0 \tag{1.13}$$

Все, що нам потрібно зробити, це замінити знайдені функції у формулі (1.2) $T_{kn}(t)$ із (1.13). В результаті було отримано рішення шуканої задачі

$$u(x,y;t)=\frac{4}{ps}\sum_{i=1}^{n}\int_0^p\int_0^s \varphi(\xi,\eta)\sin\frac{\pi k\xi}{p}\sin\frac{\pi n\eta}{s}\,d\xi d\eta\,\sin\frac{\pi kx}{p}\sin\frac{\pi ny}{s}\,e^{-a^2\lambda_{kn}t},$$

*где* $\lambda_{kn}=\dfrac{\pi^2k^2}{p^2}+\dfrac{\pi^2n^2}{s^2}.$

## ЧИСЕЛЬНЕ ВИРІШЕННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

**Сітковий метод.**

Метод заснований на ідеї заміни похідних на скінченні різницеві відносини. Сформулюємо метод сітки для випадку двох незалежних змінних. Припустимо, в площині $XOY$ є якась область $G$ з межею $\Gamma$. Давайте побудуємо два сімейства паралельних ліній на площині:

$$x=x_0+ih \qquad (i=0,\pm1,\pm2,...),$$
$$y=y_0+kl \qquad (k=0,\pm1,\pm2,...)$$

Точки перетину цих ліній називаються вузлами. Два вузли називаються сусідніми, якщо вони відокремлені один від одного в напрямку осі OX або O$Y$ на відстань, що дорівнює кроку сітки $h$ або $l$ відповідно. Давайте виберемо вузли, які належать до області $G+\Gamma$, і деякі вузли, які не належать до цієї області, але розташовані на відстані менше, ніж за крок, від границі Г. Ті вузли, в яких всі чотири сусідні вузли належать до виділеного набору вузлів, називаються внутрішніми вузлами. Решта виділених вузлів називаються граничними.

Значення шуканої функції $u=u(x,y)$ в вузлах сітки ми обозначимо за $u_{ik}=u(x_0+ih,y_0+kl)$. У кожному внутрішньому вузлі $(x_0+ih,y_0+kl)$ замінемо часткові похідні різницевими відносинами:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{ik}\approx\frac{u_{i+1,k}-u_{i-1,k}}{2h}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{ik}\approx\frac{u_{i,k+1}-u_{i,k-1}}{2l};$$

У прикордонних умовах ми змушені використовувати менш точні формули форми:

$$\frac{\partial u}{\partial x}_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{h} \quad , \qquad \frac{\partial u}{\partial y}_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l} \quad u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,j} + 4u_{ij} + u_{i+1,j})..$$

Аналогічно замінюються часткові похідні другого порядку, наприклад:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2}.$$

Ці заміни похідних в кожному вузлі сітки дозволяють звести рішення диференціальних рівнянь з частковими похідними до розв'язку системи диференціальних рівнянь. Розглянемо змішану задачу для рівняння теплопровідності, а саме: $u(x,t),$ знайдіть функцію, що задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

початкова умова

$$u(x,0) = f(x) \qquad (0 < x < s) \tag{2}$$

Граничні умови

$$u(0,t) = \psi(t), \quad u(s,t) = \varphi(t) \tag{3}$$

До задач (1) - (3) призводить, зокрема, проблеми поширення тепла в однорідному стержні довжини s. Вводячи нову змінну $\tau = a^2 t$ , рівняння (1) доводиться до форми

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Тому в майбутньому ми приймемо $a = 1$.
Давайте побудуємо в напівсмузі $t \quad 0,\ 0 \quad x \quad s$ дві сім'ї паралельних прямих:

$$x = ih \quad (i = 0,1,2,...),$$
$$t = jl \quad (j = 0,1,2,...)$$

Обозначимо $x_i = ih$, $t_j = jl$, $u(x_i,t_j) = u_{ij}$ і приблизно замінимо у кожному внутрішньому вузлі $(x_i,t_j)$ похідну $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ різницевим відношенням

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} \tag{4}$$

А похідну $\frac{\partial u}{\partial t}$ одним з 2 різницевих відносин

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l}, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{l}, \tag{6}$$

Потім для рівняння (1) при а=2 отримаємо 2 типи скінчено-різницевих рівнянь:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}, \tag{7}$$

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}, \tag{8}$$

Позначивши $\sigma = \frac{l}{h^2}$, ми переводимо ці рівняння у форму

$$u_{i,j+1} = (1-2\sigma)u_{ij} + \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \tag{9}$$

$$(1-2\sigma)u_{ij} - \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + u_{i,j-1} = 0 \tag{10}$$

При формуванні рівняння (7) явна схема вузлів (рис. 1), для рівняння (8)- неявна схема вузлів (рис. 2)

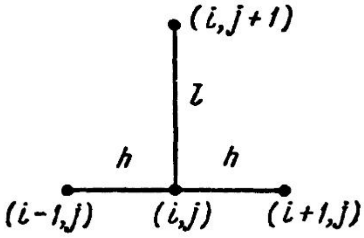



рис. 1

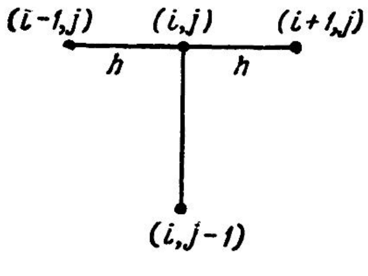



рис. 2

При виборі числа $\sigma$ в рівняннях (9), (10) повинні враховувати дві обставини:

1) Похибка повинна бути найменшою;

2) Різницеве рівняння має бути стійким.

Доведено, що рівняння (9) буде стабільним при $0<\sigma \;\; \frac{1}{2}$, рівняння (10) для будь-якому $\sigma$.

## Розподіл температури в стержні з теплоізольованою бічною поверхнею. (Чисельне вирішення задачі 1)

Знайдіть рішення рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при наступних початкових і граничних умовах;

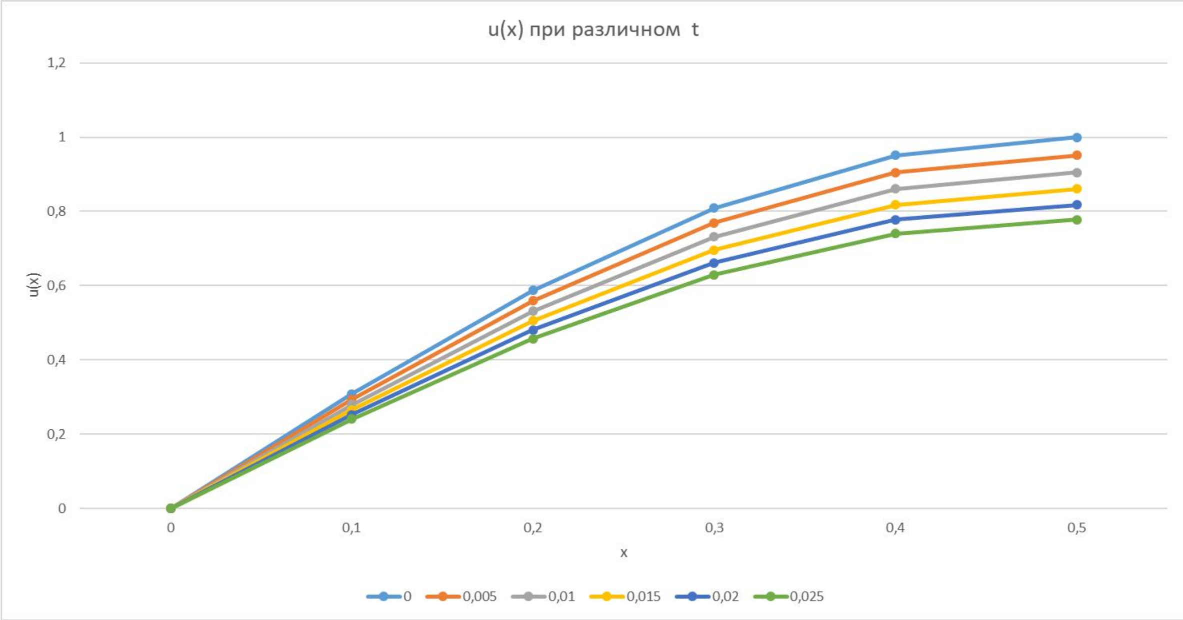
$$u(x,0) = 4x(1-x) \quad (0 \quad x \quad 1);$$

$$u(0,t) = 0 \quad \text{и} \quad u(1,t) = 0 \quad (0 \quad t < \quad ).$$

Рішення буде прийматися шляхом явної різницевої схеми (9). Для розрахунків ми поставимо $h = 1/10$ і тому, l=h$^2$/6= 1/600 і будуємо систему вузлів $\left(x_i, t_j\right)$, де $x_i = 0, l_i, t_j = j/600$ . Результати розрахунків представлені в таблиці і на графіку, і програмний код в додатку.

Таблиця 1. Розв'язання рівняння теплопровідності методом сіток

| | i=0 | i=1 | i=2 | i=3 | i=4 | i=5 | i=6 | i=7 | i=8 | i=8 | i=10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| J=0 | 0 | 0,360 | 0,040 | 0,840 | 0,960 | 1,000 | 0,960 | 0,840 | 0,640 | 0,360 | 0 |
| j=1 | 0 | 0,347 | 0,627 | 0,827 | 0,947 | 0,987 | 0,947 | 0,827 | 0,627 | 0,347 | 0 |
| j=2 | 0 | 0,336 | 0,613 | 0,813 | 0,933 | 0,973 | 0,933 | 0,813 | 0,613 | 0,336 | 0 |
| j=3 | 0 | 0,326 | 0,600 | 0,800 | 0,920 | 0,960 | 0,920 | 0,800 | 0,600 | 0,326 | 0 |
| j=4 | 0 | 0,317 | 0,588 | 0,787 | 0,907 | 0,947 | 0,907 | 0,787 | 0,588 | 0,317 | 0 |
| j=5 | 0 | 0,309 | 0,576 | 0,774 | 0,894 | 0,934 | 0,894 | 0,774 | 0,576 | 0,309 | 0 |
| j=6 | 0 | 0,302 | 0,564 | 0,761 | 0,881 | 0,921 | 0,881 | 0,761 | 0,564 | 0,302 | 0 |




**<u>Мішана крайова задача для стержня прямокутного перерізу (Чисельне рішення задачі 2)</u>**

**Математична постановка задачі**: Знайти функцію $u(x, y;t)$

$$\begin{array}{lll} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & (x, y) \quad & , t > 0; \\ u(x, y;0) = \varphi(x, y), & (x, y) \quad & ; \\ u\big|_{(x,y)\ \ \partial} = 0, & 0 < t < T, & \end{array} \qquad (1)$$

для стаціонарного випадку, коли $u(x, y;t) \to u(x, y)$ (при $t \to \quad$ )

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

Ми використовуємо так званий метод встановлення. В цьому випадку вирішується нестаціонарне рівняння теплопровідності з деяким початковим розподілом температури і стаціонарними граничними умовами. У рішенні час мчить до нескінченності, коли рішення «встановлюється», тобто перестає змінюватися з плином часу. Це рішення збігається з розв'язком стаціонарного рівняння. Нестаціонарне рівняння теплопровідності має форму

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = 0. \qquad (2)$$

Коефіцієнт $a$ теплопровідності впливає тільки на швидкість встановлення рішення, тому поставимо його рівним одному. На початковому етапі часу

$$u\left(x, y\right)\Big|_{t=0} = u_0(x, y).$$

Так як рішення проблеми не залежить від початкового розподілу температури, можна поставити $u_0(x, y) \quad 0$. Накрийте область D рівномірною сіткою з кроками Δx і Δy по осям x і y відповідно (рис. 1). Запишемо наступну різницеву аппроксимацію рівняння (2)

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1,j}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k}}{\Delta x^2} - \frac{u_{i,j+1}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta y^2} = 0 \qquad (3)$$

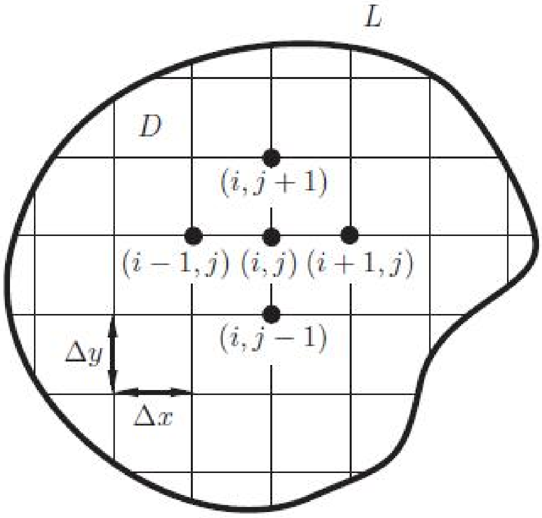



Рис. 1

Тут Δt – приріст часу, індекс k – по часу, індекси i и j – при координатах x і y відповідно. У виразі (3) всі терміни записуються для кроку k-го часу і тільки один для (k+1)-го. Тому для внутрішніх точок сітки висловимо значення температури в наступний раз крок через значення на попередньому.

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^{k} + \Delta t \quad \frac{u_{i+1,j}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta y^2} \qquad (4)$$

Для точок на кордоні температура визначається від граничного стану

$$u_L^{k+1} = f(s). \qquad (5)$$

Точками межі будуть вважатися вузли сітки, що лежать на лінії L, або вузли найближчої до цієї сітки. Як критерій для встановлення рішення ми використовуємо критерій $\max\limits_{i,j}$

$$\max_{i,j} \left| u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k} \right| < \varepsilon, \qquad (6)$$

де ε – задане мале додатнє число. Побудуємо наступну процедуру ітераційного рішення:

1. t = 0, k = 0. $u_{ij}^{0}=0$ для всіх внутрішніх точок в області D, $u_{L}^{0}=f(s)$ для всіх точок на границі L.

2. За формулою (4) обчислимо значення $u_{i,j}^{k+1}$ у внутрішніх точках області D, по (5) $-u_{L}^{k+1}$ на границі L.

3. Якщо критерій (6) не виконується, то t = t + Δt, k = k + 1, перейдіть до кроку 2. Якщо виконується, ітераційний процес завершується. При виконанні розрахунків вибирається Δт з умов забезпечення стійкості різницевої схеми (3):

$$\Delta t \quad \frac{1}{2}\ \frac{1}{\Delta x^{2}}+\frac{1}{\Delta y^{2}}\ ^{-1}.$$

Комп’ютерна програма для вирішення цієї задачі і таблиці результатів винесені в додаток

**Висновок**

Ми вирішили задачі теплопроводності аналітичними методами а потім і чисельними і таким чином отримали початкові уявлення та навички у найпростіших способах конструювання чисельних алгоритмів для вирішення задач на прикладі розв'язання задачі теплопровідності стержня за різних умов теплообміну

## Список літератури

1. Владимиров В.С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 2003,-398

2.Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1988. - 512 с.

3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. - 735 с.

4. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. - М.:Наука, 2001. - 271 с.

5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. 6-е изд. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008.

6. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. - М.: Высшая школа, 1970. - 710 с.

7. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. вычислительные методы. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Издательский дом МЭИ, 2008.

8. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. - М.: Наука, 1975. - 127 с.

9. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989.

10. Самарский, А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1982.

11. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002.

## **Додаток**

Задача 2. Розподіл температури в стержні прямокутного перерізу з бічної поверхні

Температура, встановлена по краю, вважається постійною. Температура на гранях обозначена $T_k \ \left(k = \overline{1,4}\right)$ вважається константним і відраховується від лівого краю проти годинникової стрілки. Температура по краях:

Позначимо:

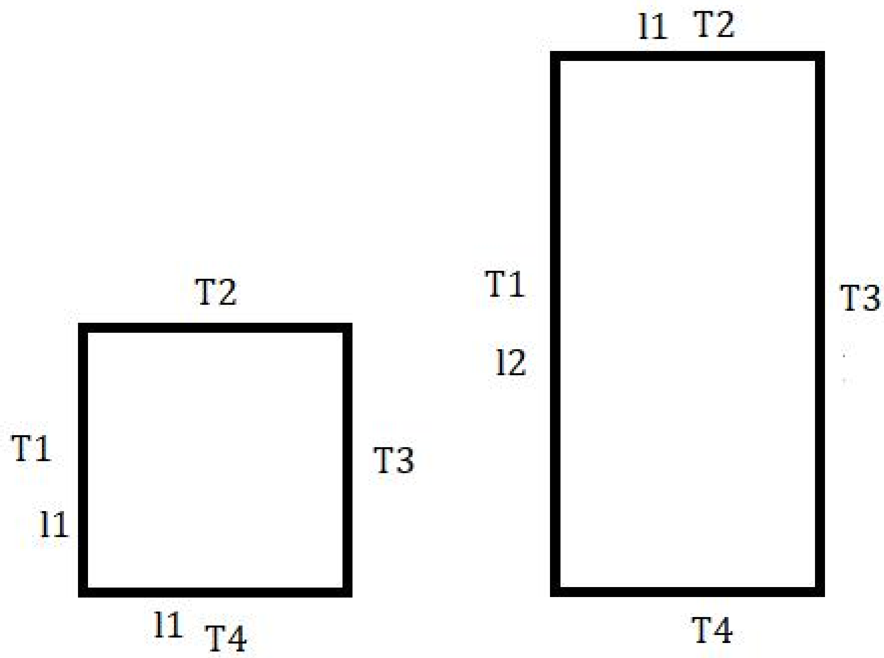


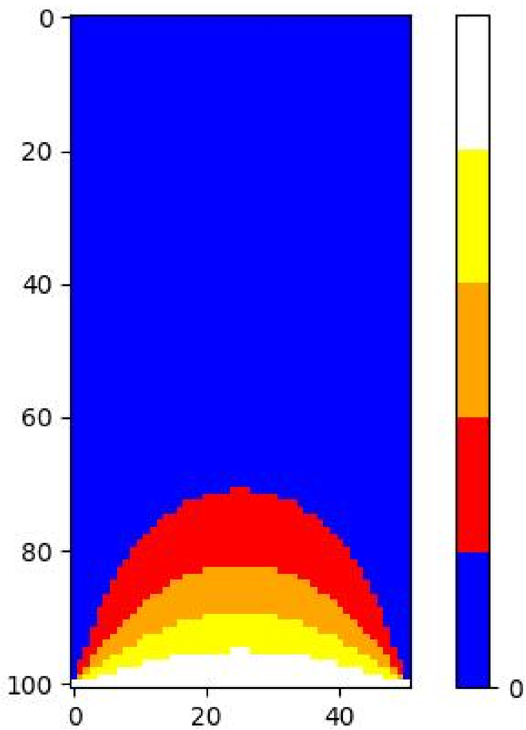

Рис. 2

Код:

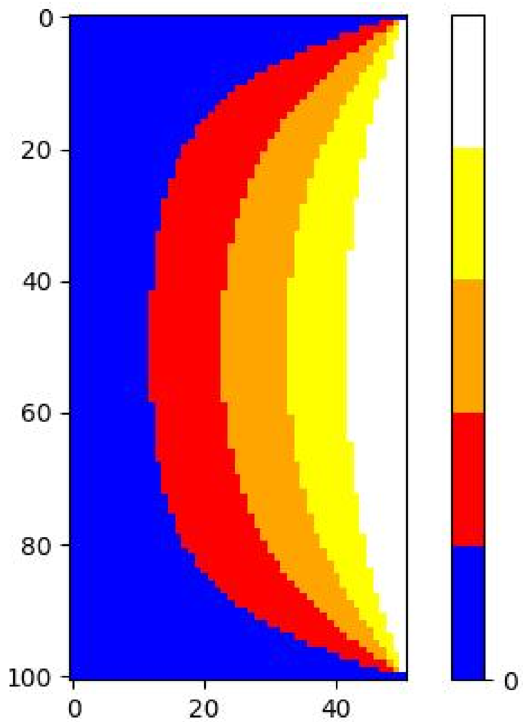
```
a = 1

b = 1
n = 51
m = 51
t1 = 1
t2 = 0
t3 = 0
t4 = 0
import numpy as np
dx = a / n
dy = b / m
```

```
dt = ((1 / (dx ** 2) + 1 / (dy ** 2)) ** -1 / 2) * 0.9
phi = np.zeros([2, n, m])
np.set_printoptions(threshold=np.inf)
for x in range(0, n):
    phi[0][x][0] = t4
    phi[1][x][0] = t4
    phi[0][x][m - 1] = t2
    phi[1][x][m - 1] = t2
for x in range(0, m):
    phi[0][n - 1][x] = t1
    phi[1][n - 1][x] = t1
    phi[0][0][x] = t3
    phi[1][0][x] = t3
for x in range(1, 100):
    for i in range(1, n - 1):
        for j in range(1, m - 1):
            k = (x - 1) % 2
            phi[x % 2][i][j] = phi[k][i][j] + dt * (
                        ((phi[k][i + 1][j] - 2 * phi[k][i][j] +
phi[k][i - 1][j]) / (dx ** 2)) + (
                            (phi[k][i][j + 1] - 2 * phi[k][i][j] +
phi[k][i][j - 1]) / (dy ** 2)))
np.set_printoptions(precision=3, suppress=True)
print(phi[0])
```

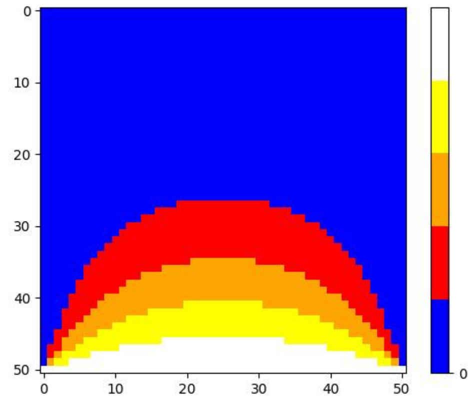
Вывод:



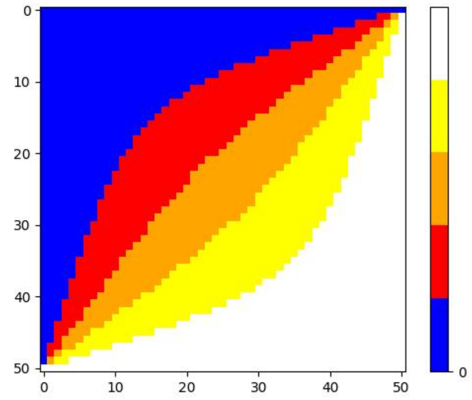

l1 = 1;l2 =2;T1=T2=T3=0;T4=1



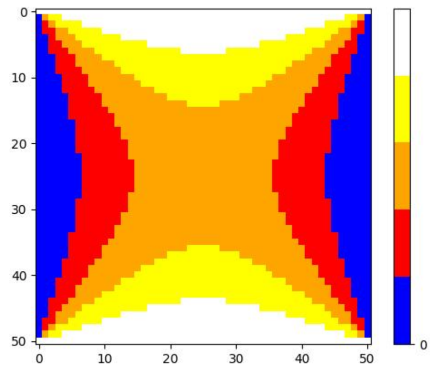

l1 = 1;l2 =2;T1=T2=T4=0;T3=1



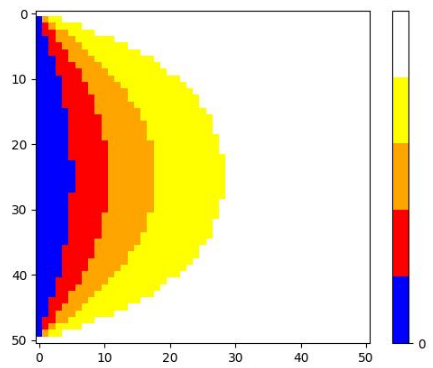

l =1;T1=T2=T3=0;T4=1




l =1;T1=T2=0;T3=T4=1




l =1;T1 =T3=0;T2=T4=1




l =1;T1=0;T2=T3=T4=1

Ось код програми С++ для задачі «Мішана краєва задача для стержня прямокутного перерізу »:

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;


int main() {
    double u[7][11];
    cout << fixed;
    cout.precision(3);
    for (int j = 0; j < 7; j++) {
         u[j][0]=0;
         u[j][10]=0;
    }
    for (int i = 1; i < 10; i++) {
        u[0][i]=0.4*i*(1-0.1*i);
    }
    for (int j = 1; j < 7; j++) {
        for (int i = 1; i < 10; i++) {
```

```
                u[j][i]=(u[j-1][i-1]+4*u[j-1][i]+u[j-1][i+1])/6;
            }
        }

        for (int j = 0; j < 7; j++) {
            for (int i = 0; i < 11; i++) {
                cout<<u[j][i]<<" ";
            }
            cout<<endl;
        }
        return 0;
    }
```