Вісник Одеськ. держ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат.науки.– 1999.– Т.4, вип.4.– С.83–85.

УДК 514.764

И. Н. Курбатова
Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ГРУППАХ ЛИ

Введено поняття афінної зв'язності на групі Лі, асоційованної з іншою афінною зв'язністтю. Вивчено залежність між властивостями зв'язності, асоційованної з О-зв'язністтю Картана на G_r, та самою групою G_r.

Введено понятие аффинной связности на группе Ли, ассоциированной с другою аффинной связностью. Изучена зависимость между свойствами связности, ассоциированной с О-связностью Картана на G_r и самой группой G_r.

The conception of the affine connection on the Lie group, associated with the other affine connection, has been introduced. The dependence between the connection properties, associated with Cartan O-connection and G_r group itself has been studied.

Введение. В работе [1] развивается теория приближений римановых пространств. Мы вводим в рассмотрение приближение 1-го порядка пространства аффинной связности на своеобразном носителе – локальной группе Ли.

1. Понятие ассоциированной связности на группе Ли. Рассмотрим группу Ли G_r. Пусть ∇ – некоторая аффинная связность на G_r, а $u^1, u^2, \ldots, u^r$ – канонические параметры в окрестности единицы e. Введем в этой окрестности аффинную связность …учения $\tilde{\nabla}$ с компонентами

$$\tilde{\Gamma}^h_{ij}(u) = -\tfrac{1}{3} \underset{\circ}{R}{}^h_{(ij)\alpha} u^\alpha, \quad i, j, h, \alpha = 1,2,\ldots,r \tag{1}$$

в натуральном репере. Здесь $\underset{\circ}{R}{}^h_{ijk}$ – значение компонент тензора Римана связности ∇ в единице группы e, круглыми скобками обозначена операция симметрирования без множителя. Назовем $\tilde{\nabla}$ связностью, ассоциированной с ∇. Нетрудно видеть, что канонические параметры (u^i) по необходимости оказываются римановой системой координат с началом в единице группы e для пространства аффинной связности $(G_r, \tilde{\nabla})$. Само же $(G_r, \tilde{\nabla})$ реализует приближение 1-го порядка пространства аффинной связности (G_r, ∇) в окрестности единицы группы e и, следовательно, в значительной мере должно отражать его свойства.

Возьмем в качестве ∇ О–связность Картана [2]. Тогда

$$\tilde{\Gamma}^h_{ij}(u) = \tfrac{1}{12} C^h_{\alpha(i} C^\alpha_{j)\beta} u^\beta, \tag{2}$$

где C^h_{ij} – структурные константы G_r. Имеет место

Теорема 1. *Связность (2) инвариантна относительно присоединенной группы* $\mathrm{Ad}(G_r)$.

Доказательство проводится непосредственным вычислением производной Ли объекта связности $\tilde{\Gamma}$ по отношению к фундаментальным векторным полям группы $\mathrm{Ad}(G_r)$ $\xi^h_i = C^h_{\alpha i} u^\alpha$ с учетом тождества Бианки.

2. Связность, ассоциированная с О-связностью Картана на TG_r. Рассмотрим касательную группу TG_r с индуцированными координатами (u^i, u^{i+r}). Нетрудно проверить, что если (u^i) – канонические параметры G_r в окрестности единицы e, то (u^i, u^{i+r}) – канонические параметры группы TG_r в окрестности ее единицы. Если X_i – левоинвариантные базисные векторные поля на G_r, то есть $[X_i, X_j] = C^\alpha_{ij} X_\alpha$, то в качестве базисных левоинвариантных векторных полей на TG_r можно взять их полные и вертикальные лифты [3]: $Y_i = {}^cX_i,\ Y_{i+r} = {}^vX_i$. Тогда с учетом свойств полных и вертикальных лифтов

$$[Y_i, Y_j] = [{}^cX_i, {}^cX_j] = C^a_{ij}\,{}^cX_a = C^a_{ij}Y_a,$$

$$[Y_i, Y_{j+r}] = [{}^cX_i, {}^vX_j] = C^a_{ij}\,{}^vX_a = C^a_{ij}Y_{a+r},$$

$$[Y_{i+r}, Y_{j+r}] = [{}^vX_i, {}^vX_j] = 0.$$

Таким образом, структурные константы C^A_{BC} $(A,B,C = 1,2,\dots,2r)$ группы TG_r распались на блоки: $C^a_{bc} = C^{a+r}_{b+r\,c} = C^{a+r}_{b\,c+r}$ – структурные константы группы G_r,

$$C^{a+r}_{bc} = C^a_{b+r\,c} = C^a_{b\,c+r} = C^a_{b+r\,c+r} = C^{a+r}_{b+r\,c+r} = 0,\quad a,b,c = 1,2,\dots,r.$$

Связность, ассоциированная с О-связностью Картана на TG_r, в натуральном репере имеет компоненты

$$\overset{\bullet}{\Gamma}{}^A_{BC}(u) = \tfrac{1}{12}C^A_{\Lambda(B}C^\Lambda_{C)\Omega}u^\Omega,\quad A,B,C,\Lambda,\Omega = 1,2,\dots,2r,$$

среди которых ненулевыми будут лишь блоки

$$\overset{\bullet}{\Gamma}{}^a_{bc} = \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{a+r}_{b\,c} = \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{a+r}_{b+r\,c} = \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{a+r}_{b\,c+r} = \tfrac{1}{12}C^a_{\alpha(b}C^\alpha_{c)\beta}u^\beta = \tilde{\Gamma}^a_{bc},$$

$$\Gamma^{a+r}_{b+r\,c+r} = \tfrac{1}{12}C^a_{\alpha(b}C^\alpha_{c)\beta}u^{\beta+r} = \frac{\partial\tilde{\Gamma}^a_{bc}}{\partial u^\beta}u^{\beta+r}.$$

Отсюда заключаем, что $\left(\overset{\bullet}{\Gamma}{}^A_{BC}(u^\Omega)\right) = {}^c\left(\tilde{\Gamma}^h_{ij}(u^i)\right)$. Нами доказана

Теорема 2. *Аффинная связность* Γ, *ассоциированная с О-связностью Картана на касательной группе* TG_r, *совпадает с полным лифтом из* G_r *в* TG_r *связности* $\tilde{\nabla}$, *ассоциированной с О-связностью Картана группы* G_r.

3.Специальные ассоциированные связности на G_r. На основании (1) тензор Римана объекта связности $\tilde{\Gamma}$ имеет вид

$$\tilde{R}^h_{ijk}(u) = \overset{\circ}{R}{}^h_{ijk} + \tfrac{1}{9}\overset{\circ}{B}{}^h_{ik\alpha j\beta}u^\alpha u^\beta,\ \text{где}\ \overset{\circ}{B}{}^h_{ik\alpha j\beta} \overset{\mathrm{def}}{=} \overset{\circ}{R}{}^\nu_{(ik)\alpha}\overset{\circ}{R}{}^h_{(\nu j)\beta}.$$

Поэтому из $\tilde{R}^h_{ijk}(u) \equiv 0$ следует $\overset{\circ}{R}{}^h_{ijk} \equiv 0$ и наоборот. Очевидна

Теорема 3. *Связность* $\tilde{\nabla}$ *на* G_r, *ассоциированная с О-связностью Картана, локально плоская тогда и только тогда, когда последняя также плоская и, следовательно,* G_r *нильпотентна.*

Далее, тензор Вейля связности $\tilde{\nabla}$ запишется в виде

$$\tilde{W}^h_{ijk}(u) = \overset{\circ}{W}{}^h_{ijk} + \tfrac{1}{9}\left[\overset{\circ}{B}{}^h_{ik\alpha j\beta} - \frac{1}{r-1}\left(\delta^h_k\overset{\circ}{B}{}^\nu_{i\nu\alpha j\beta} - \delta^h_j\overset{\circ}{B}{}^\nu_{i\nu\alpha k\beta}\right)\right]u^\alpha u^\beta.$$

Отсюда следует, что если $\tilde{W}^h_{ijk}(u) \equiv 0$, то и $\overset{\circ}{W}{}^h_{ijk} \equiv 0$. Для О-связности Картана это эквивалентно соотношениям

$$C^\alpha_{j\beta}C^h_{k\alpha} - \frac{1}{r-1}\left(\delta^h_k C^\beta_{\nu\alpha}C^\alpha_{j\beta} - \delta^h_j C^\beta_{\nu\alpha}C^\alpha_{k\beta}\right) = 0.$$

После некоторых преобразований получаем $(r-3)C^\beta_{\gamma l}C^\gamma_{\beta\alpha}C^\alpha_{jk} = 0$, что говорит о разрешимости G_r при $r \neq 3$ на основании критерия Картана. Из разрешимости G_r, однако,

...е не следует, что ее О-связность Картана будет проективно-плоской, что подтверждается уже на примерах групп Ли малых размерностей классификации Бианки. Нами доказана

Теорема 4. *Если связность $\tilde{\nabla}$ на G_r, ассоциированная с О-связностью Картана, является проективно-плоской, то последняя по необходимости также проективно-плоская, а группа G_r – разрешимая.*

Заключение. Таким образом, связность $\tilde{\nabla}$ на группе Ли G_r, ассоциированная со связностью ∇, довольно жестко зависит как от геометрических свойств ∇, так и от структуры самой группы G_r.

1. Покась С.М., Яблонская Н.В. О специальных почти геодезических отображениях аффинносвязных и римановых пространств //Абстр. Поляоч. по Дифференц. геом. Егер (Хуиг). – 1987-1988. – С.45-50.
2. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. – М.:Иностранная литература, 1947. – 359 с.
3. Егиазарян К.И. Об инвариантных аффинных связностях на алгебре Ли группы Ли // Тр. геом. семинара. – Казань: Изд-во Казанск.ун-та. – 1979. – Вып.11. – С.21-28.