МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Н. А. Якімова

ВЕКТОРНА ЛОГІЧНА АЛГЕБРА

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

з дисципліни «Алгебра скінченних предикатів»
для здобувачів спеціальності 111 Математика

ОДЕСА
ОНУ
2025

УДК 510.637:512.642/.643(075.8)
Я453

Автор:

Н. А. Якімова, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь ОНУ імені І. І. Мечникова.

Рецензенти:

А. О. Кореновський, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу ОНУ імені І. І. Мечникова;

Т. Л. Мазурок, доктор технічних наук, професор, завідувачка кафедри прикладної математики та інформатики ОНПУ імені К. Д. Ушинського.

Рекомендовано до видання науково-методичною радою ОНУ імені І. І. Мечникова. Протокол № 7 від 05 грудня 2024 р.

Якімова Н. А.

Я453 Векторна логічна алгебра [Електронний ресурс] : навч.-метод. посіб. з дисципліни «Алгебра скінченних предикатів» для здобув. спец. 111 Математика / Н. А. Якімова. – Електронні текстові дані (1 файл : 7,1 МБ). – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2025. – 125 с.

ISBN 978-966-186-340-7

У пропонованому навчально-методичному посібнику розглядаються основні операції над елементами поля логічних скалярів, а також їх використання при побудові матричних та векторних просторових моделей. Проведено порівняльний аналіз різних методів розв'язання однотипних задач та запропоновані ознаки, за якими має обиратися раціональніший спосіб в кожному окремому випадку.

Навчально-методичний посібник складений для студентів другого (магістерського) рівня освіти спеціальності 111 «Математика». Також розглянутий в даному навчально-методичному посібнику матеріал може бути рекомендований для студентів технічних спеціальностей.

УДК 510.637:512.642/.643(075.8)

ISBN 978-966-186-340-7

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Сьогоденню притаманний бурхливий розвиток і стрімке розширення напрямків застосування новітніх інформаційних технологій. Наприкінці XX століття відбувся справжній «інформаційний вибух». Швидка змінюваність поколінь комп'ютерної техніки потребувала відповідних темпів розвитку програмного і математичного забезпечення. Однак, незважаючи на велику кількість мовленнєвих засобів програмування і принципово нових операційних систем і середовищ, що з'явилася за останні роки, усі вони спрямовані на автоматизацію та інтенсифікацію рутинних або обчислювальних процедур різного функціонального призначення й фізичної природи. Тому виникла й набула великої актуальності проблема створення інструментарію для формального опису і комп'ютерного подання різного роду інформації, поданої у вигляді текстів природної мови або логічних структур мислення.

Як відомо, для моделювання подібного роду явищ і процесів використовуються алгоритми систем штучного інтелекту. Найбільшим його недоліком, істотно обмежуючим галузь його практичного застосування, є нездатність машини розуміти людську мову і, як наслідок, нездатність змістовної обробки нею текстів природної мови.

Аналізуючи проблему створення математичного апарата для моделювання процесів мислення, можна дійти висновку про те, що спроби формалізації природної мови і комп'ютерного подання знань виявилися неспроможними в зв'язку із відсутністю прийнятного математичного апарата. Важливі результати можна отримати, якщо провести аналогію між лінійною алгеброю, засобами якої формалізуються різні системи у вигляді математичних моделей, і векторною логічною алгеброю, що є основою людського мислення. Дослідження математичних засобів логічного аналізу відкриває нові можливості в галузі формалізації природної мови.

У пропонованому навчально-методичному посібнику представлений матеріал, що висвітлює математичну базу для моделювання систем штучного інтелекту. Матеріал викладений у такій послідовності, щоб студенти мали можливість почати вивчення даного предмета із самих початкових відомостей про описуваний математичний апарат. У даному навчально-методичному посібнику описані кілька алгебраїчних систем, за допомогою яких можна моделювати інтелектуальні структури, а також показаний зв'язок між цими алгебрами і можливість переходу від однієї з них до іншої в залежності від практичних нестатків, що виникають у процесі моделювання.

Для успішного засвоєння матеріалу студенти мають опанувати повний обсяг знань з дискретної математики, математичної логіки, лінійної алгебри, тобто з тих дисциплін, які викладаються на математичних і технічних факультетах вищих навчальних закладів освіти.

Структура даного навчально-методичного посібника, зміст та охоплені ним питання визначені з урахуванням того, що ця дисципліна не є завершальною, тобто вимагає підготовки лише з фундаментальних математичних дисциплін, що, як правило, викладаються на перших курсах. Тому цей посібник може бути використано студентами не лише старших курсів, але вже починаючи з третього курсу математичних і технічних спеціальностей.

1. ПОЛЕ ЛОГІЧНИХ СКАЛЯРІВ ТА ЙОГО МОЖЛИВА ГРАФІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ

Мета занять з даної теми – закріплення теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок аналітичного та графічного виконання операцій зі скалярами різноманітної логічної природи.

Логічним полем [1] називається непуста множина елементів ***G*** (**логічних скалярів**), на якій визначені операції **диз'юнкції** $\alpha \vee \beta$, **кон'юнкції** $\alpha \wedge \beta = \alpha\,\beta$ і **заперечення** $\rceil\alpha = \overline{\alpha}$. Ці операції підкоряються наступним законам [2]:

ідемпотентності

$$\alpha \vee \alpha = \alpha,$$

$$\alpha \wedge \alpha = \alpha;$$

комутативності

$$\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha,$$

$$\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha;$$

асоціативності

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma),$$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma);$$

дистрибутивності

$$(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma = (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma),$$

$$(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma = (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma);$$

виключення третього

$$\alpha \vee \overline{\alpha} = \mathbf{1}.$$

протиріччя

$$\alpha \wedge \overline{\alpha} = \mathbf{0};$$

елімінації

$$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) = \alpha,$$

$$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) = \alpha;$$

згортання

$$\alpha \vee (\beta \wedge \overline{\beta}) = \alpha,$$

$$\alpha \wedge (\beta \vee \overline{\beta}) = \alpha;$$

де Моргана

$$\overline{\alpha \vee \beta} = \overline{\alpha} \wedge \overline{\beta},$$

$$\overline{\alpha \wedge \beta} = \overline{\alpha} \vee \overline{\beta};$$

закони нуля: існує єдиний елемент $\mathbf{0}$, для якого

$$\alpha \vee \mathbf{0} = \alpha,$$

$$\alpha \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0};$$

закони одиниці: існує єдиний елемент $\mathbf{1}$, для якого

$$\alpha \vee \mathbf{1} = \mathbf{1},$$

$$\alpha \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1};$$

заперечення нуля

$$\overline{\mathbf{0}} = \mathbf{1};$$

заперечення одиниці

$$\overline{\mathbf{1}} = \mathbf{0}.$$

подвійного заперечення

$$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha.$$

викреслювання

$$\alpha \vee (\overline{\alpha} \wedge \beta) = \alpha \vee \beta,$$

$$\overline{\alpha} \vee (\alpha \wedge \beta) = \overline{\alpha} \vee \beta.$$

Елемент $\mathbf{0}$ при цьому називається **логічним нулем**, елемент $\mathbf{1}$ – **логічною одиницею**. Перелічені закони називаються **аксіомами логічного поля**, вони виконуються для будь-яких $\alpha, \beta \in G$. ***Прикладами*** логічних полів можуть служити:

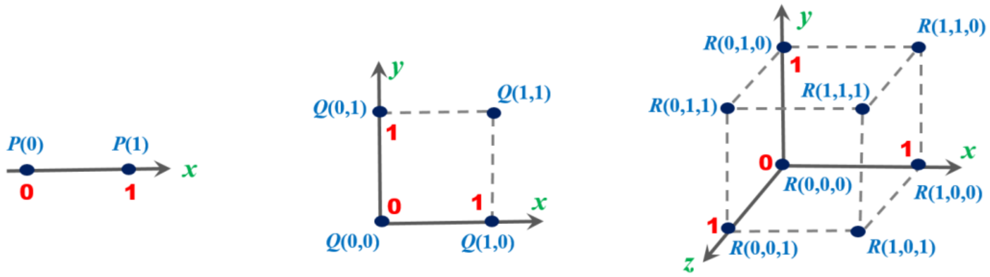
1) алгебра логіки: $G = \{0, 1\}$, $\vee$ – диз’юнкція, $\wedge$ – кон’юнкція, $\rceil$ – заперечення на G;

2) алгебра множин: G – система всіх підмножин деякого універсуму U, $\vee$ – об’єднання множин, $\wedge$ – перетин множин, $\rceil$ – доповнення множини, $\mathbf{0}$ – порожня множина $\varnothing$, $\mathbf{1}$ - універсум U;

3) алгебра предикатів [1];

4) алгебра предикатних операцій [7].

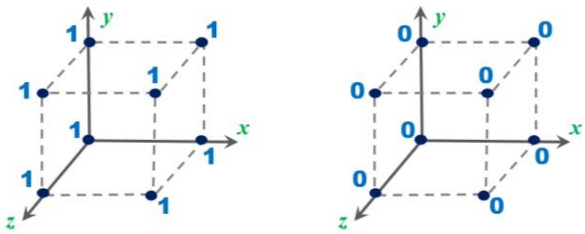
Розглянемо випадок алгебри предикатів. Будь-який скінченний n-місний предикат, заданий на декартовій множині $K = K_1 \times \ldots \times K_n$, $|K_i| = k_i$ символів, можна подати як елемент якогось поля логічних скалярів. Кожен елемент такого поля подається гіперкубом розмірності n. ***Наприклад***, розглянемо тримісний предикат $R(x, y, z)$ над декартовим добутком $K^3 = \{0, 1\}^3$, тобто $k_1 = k_2 = k_3 = k = 2$. Графічно його можна зобразити, як це показано на рис. 1*в*, де кожній вершині відповідає значення предиката при утворюючих цю вершину значеннях аргументів x, y, z [5, 22]



а) одномісний предикат *б) двомісний предикат* *в) тримісний предикат*

Рис. 1. Графічне подання предикатних логічних скалярів

В ролі одиничного елемента поля скалярів виступає предикат, що дорівнює одиниці при всіх значеннях наборів аргументів, а у ролі нульового елемента поля скалярів – предикат, що дорівнює нулю при всіх значеннях наборів аргументів. Графічно одиничний елемент поданий у вигляді гіперкуба, всім вершинам якого відповідають одиниці (рис. 2*а*), а нульовий – гіперкубом, всім вершинам якого відповідають нулі (рис. 2*б*) [19].



а) одиничний елемент *б) нульовий елемент*

Рис. 2. Графічне подання одиничного та нульового елементів поля логічних скалярів для випадку тримісних предикатів

Відповідно до визначень предикатних операцій [7, 11, 13], всі дії над такими елементами поля логічних скалярів виконуються порозрядно. Під **<u>розрядом</u>** розуміється значення розглянутого предиката на одному з можливих наборів значень аргументів. Таким чином, бінарні операції (диз’юнкція та кон’юнкція) припускають, що їхнім результатом буде елемент, кожному розряду якого відповідає значення виконаної бінарної операції над однойменними розрядами предикатів, що беруть участь в операції. Під **<u>однойменними розрядами</u>** розуміються значення цих предикатів від однакових наборів аргументів. Операція заперечення також проводиться порозрядно. Ці операції будуть обчислюватися за наступними правилами [19]:

$$(P_i \vee P_j)\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee P_j(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$(P_i \wedge P_j)\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge P_j(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\overline{P}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Графічно операцію диз'юнкції подано на рис. 3,

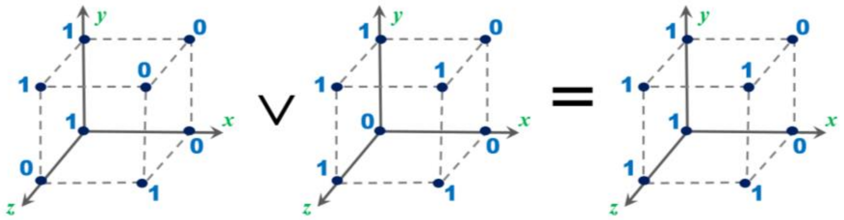


Рис. 3. Графічне подання диз'юнкції логічних скалярів у випадку тримісних предикатів

операцію кон'юнкції – на рис. 4,

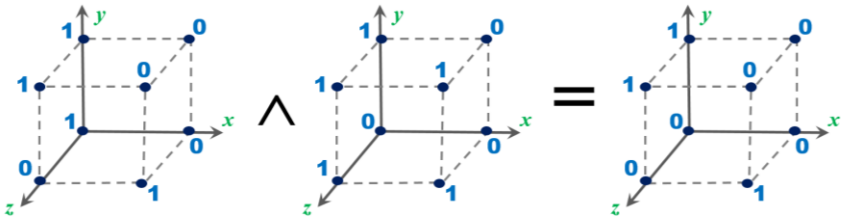


Рис. 4. Графічне подання кон'юнкції логічних скалярів у випадку тримісних предикатів

і заперечення – на рис. 5 [5].

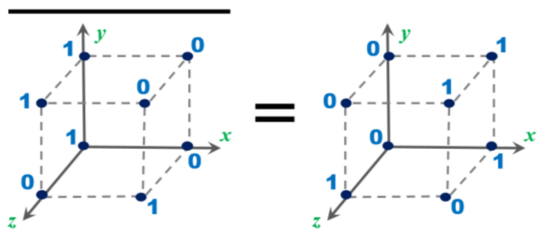


Рис. 5. Графічне подання заперечення логічних скалярів у випадку тримісних предикатів

Зазвичай операція кон'юнкції вважається старшою за операцію диз'юнкції. Тому за відсутності дужок у формулі вона має виконуватися раніше диз'юнкції. Найстаршою вважається операція заперечення, що відноситься безпосередньо до логічного скаляру. Вона має виконуватися в першу чергу, потім операція кон'юнкції, і вже в останню чергу – операція диз'юнкції. Але у випадку, коли операція заперечення відноситься не безпосередньо до якогось скаляру, а до деякого виразу, то спочатку треба обчислити той вираз, що стоїть під знаком заперечення, а вже потім з отриманим результатом заперечення виконувати інші зазначені в формулі операції. Ще одне спрощення запису формул з логічними скалярами пов'язане із математичною символікою, що застосовується для цього запису. Інколи позначку операції кон'юнкції не пишуть або замінюють крапкою, що значно полегшує візуальне сприйняття та розуміння послідовності виконання операцій в формулах. В той же час, з урахуванням комутативності та асоціативності операцій диз'юнкції та кон'юнкції, можна не писати дужки в формулах, що містять лише одну з цих операцій. До того ж, виконувати диз'юнкцію або кон'юнкцію різних логічних скалярів можна в довільному порядку без впливу на результат остаточної диз'юнкції або остаточної кон'юнкції.

<u>Приклад 1</u>. Виконати тотожні перетворення формули операцій над логічними скалярами

$$\overline{\alpha\,\overline{\beta}}\,(\gamma \vee \alpha) \vee \overline{\alpha}\,(\beta \vee \overline{\gamma}),$$

використовуючи аксіоми логічного поля та припустимі спрощення запису цих формул.

<u>Розв'язання</u>.

$$\overline{\alpha\,\overline{\beta}}\,(\gamma \vee \alpha) \vee \overline{\alpha}\,(\beta \vee \overline{\gamma}) =$$

(*за законом де Моргана для* $\overline{\alpha\,\overline{\beta}}$)

$$= (\overline{\alpha} \vee \overline{\overline{\beta}})\,(\gamma \vee \alpha) \vee \overline{\alpha}\,(\beta \vee \overline{\gamma}) =$$

(*за законом подвійного заперечення для* $\overline{\overline{\beta}}$)

$$= (\overline{\alpha} \vee \beta)\,(\gamma \vee \alpha) \vee \overline{\alpha}\,(\beta \vee \overline{\gamma}) =$$

(*за законом дистрибутивності*)

$$= \overline{\alpha}\,\gamma \vee \overline{\alpha}\,\alpha \vee \beta\,\gamma \vee \alpha\,\beta \vee \overline{\alpha}\,\beta \vee \overline{\alpha}\,\overline{\gamma} =$$

(*за законом протиріччя для* $\overline{\alpha}\,\alpha = 0$)

$$= \overline{\alpha}\,\gamma \vee \beta\,\gamma \vee \alpha\,\beta \vee \overline{\alpha}\,\beta \vee \overline{\alpha}\,\overline{\gamma} =$$

(*за законом дистрибутивності для* $\overline{\alpha}\,\gamma$ *та* $\overline{\alpha}\,\overline{\gamma}$)

$$= \overline{\alpha}\,(\gamma \vee \overline{\gamma}) \vee \beta\,\gamma \vee \alpha\,\beta \vee \overline{\alpha}\,\beta =$$

(*за законом виключення третього для* $\gamma \vee \overline{\gamma} = 1$)

$$= \overline{\alpha} \cdot 1 \vee \beta\,\gamma \vee \alpha\,\beta \vee \overline{\alpha}\,\beta =$$

(*за законом одиниці для* $\overline{\alpha} \cdot 1$)

$$= \overline{\alpha} \vee \beta\,\gamma \vee \alpha\,\beta \vee \overline{\alpha}\,\beta =$$

(*за законом дистрибутивності для* $\overline{\alpha}$ *та* $\overline{\alpha}\,\beta$)

$$= \overline{\alpha}\,(1 \vee \beta) \vee \beta\,\gamma \vee \alpha\,\beta =$$

(*за законом одиниці для* $1 \vee \beta$)

$$= \overline{\alpha} \vee \beta\,\gamma \vee \alpha\,\beta =$$

(*за законом викреслювання для* $\overline{\alpha}$ *та* $\alpha\,\beta$)

$$= \overline{\alpha} \vee \beta \vee \beta\,\gamma =$$

(*за законом дистрибутивності для* β *та* $\beta\,\gamma$)

$$= \overline{\alpha} \vee \beta\,(1 \vee \gamma) =$$

(*за законом одиниці для* $1 \vee \gamma$)

$$= \overline{\alpha} \vee \beta \cdot 1 =$$

(*за законом одиниці для* $\beta \cdot 1$)

$$= \overline{\alpha} \vee \beta.$$

<u>Відповідь</u>. $\overline{\alpha\,\overline{\beta}}\,(\gamma \vee \alpha) \vee \overline{\alpha}\,(\beta \vee \overline{\gamma}) = \overline{\alpha} \vee \beta$.

З урахуванням властивостей комутативності та асоціативності операцій диз'юнкції та кон'юнкції логічних скалярів, порозрядне виконання цих операцій можна узагальнити на будь-яку довільну кількість скалярів [6, 23]:

$$\left(\bigvee_{i=1}^{m} \boldsymbol{P}_i\right)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \bigvee_{i=1}^{m} \boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n),$$

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{m} \boldsymbol{P}_i\right)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \bigwedge_{i=1}^{m} \boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n).$$

Враховуючи можливість такого узагальнення, цей результат можна розповсюдити також і на закони де Моргана, узагальнивши їх також на довільну кількість логічних скалярів:

$$\overline{\bigwedge_{i=1}^{m} \boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n)} = \bigvee_{i=1}^{m} \overline{\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n)},$$

$$\overline{\bigvee_{i=1}^{m} \boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n)} = \bigwedge_{i=1}^{m} \overline{\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n)}.$$

1.1. *Задачі для самостійного опрацювання*

В якості поля логічних скалярів візьмемо множину тримісних предикатів $\boldsymbol{R}_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{255}}$, де $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\}$. Цю множину задано таблицею 1.

Таблиця 1

***Множина тримісних предикатів, заданих на алфавіті K*={0, 1}**

x	*y*	*z*	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x	*y*	*z*	R_{16}	R_{17}	R_{18}	R_{19}	R_{20}	R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}	R_{27}	R_{28}	R_{29}	R_{30}	R_{31}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x	y	z	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}	R_{37}	R_{38}	R_{39}	R_{40}	R_{41}	R_{42}	R_{43}	R_{44}	R_{45}	R_{46}	R_{47}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x	y	z	R_{48}	R_{49}	R_{50}	R_{51}	R_{52}	R_{53}	R_{54}	R_{55}	R_{56}	R_{57}	R_{58}	R_{59}	R_{60}	R_{61}	R_{62}	R_{63}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x	y	z	R_{64}	R_{65}	R_{66}	R_{67}	R_{68}	R_{69}	R_{70}	R_{71}	R_{72}	R_{73}	R_{74}	R_{75}	R_{76}	R_{77}	R_{78}	R_{79}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x	y	z	R_{80}	R_{81}	R_{82}	R_{83}	R_{84}	R_{85}	R_{86}	R_{87}	R_{88}	R_{89}	R_{90}	R_{91}	R_{92}	R_{93}	R_{94}	R_{95}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x	y	z	R_{96}	R_{97}	R_{98}	R_{99}	R_{100}	R_{101}	R_{102}	R_{103}	R_{104}	R_{105}	R_{106}	R_{107}	R_{108}	R_{109}	R_{110}	R_{111}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x	y	z	R_{112}	R_{113}	R_{114}	R_{115}	R_{116}	R_{117}	R_{118}	R_{119}	R_{120}	R_{121}	R_{122}	R_{123}	R_{124}	R_{125}	R_{126}	R_{127}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x	y	z	R_{128}	R_{129}	R_{130}	R_{131}	R_{132}	R_{133}	R_{134}	R_{135}	R_{136}	R_{137}	R_{138}	R_{139}	R_{140}	R_{141}	R_{142}	R_{143}
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x	y	z	R_{144}	R_{145}	R_{146}	R_{147}	R_{148}	R_{149}	R_{150}	R_{151}	R_{152}	R_{153}	R_{154}	R_{155}	R_{156}	R_{157}	R_{158}	R_{159}
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x	y	z	R_{160}	R_{161}	R_{162}	R_{163}	R_{164}	R_{165}	R_{166}	R_{167}	R_{168}	R_{169}	R_{170}	R_{171}	R_{172}	R_{173}	R_{174}	R_{175}
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x	y	z	R_{176}	R_{177}	R_{178}	R_{179}	R_{180}	R_{181}	R_{182}	R_{183}	R_{184}	R_{185}	R_{186}	R_{187}	R_{188}	R_{189}	R_{190}	R_{191}
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x	y	z	R_{192}	R_{193}	R_{194}	R_{195}	R_{196}	R_{197}	R_{198}	R_{199}	R_{200}	R_{201}	R_{202}	R_{203}	R_{204}	R_{205}	R_{206}	R_{207}
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x	y	z	R_{208}	R_{209}	R_{210}	R_{211}	R_{212}	R_{213}	R_{214}	R_{215}	R_{216}	R_{217}	R_{218}	R_{219}	R_{220}	R_{221}	R_{222}	R_{223}
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x	y	z	R_{224}	R_{225}	R_{226}	R_{227}	R_{228}	R_{229}	R_{230}	R_{231}	R_{232}	R_{233}	R_{234}	R_{235}	R_{236}	R_{237}	R_{238}	R_{239}
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

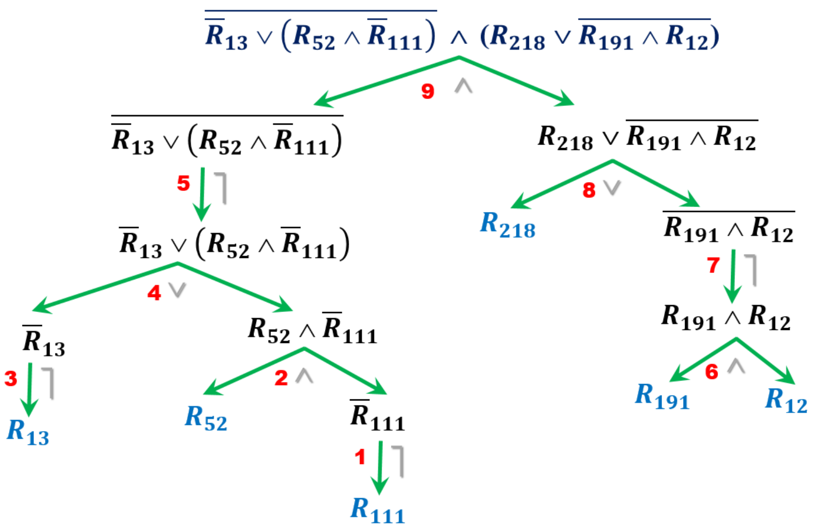
x	y	z	R_{240}	R_{241}	R_{242}	R_{243}	R_{244}	R_{245}	R_{246}	R_{247}	R_{248}	R_{249}	R_{250}	R_{251}	R_{252}	R_{253}	R_{254}	R_{255}
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Обчислити графічно та з використанням тотожних перетворень наступні вирази

$$1.\ \overline{\overline{R}_{13} \vee \left(R_{52} \wedge \overline{R}_{111}\right)} \wedge \left(R_{218} \vee \overline{R_{191} \wedge R_{12}}\right).$$

1*a*) *Використаємо для обчислення <u>графічний метод</u>*

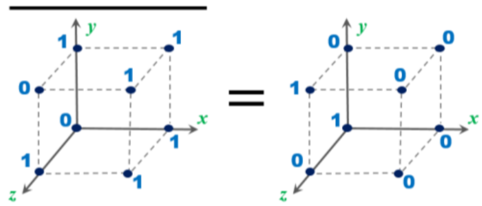
<u>*Розв'язання*</u>. Побудуємо для цього виразу семантичне дерево [2].



Далі будемо обчислювати цей вираз по діях у відповідності до побудованого дерева.

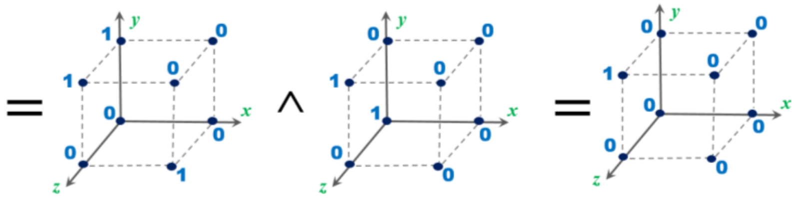
***Дія № 1*:**

$$\bar{R}_{111} =$$



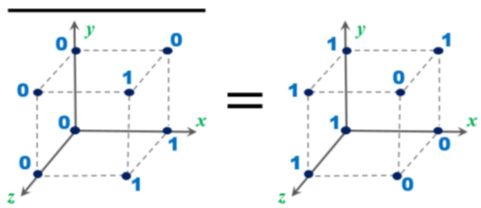
***Дія № 2*:**

$$R_{52} \wedge \bar{R}_{111} =$$



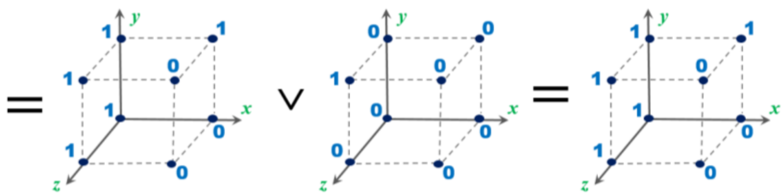
***Дія № 3*:**

$$\bar{R}_{13} =$$



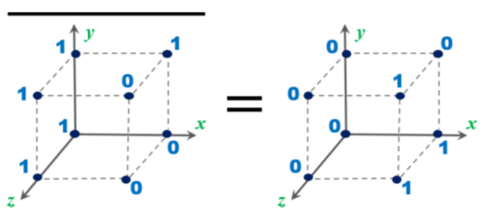
***Дія № 4*:**

$$\bar{R}_{13} \vee (R_{52} \wedge \bar{R}_{111}) =$$



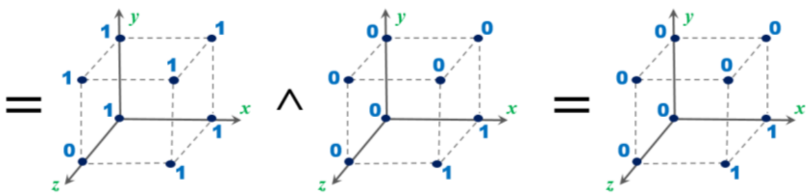
***Дія № 5*:**

$$\overline{\bar{R}_{13} \vee (R_{52} \wedge \bar{R}_{111})} =$$



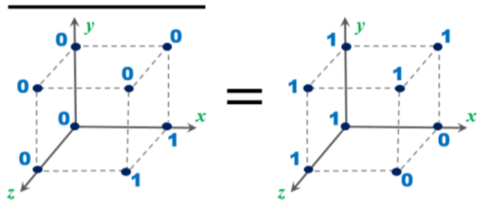
***Дія № 6*:**

$$R_{191} \wedge R_{12} =$$



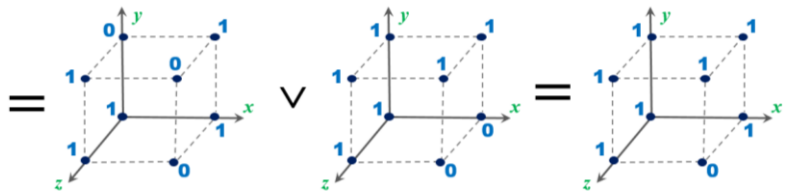
***Дія № 7*:**

$$\overline{R_{191} \wedge R_{12}} =$$



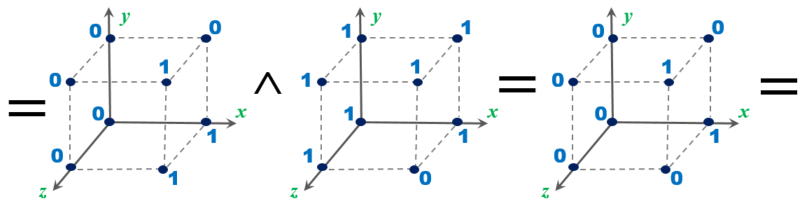
***Дія № 8*:**

$$R_{218} \vee \overline{R_{191} \wedge R_{12}} =$$



***Дія № 9*:**

$$\overline{\overline{R}_{13} \vee \left(R_{52} \wedge \overline{R}_{111}\right)} \wedge \left(R_{218} \vee \overline{R_{191} \wedge R_{12}}\right) =$$



$= R_9$

<u>ВІДПОВІДЬ</u>. $\overline{\overline{R}_{13} \vee \left(R_{52} \wedge \overline{R}_{111}\right)} \wedge \left(R_{218} \vee \overline{R_{191} \wedge R_{12}}\right) = R_9$.

1*б*) *Використаємо для обчислення <u>аналітично-графічний метод</u>*

<u>Розв'язання</u>. Спочатку виконаємо тотожні перетворення вказаної формули:

$$\overline{\overline{R}_{13} \vee \left(R_{52} \wedge \overline{R}_{111}\right)} \wedge \left(R_{218} \vee \overline{R_{191} \wedge R_{12}}\right) =$$

(*за законом де Моргана*)

$$= \left(\overline{\overline{R}}_{13} \wedge \overline{R_{52} \wedge \overline{R}_{111}}\right) \wedge \left(R_{218} \vee \overline{R}_{191} \vee \overline{R}_{12}\right) =$$

(*за законом подвійного заперечення для* $\overline{\overline{R}}_{13}$)

$$= \left(R_{13} \wedge \overline{R_{52} \wedge \overline{R}_{111}}\right) \wedge \left(R_{218} \vee \overline{R}_{191} \vee \overline{R}_{12}\right) =$$

(*за законом де Моргана*)

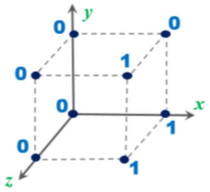
$$= R_{13}\left(\overline{R}_{52} \vee \overline{\overline{R}}_{111}\right)\left(R_{218} \vee \overline{R}_{191} \vee \overline{R}_{12}\right) =$$

(*за законом подвійного заперечення для* $\overline{\overline{R}}_{111}$)

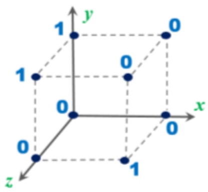
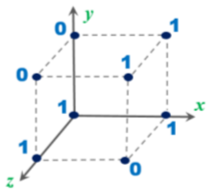
$$= R_{13}\left(\overline{R}_{52} \vee R_{111}\right)\left(R_{218} \vee \overline{R}_{191} \vee \overline{R}_{12}\right).$$

Отже, в результаті тотожних перетворень було отримано кон'юнкцію трьох виразів. Їх обчислюємо графічно.

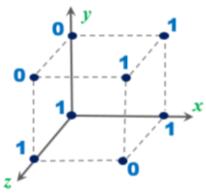
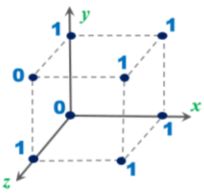
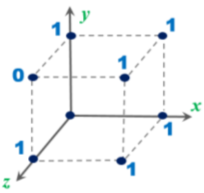
Перший знаходимо із таблиці 1.

$R_{13} =$ 

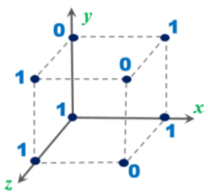
Другий є результатом виконання двох дій.

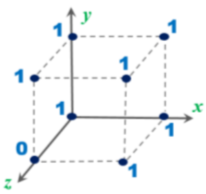
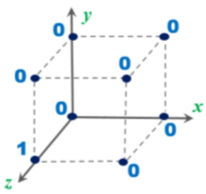
$\overline{R}_{52} =$  $=$ 

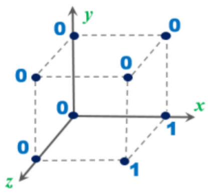
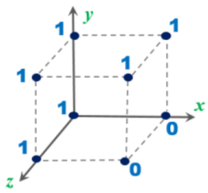
$\overline{R}_{52} \vee R_{111} =$

$=$  $\vee$  $=$ 

Третій є узагальненням операції диз’юнкції для трьох диз’юнктів.

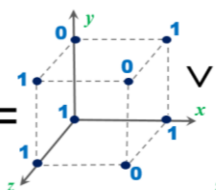
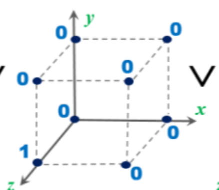
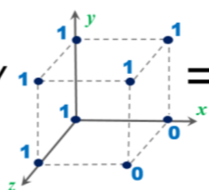
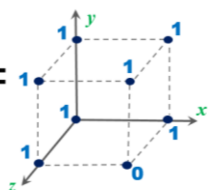
$R_{218} =$ 

$\overline{R}_{191} =$  $=$ 

$\overline{R}_{12} =$  $=$ 

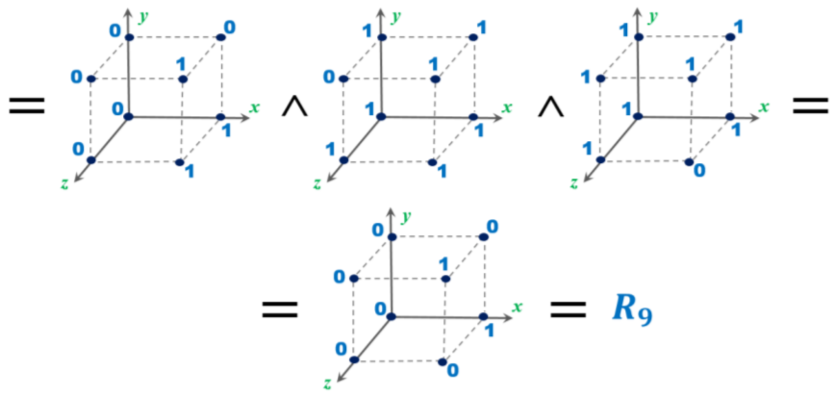
Отже, маємо:

$R_{218} \vee \overline{R}_{191} \vee \overline{R}_{12} =$

$=$  $\vee$  $\vee$  $=$ 

Застосовуючи до отриманих логічних скалярів узагальнену операцію кон'юнкції, маємо:

$$R_{13}\,(\overline{R}_{52} \vee R_{111})\,(R_{218} \vee \overline{R}_{191} \vee \overline{R}_{12}) =$$



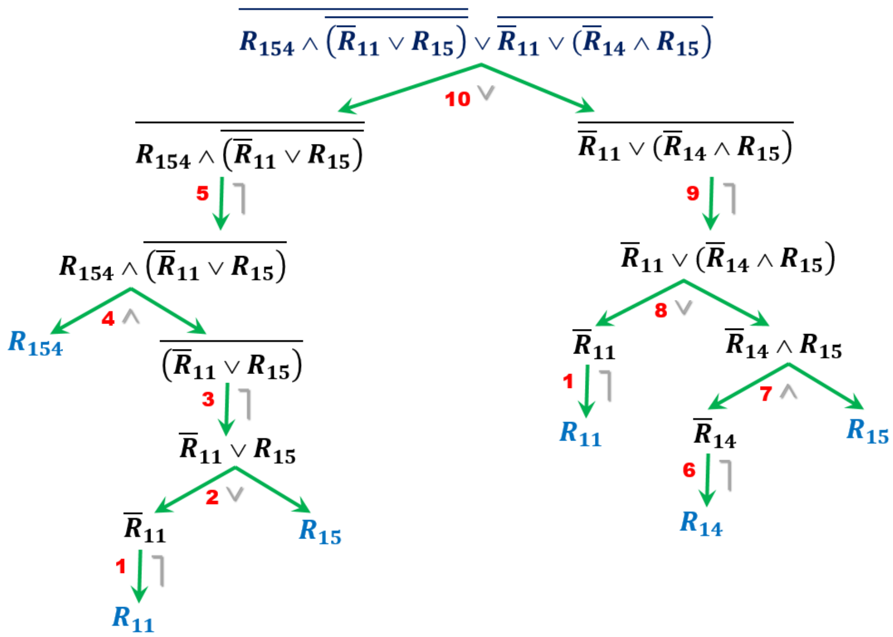
Таким чином, у результаті обчислення за допомогою аналітично-графічного метода було отримно той самий результат, що й при виконанні дій виключно графічним методом.

<u>ВІДПОВІДЬ</u>. $\overline{\overline{R}_{13} \vee (R_{52} \wedge \overline{R}_{111})} \wedge (R_{218} \vee \overline{R_{191} \wedge R_{12}}) = R_9$.

$$2.\ \overline{R_{154} \wedge \overline{(\overline{R}_{11} \vee R_{15})}} \vee \overline{\overline{R}_{11} \vee (\overline{R}_{14} \wedge R_{15})}.$$

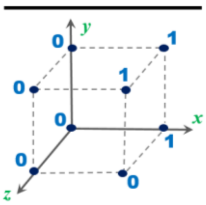
2*а*) *Використаємо для обчислення <u>графічний метод</u>*

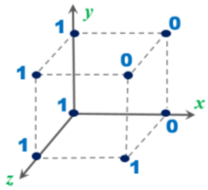
<u>Розв'язання</u>. Побудуємо для цього виразу семантичне дерево [2].



Далі будемо обчислювати цей вираз по діях у відповідності до побудованого дерева.

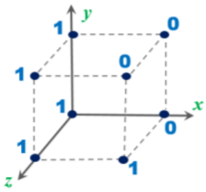
Дія № 1:

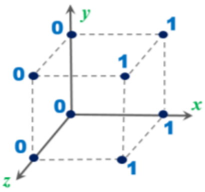
$\overline{R}_{11} =$ 

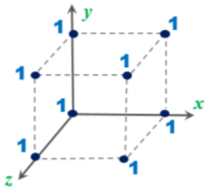
$=$ 

Дія № 2:

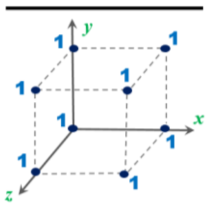
$$\overline{R}_{11} \vee R_{15} =$$

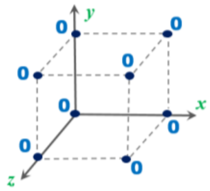
$=$ 

$\vee$ 

$=$ 

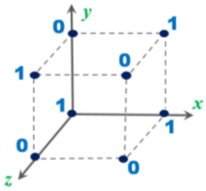
Дія № 3:

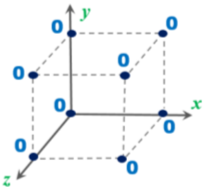
$\overline{\overline{R}_{11} \vee R_{15}} =$ 

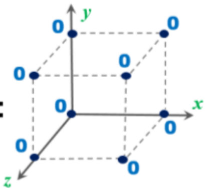
$=$ 

Дія № 4:

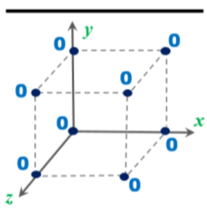
$$R_{154} \wedge \overline{\left(\overline{R}_{11} \vee R_{15}\right)} =$$

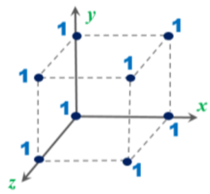
$=$ 

$\wedge$ 

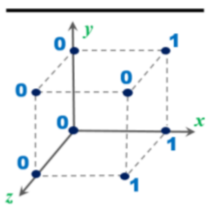
$=$ 

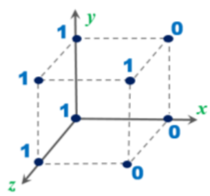
Дія № 5:

$\overline{R_{154} \wedge \overline{\left(\overline{R}_{11} \vee R_{15}\right)}} =$ 

$=$ 

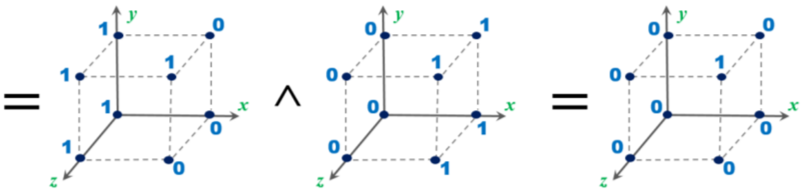
Дія № 6:

$\overline{R}_{14} =$ 

$=$ 

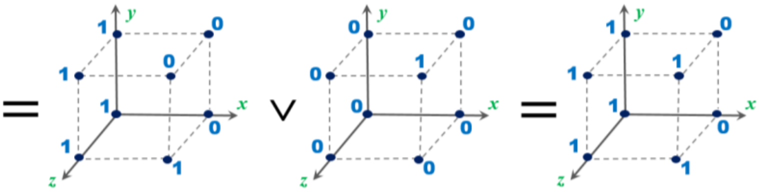
***Дія № 7*:**

$$\overline{R}_{14} \wedge R_{15} =$$



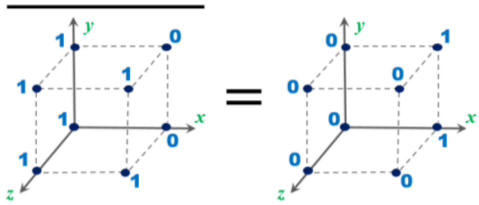
***Дія № 8*:**

$$\overline{R}_{11} \vee (\overline{R}_{14} \wedge R_{15}) =$$



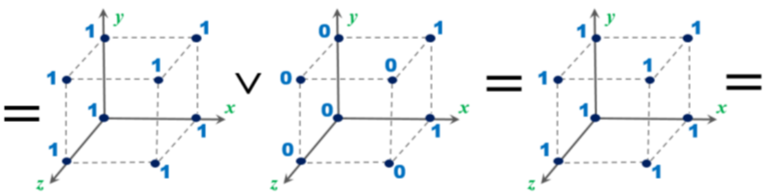
***Дія № 9*:**

$$\overline{\overline{R}_{11} \vee (\overline{R}_{14} \wedge R_{15})} =$$



***Дія № 10*:**

$$\overline{R_{154} \wedge \overline{(\overline{R}_{11} \vee R_{15})}} \vee \overline{\overline{R}_{11} \vee (\overline{R}_{14} \wedge R_{15})} =$$



$$= R_{255}$$

<u>ВІДПОВІДЬ</u>. $\overline{R_{154} \wedge \overline{(\overline{R}_{11} \vee R_{15})}} \vee \overline{\overline{R}_{11} \vee (\overline{R}_{14} \wedge R_{15})} = R_{255}$.

2*б*) *Використаємо для обчислення <u>аналітично-графічний метод</u>*

<u>Розв'язання</u>. Спочатку виконаємо тотожні перетворення вказаної формули:

$$\overline{R_{154} \wedge \overline{(\overline{R}_{11} \vee R_{15})}} \vee \overline{\overline{R}_{11} \vee (\overline{R}_{14} \wedge R_{15})} =$$

(*за законом де Моргана для* $\overline{R_{154} \wedge \overline{(\overline{R}_{11} \vee R_{15})}}$)

$$\overline{R}_{154} \vee \overline{\overline{\overline{R}_{11} \vee R_{15}}} \vee \overline{\overline{R}_{11} \vee (\overline{R}_{14} \wedge R_{15})} =$$

(*за законом подвійного заперечення для* $\overline{\overline{\overline{R}_{11} \vee R_{15}}}$)

$$= \boldsymbol{\bar R_{154} \vee \bar R_{11} \vee R_{15} \vee \overline{\bar R_{11} \vee (\bar R_{14} \wedge R_{15})}} =$$

(*за законом де Моргана для* $\overline{\bar R_{11} \vee (\bar R_{14} \wedge R_{15})}$)

$$= \boldsymbol{\bar R_{154} \vee \bar R_{11} \vee R_{15} \vee (\bar{\bar R}_{11} \wedge \overline{\bar R_{14} \wedge R_{15}})} =$$

(*за законом подвійного заперечення для* $\bar{\bar R}_{11}$)

$$= \boldsymbol{\bar R_{154} \vee \bar R_{11} \vee R_{15} \vee (R_{11} \wedge \overline{\bar R_{14} \wedge R_{15}})} =$$

(*за законом де Моргана для* $\overline{\bar R_{14} \wedge R_{15}}$)

$$= \boldsymbol{\bar R_{154} \vee \bar R_{11} \vee R_{15} \vee (R_{11} \wedge (\bar{\bar R}_{14} \vee \bar R_{15}))} =$$

(*за законом подвійного заперечення для* $\bar{\bar R}_{14}$)

$$= \boldsymbol{\bar R_{154} \vee \bar R_{11} \vee R_{15} \vee (R_{11} \wedge (R_{14} \vee \bar R_{15}))} =$$

(*за законом дистрибутивності для* $R_{11} \wedge (R_{14} \vee \bar R_{15})$)

$$= \boldsymbol{\bar R_{154} \vee \bar R_{11} \vee R_{15} \vee (R_{11} \wedge R_{14}) \vee (R_{11} \wedge \bar R_{15})} =$$

(*за законом викреслювання для* $\bar R_{11}$ *та* $(R_{11} \wedge \bar R_{15})$)

$$= \boldsymbol{\bar R_{154} \vee \bar R_{11} \vee R_{15} \vee \bar R_{15} \vee (R_{11} \wedge R_{14})} =$$

(*за законом викреслювання для* $\bar R_{11}$ *та* $(R_{11} \wedge R_{14})$)

$$= \boldsymbol{\bar R_{154} \vee \bar R_{11} \vee R_{15} \vee \bar R_{15} \vee R_{14}} =$$

(*за законом виключення третього для* $R_{15} \vee \bar R_{15} = 1$)

$$= \boldsymbol{\bar R_{154} \vee \bar R_{11} \vee 1 \vee R_{14}} =$$

(*за законом одиниці для* $1 \vee \alpha$)

$$= \mathbf{1} = \boldsymbol{R_{255}}.$$

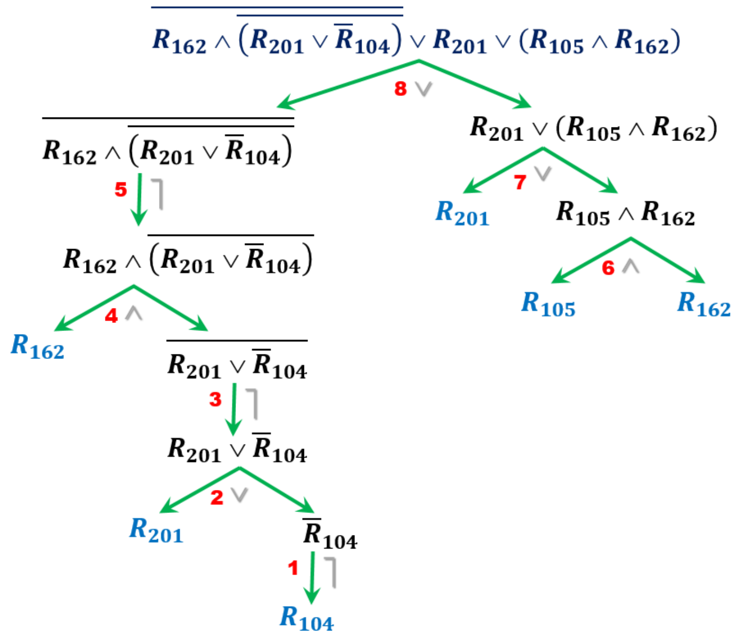
В результаті тотожних перетворень було отримано константу – тотожну одиницю. В скалярному полі тримісних предикатів, згідно з таблицею 1, їй відповідає предикат $\boldsymbol{R_{255}}$. Тобто в даному прикладі графічні розрахунки взагалі не знадобилися.

ВІДПОВІДЬ. $\boldsymbol{\overline{R_{154} \wedge \overline{(\bar R_{11} \vee R_{15})}} \vee \overline{\bar R_{11} \vee (\bar R_{14} \wedge R_{15})} = R_{255}}$.

3. $\boldsymbol{\overline{R_{162} \wedge \overline{(R_{201} \vee \bar R_{104})}} \vee R_{201} \vee (R_{105} \wedge R_{162})}$.

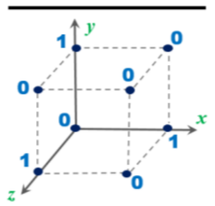
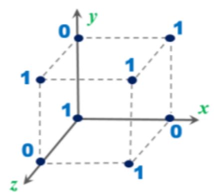
3*а*) *Використаємо для обчислення графічний метод*

Розв'язання. Побудуємо для цього виразу семантичне дерево [2].



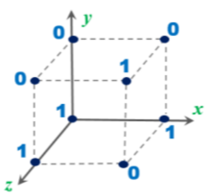
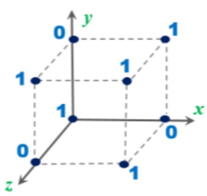
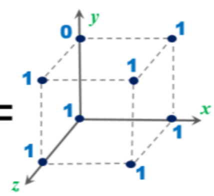
Далі будемо обчислювати цей вираз по діях у відповідності до побудованого дерева.

***Дія № 1*:**

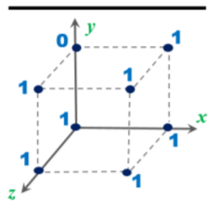
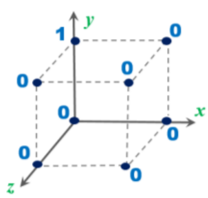
$\overline{R}_{104} =$  $=$ 

***Дія № 2*:**

$R_{201} \vee \overline{R}_{104} =$

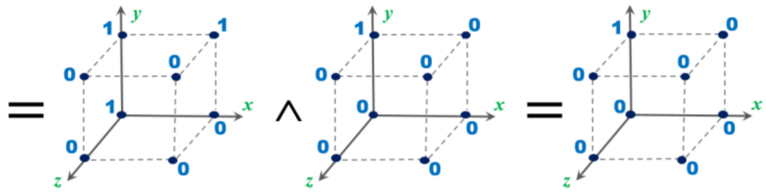
$=$  $\vee$  $=$ 

***Дія № 3*:**

$\overline{R_{201} \vee \overline{R}_{104}} =$  $=$ 

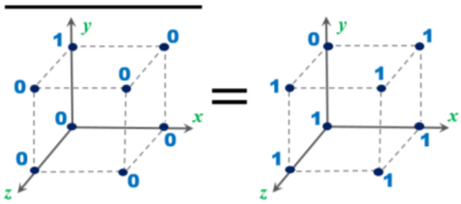
Дія № 4:

$$R_{162} \wedge \overline{\left(R_{201} \vee \overline{R}_{104}\right)} =$$



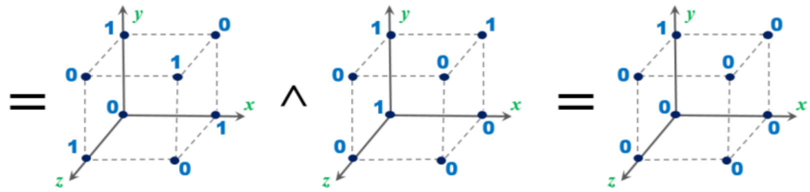
Дія № 5:

$$\overline{R_{162} \wedge \overline{\left(R_{201} \vee \overline{R}_{104}\right)}} =$$



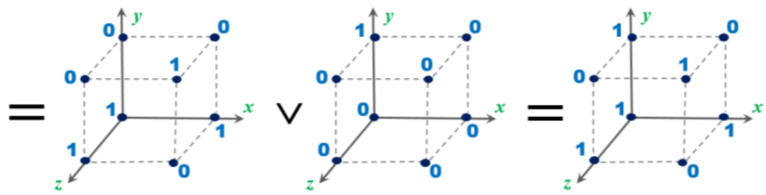
Дія № 6:

$$R_{105} \wedge R_{162} =$$



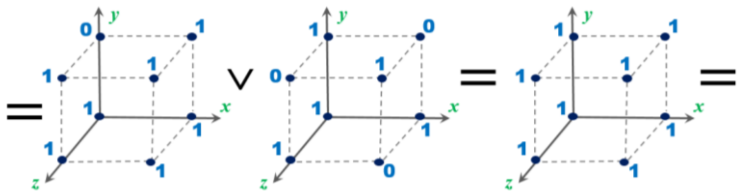
Дія № 7:

$$R_{201} \vee (R_{105} \wedge R_{162}) =$$



Дія № 8:

$$\overline{R_{162} \wedge \overline{\left(R_{201} \vee \overline{R}_{104}\right)}} \vee R_{201} \vee (R_{105} \wedge R_{162}) =$$



$= R_{255}$

ВІДПОВІДЬ. $\overline{R_{162} \wedge \overline{\left(R_{201} \vee \overline{R}_{104}\right)}} \vee R_{201} \vee (R_{105} \wedge R_{162}) = R_{255}$.

3*б*) *Використаємо для обчислення <u>аналітично-графічний метод</u>*

<u>Розв'язання</u>. Спочатку виконаємо тотожні перетворення вказаної формули:

$$\overline{\boldsymbol{R}_{162} \wedge \overline{\left(\boldsymbol{R}_{201} \vee \overline{\boldsymbol{R}}_{104}\right)}} \vee \boldsymbol{R}_{201} \vee \left(\boldsymbol{R}_{105} \wedge \boldsymbol{R}_{162}\right) =$$

(*за законом де Моргана для* $\overline{R_{162} \wedge \overline{\left(R_{201} \vee \overline{R}_{104}\right)}}$)

$$= \overline{\boldsymbol{R}}_{162} \vee \overline{\overline{\boldsymbol{R}_{201} \vee \overline{\boldsymbol{R}}_{104}}} \vee \boldsymbol{R}_{201} \vee (\boldsymbol{R}_{105} \wedge \boldsymbol{R}_{162}) =$$

(*за законом подвійного заперечення для* $\overline{\overline{R_{201} \vee \overline{R}_{104}}}$)

$$= \overline{\boldsymbol{R}}_{162} \vee \boldsymbol{R}_{201} \vee \overline{\boldsymbol{R}}_{104} \vee \boldsymbol{R}_{201} \vee (\boldsymbol{R}_{105} \wedge \boldsymbol{R}_{162}) =$$

(*за законом ідемпотентності для* $R_{201} \vee R_{201}$)

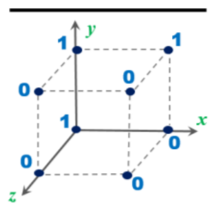
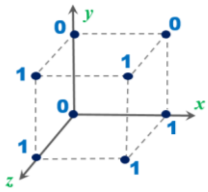
$$= \overline{\boldsymbol{R}}_{162} \vee \boldsymbol{R}_{201} \vee \overline{\boldsymbol{R}}_{104} \vee (\boldsymbol{R}_{105} \wedge \boldsymbol{R}_{162}) =$$

(*за законом викреслювання для* $\overline{R}_{162}$ *та* $(R_{105} \wedge R_{162})$)

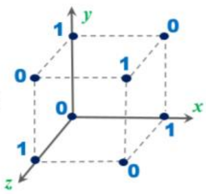
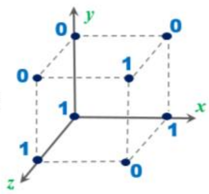
$$= \overline{\boldsymbol{R}}_{162} \vee \boldsymbol{R}_{105} \vee \boldsymbol{R}_{201} \vee \overline{\boldsymbol{R}}_{104}.$$

Отже, в результаті тотожних перетворень було отримано диз'юнкцію чотирьох виразів. Їх обчислюємо графічно.

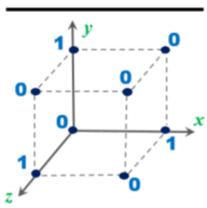
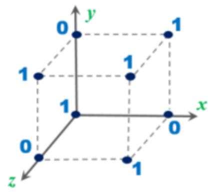
Перший дорівнює

$\overline{R}_{162} =$  $=$ 

Другий та ***третій*** знаходимо за таблицею 1

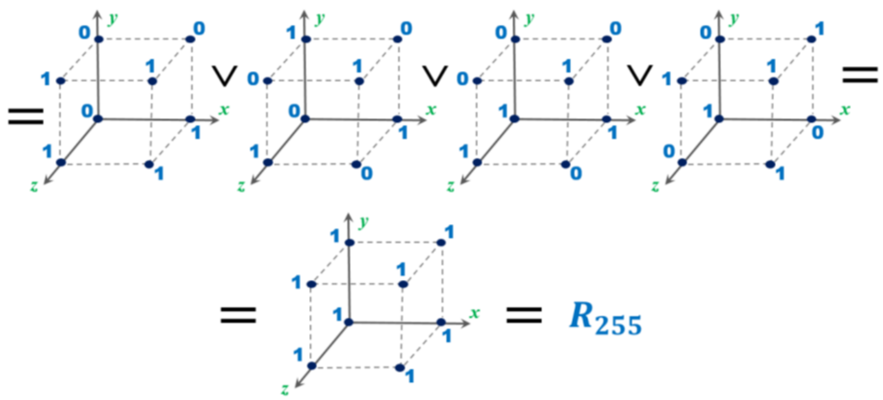
$R_{105} =$  $R_{201} =$ 

Четвертий дорівнює

$\overline{R}_{104} =$  $=$ 

Застосовуючи до отриманих логічних скалярів узагальнену операцію диз'юнкції, маємо:

$$\overline{R}_{162} \vee R_{105} \vee R_{201} \vee \overline{R}_{104} =$$



$$= R_{255}$$

В даному прикладі, як і в попередньому, відповідь складає логічний скаляр, що дорівнює тотожній одиниці, тобто є тримісним предикатом R_{255}. Але, на відміну від попереднього прикладу, лише тотожними перетвореннями цього висновку дійти неможливо, знадобилися також і додаткові графічні розрахунки.

ВІДПОВІДЬ. $\overline{R_{162} \wedge \overline{\left(R_{201} \vee \overline{R}_{104}\right)}} \vee R_{201} \vee (R_{105} \wedge R_{162}) = R_{255}$.

З наведених прикладів стає очевидним, що для розв'язання даного класу задач раціональнішим є аналітично-графічний метод. Його перевагою над виключно графічним методом є те, що він дозволяє значно скоротити кількість графічних розрахунків, які є досить громіздкими. У ході тотожних перетворень початкова формула значно спрощується, її запис стає коротшим і, як наслідок, кількість операцій до виконання стає меншою.

За допомогою тотожних перетворень спростити наступні вирази

1. $(\overline{\alpha\,\beta \vee \overline{\gamma}\,\overline{\beta}} \vee \gamma)\,(\overline{\alpha\,\beta}\,(\gamma \vee \beta) \vee \alpha\,\beta\,\gamma)$.

Розв'язання.

$$(\overline{\alpha\,\beta \vee \overline{\gamma}\,\overline{\beta}} \vee \gamma)\,(\overline{\alpha\,\beta}\,(\gamma \vee \beta) \vee \alpha\,\beta\,\gamma) =$$

(*за законом де Моргана для* $\overline{\alpha\,\beta \vee \overline{\alpha}\,\overline{\beta}}$)

$$= (\overline{\alpha\,\beta}\;\overline{\overline{\gamma}\,\overline{\beta}} \vee \gamma)\,(\overline{\alpha\,\beta}\,(\gamma \vee \beta) \vee \alpha\,\beta\,\gamma) =$$

(*за законом де Моргана для* $\overline{\alpha\,\beta}$, $\overline{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}}$)

$$= ((\overline{\alpha} \vee \overline{\beta})\,(\overline{\overline{\gamma}} \vee \overline{\overline{\beta}}) \vee \gamma)\,((\overline{\alpha} \vee \overline{\beta})\,(\gamma \vee \beta) \vee \alpha\,\beta\,\gamma) =$$

(*за законом подвійного заперечення для* $\overline{\overline{\gamma}}$ *і* $\overline{\overline{\beta}}$)

$$= ((\overline{\alpha} \vee \overline{\beta})\,(\gamma \vee \beta) \vee \gamma)\,((\overline{\alpha} \vee \overline{\beta})\,(\gamma \vee \beta) \vee \alpha\,\beta\,\gamma) =$$

(*за законом дистрибутивності для* $(\overline{\alpha} \vee \overline{\beta})\,(\gamma \vee \beta)$ *і* $(\overline{\alpha} \vee \overline{\beta})\,(\gamma \vee \beta)$)

$$= (\overline{\alpha}\,\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta \vee \gamma\,\overline{\beta} \vee \beta\,\overline{\beta} \vee \gamma)\,(\overline{\alpha}\,\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta \vee \overline{\beta}\,\gamma \vee \beta\,\overline{\beta} \vee \alpha\,\beta\,\gamma) =$$

(*за законом протиріччя для* $\beta\,\overline{\beta}$)

$$= (\overline{\alpha}\,\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta \vee \gamma\,\overline{\beta} \vee 0 \vee \gamma)\,(\overline{\alpha}\,\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta \vee \overline{\beta}\,\gamma \vee 0 \vee \alpha\,\beta\,\gamma) =$$

(*за законом нуля*)

$$= (\overline{\alpha}\,\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta \vee \gamma\,\overline{\beta} \vee \gamma)\,(\overline{\alpha}\,\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta \vee \overline{\beta}\,\gamma \vee \alpha\,\beta\,\gamma) =$$

(*за законом елімінації для* $\overline{\alpha}\,\gamma \vee \gamma\,\overline{\beta} \vee \gamma$)

$$= (\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta)\,(\overline{\alpha}\,\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta \vee \overline{\beta}\,\gamma \vee \alpha\,\beta\,\gamma) =$$

(*за законом дистрибутивності для* $\overline{\alpha}\,\beta$ *і* $\alpha\,\beta\,\gamma$)

$$= (\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta)\,(\overline{\alpha}\,\gamma \vee \beta\,(\overline{\alpha} \vee \alpha\,\gamma) \vee \overline{\beta}\,\gamma) =$$

(*за законом викреслювання для* $\overline{\alpha} \vee \alpha\,\gamma$)

$$= (\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta)\,(\overline{\alpha}\,\gamma \vee \beta\,(\overline{\alpha} \vee \gamma) \vee \overline{\beta}\,\gamma) =$$

(*за законом дистрибутивності для* $\beta\,(\overline{\alpha} \vee \gamma)$)

$$= (\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta)\,(\overline{\alpha}\,\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta \vee \beta\,\gamma \vee \overline{\beta}\,\gamma) =$$

(*за законом дистрибутивності для* $\beta\,\gamma \vee \overline{\beta}\,\gamma$)

$$= (\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta)\,(\overline{\alpha}\,\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta \vee \gamma\,(\beta \vee \overline{\beta})) =$$

(*за законом виключення третього для* $\beta \vee \overline{\beta} = 1$)

$$= (\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta)\,(\overline{\alpha}\,\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta \vee \gamma \cdot 1) =$$

(*за законом одиниці для* $\gamma \cdot 1$)

$$= (\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta)\,(\overline{\alpha}\,\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta \vee \gamma) =$$

(*за законом елімінації для* $\overline{\alpha}\,\gamma \vee \gamma$)

$$= (\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta)\,(\overline{\alpha}\,\beta \vee \gamma) =$$

(*за законом комутативності диз'юнкції*)

$$= (\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta)\,(\gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta) =$$

(*за законом ідемпотентності кон'юнкції*)

$$= \gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta.$$

ВІДПОВІДЬ. $\overline{(\alpha\,\beta \vee \overline{\gamma}\,\overline{\beta} \vee \gamma)}\,(\overline{\alpha\,\beta}\,(\gamma \vee \beta) \vee \alpha\,\beta\,\gamma) = \gamma \vee \overline{\alpha}\,\beta$.

2. $\overline{\alpha}\,\gamma\,\overline{\overline{\beta} \vee \overline{\alpha}\,\gamma} \vee \overline{\alpha\,\gamma}\,(\alpha\,\beta \vee \overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma})$.

Розв'язання.

$$\overline{\alpha}\,\gamma\,\overline{\overline{\beta} \vee \overline{\alpha}\,\gamma} \vee \overline{\alpha\,\gamma}\,(\alpha\,\beta \vee \overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma}) =$$

(*за законом де Моргана для* $\overline{\overline{\beta} \vee \overline{\alpha}\,\gamma}$ *та* $\overline{\alpha\,\gamma}$)

$$= \bar{\alpha}\,\gamma\,\bar{\bar{\beta}}\,\overline{\bar{\alpha}\,\gamma} \vee (\bar{\alpha} \vee \bar{\gamma})\,(\alpha\,\beta \vee \bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma}) =$$

(*за законом подвійного заперечення для* $\bar{\bar{\beta}}$)

$$= \bar{\alpha}\,\beta\,\gamma\,\overline{\bar{\alpha}\,\gamma} \vee (\bar{\alpha} \vee \bar{\gamma})\,(\alpha\,\beta \vee \bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma}) =$$

(*за законом де Моргана для* $\overline{\bar{\alpha}\,\gamma}$)

$$= \bar{\alpha}\,\beta\,\gamma\,(\bar{\bar{\alpha}} \vee \bar{\gamma}) \vee (\bar{\alpha} \vee \bar{\gamma})\,(\alpha\,\beta \vee \bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma}) =$$

(*за законом подвійного заперечення для* $\bar{\bar{\alpha}}$)

$$= \bar{\alpha}\,\beta\,\gamma\,(\alpha \vee \bar{\gamma}) \vee (\bar{\alpha} \vee \bar{\gamma})\,(\alpha\,\beta \vee \bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma}) =$$

(*за законом дистрибутивності*)

$$= \alpha\,\bar{\alpha}\,\beta\,\gamma \vee \bar{\alpha}\,\beta\,\gamma\,\bar{\gamma} \vee \bar{\alpha}\,\alpha\,\beta \vee \bar{\alpha}\,\bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma} \vee \alpha\,\beta\,\bar{\gamma} \vee \bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma}\,\bar{\gamma} =$$

(*за законом протиріччя для* $\alpha\,\bar{\alpha}$ *та* $\gamma\,\bar{\gamma}$)

$$= 0 \cdot \beta\,\gamma \vee \bar{\alpha}\,\beta \cdot 0 \vee 0 \cdot \beta \vee \bar{\alpha}\,\bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma} \vee \alpha\,\beta\,\bar{\gamma} \vee \bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma}\,\bar{\gamma} =$$

(*за законом нуля*)

$$= \bar{\alpha}\,\bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma} \vee \alpha\,\beta\,\bar{\gamma} \vee \bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma}\,\bar{\gamma} =$$

(*за законом ідемпотентності кон'юнкції для* $\bar{\alpha}\,\bar{\alpha}$ *та* $\bar{\gamma}\,\bar{\gamma}$)

$$= \bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma} \vee \alpha\,\beta\,\bar{\gamma} \vee \bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma} =$$

(*за законом ідемпотентності диз'юнкції*)

$$= \bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma} \vee \alpha\,\beta\,\bar{\gamma}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\bar{\alpha}\,\gamma\,\overline{\bar{\beta} \vee \bar{\alpha}\,\gamma} \vee \overline{\alpha\,\gamma}\,(\alpha\,\beta \vee \bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma}) = \bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma} \vee \alpha\,\beta\,\bar{\gamma}$.

3. $(\overline{\bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma}} \vee \gamma)\,(\bar{\beta}\,\bar{\gamma} \vee \alpha\,\beta) \vee (\bar{\beta} \vee \alpha\,\gamma)\,(\alpha \vee \beta) \vee \bar{\beta}\,\bar{\gamma}$.

Розв'язання.

$$(\overline{\bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma}} \vee \gamma)\,(\bar{\beta}\,\bar{\gamma} \vee \alpha\,\beta) \vee (\bar{\beta} \vee \alpha\,\gamma)\,(\alpha \vee \beta) \vee \bar{\beta}\,\bar{\gamma} =$$

(*за законом де Моргана для* $\overline{\bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma}}$)

$$= (\bar{\bar{\alpha}} \vee \bar{\bar{\beta}} \vee \bar{\bar{\gamma}} \vee \gamma)\,(\bar{\beta}\,\bar{\gamma} \vee \alpha\,\beta) \vee (\bar{\beta} \vee \alpha\,\gamma)\,(\alpha \vee \beta) \vee \bar{\beta}\,\bar{\gamma} =$$

(*за законом подвійного заперечення*)

$$= (\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \gamma)\,(\bar{\beta}\,\bar{\gamma} \vee \alpha\,\beta) \vee (\bar{\beta} \vee \alpha\,\gamma)\,(\alpha \vee \beta) \vee \bar{\beta}\,\bar{\gamma} =$$

(*за законом ідемпотентності диз'юнкції для* $\gamma \vee \gamma$)

$$= (\alpha \vee \beta \vee \gamma)\,(\bar{\beta}\,\bar{\gamma} \vee \alpha\,\beta) \vee (\bar{\beta} \vee \alpha\,\gamma)\,(\alpha \vee \beta) \vee \bar{\beta}\,\bar{\gamma} =$$

(*за законом дистрибутивності*)

$$= \alpha\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma} \vee \alpha\,\alpha\,\beta \vee \beta\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma} \vee \alpha\,\beta\,\beta \vee \bar{\beta}\,\bar{\gamma}\,\gamma \vee \alpha\,\beta\,\gamma \vee \alpha\,\bar{\beta} \vee \beta\,\bar{\beta} \vee \alpha\,\alpha\,\gamma \vee \alpha\,\beta\,\gamma \vee \bar{\beta}\,\bar{\gamma} =$$

(*за законом протиріччя для* $\beta\,\bar{\beta}$ *та* $\gamma\,\bar{\gamma}$)

$$= \alpha\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma} \vee \alpha\,\alpha\,\beta \vee 0 \cdot \overline{\gamma} \vee \alpha\,\beta\,\beta \vee \overline{\beta} \cdot 0 \vee \alpha\,\beta\,\gamma \vee \alpha\,\overline{\beta} \vee 0 \vee \alpha\,\alpha\,\gamma \vee \alpha\,\beta\,\gamma \vee \overline{\beta}\,\overline{\gamma} =$$

(*за законами нуля*)

$$= \alpha\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma} \vee \alpha\,\alpha\,\beta \vee \alpha\,\beta\,\beta \vee \alpha\,\beta\,\gamma \vee \alpha\,\overline{\beta} \vee \alpha\,\alpha\,\gamma \vee \alpha\,\beta\,\gamma \vee \overline{\beta}\,\overline{\gamma} =$$

(*за законом ідемпотентності кон'юнкції для* $\alpha\,\alpha$ *та* $\beta\,\beta$)

$$= \alpha\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma} \vee \alpha\,\beta \vee \alpha\,\beta \vee \alpha\,\beta\,\gamma \vee \alpha\,\overline{\beta} \vee \alpha\,\gamma \vee \alpha\,\beta\,\gamma \vee \overline{\beta}\,\overline{\gamma} =$$

(*за законом ідемпотентності диз'юнкції для* $\alpha\,\beta \vee \alpha\,\beta$ *та* $\alpha\,\beta\,\gamma \vee \alpha\,\beta\,\gamma$)

$$= \alpha\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma} \vee \alpha\,\beta \vee \alpha\,\beta\,\gamma \vee \alpha\,\overline{\beta} \vee \alpha\,\gamma \vee \overline{\beta}\,\overline{\gamma} =$$

(*за законом елімінації для* $\alpha\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma} \vee \overline{\beta}\,\overline{\gamma}$ *та* $\alpha\,\beta \vee \alpha\,\beta\,\gamma$)

$$= \overline{\beta}\,\overline{\gamma} \vee \alpha\,\beta \vee \alpha\,\overline{\beta} \vee \alpha\,\gamma =$$

(*за законом дистрибутивності*)

$$= \overline{\beta}\,\overline{\gamma} \vee \alpha\,(\beta \vee \overline{\beta}) \vee \alpha\,\gamma =$$

(*за законом виключення третього для* $\beta \vee \overline{\beta} = 1$)

$$= \overline{\beta}\,\overline{\gamma} \vee \alpha \cdot 1 \vee \alpha\,\gamma =$$

(*за законом одиниці*)

$$= \overline{\beta}\,\overline{\gamma} \vee \alpha \vee \alpha\,\gamma =$$

(*за законом елімінації для* $\alpha \vee \alpha\,\gamma$)

$$= \alpha \vee \overline{\beta}\,\overline{\gamma}.$$

ВІДПОВІДЬ. $(\overline{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma}} \vee \gamma)\,(\overline{\beta}\,\overline{\gamma} \vee \alpha\,\beta) \vee (\overline{\beta} \vee \alpha\,\gamma)\,(\alpha \vee \beta) \vee \overline{\beta}\,\overline{\gamma} = \alpha \vee \overline{\beta}\,\overline{\gamma}$.

1.2. *Контрольні запитання*

1. Що таке логічне поле?
2. Наведіть приклади логічних полів.
3. Як виконуються всі дії над елементами поля логічних скалярів, поданих графічно?
4. Що розуміється під розрядом скінченного предиката при виконанні з ним основних операцій в якості елемента поля логічних скалярів?
5. Яким законам задовольняють операції диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення логічних скалярів?
6. За яким правилом відбувається узагальнення операцій диз'юнкції та кон'юнкції на довільну кількість логічних скалярів? Завдяки яким властивостям цих операцій є можливим таке узагальнення?
7. За яким правилом можна узагальнити закони де Моргана на довільну кількість логічних скалярів?
8. Який спосіб розв'язання задач графічного виконання операцій над логічними скалярами є раціональнішим і чому?

1.3. *Контрольні завдання*

А) ***За допомогою тотожних перетворень спростити формули*:**

1) $(\bar{\alpha}\,\beta \vee \overline{\bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma}})\,(\overline{\alpha\,\beta} \vee \bar{\gamma}\,(\alpha \vee \beta);$

2) $\overline{(\alpha\,\beta\,\gamma \vee \bar{\alpha}\,\bar{\beta})}\,(\overline{\overline{\overline{\alpha\,\gamma} \vee \beta} \vee \bar{\beta}\,\bar{\gamma}}) \vee \alpha\,\beta;$

3) $(\bar{\gamma}\,(\alpha \vee \bar{\beta}\,\bar{\gamma}) \vee \gamma\,(\bar{\beta} \vee \alpha\,\gamma))\,(\overline{\alpha \vee \beta});$

4) $\alpha\,\bar{\beta} \vee \overline{\bar{\gamma}\,(\alpha\,\beta \vee \bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma})} \vee \overline{\alpha\,\beta\,\gamma};$

5) $(\overline{\overline{(\bar{\alpha} \vee \bar{\beta} \vee \bar{\gamma})} \vee \alpha\,\beta\,\gamma}) \vee (\beta \vee \bar{\gamma})\,(\alpha \vee \beta\,\gamma);$

6) $\beta\,\bar{\gamma}\,(\alpha \vee \beta\,(\bar{\alpha}\,\bar{\gamma} \vee \alpha\,\gamma)) \vee \overline{(\alpha \vee \beta)}\,\overline{(\beta \vee \gamma)}\,(\overline{\alpha \vee \gamma});$

7) $\overline{\beta\,\gamma}\,\overline{\alpha\,\beta}\,\overline{\alpha\,\gamma}\,(\alpha \vee \beta\,\gamma) \vee \alpha\,(\beta \vee \bar{\alpha}\,\gamma)\,(\overline{\bar{\beta} \vee \alpha\,\bar{\gamma}});$

8) $\overline{\alpha\,\bar{\beta}\,\gamma\,(\bar{\beta} \vee \alpha\,\gamma)} \vee \overline{\bar{\alpha}\,\beta\,\gamma\,(\bar{\alpha} \vee \beta\,\gamma)} \vee \overline{\alpha\,\beta\,\bar{\gamma}\,(\bar{\gamma} \vee \alpha\,\beta)};$

9) $\overline{\left(\overline{\alpha\,\gamma \vee \beta\,\bar{\gamma}}\right)(\overline{\bar{\gamma} \vee \beta})} \vee \bar{\alpha}\,\bar{\beta} \vee \alpha\,\overline{(\beta \vee \bar{\gamma})}\,\overline{(\bar{\alpha} \vee \beta\,\gamma)};$

10) $\overline{\bar{\beta}\,(\overline{\bar{\alpha} \vee \bar{\gamma}})} \vee \overline{\alpha\,\overline{\beta\,\bar{\gamma}}}\,(\alpha\,\beta \vee \bar{\alpha}\,\beta \vee \bar{\beta}\,\gamma) \vee \bar{\alpha}\,\beta.$

Б) ***За допомогою аналітично-графічного метода обчислити значення виразів*:**

1) $(\overline{\overline{\bar{R}_{34} \vee R_{51}} \vee R_{118}}) \wedge (\overline{\bar{R}_{118} \vee R_{51} \vee \bar{R}_{34}});$

2) $(\overline{R_{14} \vee R_{160}}) \wedge (\bar{R}_{211} \vee \bar{R}_{101}) \wedge (\overline{\bar{R}_{131} \vee \bar{R}_{16}});$

3) $(\bar{R}_{200} \wedge (R_{190} \vee \bar{R}_{217})) \vee (R_{62} \wedge (\overline{\bar{R}_{200} \vee \bar{R}_{190}}));$

4) $((\overline{R_{58} \vee R_{203}}) \vee (\overline{R_{16} \vee R_{140}})) \wedge (\overline{R_{58} \vee R_{140}});$

5) $(R_{231} \vee \overline{(R_{11} \wedge \bar{R}_{62})}) \wedge (\overline{\bar{R}_{11} \vee R_{13}});$

6) $(\overline{\bar{R}_{173} \wedge \bar{R}_{186}}) \vee (\overline{\bar{R}_{162} \wedge \bar{R}_{118}}) \vee (R_{173} \wedge R_{186});$

7) $(\bar{R}_{125} \vee \bar{R}_{5} \vee \bar{R}_{13}) \wedge (\overline{\bar{R}_{5} \vee \bar{R}_{18} \vee \bar{R}_{10}});$

8) $(\overline{R_{28} \vee \bar{R}_{17}}) \wedge (\overline{R_{15} \vee \bar{R}_{1}}) \wedge (\overline{\bar{R}_{28} \vee R_{1}}) \wedge (\overline{\bar{R}_{17} \vee R_{1}});$

9) $(\overline{(\bar{R}_{6} \vee R_{199}) \wedge (R_{205} \vee \bar{R}_{199})}) \wedge (R_{8} \wedge \bar{R}_{6});$

10) $(R_{20} \wedge \bar{R}_{38} \wedge R_{181}) \vee (R_{20} \wedge R_{38} \wedge \bar{R}_{181}) \vee \bar{R}_{20}.$

2. МАТРИЧНЕ ПОДАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ЛОГІЧНОГО ПОЛЯ

Мета занять з даної теми – закріплення теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок роботи з логічними моделями матричного математичного апарату.

2.1. Поняття логічної матриці. Основні операції над логічними матрицями

Мета занять з даної теми – закріплення теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок виконання основних операцій з матрицями довільної розмірності та різноманітної логічної природи.

Позначимо через ***G*** множину логічних скалярів. Довільна система елементів множини ***G***, подана у вигляді прямокутної таблиці, що містить ***r*** рядків та ***s*** стовпців, називається логічною **(*r, s*)**-матрицею над ***G*** або просто **логічною матрицею**. Щоб записати матрицю, виписуються позначення її елементів, а потім отримана таблиця береться в дужки або обмежується подвійними рисками [12].

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1s}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2s}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a_{r1}} & \boldsymbol{a_{r2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{rs}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1s}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2s}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a_{r1}} & \boldsymbol{a_{r2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{rs}} \end{Vmatrix}.$$

Логічна матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців, називається **квадратною**. Для квадратної логічної матриці кількість її рядків (або стовпців) називається **порядком квадратної логічної матриці**. Квадратна логічна матриця, всі діагональні елементи якої дорівнюють одиниці, а інші елементи – нулю, називається **одиничною логічною матрицею** та позначається символом ***E***. Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається **нульовою логічною матрицею** та позначається символом ***O***. Логічні матриці називаються **рівними**, якщо кількості рядків і стовпців у них відповідно є рівними та якщо логічні скаляри, що розташовані на відповідних місцях цих матриць, також дорівнюють один одному. Таким чином, одна рівність між двома **(*r, s*)**-матрицями є рівносильною системі ***rs*** рівностей між їхніми елементами. Логічна матриця, що складається лише з одного рядка, називається **логічним рядком**, а кількість її елементів – **довжиною рядка**. Логічна матриця, що складається лише з одного стовпця, називається **логічним стовпцем**, а кількість його елементів – **висотою стовпця**.

Основними операціями над логічними матрицями є логічний добуток скаляра на матрицю або матриці на скаляр, диз’юнкція, кон’юнкція двох матриць, заперечення матриць, добуток логічних матриць. Щоб **помножити логічний скаляр α на логічну матрицю *A***, необхідно помножити на α всі елементи матриці ***A***:

$$\alpha \wedge \boldsymbol{A} = \alpha \wedge \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1s}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2s}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a_{r1}} & \boldsymbol{a_{r2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{rs}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \wedge \boldsymbol{a_{11}} & \alpha \wedge \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \alpha \wedge \boldsymbol{a_{1s}} \\ \alpha \wedge \boldsymbol{a_{21}} & \alpha \wedge \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \alpha \wedge \boldsymbol{a_{2s}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha \wedge \boldsymbol{a_{r1}} & \alpha \wedge \boldsymbol{a_{r2}} & \cdots & \alpha \wedge \boldsymbol{a_{rs}} \end{pmatrix},$$

$$A \wedge \alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rs} \end{pmatrix} \wedge \alpha = \begin{pmatrix} a_{11} \wedge \alpha & a_{12} \wedge \alpha & \cdots & a_{1s} \wedge \alpha \\ a_{21} \wedge \alpha & a_{22} \wedge \alpha & \cdots & a_{2s} \wedge \alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} \wedge \alpha & a_{r2} \wedge \alpha & \cdots & a_{rs} \wedge \alpha \end{pmatrix}.$$

В якості поля логічних скалярів візьмемо множину одномісних предикатів $P_i(x)$, $i = 0, 1, 2, 3$, де $x \in \{0, 1\}$. Цю множину задано таблицею 2.

Таблиця 2

Множина одномісних предикатів, заданих на алфавіті K={0, 1}

x	P_0	P_1	P_2	P_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Далі одномісні предикати подаються рядками $P = (P(0), P(1))$. Тоді $P_0=(0, 0)$, $P_1=(0, 1)$, $P_2=(1, 0)$, $P_3=(1, 1)$. Позначимо це скалярне поле через P.

Приклад 2. Знайти добуток логічного скаляра P_1 на матрицю

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$P_2 \wedge \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} = (1, 0) \wedge \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (1,0)\wedge(0,1) & (1,0)\wedge(1,0) & (1,0)\wedge(0,1) \\ (1,0)\wedge(0,0) & (1,0)\wedge(1,1) & (1,0)\wedge(0,1) \\ (1,0)\wedge(1,0) & (1,0)\wedge(0,0) & (1,0)\wedge(1,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_2 \end{pmatrix},$$

Відповідь. $P_2 \wedge \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_2 \end{pmatrix}$.

В силу того, що для логічного поля має місце аксіома комутативності [10], є справедливою рівність $\alpha A = A \alpha$. Для будь-якої логічної матриці над G і для будь-яких логічних скалярів $\alpha, \beta \in G$ мають місце наступні співвідношення:

$$1 \wedge A = A,$$

$$0 \wedge A = O,$$

$$\alpha \wedge O = O,$$

$$\alpha (\beta \wedge A) = (\alpha\beta) \wedge A.$$

<u>Диз'юнкцією</u> двох логічних матриць $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ над скалярним полем $\boldsymbol{G}$, що мають відповідно рівну кількість рядків та стовпців, називається матриця, що має ту ж саму кількість рядків та стовпців, і елементи якої дорівнюють диз'юнкціям відповідних елементів матриць $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rs} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \vee b_{11} & a_{12} \vee b_{12} & \dots & a_{1s} \vee b_{1s} \\ a_{21} \vee b_{21} & a_{22} \vee b_{22} & \dots & a_{2s} \vee b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} \vee b_{r1} & a_{r2} \vee b_{r2} & \dots & a_{rs} \vee b_{rs} \end{pmatrix}.$$

<u>Приклад 3</u>. Знайти диз'юнкцію двох матриць, що задані над скалярним полем одномісних предикатів

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_1 & P_2 \end{pmatrix}.$$

<u>Розв'язання</u>

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) \vee (1,1) & (1,0) \vee (1,0) & (0,1) \vee (0,1) \\ (0,0) \vee (0,1) & (1,1) \vee (0,0) & (0,1) \vee (1,0) \\ (1,0) \vee (1,0) & (0,0) \vee (0,1) & (1,1) \vee (1,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (1,1) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_3 \end{pmatrix}.$$

<u>Відповідь</u>. $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_3 \end{pmatrix}$.

З означення диз'юнкції логічних матриць випливають наступні співвідношення:

<u>комутативність диз'юнкції матриць</u>

$$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{A};$$

<u>асоціативність диз'юнкції матриць</u>

$$\boldsymbol{A} \vee (\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \vee \boldsymbol{C};$$

<u>дистрибутивність диз'юнкції матриць щодо добутку на скаляр</u>

$$\alpha\,(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) = \alpha\,\boldsymbol{A} \vee \alpha\,\boldsymbol{B};$$

дистрибутивність добутку матриці на скаляр щодо диз'юнкції скалярів

$$(\alpha \vee \beta)\, \boldsymbol{A} = \alpha\, \boldsymbol{A} \vee \beta\, \boldsymbol{A};$$

закон нуля

$$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} \vee \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A};$$

закон ідемпотентності диз'юнкції матриць

$$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}.$$

Кон'юнкцією двох логічних матриць $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ над скалярним полем $\boldsymbol{G}$, що мають відповідно рівну кількість рядків та стовпців, називається така логічна матриця над $\boldsymbol{G}$, що має таку ж саму кількість рядків та стовпців, і елементи якої дорівнюють кон'юнкціям відповідних елементів матриць $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ [18]:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rs} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \wedge b_{11} & a_{12} \wedge b_{12} & \dots & a_{1s} \wedge b_{1s} \\ a_{21} \wedge b_{21} & a_{22} \wedge b_{22} & \dots & a_{2s} \wedge b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} \wedge b_{r1} & a_{r2} \wedge b_{r2} & \dots & a_{rs} \wedge b_{rs} \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Для наведених в прикладі 3 матриць $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ знайти їх кон'юнкцію.

Розв'язання

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) \wedge (1,1) & (1,0) \wedge (1,0) & (0,1) \wedge (0,1) \\ (0,0) \wedge (0,1) & (1,1) \wedge (0,0) & (0,1) \wedge (1,0) \\ (1,0) \wedge (1,0) & (0,0) \wedge (0,1) & (1,1) \wedge (1,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_0 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_0 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_2 \end{pmatrix}.$

Для кон'юнкції матриць виконуються наступні співвідношення:

комутативність кон'юнкції матриць

$$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{A};$$

асоціативність кон'юнкції матриць

$$(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \wedge (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C});$$

асоціативність кон'юнкції матриць щодо добутку на скаляр

$$\alpha\, (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) = (\alpha\, \boldsymbol{A}) \wedge \boldsymbol{B};$$

дистрибутивність

$$(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{C}) \vee (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C}),$$

$$(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \vee \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{C}) \wedge (\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C});$$

елімінації

$$\boldsymbol{A} \vee (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{A} \wedge (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A};$$

ідемпотентність кон'юнкції матриць

$$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A};$$

закон нуля

$$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}.$$

Запереченням матриці $\overline{\boldsymbol{A}}$ називається матриця, елементи якої дорівнюють $\overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{ij}}$, тобто

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{a}}_{11} & \overline{\boldsymbol{a}}_{12} & \dots & \overline{\boldsymbol{a}}_{1s} \\ \overline{\boldsymbol{a}}_{21} & \overline{\boldsymbol{a}}_{22} & \dots & \overline{\boldsymbol{a}}_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\boldsymbol{a}}_{r1} & \overline{\boldsymbol{a}}_{r2} & \dots & \overline{\boldsymbol{a}}_{rs} \end{pmatrix}.$$

Приклад 5. Для наведеної в прикладі 2 матриці $\boldsymbol{A}$ знайти її заперечення.

Розв'язання

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \overline{\begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_3} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{P}}_1 & \overline{\boldsymbol{P}}_2 & \overline{\boldsymbol{P}}_1 \\ \overline{\boldsymbol{P}}_0 & \overline{\boldsymbol{P}}_3 & \overline{\boldsymbol{P}}_1 \\ \overline{\boldsymbol{P}}_2 & \overline{\boldsymbol{P}}_0 & \overline{\boldsymbol{P}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{(0,1)} & \overline{(1,0)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(0,0)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(1,0)} & \overline{(0,0)} & \overline{(1,1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,1) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_2} \\ \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_2} \\ \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_0} \end{pmatrix}.$$

Відповідь. $\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_2} \\ \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_2} \\ \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_0} \end{pmatrix}$.

Для заперечення матриць виконуються наступні рівності:

закон протиріччя

$$\boldsymbol{A} \wedge \overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{O};$$

закон подвійного заперечення

$$\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{A};$$

закон виключення третього

$$A \vee \overline{A} = 1;$$

закони згортання

$$A \vee (B \wedge \overline{B}) = A,$$

$$A \wedge (B \vee \overline{B}) = A;$$

закони де Моргана

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B},$$

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}.$$

закони викреслювання

$$A \vee (\overline{A} \wedge B) = A \vee B;$$

$$\overline{A} \vee (A \wedge B) = \overline{A} \vee B.$$

На відміну від перелічених вище операцій з матрицями, операція **логічного добутку** однієї логічної матриці на іншу визначається трохи складніше. Нехай є дві логічні матриці $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$, причому кількість стовпців першої з них збігається з кількістю рядків другої. Тільки за цієї умови операція добутку однієї логічної матриці на іншу має сенс. У протилежному випадку її виконати неможливо. ***Правило добутку логічних матриць***: щоб отримати елемент, що розташований в $\boldsymbol{i}$-тому рядку та $\boldsymbol{j}$-тому стовпці матриці, отриманої в результаті добутку, потрібно виконати кон’юнкцію елементів $\boldsymbol{i}$-того рядка першої матриці з відповідними елементами $\boldsymbol{j}$-го стовпця другої матриці і з отриманими результатами виконати диз’юнкцію. Тобто, якщо в нас матриці $\boldsymbol{A} = \|\boldsymbol{a_{ij}}\|_{r\times s}$ і $\boldsymbol{B} = \|\boldsymbol{b_{ij}}\|_{s\times t}$, то елементи матриці $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}$ будуть визначатися за формулою

$$c_{if} = a_{i1}b_{1f} \vee a_{i2}b_{2f} \vee \ldots \vee a_{is}b_{sf},$$

де $\boldsymbol{i} = \overline{1, r}$, $\boldsymbol{f} = \overline{1, t}$, $\boldsymbol{j} = \overline{1, s}$.

Приклад 6. Для булевих матриць [13, 14]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти їх добуток $\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}$.

Розв’язання

$$A\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1\wedge 1) \vee (0\wedge 1) & (1\wedge 0) \vee (0\wedge 1) & (1\wedge 0) \vee (0\wedge 1) \\ (1\wedge 1) \vee (1\wedge 1) & (1\wedge 0) \vee (1\wedge 1) & (1\wedge 0) \vee (1\wedge 1) \\ (0\wedge 1) \vee (1\wedge 1) & (0\wedge 1) \vee (1\wedge 1) & (0\wedge 0) \vee (1\wedge 1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \vee 0 & 0 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 1 \vee 1 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \\ 0 \vee 1 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. $A\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Добуток двох матриць в загальному випадку не є комутативним. Він залежить від порядку множників. Якщо в деякому добутку змінити порядок матриць, для яких виконується добуток, то результат може бути іншим.

Приклад 7. Для матриць із прикладу 6 знайти добуток $\boldsymbol{B\ A}$:

Розв'язання

$$\boldsymbol{B\ A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{1} \wedge \mathbf{1}) \vee (\mathbf{0} \wedge \mathbf{1}) \vee (\mathbf{0} \wedge \mathbf{0}) & (\mathbf{1} \wedge \mathbf{0}) \vee (\mathbf{0} \wedge \mathbf{1}) \vee (\mathbf{0} \wedge \mathbf{1}) \\ (\mathbf{1} \wedge \mathbf{1}) \vee (\mathbf{1} \wedge \mathbf{1}) \vee (\mathbf{1} \wedge \mathbf{0}) & (\mathbf{1} \wedge \mathbf{0}) \vee (\mathbf{1} \wedge \mathbf{1}) \vee (\mathbf{1} \wedge \mathbf{1}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} \vee \mathbf{0} \vee \mathbf{0} & \mathbf{0} \vee \mathbf{0} \vee \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \vee \mathbf{1} \vee \mathbf{0} & \mathbf{0} \vee \mathbf{1} \vee \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{A\ B}.$$

Відповідь. $\boldsymbol{B\ A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{A\ B}$.

Для матриць, заданих над скалярним полем, елементами якого є деякі предикати, це твердження також зберігається.

Приклад 8. Для матриць із прикладу 3 знайти їх добутки $\boldsymbol{A\ B}$ і $\boldsymbol{B\ A}$ та порівняти отримані результати.

Розв'язання. Спочатку знайдемо добуток $\boldsymbol{A\ B}$:

$$\boldsymbol{A \cdot B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_2} \\ \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (P_1 \wedge P_3) \vee (P_2 \wedge P_1) \vee (P_1 \wedge P_2) & (P_1 \wedge P_2) \vee (P_2 \wedge P_0) \vee (P_1 \wedge P_1) & (P_1 \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_2) \\ (P_0 \wedge P_3) \vee (P_3 \wedge P_1) \vee (P_1 \wedge P_2) & (P_0 \wedge P_2) \vee (P_3 \wedge P_0) \vee (P_1 \wedge P_1) & (P_0 \wedge P_1) \vee (P_3 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_2) \\ (P_2 \wedge P_3) \vee (P_0 \wedge P_1) \vee (P_3 \wedge P_2) & (P_2 \wedge P_2) \vee (P_0 \wedge P_0) \vee (P_3 \wedge P_1) & (P_2 \wedge P_1) \vee (P_0 \wedge P_2) \vee (P_3 \wedge P_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ((0,1) \wedge (1,1)) \vee ((1,0) \wedge (0,1)) \vee ((0,1) \wedge (1,0)) & ((0,1) \wedge (1,0)) \vee ((1,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,1) \wedge (0,1)) & ((0,1) \wedge (0,1)) \vee ((1,0) \wedge (1,0)) \vee ((0,1) \wedge (1,0)) \\ ((0,0) \wedge (1,1)) \vee ((1,1) \wedge (0,1)) \vee ((0,1) \wedge (1,0)) & ((0,0) \wedge (1,0)) \vee ((1,1) \wedge (0,0)) \vee ((0,1) \wedge (0,1)) & ((0,0) \wedge (0,1)) \vee ((1,1) \wedge (1,0)) \vee ((0,1) \wedge (1,0)) \\ ((1,0) \wedge (1,1)) \vee ((0,0) \wedge (0,1)) \vee ((1,1) \wedge (1,0)) & ((1,0) \wedge (1,0)) \vee ((0,0) \wedge (0,0)) \vee ((1,1) \wedge (0,1)) & ((1,0) \wedge (0,1)) \vee ((0,0) \wedge (1,0)) \vee ((1,1) \wedge (1,0)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,1) & (1,1) \\ (0,1) & (0,1) & (1,0) \\ (1,0) & (1,1) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_3} \\ \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_2} \\ \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_2} \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо добуток $\boldsymbol{B\ A}$:

$$\boldsymbol{B \cdot A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_2} \\ \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (P_3 \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_0) \vee (P_1 \wedge P_2) & (P_3 \wedge P_2) \vee (P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_0) & (P_3 \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_1) \vee (P_1 \wedge P_3) \\ (P_1 \wedge P_1) \vee (P_0 \wedge P_0) \vee (P_2 \wedge P_2) & (P_1 \wedge P_2) \vee (P_0 \wedge P_3) \vee (P_2 \wedge P_0) & (P_1 \wedge P_1) \vee (P_0 \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_3) \\ (P_2 \wedge P_1) \vee (P_1 \wedge P_0) \vee (P_2 \wedge P_2) & (P_2 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3) \vee (P_2 \wedge P_0) & (P_2 \wedge P_1) \vee (P_1 \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ((1,1)\wedge(0,1)) \vee ((1,0)\wedge(0,0)) \vee ((0,1)\wedge(1,0)) \\ ((0,1)\wedge(0,1)) \vee ((0,0)\wedge(0,0)) \vee ((1,0)\wedge(1,0)) \\ ((1,0)\wedge(0,1)) \vee ((0,1)\wedge(0,0)) \vee ((1,0)\wedge(1,0)) \end{pmatrix.$$

$$\begin{matrix} ((1,1)\wedge(1,0)) \vee ((1,0)\wedge(1,1)) \vee ((0,1)\wedge(0,0)) \\ ((0,1)\wedge(1,0)) \vee ((0,0)\wedge(1,1)) \vee ((1,0)\wedge(0,0)) \\ ((1,0)\wedge(1,0)) \vee ((0,1)\wedge(1,1)) \vee ((1,0)\wedge(0,0)) \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} ((1,1)\wedge(0,1)) \vee ((1,0)\wedge(0,1)) \vee ((0,1)\wedge(1,1)) \\ ((0,1)\wedge(0,1)) \vee ((0,0)\wedge(0,1)) \vee ((1,0)\wedge(1,1)) \\ ((1,0)\wedge(0,1)) \vee ((0,1)\wedge(0,1)) \vee ((1,0)\wedge(1,1)) \end{matrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,1) \\ (1,1) & (0,0) & (1,1) \\ (1,0) & (1,1) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_3 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_3 & P_3 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} P_1 & P_1 & P_3 \\ P_1 & P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 & P_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_3 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_3 & P_3 \end{pmatrix} = B \cdot A.$$

Відповідь. $A \cdot B = \begin{pmatrix} P_1 & P_1 & P_3 \\ P_1 & P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 & P_2 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_3 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_3 & P_3 \end{pmatrix}$, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Якщо розглядати матриці не квадратні, то може так статися, що в одному порядку операція їхнього добутку має сенс, а у зворотному – ні. Розглянемо тепер основні властивості добутку матриць:

асоціативність відносно добутку на скаляр

$$\alpha \wedge (A\ B) = (\alpha \wedge A)\ B, \tag{1}$$

$$A\ (\alpha \wedge B) = (A \wedge \alpha)B, \tag{2}$$

$$(A\ B) \wedge \alpha = A\ (B \wedge \alpha). \tag{3}$$

дистрибутивність добутку відносно диз'юнкції матриць

$$(A \vee B)\ C = A\ C \vee B\ C, \tag{4}$$

$$C\ (A \vee B) = C\ A \vee C\ B. \tag{5}$$

дистрибутивність добутку відносно кон'юнкції матриць

$$(A \wedge B)\ C = A\ C \wedge B\ C, \tag{6}$$

$$C\ (A \wedge B) = C\ A \wedge C\ B. \tag{7}$$

Із властивостей (4 – 5) безпосередньо випливає наступне правило: щоб помножити диз'юнкцію логічних матриць на диз'юнкцію, необхідно кожну матрицю першої диз'юнкції помножити на кожну матрицю другої і для отриманих результатів виконати диз'юнкцію. Аналогічне правило для кон'юнкції і добутку логічних матриць випливає із властивостей (6 – 7). Для добутку логічних матриць виконується також властивість *асоціативності*:

$$A\ (B\ C) = (A\ B)\ C. \tag{8}$$

Слід зазначити, що при виконанні операцій над матрицями неможна припускатися тих спрощень запису формул, які було введено для операцій над логічними скалярами. Якщо в формулах з логічними матрицями не писати операцію кон'юнкції, то це внесе плутанину в розуміння формули, бо замість операції кон'юнкції буде виконуватися операція добутку між матрицями. Але при виконанні кон'юнкції між логічними скалярами та добутку логічного скаляра на матрицю таке спрощення є припустимим. Також при виконанні операцій над логічними матрицями операція добутку матриць вважається старшою за операції диз'юнкції та кон'юнкції. В той же час, операція заперечення, що відноситься безпосередньо до матриці, є найстаршою. Тобто при обчисленні такого виразу слід спочатку знайти заперечення зазначеної матриці, а вже потім виконувати добуток цього заперечення з іншими множниками. Але якщо заперечення відноситься до деякого виразу, то як при виконанні описаних раніше операцій, спочатку слід обчислити заперечуваний вираз, а вже потім виконувати з ним операцію заперечення.

2.1.1. *Задачі для самостійного опрацювання*

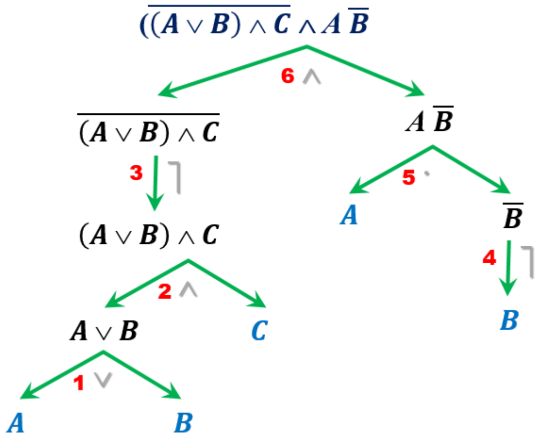
Нехай є матриці над скалярним полем $\boldsymbol{P}$ одномісних предикатів, що задане таблицею 2:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_0} \\ \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_1} \end{pmatrix}.$$

Обчислити значення виразів

1. $\boldsymbol{(\overline{(A \vee B) \wedge C} \wedge A\,\overline{B}}$.

<u>*Розв'язання*</u>. В першу чергу треба обрати порядок дій, в якому буде відбуватися обчислення. Спочатку побудуємо семантичне дерево для заданої формули [2].



Отже, для обчислення заданої формули треба виконати 6 операцій, серед яких міститься один добуток матриць.

Далі проведемо обчислення згідно з обраним порядком дій.

Дія № 1:

$$A \vee B = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_3 & P_0 & P_0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_2 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (1,1) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (1,0) & (1,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,1) & (1,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_3 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_3 & P_2 & P_2 \end{pmatrix}.$$

Дія № 2:

$$(A \vee B) \wedge C = \begin{pmatrix} P_3 & P_3 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_3 & P_2 & P_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \\ P_1 & P_2 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,1) & (1,0) & (1,0) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \\ (0,1) & (1,0) & (0,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \\ (0,1) & (1,0) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \\ P_1 & P_2 & P_0 \end{pmatrix}.$$

Дія № 3:

$$\overline{(A \vee B) \wedge C} = \overline{\begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \\ P_1 & P_2 & P_0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{P}_2 & \overline{P}_1 & \overline{P}_1 \\ \overline{P}_0 & \overline{P}_3 & \overline{P}_0 \\ \overline{P}_1 & \overline{P}_2 & \overline{P}_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{(1,0)} & \overline{(0,1)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(0,0)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,0)} \\ \overline{(0,1)} & \overline{(1,0)} & \overline{(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_3 \end{pmatrix}.$$

Дія № 4:

$$\overline{B} = \overline{\begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_2 & P_2 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (1,0) & (1,0) \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{(0,1)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(0,0)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(1,0)} & \overline{(1,0)} & \overline{(1,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,1) & (0,1) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_1 & P_1 & P_1 \end{pmatrix}.$$

Дія № 5:

$$A\,\overline{B} = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_3 & P_0 & P_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_1 & P_1 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (P_3 \wedge P_2) \vee (P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_1) & (P_3 \wedge P_0) \vee (P_2 \wedge P_0) \vee (P_1 \wedge P_1) & (P_3 \wedge P_2) \vee (P_2 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_1) \\ (P_0 \wedge P_2) \vee (P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_1) & (P_0 \wedge P_0) \vee (P_2 \wedge P_0) \vee (P_1 \wedge P_1) & (P_0 \wedge P_2) \vee (P_2 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_1) \\ (P_3 \wedge P_2) \vee (P_0 \wedge P_3) \vee (P_0 \wedge P_1) & (P_3 \wedge P_0) \vee (P_0 \wedge P_0) \vee (P_0 \wedge P_1) & (P_3 \wedge P_2) \vee (P_0 \wedge P_2) \vee (P_0 \wedge P_1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ((1,1) \wedge (1,0)) \vee ((1,0) \wedge (1,1)) \vee ((0,1) \wedge (0,1)) & ((1,1) \wedge (0,0)) \vee ((1,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,1) \wedge (0,1)) & ((1,1) \wedge (1,0)) \vee ((1,0) \wedge (1,0)) \vee ((0,1) \wedge (0,1)) \\ ((0,0) \wedge (1,0)) \vee ((1,0) \wedge (1,1)) \vee ((0,1) \wedge (0,1)) & ((0,0) \wedge (0,0)) \vee ((1,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,1) \wedge (0,1)) & ((0,0) \wedge (1,0)) \vee ((1,0) \wedge (1,0)) \vee ((0,1) \wedge (0,1)) \\ ((1,1) \wedge (1,0)) \vee ((0,0) \wedge (1,1)) \vee ((0,0) \wedge (0,1)) & ((1,1) \wedge (0,0)) \vee ((0,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,0) \wedge (0,1)) & ((1,1) \wedge (1,0)) \vee ((0,0) \wedge (1,0)) \vee ((0,0) \wedge (0,1)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (0,1) & (1,1) \\ (1,1) & (0,1) & (1,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_1 & P_3 \\ P_3 & P_1 & P_3 \\ P_2 & P_0 & P_2 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 6*:**

$$\overline{((A \vee B) \wedge C} \wedge A\,\overline{B} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_3 & P_1 & P_3 \\ P_3 & P_1 & P_3 \\ P_2 & P_0 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (1,1) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (1,1) & (0,1) & (1,1) \\ (1,1) & (0,1) & (1,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_0 & P_2 \end{pmatrix}.$$

***Тепер виконаємо тотожні перетворення заданої формули*:**

$$\overline{((A \vee B) \wedge C} \wedge A\,\overline{B} =$$

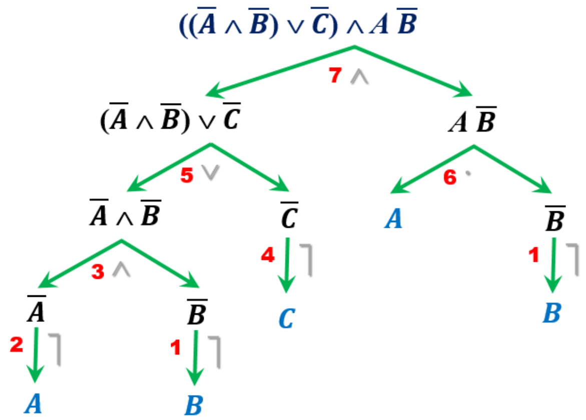
(*за законом де Моргана для* $\overline{(A \vee B) \wedge C}$)

$$= (\overline{A \vee B} \vee \overline{C}) \wedge A\,\overline{B} =$$

(*за законом де Моргана для* $\overline{A \vee B}$)

$$= ((\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee \overline{C}) \wedge A\,\overline{B}.$$

Подальше спрощення цієї формули неможливе. Побудуємо семантичне дерево для неї.



Далі проведемо обчислення згідно з таким порядком дій.

***Дія № 1*:**

Цей результат вже отриманий в ході попереднього розв’язання:

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,1) & (0,1) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_1 & P_1 & P_1 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 2*:**

$$\overline{A} = \overline{\begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_3 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (1,1) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{(1,1)} & \overline{(1,0)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(0,0)} & \overline{(1,0)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(1,1)} & \overline{(0,0)} & \overline{(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) \\ (1,1) & (0,1) & (1,0) \\ (0,0) & (1,1) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 \\ P_3 & P_1 & P_2 \\ P_0 & P_3 & P_3 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 3*:**

$$\overline{A} \wedge \overline{B} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 \\ P_3 & P_1 & P_2 \\ P_0 & P_3 & P_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_1 & P_1 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) \\ (1,1) & (0,1) & (1,0) \\ (0,0) & (1,1) & (1,1) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,1) & (0,1) & (0,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_0 & P_0 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_1 & P_1 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 4*:**

$$\overline{C} = \overline{\begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \\ P_1 & P_2 & P_1 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \\ (0,1) & (1,0) & (0,1) \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{(1,0)} & \overline{(0,1)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(0,0)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,0)} \\ \overline{(0,1)} & \overline{(1,0)} & \overline{(0,1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_2 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 5*:**

$$(\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee \overline{C} = \begin{pmatrix} P_0 & P_0 & P_0 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_1 & P_1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,1) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_3 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 6*:**

Цей результат також вже отриманий в ході попереднього розв’язання:

$$A\,\overline{B} = \begin{pmatrix} (1,1) & (0,1) & (1,1) \\ (1,1) & (0,1) & (1,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_1 & P_3 \\ P_3 & P_1 & P_3 \\ P_2 & P_0 & P_2 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 7*:**

$$((\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee \overline{C}) \wedge A\,\overline{B} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_3 & P_1 & P_3 \\ P_3 & P_1 & P_3 \\ P_2 & P_0 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (1,1) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (1,1) & (0,1) & (1,1) \\ (1,1) & (0,1) & (1,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} =$$

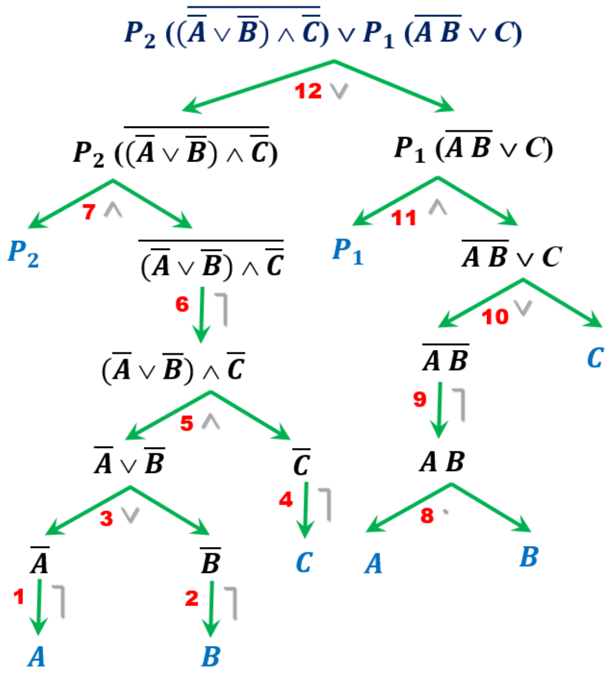
$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_0 & P_2 \end{pmatrix}.$$

Як можна побачити, отриманий той же самий результат. При такому порядку дій залишається єдиний добуток матриць, але загальна кількість дій збільшилася. Тому <u>в даному випадку</u> раціональніше обчислювати формулу в її початковому вигляді.

***<u>ВІДПОВІДЬ</u>*.** $\overline{((A \vee B) \wedge C} \wedge A\,\overline{B} = \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_0 & P_2 \end{pmatrix}.$

2. $P_2\,(\overline{(\overline{A}\vee\overline{B})\wedge\overline{C}})\vee P_1\,(\overline{A\,B}\vee C)$.

<u>Розв'язання</u>. Спочатку побудуємо семантичне дерево для заданої формули [2].



Далі проведемо обчислення згідно з обраним порядком дій.

Дія № 1:

$$\overline{A} = \overline{\begin{pmatrix}P_3 & P_2 & P_1\\ P_0 & P_2 & P_1\\ P_3 & P_0 & P_0\end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix}(1,1) & (1,0) & (0,1)\\ (0,0) & (1,0) & (0,1)\\ (1,1) & (0,0) & (0,0)\end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix}\overline{(1,1)} & \overline{(1,0)} & \overline{(0,1)}\\ \overline{(0,0)} & \overline{(1,0)} & \overline{(0,1)}\\ \overline{(1,1)} & \overline{(0,0)} & \overline{(0,0)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(0,0) & (0,1) & (1,0)\\ (1,1) & (0,1) & (1,0)\\ (0,0) & (1,1) & (1,1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P_0 & P_1 & P_2\\ P_3 & P_1 & P_2\\ P_0 & P_3 & P_3\end{pmatrix}.$$

Дія № 2:

$$\overline{B} = \overline{\begin{pmatrix}P_1 & P_3 & P_1\\ P_0 & P_3 & P_1\\ P_2 & P_2 & P_2\end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix}(0,1) & (1,1) & (0,1)\\ (0,0) & (1,1) & (0,1)\\ (1,0) & (1,0) & (1,0)\end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix}\overline{(0,1)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,1)}\\ \overline{(0,0)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,1)}\\ \overline{(1,0)} & \overline{(1,0)} & \overline{(1,0)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1,0) & (0,0) & (1,0)\\ (1,1) & (0,0) & (1,0)\\ (0,1) & (0,1) & (0,1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P_2 & P_0 & P_2\\ P_3 & P_0 & P_2\\ P_1 & P_1 & P_1\end{pmatrix}.$$

Дія № 3:

$$\overline{A}\vee\overline{B} = \begin{pmatrix}P_0 & P_1 & P_2\\ P_3 & P_1 & P_2\\ P_0 & P_3 & P_3\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}P_2 & P_0 & P_2\\ P_3 & P_0 & P_2\\ P_1 & P_1 & P_1\end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}(0,0) & (0,1) & (1,0)\\ (1,1) & (0,1) & (1,0)\\ (0,0) & (1,1) & (1,1)\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}(1,0) & (0,0) & (1,0)\\ (1,1) & (0,0) & (1,0)\\ (0,1) & (0,1) & (0,1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(1,0) & (0,1) & (1,0)\\ (1,1) & (0,1) & (1,0)\\ (0,1) & (1,1) & (1,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_2 & P_1 & P_2\\ P_3 & P_1 & P_2\\ P_1 & P_3 & P_3\end{pmatrix}.$$

***Дія № 4*:**

$$\overline{C}=\overline{\begin{pmatrix}P_2 & P_1 & P_1\\ P_0 & P_3 & P_0\\ P_1 & P_2 & P_1\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix}(1,0) & (0,1) & (0,1)\\ (0,0) & (1,1) & (0,0)\\ (0,1) & (1,0) & (0,1)\end{pmatrix}}=$$

$$=\begin{pmatrix}\overline{(1,0)} & \overline{(0,1)} & \overline{(0,1)}\\ \overline{(0,0)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,0)}\\ \overline{(0,1)} & \overline{(1,0)} & \overline{(0,1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(0,1) & (1,0) & (1,0)\\ (1,1) & (0,0) & (1,1)\\ (1,0) & (0,1) & (1,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1 & P_2 & P_2\\ P_3 & P_0 & P_3\\ P_2 & P_1 & P_2\end{pmatrix}.$$

***Дія № 5*:**

$$(\overline{A}\vee\overline{B})\wedge\overline{C}=\begin{pmatrix}P_2 & P_1 & P_2\\ P_3 & P_1 & P_2\\ P_1 & P_3 & P_3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}P_1 & P_2 & P_2\\ P_3 & P_0 & P_3\\ P_2 & P_1 & P_2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(1,0) & (0,1) & (1,0)\\ (1,1) & (0,1) & (1,0)\\ (0,1) & (1,1) & (1,1)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}(0,1) & (1,0) & (1,0)\\ (1,1) & (0,0) & (1,1)\\ (1,0) & (0,1) & (1,0)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(0,0) & (0,0) & (1,0)\\ (1,1) & (0,0) & (1,0)\\ (0,0) & (0,1) & (1,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_0 & P_0 & P_2\\ P_3 & P_0 & P_2\\ P_0 & P_1 & P_2\end{pmatrix}.$$

***Дія № 6*:**

$$\overline{(\overline{A}\vee\overline{B})\wedge\overline{C}}=\overline{\begin{pmatrix}P_0 & P_0 & P_2\\ P_3 & P_0 & P_2\\ P_0 & P_1 & P_2\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix}(0,0) & (0,0) & (1,0)\\ (1,1) & (0,0) & (1,0)\\ (0,0) & (0,1) & (1,0)\end{pmatrix}}=$$

$$=\begin{pmatrix}\overline{(0,0)} & \overline{(0,0)} & \overline{(1,0)}\\ \overline{(1,1)} & \overline{(0,0)} & \overline{(1,0)}\\ \overline{(0,0)} & \overline{(0,1)} & \overline{(1,0)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,1) & (1,1) & (0,1)\\ (0,0) & (1,1) & (0,1)\\ (1,1) & (1,0) & (0,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_3 & P_3 & P_1\\ P_0 & P_3 & P_1\\ P_3 & P_2 & P_1\end{pmatrix}.$$

***Дія № 7*:**

$$P_2\wedge(\overline{(\overline{A}\vee\overline{B})\wedge\overline{C}})=P_2\wedge\begin{pmatrix}P_3 & P_3 & P_1\\ P_0 & P_3 & P_1\\ P_3 & P_2 & P_1\end{pmatrix}=$$

$$=(1,0)\wedge\begin{pmatrix}(1,1) & (1,1) & (0,1)\\ (0,0) & (1,1) & (0,1)\\ (1,1) & (1,0) & (0,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,0) & (1,0) & (0,0)\\ (0,0) & (1,0) & (0,0)\\ (1,0) & (1,0) & (0,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_2 & P_2 & P_0\\ P_0 & P_2 & P_0\\ P_2 & P_2 & P_0\end{pmatrix}.$$

Дія № 8:

$$A\,B=\begin{pmatrix}P_3 & P_2 & P_1\\ P_0 & P_2 & P_1\\ P_3 & P_0 & P_0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}P_1 & P_3 & P_1\\ P_0 & P_3 & P_1\\ P_2 & P_2 & P_2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(P_3\wedge P_1)\vee(P_2\wedge P_0)\vee(P_1\wedge P_2) & (P_3\wedge P_3)\vee(P_2\wedge P_3)\vee(P_1\wedge P_2) & (P_3\wedge P_1)\vee(P_2\wedge P_1)\vee(P_1\wedge P_2)\\ (P_0\wedge P_1)\vee(P_2\wedge P_0)\vee(P_1\wedge P_2) & (P_0\wedge P_3)\vee(P_2\wedge P_3)\vee(P_1\wedge P_2) & (P_0\wedge P_1)\vee(P_2\wedge P_1)\vee(P_1\wedge P_2)\\ (P_3\wedge P_1)\vee(P_0\wedge P_0)\vee(P_0\wedge P_2) & (P_3\wedge P_3)\vee(P_0\wedge P_3)\vee(P_0\wedge P_2) & (P_3\wedge P_1)\vee(P_0\wedge P_1)\vee(P_0\wedge P_2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}((1,1)\wedge(0,1))\vee((1,0)\wedge(0,0))\vee((0,1)\wedge(1,0)) & ((1,1)\wedge(1,1))\vee((1,0)\wedge(1,1))\vee((0,1)\wedge(1,0)) & ((1,1)\wedge(0,1))\vee((1,0)\wedge(0,1))\vee((0,1)\wedge(1,0))\\ ((0,0)\wedge(0,1))\vee((1,0)\wedge(0,0))\vee((0,1)\wedge(1,0)) & ((0,0)\wedge(1,1))\vee((1,0)\wedge(1,1))\vee((0,1)\wedge(1,0)) & ((0,0)\wedge(0,1))\vee((1,0)\wedge(0,1))\vee((0,1)\wedge(1,0))\\ ((1,1)\wedge(0,1))\vee((0,0)\wedge(0,0))\vee((0,0)\wedge(1,0)) & ((1,1)\wedge(1,1))\vee((0,0)\wedge(1,1))\vee((0,0)\wedge(1,0)) & ((1,1)\wedge(0,1))\vee((0,0)\wedge(0,1))\vee((0,0)\wedge(1,0))\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(0,1) & (1,1) & (0,1)\\ (0,0) & (1,0) & (0,0)\\ (0,1) & (1,1) & (0,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1 & P_3 & P_1\\ P_0 & P_2 & P_0\\ P_1 & P_3 & P_1\end{pmatrix}.$$

Дія № 9:

$$\overline{A\,B}=\overline{\begin{pmatrix}P_1 & P_3 & P_1\\ P_0 & P_2 & P_0\\ P_1 & P_3 & P_1\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix}(0,1) & (1,1) & (0,1)\\ (0,0) & (1,0) & (0,0)\\ (0,1) & (1,1) & (0,1)\end{pmatrix}}=$$

$$=\begin{pmatrix}\overline{(0,1)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,1)}\\ \overline{(0,0)} & \overline{(1,0)} & \overline{(0,0)}\\ \overline{(0,1)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,0) & (0,0) & (1,0)\\ (1,1) & (0,1) & (1,1)\\ (1,0) & (0,0) & (1,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_2 & P_0 & P_2\\ P_3 & P_1 & P_3\\ P_2 & P_0 & P_2\end{pmatrix}.$$

Дія № 10:

$$\overline{A\,B}\vee C=\begin{pmatrix}P_2 & P_0 & P_2\\ P_3 & P_1 & P_3\\ P_2 & P_0 & P_2\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}P_2 & P_1 & P_1\\ P_0 & P_3 & P_0\\ P_1 & P_2 & P_1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(1,0) & (0,0) & (1,0)\\ (1,1) & (0,1) & (1,1)\\ (1,0) & (0,0) & (1,0)\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}(1,0) & (0,1) & (0,1)\\ (0,0) & (1,1) & (0,0)\\ (0,1) & (1,0) & (0,1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(1,0) & (0,1) & (1,1)\\ (1,1) & (1,1) & (1,1)\\ (1,1) & (1,0) & (1,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_2 & P_1 & P_3\\ P_3 & P_3 & P_3\\ P_3 & P_2 & P_3\end{pmatrix}.$$

Дія № 11:

$$P_1\wedge(\overline{A\,B}\vee C)=P_1\wedge\begin{pmatrix}P_2 & P_1 & P_3\\ P_3 & P_3 & P_3\\ P_3 & P_2 & P_3\end{pmatrix}=$$

$$= (0,1) \wedge \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & (1,1) \\ (1,1) & (1,1) & (1,1) \\ (1,1) & (1,0) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (0,1) \\ (0,1) & (0,1) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_1 \\ P_1 & P_1 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_1 \end{pmatrix}.$$

Дія № 12:

$$P_2\,(\overline{(\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge \overline{C}}) \vee P_1\,(\overline{A\,B} \vee C) = \begin{pmatrix} P_2 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_0 \\ P_2 & P_2 & P_0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_1 \\ P_1 & P_1 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (1,0) & (1,0) & (0,0) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (0,1) \\ (0,1) & (0,1) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,0) & (1,1) & (0,1) \\ (0,1) & (1,1) & (0,1) \\ (1,1) & (1,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_3 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_1 \\ P_3 & P_2 & P_1 \end{pmatrix}.$$

***Тепер виконаємо тотожні перетворення заданої формули*:**

$$P_2\,(\overline{(\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge \overline{C}}) \vee P_1\,(\overline{A\,B} \vee C) =$$

(*за законом де Моргана для* $\overline{(\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge \overline{C}}$)

$$= P_2\,(\overline{\overline{A} \vee \overline{B}} \vee \overline{\overline{C}}) \vee P_1\,(\overline{A\,B} \vee C) =$$

(*за законом подвійного заперечення для* $\overline{\overline{C}}$)

$$= P_2\,(\overline{\overline{A} \vee \overline{B}} \vee C) \vee P_1\,(\overline{A\,B} \vee C) =$$

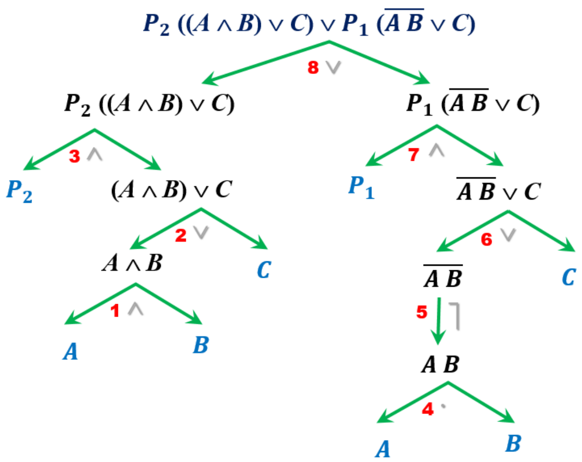
(*за законом де Моргана для* $\overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$)

$$= P_2\,((\overline{\overline{A}} \wedge \overline{\overline{B}}) \vee C) \vee P_1\,(\overline{A\,B} \vee C) =$$

(*за законом подвійного заперечення для* $\overline{\overline{A}}$ *та* $\overline{\overline{B}}$)

$$= P_2\,((A \wedge B) \vee C) \vee P_1\,(\overline{A\,B} \vee C).$$

Подальші тотожні перетворення передбачають розкриття дужок згідно з дистрибутивністю щодо добутку на скаляр. Але це перетворення <u>в даному випадку</u> не є доцільним, бо запис воно не скоротить, а лише збільшить кількість дій при обчисленні формули. Отже, побудуємо семантичне дерево для перетвореної формули.



Далі проведемо обчислення згідно з таким порядком дій.

***Дія № 1*:**

Цей результат вже отриманий в ході попереднього розв'язання:

$$A \wedge B = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_3 & P_0 & P_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_2 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (1,1) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (1,0) & (1,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (1,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 2*:**

$$(A \wedge B) \vee C = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \\ P_1 & P_2 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (1,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \\ (0,1) & (1,0) & (0,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,1) & (1,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_3 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_3 & P_2 & P_1 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 3*:**

$$P_2 \wedge ((A \wedge B) \vee C) = P_2 \wedge \begin{pmatrix} P_3 & P_3 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_3 & P_2 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= (1,0) \wedge \begin{pmatrix} (1,1) & (1,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,1) & (1,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (1,0) & (1,0) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_0 \\ P_2 & P_2 & P_0 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 4 – Дія № 7*:**

Ця гілка семантичного дерева не зазнала змін при виконанні тотожних перетворень початкової формули. Тому ми можемо скористатися результатами, отриманими при розрахунках початкової формули:

$$P_1 \wedge (\overline{A\,B} \vee C) = P_1 \wedge \begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P_3 \\ P_3 & P_3 & P_3 \\ P_3 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (0,1) \wedge \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & (1,1) \\ (1,1) & (1,1) & (1,1) \\ (1,1) & (1,0) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (0,1) \\ (0,1) & (0,1) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_1 \\ P_1 & P_1 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_1 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 8*:**

$$P_2\,((A\wedge B)\vee C)\vee P_1\,(\overline{A}\,\overline{B}\vee C)=\begin{pmatrix}P_2 & P_2 & P_0\\ P_0 & P_2 & P_0\\ P_2 & P_2 & P_0\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}P_0 & P_1 & P_1\\ P_1 & P_1 & P_1\\ P_1 & P_0 & P_1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(1,0) & (1,0) & (0,0)\\ (0,0) & (1,0) & (0,0)\\ (1,0) & (1,0) & (0,0)\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}(0,0) & (0,1) & (0,1)\\ (0,1) & (0,1) & (0,1)\\ (0,1) & (0,0) & (0,1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(1,0) & (1,1) & (0,1)\\ (0,1) & (1,1) & (0,1)\\ (1,1) & (1,0) & (0,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_2 & P_3 & P_1\\ P_1 & P_3 & P_1\\ P_3 & P_2 & P_1\end{pmatrix}.$$

Як можна побачити, отриманий той же самий результат. При такому порядку дій залишається єдиний добуток матриць, і до того ж загальна кількість дій зменшується. За рахунок застосування законів де Моргана вдалося уникнути виконання чотирьох операцій заперечення. Тому <u>в даному випадку</u> раціональніше обчислювати формулу в її перетвореному варіанті.

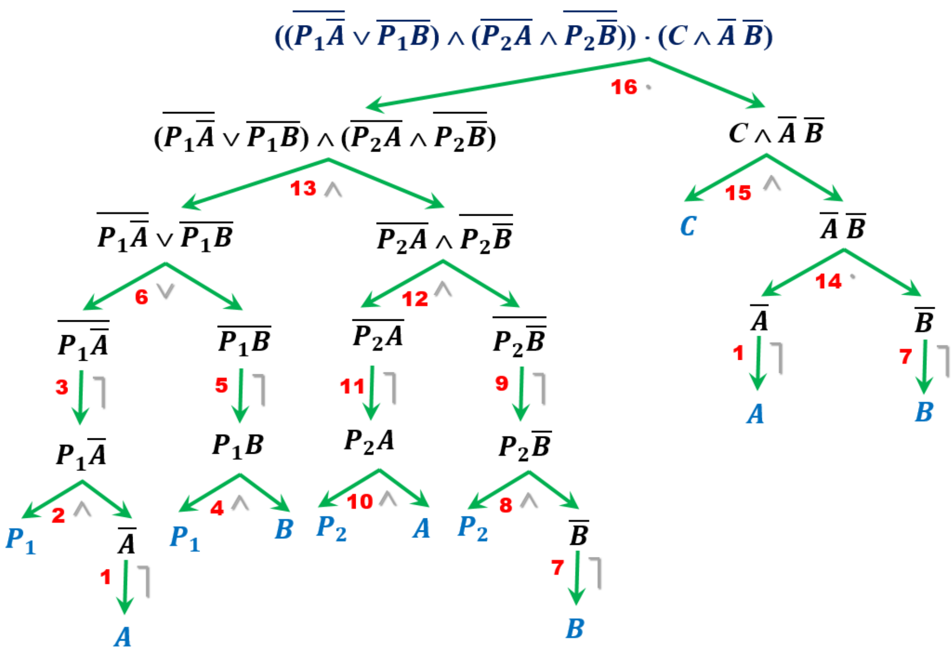
***<u>ВІДПОВІДЬ</u>*.**

$$P_2\,\overline{((\overline{A}\vee\overline{B})\wedge\overline{C})}\vee P_1\,(\overline{A}\,\overline{B}\vee C)=P_2\,((A\wedge B)\vee C)\vee P_1\,(\overline{A}\,\overline{B}\vee C)=$$

$$=\begin{pmatrix}(1,0) & (1,1) & (0,1)\\ (0,1) & (1,1) & (0,1)\\ (1,1) & (1,0) & (0,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_2 & P_3 & P_1\\ P_1 & P_3 & P_1\\ P_3 & P_2 & P_1\end{pmatrix}.$$

3. $((\overline{P_1\overline{A}}\vee\overline{P_1B})\wedge(\overline{P_2A}\wedge\overline{P_2\overline{B}}))\cdot(C\wedge\overline{A}\,\overline{B})$.

<u>Розв'язання</u>. Побудуємо семантичне дерево для заданої формули [2].



Далі проведемо обчислення згідно з обраним порядком дій.

***Дія № 1*:**

$$\overline{A}=\overline{\begin{pmatrix}P_3 & P_2 & P_1\\ P_0 & P_2 & P_1\\ P_3 & P_0 & P_0\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix}(1,1) & (1,0) & (0,1)\\ (0,0) & (1,0) & (0,1)\\ (1,1) & (0,0) & (0,0)\end{pmatrix}}=$$

$$=\begin{pmatrix}\overline{(1,1)} & \overline{(1,0)} & \overline{(0,1)}\\ \overline{(0,0)} & \overline{(1,0)} & \overline{(0,1)}\\ \overline{(1,1)} & \overline{(0,0)} & \overline{(0,0)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(0,0) & (0,1) & (1,0)\\ (1,1) & (0,1) & (1,0)\\ (0,0) & (1,1) & (1,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_0 & P_1 & P_2\\ P_3 & P_1 & P_2\\ P_0 & P_3 & P_3\end{pmatrix}.$$

***Дія № 2*:**

$$P_1\wedge\overline{A}=P_1\wedge\begin{pmatrix}P_0 & P_1 & P_2\\ P_3 & P_1 & P_2\\ P_0 & P_3 & P_3\end{pmatrix}=$$

$$=(0,1)\wedge\begin{pmatrix}(0,0) & (0,1) & (1,0)\\ (1,1) & (0,1) & (1,0)\\ (0,0) & (1,1) & (1,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(0,0) & (0,1) & (0,0)\\ (0,1) & (0,1) & (0,0)\\ (0,0) & (0,1) & (0,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_0 & P_1 & P_0\\ P_1 & P_1 & P_0\\ P_0 & P_1 & P_1\end{pmatrix}.$$

***Дія № 3*:**

$$\overline{P_1\overline{A}}=\overline{\begin{pmatrix}P_0 & P_1 & P_0\\ P_1 & P_1 & P_0\\ P_0 & P_1 & P_1\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix}(0,0) & (0,1) & (0,0)\\ (0,1) & (0,1) & (0,0)\\ (0,0) & (0,1) & (0,1)\end{pmatrix}}=$$

$$=\begin{pmatrix}\overline{(0,0)} & \overline{(0,1)} & \overline{(0,0)}\\ \overline{(0,1)} & \overline{(0,1)} & \overline{(0,0)}\\ \overline{(0,0)} & \overline{(0,1)} & \overline{(0,1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,1) & (1,0) & (1,1)\\ (1,0) & (1,0) & (1,1)\\ (1,1) & (1,0) & (1,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_3 & P_2 & P_3\\ P_2 & P_2 & P_3\\ P_3 & P_2 & P_2\end{pmatrix}.$$

***Дія № 4*:**

$$P_1\wedge B=P_1\wedge\begin{pmatrix}P_1 & P_3 & P_1\\ P_0 & P_3 & P_1\\ P_2 & P_2 & P_2\end{pmatrix}=$$

$$=(0,1)\wedge\begin{pmatrix}(0,1) & (1,1) & (0,1)\\ (0,0) & (1,1) & (0,1)\\ (1,0) & (1,0) & (1,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(0,1) & (0,1) & (0,1)\\ (0,0) & (0,1) & (0,1)\\ (0,0) & (0,0) & (0,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1 & P_1 & P_1\\ P_0 & P_1 & P_1\\ P_0 & P_0 & P_0\end{pmatrix}.$$

***Дія № 5*:**

$$\overline{P_1B}=\overline{\begin{pmatrix}P_1 & P_1 & P_1\\ P_0 & P_1 & P_1\\ P_0 & P_0 & P_0\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix}(0,1) & (0,1) & (0,1)\\ (0,0) & (0,1) & (0,1)\\ (0,0) & (0,0) & (0,0)\end{pmatrix}}=$$

$$=\begin{pmatrix}\overline{(0,1)} & \overline{(0,1)} & \overline{(0,1)}\\ \overline{(0,0)} & \overline{(0,1)} & \overline{(0,1)}\\ \overline{(0,0)} & \overline{(0,0)} & \overline{(0,0)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,0) & (1,0) & (1,0)\\ (1,1) & (1,0) & (1,0)\\ (1,1) & (1,1) & (1,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_2 & P_2 & P_2\\ P_3 & P_2 & P_2\\ P_3 & P_3 & P_3\end{pmatrix}.$$

***Дія № 6*:**

$$\overline{P_1 \overline{A}} \vee \overline{P_1 B} = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_2 & P_3 \\ P_3 & P_2 & P_2 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_2 & P_2 & P_2 \\ P_3 & P_2 & P_2 \\ P_3 & P_3 & P_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (1,1) \\ (1,0) & (1,0) & (1,1) \\ (1,1) & (1,0) & (1,0) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (1,0) & (1,0) & (1,0) \\ (1,1) & (1,0) & (1,0) \\ (1,1) & (1,1) & (1,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (1,1) \\ (1,1) & (1,0) & (1,1) \\ (1,1) & (1,1) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_3 \\ P_3 & P_2 & P_3 \\ P_3 & P_3 & P_3 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 7*:**

$$\overline{B} = \overline{\begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_2 & P_2 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (1,0) & (1,0) \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{(0,1)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(0,0)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(1,0)} & \overline{(1,0)} & \overline{(1,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,1) & (0,1) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_1 & P_1 & P_1 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 8*:**

$$P_2 \wedge \overline{B} = P_2 \wedge \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_1 & P_1 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= (1,0) \wedge \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,1) & (0,1) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (1,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 9*:**

$$\overline{P_2 \overline{B}} = \overline{\begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (1,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{(1,0)} & \overline{(0,0)} & \overline{(1,0)} \\ \overline{(1,0)} & \overline{(0,0)} & \overline{(1,0)} \\ \overline{(0,0)} & \overline{(0,0)} & \overline{(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (0,1) \\ (0,1) & (1,1) & (0,1) \\ (1,1) & (1,1) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_1 \\ P_3 & P_3 & P_3 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 10*:**

$$P_2 \wedge A = P_2 \wedge \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_3 & P_0 & P_0 \end{pmatrix} =$$

$$= (1,0) \wedge \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (1,1) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}.$$

Дія № 11:

$$\overline{P_2A}\wedge = \overline{\begin{pmatrix}P_2&P_2&P_0\\P_0&P_2&P_0\\P_2&P_0&P_0\end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix}(1,0)&(1,0)&(0,0)\\(0,0)&(1,0)&(0,0)\\(1,0)&(0,0)&(0,0)\end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix}\overline{(1,0)}&\overline{(1,0)}&\overline{(0,0)}\\ \overline{(0,0)}&\overline{(1,0)}&\overline{(0,0)}\\ \overline{(1,0)}&\overline{(0,0)}&\overline{(0,0)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(0,1)&(0,1)&(1,1)\\(1,1)&(0,1)&(1,1)\\(0,1)&(1,1)&(1,1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P_1&P_1&P_3\\P_3&P_1&P_3\\P_1&P_3&P_3\end{pmatrix}.$$

Дія № 12:

$$\overline{P_2A}\wedge\overline{P_2\overline{B}} = \begin{pmatrix}P_1&P_1&P_3\\P_3&P_1&P_3\\P_1&P_3&P_3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}P_1&P_3&P_1\\P_1&P_3&P_1\\P_3&P_3&P_3\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}(0,1)&(0,1)&(1,1)\\(1,1)&(0,1)&(1,1)\\(0,1)&(1,1)&(1,1)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}(0,1)&(1,1)&(0,1)\\(0,1)&(1,1)&(0,1)\\(1,1)&(1,1)&(1,1)\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}(0,1)&(0,1)&(0,1)\\(0,1)&(0,1)&(0,1)\\(0,1)&(1,1)&(1,1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P_1&P_1&P_1\\P_1&P_1&P_1\\P_1&P_3&P_3\end{pmatrix}.$$

Дія № 13:

$$(\overline{P_1\overline{A}}\vee\overline{P_1B})\wedge(\overline{P_2A}\wedge\overline{P_2\overline{B}}) = \begin{pmatrix}P_3&P_2&P_3\\P_3&P_2&P_3\\P_3&P_3&P_3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}P_1&P_1&P_1\\P_1&P_1&P_1\\P_1&P_3&P_3\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}(1,1)&(1,0)&(1,1)\\(1,1)&(1,0)&(1,1)\\(1,1)&(1,1)&(1,1)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}(0,1)&(0,1)&(0,1)\\(0,1)&(0,1)&(0,1)\\(0,1)&(1,1)&(1,1)\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}(0,1)&(0,0)&(0,1)\\(0,1)&(0,0)&(0,1)\\(0,1)&(1,1)&(1,1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P_1&P_0&P_1\\P_1&P_0&P_1\\P_1&P_3&P_3\end{pmatrix}.$$

Дія № 14:

$$\overline{A}\,\overline{B} = \begin{pmatrix}P_0&P_1&P_2\\P_3&P_1&P_2\\P_0&P_3&P_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}P_2&P_0&P_2\\P_3&P_0&P_2\\P_1&P_1&P_1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}(P_0\wedge P_2)\vee(P_1\wedge P_3)\vee(P_2\wedge P_1) & (P_0\wedge P_0)\vee(P_1\wedge P_0)\vee(P_2\wedge P_1) & (P_0\wedge P_2)\vee(P_1\wedge P_2)\vee(P_2\wedge P_1)\\ (P_3\wedge P_2)\vee(P_1\wedge P_3)\vee(P_2\wedge P_1) & (P_3\wedge P_0)\vee(P_1\wedge P_0)\vee(P_2\wedge P_1) & (P_3\wedge P_2)\vee(P_1\wedge P_2)\vee(P_2\wedge P_1)\\ (P_0\wedge P_2)\vee(P_3\wedge P_3)\vee(P_3\wedge P_1) & (P_0\wedge P_0)\vee(P_3\wedge P_0)\vee(P_3\wedge P_1) & (P_0\wedge P_2)\vee(P_3\wedge P_2)\vee(P_3\wedge P_1)\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}((0,0)\wedge(1,0))\vee((0,1)\wedge(1,1))\vee((1,0)\wedge(0,1))\\ ((1,1)\wedge(1,0))\vee((0,1)\wedge(1,1))\vee((1,0)\wedge(0,1))\\ ((0,0)\wedge(1,0))\vee((1,1)\wedge(1,1))\vee((1,1)\wedge(0,1))\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} ((0,0)\wedge(0,0)) \vee ((0,1)\wedge(0,0)) \vee ((1,0)\wedge(0,1)) \\ ((1,1)\wedge(0,0)) \vee ((0,1)\wedge(0,0)) \vee ((1,0)\wedge(0,1)) \\ ((0,0)\wedge(0,0)) \vee ((1,1)\wedge(0,0)) \vee ((1,1)\wedge(0,1)) \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} ((0,0)\wedge(1,0)) \vee ((0,1)\wedge(1,0)) \vee ((1,0)\wedge(0,1)) \\ ((1,1)\wedge(1,0)) \vee ((0,1)\wedge(1,0)) \vee ((1,0)\wedge(0,1)) \\ ((0,0)\wedge(1,0)) \vee ((1,1)\wedge(1,0)) \vee ((1,1)\wedge(0,1)) \end{matrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (0,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,1) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_0 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_3 & P_1 & P_3 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 15*:**

$$C \wedge \overline{A}\,\overline{B} = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \\ P_1 & P_2 & P_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_0 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_3 & P_1 & P_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \\ (0,1) & (1,0) & (0,1) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (0,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,1) & (1,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,1) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_0 \\ P_1 & P_0 & P_1 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 16*:**

$$((\overline{P_1\overline{A}} \vee \overline{P_1 B}) \wedge (\overline{P_2 A} \wedge \overline{P_2\overline{B}})) \cdot (C \wedge \overline{A}\,\overline{B}) = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_0 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_0 \\ P_1 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (P_1\wedge P_0)\vee(P_0\wedge P_0)\vee(P_1\wedge P_1) & (P_1\wedge P_0)\vee(P_0\wedge P_0)\vee(P_1\wedge P_0) & (P_1\wedge P_0)\vee(P_0\wedge P_0)\vee(P_1\wedge P_1) \\ (P_1\wedge P_0)\vee(P_0\wedge P_0)\vee(P_1\wedge P_1) & (P_1\wedge P_0)\vee(P_0\wedge P_0)\vee(P_1\wedge P_0) & (P_1\wedge P_0)\vee(P_0\wedge P_0)\vee(P_1\wedge P_1) \\ (P_1\wedge P_0)\vee(P_3\wedge P_0)\vee(P_3\wedge P_1) & (P_1\wedge P_0)\vee(P_3\wedge P_0)\vee(P_3\wedge P_0) & (P_1\wedge P_0)\vee(P_3\wedge P_0)\vee(P_3\wedge P_1) \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{matrix} ((0,1)\wedge(0,0)) \vee ((0,0)\wedge(0,0)) \vee ((0,1)\wedge(0,1)) \\ ((0,1)\wedge(0,0)) \vee ((0,0)\wedge(0,0)) \vee ((0,1)\wedge(0,1)) \\ ((0,1)\wedge(0,0)) \vee ((1,1)\wedge(0,0)) \vee ((1,1)\wedge(0,1)) \end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix} ((0,1)\wedge(0,0)) \vee ((0,0)\wedge(0,0)) \vee ((0,1)\wedge(0,0)) \\ ((0,1)\wedge(0,0)) \vee ((0,0)\wedge(0,0)) \vee ((0,1)\wedge(0,0)) \\ ((0,1)\wedge(0,0)) \vee ((1,1)\wedge(0,0)) \vee ((1,1)\wedge(0,0)) \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} ((0,1)\wedge(0,0)) \vee ((0,0)\wedge(0,0)) \vee ((0,1)\wedge(0,1)) \\ ((0,1)\wedge(0,0)) \vee ((0,0)\wedge(0,0)) \vee ((0,1)\wedge(0,1)) \\ ((0,1)\wedge(0,0)) \vee ((1,1)\wedge(0,0)) \vee ((1,1)\wedge(0,1)) \end{matrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_1 \end{pmatrix}.$$

***Тепер виконаємо тотожні перетворення заданої формули*:**

$$((\overline{P_1\overline{A}} \vee \overline{P_1 B}) \wedge (\overline{P_2 A} \wedge \overline{P_2\overline{B}})) \cdot (C \wedge \overline{A}\,\overline{B}) =$$

(*за законами де Моргана*)

$$= ((\overline{P_1\bar{A} \wedge P_1B}) \wedge (\overline{P_2A \vee P_2\bar{B}})) \cdot (C \wedge \bar{A}\,\bar{B}) =$$

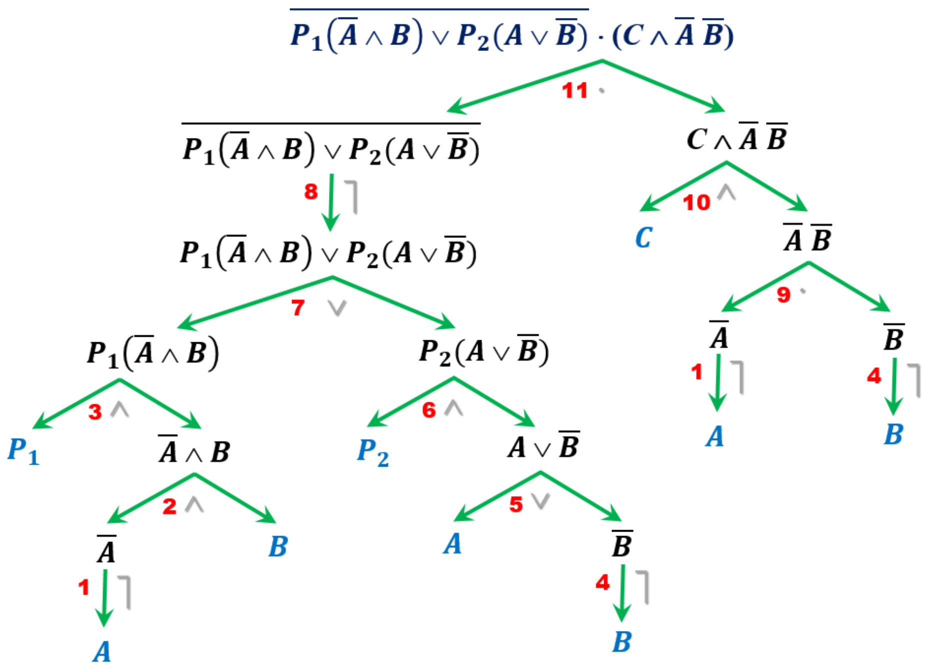
(*за законом дистрибутивності для* $P_1\bar{A} \wedge P_1B$ *та* $P_2A \vee P_2\bar{B}$)

$$= ((\overline{P_1(\bar{A} \wedge B)}) \wedge (\overline{P_2(A \vee \bar{B})})) \cdot (C \wedge \bar{A}\,\bar{B}) =$$

(*за законом де Моргана*)

$$= \overline{P_1(\bar{A} \wedge B) \vee P_2(A \vee \bar{B})} \cdot (C \wedge \bar{A}\,\bar{B}).$$

Тепер побудуємо семантичне дерево для перетвореної формули.



Далі проведемо обчислення згідно з таким порядком дій.

Дія № 1:

Цей результат вже отриманий в ході попереднього розв'язання:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) \\ (1,1) & (0,1) & (1,0) \\ (0,0) & (1,1) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 \\ P_3 & P_1 & P_2 \\ P_0 & P_3 & P_3 \end{pmatrix}.$$

Дія № 2:

$$\bar{A} \wedge B = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 \\ P_3 & P_1 & P_2 \\ P_0 & P_3 & P_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_2 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) \\ (1,1) & (0,1) & (1,0) \\ (0,0) & (1,1) & (1,1) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (1,0) & (1,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_2 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 3*:**

$$P_1 \wedge (\overline{A} \wedge B) = P_1 \wedge \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (0, 1) \wedge \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 4*:**

Цей результат також вже отриманий в ході попереднього розв'язання:

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,1) & (0,1) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_1 & P_1 & P_1 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 5*:**

$$A \vee \overline{B} = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_3 & P_0 & P_0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_1 & P_1 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (1,1) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,1) & (0,1) & (0,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (1,1) \\ (1,1) & (1,0) & (1,1) \\ (1,1) & (0,1) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_3 \\ P_3 & P_2 & P_3 \\ P_3 & P_1 & P_1 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 6*:**

$$P_2 \wedge (A \vee \overline{B}) = P_2 \wedge \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_3 \\ P_3 & P_2 & P_3 \\ P_3 & P_1 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= (1, 0) \wedge \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (1,1) \\ (1,1) & (1,0) & (1,1) \\ (1,1) & (0,1) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) & (1,0) & (1,0) \\ (1,0) & (1,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_2 & P_2 \\ P_2 & P_2 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 7*:**

$$P_1\,(\overline{A} \wedge B) \vee P_2\,(A \vee \overline{B}) = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_2 & P_2 & P_2 \\ P_2 & P_2 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (1,0) & (1,0) & (1,0) \\ (1,0) & (1,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,0) & (1,1) & (1,0) \\ (1,0) & (1,1) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_3 & P_2 \\ P_2 & P_3 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}.$$

Дія № 8:

$$\overline{P_1(\overline{A}\wedge B)\vee P_2(A\vee\overline{B})} = \overline{\begin{pmatrix} P_2 & P_3 & P_2 \\ P_2 & P_3 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} (1,0) & (1,1) & (1,0) \\ (1,0) & (1,1) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{(1,0)} & \overline{(1,1)} & \overline{(1,0)} \\ \overline{(1,0)} & \overline{(1,1)} & \overline{(1,0)} \\ \overline{(1,0)} & \overline{(0,0)} & \overline{(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (0,1) \\ (0,1) & (1,1) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_3 \end{pmatrix}.$$

Дія № 9 – Дія № 10:

Ця гілка семантичного дерева не зазнала змін при виконанні тотожних перетворень початкової формули. Тому ми можемо скористатися результатами, отриманими при розрахунках початкової формули:

$$C\wedge\overline{A}\,\overline{B} = \begin{pmatrix} (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,1) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_0 \\ P_1 & P_0 & P_1 \end{pmatrix}.$$

Дія № 11:

$$\overline{P_1(\overline{A}\wedge B)\vee P_2(A\vee\overline{B})}\cdot(C\wedge\overline{A}\,\overline{B}) = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} P_0 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_0 \\ P_1 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (P_1\wedge P_0)\vee(P_0\wedge P_0)\vee(P_1\wedge P_1) & (P_1\wedge P_0)\vee(P_0\wedge P_0)\vee(P_1\wedge P_0) & (P_1\wedge P_0)\vee(P_0\wedge P_0)\vee(P_1\wedge P_1) \\ (P_1\wedge P_0)\vee(P_0\wedge P_0)\vee(P_1\wedge P_1) & (P_1\wedge P_0)\vee(P_0\wedge P_0)\vee(P_1\wedge P_0) & (P_1\wedge P_0)\vee(P_0\wedge P_0)\vee(P_1\wedge P_1) \\ (P_1\wedge P_0)\vee(P_3\wedge P_0)\vee(P_3\wedge P_1) & (P_1\wedge P_0)\vee(P_3\wedge P_0)\vee(P_3\wedge P_0) & (P_1\wedge P_0)\vee(P_3\wedge P_0)\vee(P_3\wedge P_1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ((0,1)\wedge(0,0))\vee((0,0)\wedge(0,0))\vee((0,1)\wedge(0,1)) & ((0,1)\wedge(0,0))\vee((0,0)\wedge(0,0))\vee((0,1)\wedge(0,0)) & ((0,1)\wedge(0,0))\vee((0,0)\wedge(0,0))\vee((0,1)\wedge(0,1)) \\ ((0,1)\wedge(0,0))\vee((0,0)\wedge(0,0))\vee((0,1)\wedge(0,1)) & ((0,1)\wedge(0,0))\vee((0,0)\wedge(0,0))\vee((0,1)\wedge(0,0)) & ((0,1)\wedge(0,0))\vee((0,0)\wedge(0,0))\vee((0,1)\wedge(0,1)) \\ ((0,1)\wedge(0,0))\vee((1,1)\wedge(0,0))\vee((1,1)\wedge(0,1)) & ((0,1)\wedge(0,0))\vee((1,1)\wedge(0,0))\vee((1,1)\wedge(0,0)) & ((0,1)\wedge(0,0))\vee((1,1)\wedge(0,0))\vee((1,1)\wedge(0,1)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_1 \end{pmatrix}.$$

Як можна побачити, отриманий той же самий результат. При такому порядку дій залишається єдиний добуток матриць, і до того ж загальна кількість дій зменшується. За рахунок застосування законів де Моргана *в зворотному напрямку* вдалося скоротити кількість необхідних операцій заперечення з шести до трьох. Завдяки застосуванню закону дистрибутивності кількість операцій добутку матриці на скаляр з чотирьох зменшилася до двох. Тому <u>в даному випадку</u> раціональніше обчислювати формулу в її перетвореному варіанті.

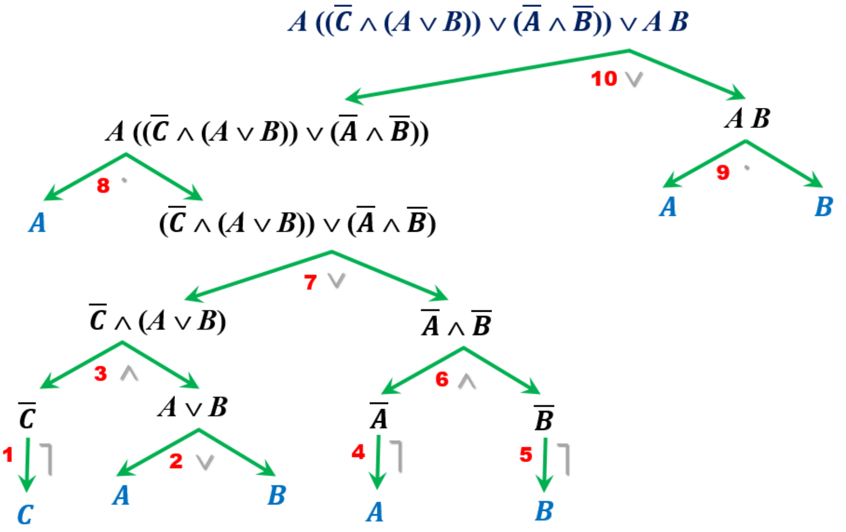
ВІДПОВІДЬ.

$$((\overline{P_1\overline{A}} \vee \overline{P_1 B}) \wedge(\overline{P_2 A} \wedge \overline{P_2\overline{B}})) \cdot (C \wedge \overline{A}\,\overline{B}) = \overline{P_1\left(\overline{A} \wedge B\right) \vee P_2(A \vee \overline{B})} \cdot (C \wedge \overline{A}\,\overline{B}) =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_1 \end{pmatrix}.$$

4. $A\,((\overline{C} \wedge (A \vee B)) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})) \vee A\,B.$

Розв'язання. Побудуємо семантичне дерево для заданої формули [2].



Далі проведемо обчислення згідно з обраним порядком дій.

Дія № 1:

$$\overline{C} = \overline{\begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \\ P_1 & P_2 & P_1 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \\ (0,1) & (1,0) & (0,1) \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{(1,0)} & \overline{(0,1)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(0,0)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,0)} \\ \overline{(0,1)} & \overline{(1,0)} & \overline{(0,1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_2 \end{pmatrix}.$$

Дія № 2:

$$A \vee B = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_3 & P_0 & P_0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_2 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (1,1) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (1,0) & (1,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,1) & (1,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_3 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_3 & P_2 & P_2 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 3*:**

$$\overline{C} \wedge (A \vee B) = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_3 & P_3 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_3 & P_2 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (1,1) & (1,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,1) & (1,0) & (1,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_2 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 4*:**

$$\overline{A} = \overline{\begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_3 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (1,1) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{(1,1)} & \overline{(1,0)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(0,0)} & \overline{(1,0)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(1,1)} & \overline{(0,0)} & \overline{(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) \\ (1,1) & (0,1) & (1,0) \\ (0,0) & (1,1) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 \\ P_3 & P_1 & P_2 \\ P_0 & P_3 & P_3 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 5*:**

$$\overline{B} = \overline{\begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_2 & P_2 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (1,0) & (1,0) \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{(0,1)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(0,0)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(1,0)} & \overline{(1,0)} & \overline{(1,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,1) & (0,1) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_1 & P_1 & P_1 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 6*:**

$$\overline{A} \wedge \overline{B} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 \\ P_3 & P_1 & P_2 \\ P_0 & P_3 & P_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_1 & P_1 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) \\ (1,1) & (0,1) & (1,0) \\ (0,0) & (1,1) & (1,1) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,1) & (0,1) & (0,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_0 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_1 & P_1 \end{pmatrix}.$$

Дія № 7:

$$(\overline{C} \wedge (A \vee B)) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B}) = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_2 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_0 & P_0 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_1 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (0,0) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_3 \end{pmatrix}.$$

Дія № 8:

$$A\,((\overline{C} \wedge (A \vee B)) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})) = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_3 & P_0 & P_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (P_3 \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_2) & (P_3 \wedge P_2) \vee (P_2 \wedge P_0) \vee (P_1 \wedge P_1) & (P_3 \wedge P_2) \vee (P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_3) \\ (P_0 \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_2) & (P_0 \wedge P_2) \vee (P_2 \wedge P_0) \vee (P_1 \wedge P_1) & (P_0 \wedge P_2) \vee (P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_3) \\ (P_3 \wedge P_1) \vee (P_0 \wedge P_3) \vee (P_0 \wedge P_2) & (P_3 \wedge P_2) \vee (P_0 \wedge P_0) \vee (P_0 \wedge P_1) & (P_3 \wedge P_2) \vee (P_0 \wedge P_3) \vee (P_0 \wedge P_3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ((1,1) \wedge (0,1)) \vee ((1,0) \wedge (1,1)) \vee ((0,1) \wedge (1,0)) & ((1,1) \wedge (1,0)) \vee ((1,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,1) \wedge (0,1)) & ((1,1) \wedge (1,0)) \vee ((1,0) \wedge (1,1)) \vee ((0,1) \wedge (1,1)) \\ ((0,0) \wedge (0,1)) \vee ((1,0) \wedge (1,1)) \vee ((0,1) \wedge (1,0)) & ((0,0) \wedge (1,0)) \vee ((1,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,1) \wedge (0,1)) & ((0,0) \wedge (1,0)) \vee ((1,0) \wedge (1,1)) \vee ((0,1) \wedge (1,1)) \\ ((1,1) \wedge (0,1)) \vee ((0,0) \wedge (1,1)) \vee ((0,0) \wedge (1,0)) & ((1,1) \wedge (1,0)) \vee ((0,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,0) \wedge (0,1)) & ((1,1) \wedge (1,0)) \vee ((0,0) \wedge (1,1)) \vee ((0,0) \wedge (1,1)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,1) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (1,1) \\ (0,1) & (1,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_3 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_3 \\ P_1 & P_2 & P_2 \end{pmatrix}.$$

Дія № 9:

$$A\,B = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_3 & P_0 & P_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_2 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (P_3 \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_0) \vee (P_1 \wedge P_2) & (P_3 \wedge P_3) \vee (P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_2) & (P_3 \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_1) \vee (P_1 \wedge P_2) \\ (P_0 \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_0) \vee (P_1 \wedge P_2) & (P_0 \wedge P_3) \vee (P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_2) & (P_0 \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_1) \vee (P_1 \wedge P_2) \\ (P_3 \wedge P_1) \vee (P_0 \wedge P_0) \vee (P_0 \wedge P_2) & (P_3 \wedge P_3) \vee (P_0 \wedge P_3) \vee (P_0 \wedge P_2) & (P_3 \wedge P_1) \vee (P_0 \wedge P_1) \vee (P_0 \wedge P_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ((1,1) \wedge (0,1)) \vee ((1,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,1) \wedge (1,0)) \\ ((0,0) \wedge (0,1)) \vee ((1,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,1) \wedge (1,0)) \\ ((1,1) \wedge (0,1)) \vee ((0,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,0) \wedge (1,0)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ((1,1)\wedge(1,1)) \vee ((1,0)\wedge(1,1)) \vee ((0,1)\wedge(1,0)) & ((1,1)\wedge(0,1)) \vee ((1,0)\wedge(0,1)) \vee ((0,1)\wedge(1,0)) \\ ((0,0)\wedge(1,1)) \vee ((1,0)\wedge(1,1)) \vee ((0,1)\wedge(1,0)) & ((0,0)\wedge(0,1)) \vee ((1,0)\wedge(0,1)) \vee ((0,1)\wedge(1,0)) \\ ((1,1)\wedge(1,1)) \vee ((0,0)\wedge(1,1)) \vee ((0,0)\wedge(1,0)) & ((1,1)\wedge(0,1)) \vee ((0,0)\wedge(0,1)) \vee ((0,0)\wedge(1,0)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,1) & (1,1) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_1 \\ P_0 & P_2 & P_0 \\ P_1 & P_3 & P_1 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 10*:**

$$A\,((\overline{C} \wedge (A \vee B)) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})) \vee A\,B = \begin{pmatrix} P_3 & P_3 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_3 \\ P_1 & P_2 & P_2 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_1 \\ P_0 & P_2 & P_0 \\ P_1 & P_3 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,1) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (1,1) \\ (0,1) & (1,0) & (1,0) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,1) & (1,1) & (0,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,1) & (1,1) \\ (1,0) & (1,1) & (1,1) \\ (0,1) & (1,1) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_3 & P_3 \\ P_2 & P_3 & P_3 \\ P_1 & P_3 & P_3 \end{pmatrix}.$$

***Тепер виконаємо тотожні перетворення заданої формули*:**

$$A\,((\overline{C} \wedge (A \vee B)) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})) \vee A\,B =$$

(*за законом де Моргана для* $\overline{A} \wedge \overline{B}$)

$$= A\,((\overline{C} \wedge (A \vee B)) \vee (\overline{A \vee B})) \vee A\,B =$$

(*за законом викреслювання для* $(\overline{C} \wedge (A \vee B)) \vee (\overline{A \vee B})$)

$$= A\,(\overline{C} \vee (\overline{A \vee B})) \vee A\,B =$$

(*за законом дистрибутивності добутку щодо диз'юнкції*)

$$= A\,(\overline{C} \vee (\overline{A \vee B}) \vee B) =$$

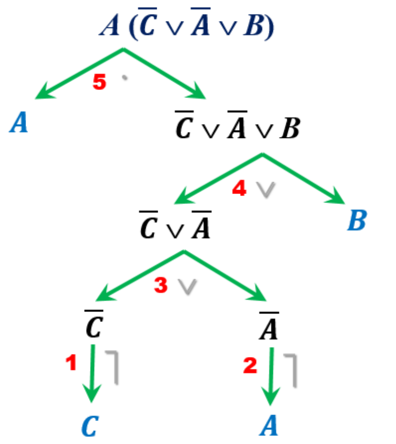
(*за законом де Моргана для* $\overline{A \vee B}$)

$$= A\,(\overline{C} \vee (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee B) =$$

(*за законом викреслювання для* $(\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee B$)

$$= A\,(\overline{C} \vee \overline{A} \vee B).$$

Тепер побудуємо семантичне дерево для перетвореної формули.



Далі проведемо обчислення згідно з таким порядком дій.

Дія № 1:

Цей результат вже отриманий при обчисленні початкової формули:

$$\overline{C}=\begin{pmatrix}(0,1)&(1,0)&(1,0)\\(1,1)&(0,0)&(1,1)\\(1,0)&(0,1)&(1,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1&P_2&P_2\\P_3&P_0&P_3\\P_2&P_1&P_2\end{pmatrix}.$$

Дія № 2:

Цей результат також вже отриманий при обчисленні початкової формули:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}(0,0)&(0,1)&(1,0)\\(1,1)&(0,1)&(1,0)\\(0,0)&(1,1)&(1,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_0&P_1&P_2\\P_3&P_1&P_2\\P_0&P_3&P_3\end{pmatrix}.$$

Дія № 3:

$$\overline{C}\vee\overline{A}=\begin{pmatrix}P_1&P_2&P_2\\P_3&P_0&P_3\\P_2&P_1&P_2\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}P_0&P_1&P_2\\P_3&P_1&P_2\\P_0&P_3&P_3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(0,1)&(1,0)&(1,0)\\(1,1)&(0,0)&(1,1)\\(1,0)&(0,1)&(1,0)\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}(0,0)&(0,1)&(1,0)\\(1,1)&(0,1)&(1,0)\\(0,0)&(1,1)&(1,1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(0,1)&(1,1)&(1,0)\\(1,1)&(0,1)&(1,1)\\(1,0)&(1,1)&(1,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1&P_3&P_2\\P_3&P_1&P_3\\P_2&P_3&P_3\end{pmatrix}.$$

Дія № 4:

$$\overline{C}\vee\overline{A}\vee B=\begin{pmatrix}P_1&P_3&P_2\\P_3&P_1&P_3\\P_2&P_3&P_3\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}P_1&P_3&P_1\\P_0&P_3&P_1\\P_2&P_2&P_2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(0,1)&(1,1)&(1,0)\\(1,1)&(0,1)&(1,1)\\(1,0)&(1,1)&(1,1)\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}(0,1)&(1,1)&(0,1)\\(0,0)&(1,1)&(0,1)\\(1,0)&(1,0)&(1,0)\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} (\mathbf{0},\mathbf{1}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) \\ (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) \\ (\mathbf{1},\mathbf{0}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_3} \\ \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_3} \\ \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_3} \end{pmatrix}.$$

***Дія № 5*:**

$$\boldsymbol{A\,(\overline{C} \vee \overline{A} \vee B)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_3} \\ \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_3} \\ \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (P_3{\wedge}P_1){\vee}(P_2{\wedge}P_3){\vee}(P_1{\wedge}P_2) & (P_3{\wedge}P_3){\vee}(P_2{\wedge}P_3){\vee}(P_1{\wedge}P_3) & (P_3{\wedge}P_3){\vee}(P_2{\wedge}P_3){\vee}(P_1{\wedge}P_3) \\ (P_0{\wedge}P_1){\vee}(P_2{\wedge}P_3){\vee}(P_1{\wedge}P_2) & (P_0{\wedge}P_3){\vee}(P_2{\wedge}P_3){\vee}(P_1{\wedge}P_3) & (P_0{\wedge}P_3){\vee}(P_2{\wedge}P_3){\vee}(P_1{\wedge}P_3) \\ (P_3{\wedge}P_1){\vee}(P_0{\wedge}P_3){\vee}(P_0{\wedge}P_2) & (P_3{\wedge}P_3){\vee}(P_0{\wedge}P_3){\vee}(P_0{\wedge}P_3) & (P_3{\wedge}P_3){\vee}(P_0{\wedge}P_3){\vee}(P_0{\wedge}P_3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ((1,1){\wedge}(0,1)) \vee ((1,0){\wedge}(1,1)) \vee ((0,1){\wedge}(1,0)) & ((1,1){\wedge}(1,1)) \vee ((1,0){\wedge}(1,1)) \vee ((0,1){\wedge}(1,1)) & ((1,1){\wedge}(1,1)) \vee ((1,0){\wedge}(1,1)) \vee ((0,1){\wedge}(1,1)) \\ ((0,0){\wedge}(0,1)) \vee ((1,0){\wedge}(1,1)) \vee ((0,1){\wedge}(1,0)) & ((0,0){\wedge}(1,1)) \vee ((1,0){\wedge}(1,1)) \vee ((0,1){\wedge}(1,1)) & ((0,0){\wedge}(1,1)) \vee ((1,0){\wedge}(1,1)) \vee ((0,1){\wedge}(1,1)) \\ ((1,1){\wedge}(0,1)) \vee ((0,0){\wedge}(1,1)) \vee ((0,0){\wedge}(1,0)) & ((1,1){\wedge}(1,1)) \vee ((0,0){\wedge}(1,1)) \vee ((0,0){\wedge}(1,1)) & ((1,1){\wedge}(1,1)) \vee ((0,0){\wedge}(1,1)) \vee ((0,0){\wedge}(1,1)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) \\ (\mathbf{1},\mathbf{0}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) \\ (\mathbf{0},\mathbf{1}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_3} \\ \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_3} \\ \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_3} \end{pmatrix}.$$

Як можна побачити, отриманий той же самий результат. Але при такому порядку дій значно скоротилася не лише загальна кількість операцій, а й кількість операцій добутку матриць, яка є найбільш громіздкою для виконання. Тому, безперечно, <u>в даному випадку</u> значно доцільніше використовувати для обчислення перетворену формулу.

***<u>ВІДПОВІДЬ</u>*.**

$$\boldsymbol{A\,((\overline{C} \wedge (A \vee B)) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})) \vee A\,B = A\,(\overline{C} \vee \overline{A} \vee B)} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) \\ (\mathbf{1},\mathbf{0}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) \\ (\mathbf{0},\mathbf{1}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_3} \\ \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_3} \\ \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_3} \end{pmatrix}.$$

Із розглянутих в даному розділі прикладів обчислення матричних виразів можна дійти висновку, що в будь-якому разі слід виконувати тотожні перетворення формули, а потім будувати семантичні дерева для початкової та перетвореної формули. Серед цих формул обирається та, яка передбачає меншу кількість дій, особливо операцій добутку матриць.

2.1.2. *Контрольні запитання*

1. Дайте означення логічної матриці.
2. Дайте означення одиничної логічної матриці.
3. Дайте означення нульової логічної матриці.

4. Перелічить основні операції над логічними матрицями.
5. Які умови мають бути виконані для того, щоб над логічними матрицями можна було проводити операції диз'юнкції та кон'юнкції?
6. Яка умова має бути виконаною для того, щоб над логічними матрицями можна було проводити операцію добутку?
7. Які тотожності виконуються для операції диз'юнкції та добутку на скаляр логічних матриць?
8. Які додаткові тотожності мають місце для операції кон'юнкції логічних матриць?
9. Які додаткові тотожності мають місце для операції заперечення логічних матриць?
10. Які додаткові тотожності мають місце для операції добутку логічних матриць?

2.1.3. *Контрольні завдання*

Задано логічні матриці над скалярним полем одномісних предикатів:

$$A = \begin{pmatrix} P_2 & P_3 & P_2 \\ P_0 & P_1 & P_0 \\ P_1 & P_0 & P_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_2 \\ P_1 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_3 & P_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} P_3 & P_1 & P_2 \\ P_0 & P_0 & P_3 \\ P_0 & P_2 & P_3 \end{pmatrix}.$$

***Обчислити значення виразів, виконавши попередньо тотожні перетворення формул і обравши раціональніший варіант реалізації*:**

1) $(P_2\, A \vee P_2\, \overline{B})\, (P_1\, C \wedge P_1\, \overline{B}) \vee P_3\, (\overline{A} \vee B\, C)$;

2) $(P_1\, \overline{A}\, B \vee P_2\, B) \wedge (\overline{C} \vee \overline{A}\, B)$;

3) $(\overline{P_1 A \vee P_2 C})\, (\overline{P_3}\overline{A} \vee \overline{P_3}\overline{B}) \vee A$;

4) $(\overline{P}_1(A \vee B)) \wedge \overline{P}_2(\overline{C} \vee \overline{B}))\, (A\, C \vee B)$;

5) $(P_2 \wedge P_3)\, (A \vee \overline{B\, C}) \vee (\overline{A} \vee B\, (\overline{C} \vee \overline{A}))$;

6) $(P_2 \wedge \overline{P}_1)\, (\overline{A} \vee (B\, C \wedge \overline{C}))\, (A \vee B)$;

7) $(P_2\, A\, B \wedge P_1\, A\, C) \vee (P_3\overline{A} \vee P_1\, \overline{C})$;

8) $(A\, B\, C \vee \overline{A}\, \overline{B}\, C) \vee \overline{P_2(A \vee (B \wedge C))}$;

9) $P_3(P_2(A \vee \overline{B}) \wedge \overline{P}_1(\overline{C} \wedge B))\, \overline{\overline{A}\, C}$;

10) $(P_1 \wedge P_3)\, (\overline{A}\, B \vee \overline{C}\, B) \vee (P_1 \wedge P_2)\, (A \vee (\overline{B} \wedge C))$.

2.2. Операції транспонування та обертання логічних матриць

<u>*Мета занять з даної теми*</u> – закріплення теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок виконання операцій транспонування та обертання з матрицями довільної розмірності та різноманітної логічної природи, а також набуття навичок аналізу можливості виконання цих операцій.

В силу того, що операції диз'юнкції, кон'юнкції та добутку можна застосовувати не до будь-яких матриць, а лише до тих, кількість рядків і стовпців яких задовольняє зазначеним вище умовам, співвідношення (4 – 8) слід розуміти таким чином, що якщо дії, зазначені по один бік від знаку рівності, мають сенс, то також мають сенс і дії, зазначені по інший бік знаку рівності, а результати в обох випадках збігаються. Сукупність елементів $\boldsymbol{a_{ii}}$, $\boldsymbol{i = \overline{1, n}}$ квадратної логічної матриці $\boldsymbol{A}$ називається її **головною діагоналлю** [15, 16]. Елементи, що належать головній діагоналі, називаються **діагональними**, а решта елементи матриці – **позадіагональними**. Квадратна логічна матриця називається **діагональною**, якщо всі її позадіагональні елементи дорівнюють нулю. Розглянемо довільну логічну матрицю $\boldsymbol{A}$. Якщо в ній виконати заміну рядків стовпцями, то отримана матриця буде називатися **транспонованою** стосовно $\boldsymbol{A}$ і позначатися символом $\boldsymbol{A^T}$. Тобто

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1s}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2s}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a_{r1}} & \boldsymbol{a_{r2}} & \ldots & \boldsymbol{a_{rs}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A^T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{21}} & \cdots & \boldsymbol{a_{r1}} \\ \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{r2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a_{1s}} & \boldsymbol{a_{2s}} & \ldots & \boldsymbol{a_{rs}} \end{pmatrix}.$$

Для довільних логічних матриць $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ та логічних скалярів α і β мають місце наступні правила транспонування:

асоціативність відносно добутку на скаляр

$$(\alpha \wedge \boldsymbol{A})^{\boldsymbol{T}} = \alpha \wedge \boldsymbol{A^T};$$

правило транспонування диз'юнкції матриць

$$(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A^T} \vee \boldsymbol{B^T};$$

правило транспонування кон'юнкції матриць

$$(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A^T} \wedge \boldsymbol{B^T};$$

правило транспонування заперечення

$$\overline{\boldsymbol{A^T}} = \overline{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{T}};$$

правило транспонування добутку матриць

$$(\boldsymbol{AB})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{B^T A^T};$$

правило подвійного транспонування

$$(\boldsymbol{A^T})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}.$$

Нехай $\boldsymbol{A}$ – довільна квадратна матриця над полем $\boldsymbol{G}$. Тоді якщо виконується співвідношення $\boldsymbol{A^T = A}$, то така матриця називається **симетричною** [17]. Із правил транспонування диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення матриць безпосередньо випливає, що диз'юнкція, кон'юнкція та заперечення симетричних матриць є матрицями симетричними. Результат добутку симетричних матриць в загальному випадку може й не бути симетричною матрицею. Довільна квадратна логічна матриця $\boldsymbol{A}$ над скалярним полем $\boldsymbol{G}$ називається **оборотною**, якщо існує квадратна матриця $\boldsymbol{B}$ над $\boldsymbol{G}$, що задовольняє наступному співвідношенню:

$$\boldsymbol{A\,B = B\,A = E}. \tag{9}$$

Якщо деяка матриця $\boldsymbol{B}$ задовольняє цьому співвідношенню, то вона називається **матрицею, зворотною до $\boldsymbol{A}$**, або **обертанням матриці $\boldsymbol{A}$**. Якщо матриця $\boldsymbol{A}$ є оборотною, то існує лише єдине її обертання. Якщо обертання матриці $\boldsymbol{A}$ існує, то воно позначається символом $\boldsymbol{A^{-1}}$.

Таким чином,

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}. \tag{10}$$

В умову (9) матриці $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ входять симетрично. В зв'язку з цим, якщо для $\boldsymbol{A}$ зворотною є матриця $\boldsymbol{B}$, те для $\boldsymbol{B}$ зворотною є матриця $\boldsymbol{A}$. Іншими словами, $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$. Якщо для квадратних матриць $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{H}$ одного порядку існує обертання, то результат їхнього логічного добутку також є оборотним, причому:

$$(\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{H})^{-1} = \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}.$$

Логічні матриці над $\boldsymbol{G}$, для яких виконується умова $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}$, називаються **комутуючими** або **перестановочними**. Якщо матриці $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ є оборотними та перестановочними, то

$$(\boldsymbol{AB})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}.$$

Розглянемо зв'язок операцій транспонування та обертання. Застосовуючи правило транспонування результату добутку логічних матриць до співвідношень (10), отримуємо:

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{E},$$

тобто результат транспонування оборотної логічної матриці $\boldsymbol{A}$ є також оборотною логічною матрицею: $(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^{-1}$=$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\boldsymbol{T}}$.

Квадратну логічну матрицю $\boldsymbol{A}$ називають **ортогональною**, якщо диз'юнкція всіх елементів кожного її рядка та диз'юнкція всіх елементів кожного її стовпця дорівнюють тотожній одиниці, а кон'юнкція будь-яких двох елементів у кожному її рядку та кон'юнкція будь-яких двох елементів у кожному її стовпці дорівнюють тотожному нулю. ***Наприклад***, логічна матриця $\boldsymbol{A}$ над полем $\boldsymbol{P}$ одномісних предикатів

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_2} \\ \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{0},\mathbf{1}) & (\mathbf{0},\mathbf{0}) & (\mathbf{1},\mathbf{0}) \\ (\mathbf{1},\mathbf{0}) & (\mathbf{0},\mathbf{0}) & (\mathbf{0},\mathbf{1}) \\ (\mathbf{0},\mathbf{0}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (\mathbf{0},\mathbf{0}) \end{pmatrix}$$

є ортогональною, а матриця

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_2} \\ \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_0} \\ \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{0},\mathbf{1}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (\mathbf{1},\mathbf{0}) \\ (\mathbf{0},\mathbf{0}) & (\mathbf{0},\mathbf{1}) & (\mathbf{0},\mathbf{0}) \\ (\mathbf{1},\mathbf{0}) & (\mathbf{0},\mathbf{0}) & (\mathbf{0},\mathbf{1}) \end{pmatrix} -$$

ні, тому що, наприклад,

$$\boldsymbol{a_{12}} \wedge \boldsymbol{a_{13}} = \boldsymbol{P_3} \wedge \boldsymbol{P_2} = (\mathbf{1},\,\mathbf{1}) \wedge (\mathbf{1},\,\mathbf{0}) = (\mathbf{1},\,\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}.$$

Теорема 1. *Формулювання*. Щоб для квадратних логічних матриць $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ над полем логічних скалярів $\boldsymbol{G}$=$\{\mathbf{0},\,\mathbf{1}\}$ або полем скінченних предикатів довільної арності виконувалася рівність $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$, необхідно та достатньо, щоб $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ були ортогональними матрицями та задовольняли умові $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ [19, 22].

Доведення. Привласнимо кожному розряду елементів скалярного поля, над яким задані матриці $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$, деякий індекс $\boldsymbol{v} = \mathbf{1}, \ldots, (\boldsymbol{k_1}\ \boldsymbol{k_2}\ \ldots\ \boldsymbol{k_n})$, де $\boldsymbol{n}$ – арність предикатів, що є елементами поля скалярів, а $\boldsymbol{k_i}$, $\boldsymbol{i}$=$\overline{\mathbf{1},\boldsymbol{n}}$, – кількість символів в алфавіті, над яким заданий аргумент $\boldsymbol{x_i}$ цих предикатів. Таким чином, матриці $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ розпадаються на $(\boldsymbol{k_1} \cdot \boldsymbol{k_2} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{k_n})$ матриць над булевою множиною $\boldsymbol{G}$=$\{\mathbf{0},\,\mathbf{1}\}$

$$\boldsymbol{A}^{v}=\begin{pmatrix} a_{11}^{v} \dots a_{1s}^{v} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}^{v} \dots a_{ss}^{v} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \boldsymbol{B}^{v}=\begin{pmatrix} b_{11}^{v} \dots b_{1s}^{v} \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{s1}^{v} \dots b_{ss}^{v} \end{pmatrix},$$

складених з $\boldsymbol{v}$-тих розрядів елементів матриць $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$. Отже, якщо твердження є справедливим для матриць над булевим полем скалярів $\boldsymbol{G}$**={0, 1}**, то воно також є справедливим і для матриць, елементами яких є предикати довільної арності. У силу цього досить довести твердження для випадку скалярного поля $\boldsymbol{G}$**={0, 1}** [18]. Нехай розмірність матриць $\boldsymbol{A}^{v}$ і $\boldsymbol{B}^{v}$ складає $\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{s}$. Виберемо довільно ціле число $\boldsymbol{t}$, $\mathbf{1} \leqslant \boldsymbol{t} \leqslant \mathbf{s}$. Якщо $\boldsymbol{t}$-тий рядок матриці $\boldsymbol{A}^{v}$ є нульовим, то і $\boldsymbol{t}$-тий рядок матриці $(\boldsymbol{AB})^{v}$ також буде нульовим. Тому в кожному рядку матриці $\boldsymbol{A}^{v}$ є хоча б одна одиниця, і цій одиниці відповідає деяка одиниця в матриці $\boldsymbol{B}^{v}$ (нехай це буде елемент $a_{tj}^{v}=\mathbf{1}$, якому відповідає елемент b_{jt}^{v}). При $\boldsymbol{f} \neq \boldsymbol{t}$ ($\mathbf{1} \leqslant \boldsymbol{f} \leqslant \mathbf{s}$) маємо $a_{fj}^{v}=\mathbf{0}$, тому що інакше $(\boldsymbol{AB})_{ft}^{v}=a_{fj}^{v}\, b_{jt}^{v}=\mathbf{1}$, тобто $(\boldsymbol{AB})^{v} \neq \boldsymbol{E}$. Аналогічно, у матриці $\boldsymbol{B}^{v}$ всі елементи рядка $\boldsymbol{j}$, за винятком b_{jt}^{v}, дорівнюють нулю. Таким чином, у кожному рядку матриці $\boldsymbol{A}^{v}$ є хоча б одна одиниця, причому всі ці одиниці розташовані в різних стовпцях. Тому матриця $\boldsymbol{A}^{v}$ є ортогональною. Аналогічно, ортогональною є і матриця $\boldsymbol{B}^{v}$. Рівність $\boldsymbol{B}^{v}=(\boldsymbol{A}^{v})^{\boldsymbol{T}}$ тепер є очевидною (кожному елементу $a_{tj}^{v}=\mathbf{1}$ відповідає $b_{jt}^{v}=\mathbf{1}$). **Теорему доведено**.

<u>Приклад 9</u>. Знайти зворотні матриці для наведених вище ортогональної матриці $\boldsymbol{A}$ та не ортогональної матриці $\boldsymbol{B}$ за умови їх існування.

<u>Розв'язання</u>. Згідно з щойно доведеною теоремою, зворотною до неї буде її транспонована матриця $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$:

$$A^{-1}=A^{T}=\begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix}^{T}=$$

$$=\begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (0,0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що матриця $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ також є ортогональною. Обчислимо тепер добуток ортогональної матриці $\boldsymbol{A}$ на її транспоновану матрицю:

$$A\,A^{T}=\begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (0,0) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} ((0,1)\wedge(0,1))\vee((0,0)\wedge(0,0))\vee((1,0)\wedge(1,0)) & ((0,1)\wedge(1,0))\vee((0,0)\wedge(0,0))\vee((0,1)\wedge(0,1)) & ((0,1)\wedge(0,0))\vee((0,0)\wedge(1,1))\vee((1,0)\wedge(0,0)) \\ ((1,0)\wedge(0,1))\vee((0,0)\wedge(0,0))\vee((0,1)\wedge(1,0)) & ((1,0)\wedge(1,0))\vee((0,0)\wedge(0,0))\vee((0,1)\wedge(0,1)) & ((1,0)\wedge(0,0))\vee((0,0)\wedge(1,1))\vee((0,1)\wedge(0,0)) \\ ((0,0)\wedge(0,1))\vee((1,1)\wedge(0,0))\vee((0,0)\wedge(1,0)) & ((0,0)\wedge(1,0))\vee((1,1)\wedge(0,0))\vee((0,0)\wedge(0,1)) & ((0,0)\wedge(0,0))\vee((1,1)\wedge(1,1))\vee((0,0)\wedge(0,0)) \end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_3 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} = E.$$

Для наведеної вище матриці $\boldsymbol{B}$ операцію обертання виконати неможливо тому що вона не є ортогональною. Тобто для цієї матриці не існує зворотної до неї матриці. З цього випливає, що наведене правило обчислення зворотної матриці для матриці $\boldsymbol{B}$ не виконується:

$$B\,B^T = \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_2 \\ P_0 & P_1 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_2 \\ P_0 & P_1 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_1 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (1,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (1,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (1,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,1) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1)\wedge(0,1) \vee (1,1)\wedge(1,1) \vee (1,0)\wedge(1,0) & (0,1)\wedge(0,0) \vee (1,1)\wedge(0,1) \vee (1,0)\wedge(0,0) & (0,1)\wedge(1,0) \vee (1,1)\wedge(0,0) \vee (1,0)\wedge(0,1) \\ (0,0)\wedge(0,1) \vee (0,1)\wedge(1,1) \vee (0,0)\wedge(1,0) & (0,0)\wedge(0,0) \vee (0,1)\wedge(0,1) \vee (0,0)\wedge(0,0) & (0,0)\wedge(1,0) \vee (0,1)\wedge(0,0) \vee (0,0)\wedge(0,1) \\ (1,0)\wedge(0,1) \vee (0,0)\wedge(1,1) \vee (0,1)\wedge(1,0) & (1,0)\wedge(0,0) \vee (0,0)\wedge(0,1) \vee (0,1)\wedge(0,0) & (1,0)\wedge(1,0) \vee (0,0)\wedge(0,0) \vee (0,1)\wedge(0,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (0,1) & (0,0) \\ (0,1) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_1 & P_0 \\ P_1 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} \neq E.$$

<u>Відповідь</u>. $A^{-1} = \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_0 \end{pmatrix}$. **Для матриці $\boldsymbol{B}$ не існує зворотної матриці, тому що вона не є ортогональною і, як наслідок, не є оборотною.**

<u>Теорема 2.</u> *<u>Формулювання</u>*. Результат добутку довільної логічної матриці на її транспоновану матрицю є матрицею симетричною [18].

<u>Доведення</u>. Нехай є логічна матриця $\boldsymbol{A}$ та її транспонована матриця $\boldsymbol{A^T}$. Тоді

$$(A\,A^T)^T = (A^T)^T A^T = A\,A^T,$$

тому що $(A^T)^T = A$. **Теорему доведено**.

Таким чином, предикатна модель логічних матриць узагальнює розглянуту в [18] булеву модель. Кожна операція над предикатними матрицями складається із $\boldsymbol{2^n}$ операцій над булевими матрицями по кількості розрядів у відповідних елементах предикатного скалярного поля. Таким чином, предикатні логічні матриці можна розглядати як тривимірні булеві матриці, де третій вимір буде відповідати розрядам використаних предикатів. Відповідно, кількість впорядкованих «шарів» по третьому виміру буде складати також $\mathbf{2^n}$. В той же час, булеві матриці можна розглядати як окремий випадок предикатних матриць, при якому арність застосованих предикатів дорівнює нулю. За цієї умови $\mathbf{2^n = 2^0 = 1}$, тобто третій вимір буде складатися лише з одного шару [19].

2.2.1. *Задачі для самостійного опрацювання*

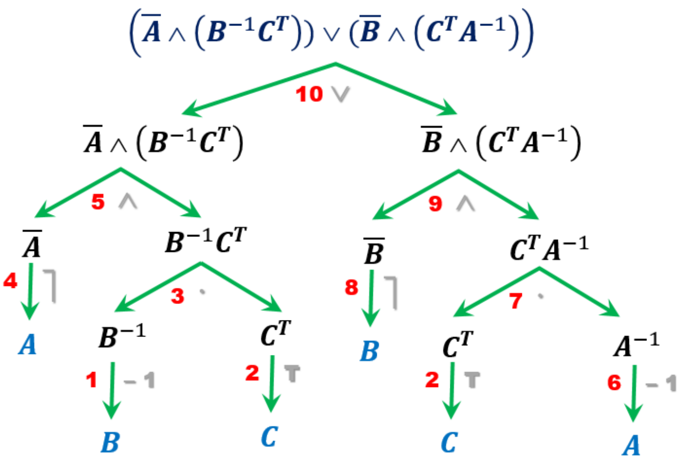
Задано наступні оборотні матриці:

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_2} \\ \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_0} \\ \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_2} \\ \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_0} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_0} \\ \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_2} \end{pmatrix}$$

Обчислити наступні матриці. З'ясувати, чи є вони оборотними. Якщо так, знайти для них зворотні матриці. Якщо ні, запропонувати низку операцій з початковою матрицею, щоб в результаті отримати оборотну матрицю. При цьому припускається побудова деяких довільних допоміжних не ортогональних матриць та використання відомих матриць $\boldsymbol{E}$ та $\boldsymbol{O}$. Для результату цієї низки операцій знайти зворотну матрицю.

$$\mathbf{1.}\ \ \boldsymbol{D_1} = (\overline{\boldsymbol{A}} \wedge (\boldsymbol{B^{-1}C^T})) \vee (\overline{\boldsymbol{B}} \wedge (\boldsymbol{C^T A^{-1}})).$$

<u>*Розв'язання*</u>. Побудуємо семантичне дерево для цієї початкової формули [2].



Тепер виконаємо можливі тотожні перетворення цієї формули:

$$(\overline{\boldsymbol{A}} \wedge (\boldsymbol{B^{-1}C^T})) \vee (\overline{\boldsymbol{B}} \wedge (\boldsymbol{C^T A^{-1}})) =$$

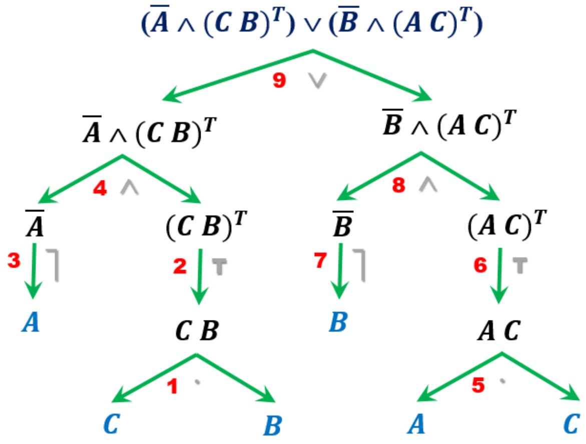
(*за властивістю зворотної матриці для* B^{-1} *та* A^{-1})

$$= (\overline{\boldsymbol{A}} \wedge (\boldsymbol{B^T C^T})) \vee (\overline{\boldsymbol{B}} \wedge (\boldsymbol{C^T A^T})) =$$

(*за правилом транспонування добутку матриць для* $B^T C^T$ *та* $C^T A^T$)

$$= (\overline{\boldsymbol{A}} \wedge (\boldsymbol{C\ B})^{\boldsymbol{T}}) \vee (\overline{\boldsymbol{B}} \wedge (\boldsymbol{A\ C})^{\boldsymbol{T}}).$$

Побудуємо тепер семантичне дерево для цієї перетвореної формули.



Ця формула містить, як і раніше, дві операції добутку матриць, але загальна кількість операцій до виконання зменшилася. Тому раціональніше буде обрати для обчислення саме цей перетворений варіант.

***Дія № 1*:**

$$C\,B = \begin{pmatrix} P_3 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (P_3 \wedge P_1) \vee (P_0 \wedge P_2) \vee (P_0 \wedge P_0) & (P_3 \wedge P_0) \vee (P_0 \wedge P_0) \vee (P_0 \wedge P_3) & (P_3 \wedge P_2) \vee (P_0 \wedge P_1) \vee (P_0 \wedge P_0) \\ (P_0 \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_0) & (P_0 \wedge P_0) \vee (P_2 \wedge P_0) \vee (P_1 \wedge P_3) & (P_0 \wedge P_2) \vee (P_2 \wedge P_1) \vee (P_1 \wedge P_0) \\ (P_0 \wedge P_1) \vee (P_1 \wedge P_2) \vee (P_2 \wedge P_0) & (P_0 \wedge P_0) \vee (P_1 \wedge P_0) \vee (P_2 \wedge P_3) & (P_0 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ((1,1) \wedge (0,1)) \vee ((0,0) \wedge (1,0)) \vee ((0,0) \wedge (0,0)) & ((1,1) \wedge (0,0)) \vee ((0,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,0) \wedge (1,1)) & ((1,1) \wedge (1,0)) \vee ((0,0) \wedge (0,1)) \vee ((0,0) \wedge (0,0)) \\ ((0,0) \wedge (0,1)) \vee ((1,0) \wedge (1,0)) \vee ((0,1) \wedge (0,0)) & ((0,0) \wedge (0,0)) \vee ((1,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,1) \wedge (1,1)) & ((0,0) \wedge (1,0)) \vee ((1,0) \wedge (0,1)) \vee ((0,1) \wedge (0,0)) \\ ((0,0) \wedge (0,1)) \vee ((0,1) \wedge (1,0)) \vee ((1,0) \wedge (0,0)) & ((0,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,1) \wedge (0,0)) \vee ((1,0) \wedge (1,1)) & ((0,0) \wedge (1,0)) \vee ((0,1) \wedge (0,1)) \vee ((1,0) \wedge (0,0)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_1 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 2*:**

$$(C\,B)^T = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_1 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_1 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 3*:**

$$\overline{A} = \overline{\begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_3 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_1 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{(0,1)} & \overline{(0,0)} & \overline{(1,0)} \\ \overline{(0,0)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,0)} \\ \overline{(1,0)} & \overline{(0,0)} & \overline{(0,1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,1) & (0,0) & (1,1) \\ (0,1) & (1,1) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_3 & P_1 \\ P_3 & P_0 & P_3 \\ P_1 & P_3 & P_2 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 4*:**

$$\overline{A} \wedge (C\,B)^T = \begin{pmatrix} P_2 & P_3 & P_1 \\ P_3 & P_0 & P_3 \\ P_1 & P_3 & P_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_1 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,1) & (0,0) & (1,1) \\ (0,1) & (1,1) & (1,0) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 5*:**

$$A\,C = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_3 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_3 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (P_1 \wedge P_3) \vee (P_0 \wedge P_0) \vee (P_2 \wedge P_0) & (P_1 \wedge P_0) \vee (P_0 \wedge P_2) \vee (P_2 \wedge P_1) & (P_1 \wedge P_0) \vee (P_0 \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_2) \\ (P_0 \wedge P_3) \vee (P_3 \wedge P_0) \vee (P_0 \wedge P_0) & (P_0 \wedge P_0) \vee (P_3 \wedge P_2) \vee (P_0 \wedge P_1) & (P_0 \wedge P_0) \vee (P_3 \wedge P_1) \vee (P_0 \wedge P_2) \\ (P_2 \wedge P_3) \vee (P_0 \wedge P_0) \vee (P_1 \wedge P_0) & (P_2 \wedge P_0) \vee (P_0 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_1) & (P_2 \wedge P_0) \vee (P_0 \wedge P_1) \vee (P_1 \wedge P_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ((0,1) \wedge (1,1)) \vee ((0,0) \wedge (0,0)) \vee ((1,0) \wedge (0,0)) & ((0,1) \wedge (0,0)) \vee ((0,0) \wedge (1,0)) \vee ((1,0) \wedge (0,1)) & ((0,1) \wedge (0,0)) \vee ((0,0) \wedge (0,1)) \vee ((1,0) \wedge (1,0)) \\ ((0,0) \wedge (1,1)) \vee ((1,1) \wedge (0,0)) \vee ((0,0) \wedge (0,0)) & ((0,0) \wedge (0,0)) \vee ((1,1) \wedge (1,0)) \vee ((0,0) \wedge (0,1)) & ((0,0) \wedge (0,0)) \vee ((1,1) \wedge (0,1)) \vee ((0,0) \wedge (1,0)) \\ ((1,0) \wedge (1,1)) \vee ((0,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,1) \wedge (0,0)) & ((1,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,0) \wedge (1,0)) \vee ((0,1) \wedge (0,1)) & ((1,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,0) \wedge (0,1)) \vee ((0,1) \wedge (1,0)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (1,0) & (0,1) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_2 & P_1 & P_0 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 6*:**

$$(A\,C)^T = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_2 & P_1 & P_0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (1,0) & (0,1) & (0,0) \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (1,0) & (0,1) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_2 & P_1 & P_0 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 7*:**

$$\overline{B} = \overline{\begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,0) & (1,1) & (0,1) \\ (0,1) & (1,1) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_3 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_3 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 8*:**

$$\overline{B} \wedge (A\ C)^T = \begin{pmatrix} P_2 & P_3 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_2 & P_1 & P_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,0) & (1,1) & (0,1) \\ (0,1) & (1,1) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (1,0) & (0,1) & (0,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 9*:**

$$(\overline{A} \wedge (C\ B)^T) \vee (\overline{B} \wedge (A\ C)^T) = \begin{pmatrix} P_0 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_0 & P_0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_0 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}.$$

Отримана матриця не є ортогональною, тому вона не є оборотною. Якщо в якості допоміжної не ортогональної матриці обрати матрицю

$$K_1 = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_2 \end{pmatrix},$$

то для отримання оборотної і, як наслідок, ортогональної матриці можна запропонувати вираз:

$$M_1 = (D_1 \wedge E) \vee K_1.$$

Обчислимо цей вираз по діях в порядку, зазначеному дужками.

Дія № 1:

$$D_1 \wedge E = \begin{pmatrix} P_0 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_3 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_3 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}.$$

Дія № 2:

$$(D_1 \wedge E) \vee K_1 = \begin{pmatrix} P_0 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_2 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця є ортогональною і, як наслідок, оборотною. Отже,

$$M_1^{-1} = ((D_1 \wedge E) \vee K_1)^{-1} = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_2 \end{pmatrix}^T =$$

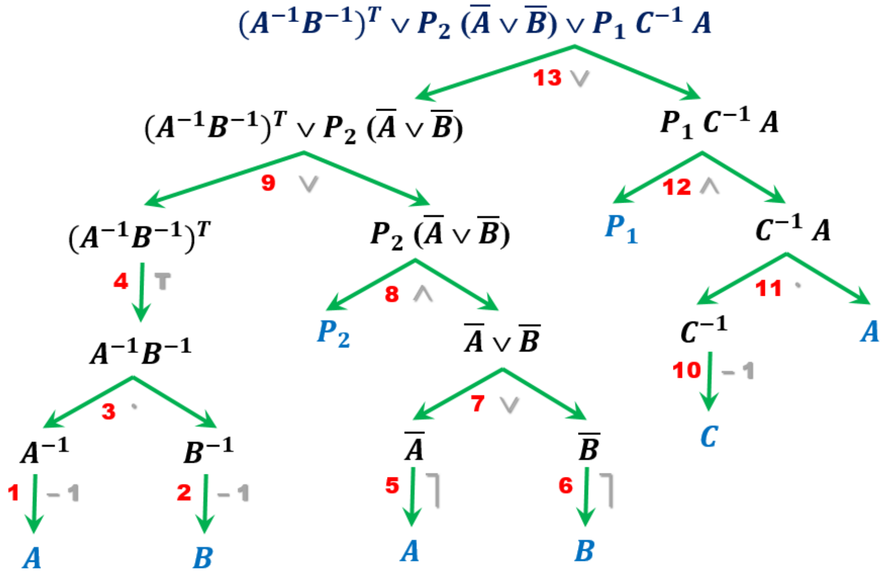
$$= \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (0,1) \\ (0,1) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_1 & P_2 \end{pmatrix}.$$

ВІДПОВІДЬ. $D_1 = \begin{pmatrix} P_0 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}$. **Ця матриця не є оборотною. З використанням матриці** $K_1 = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_2 \end{pmatrix}$ **маємо:**

$$((D_1 \wedge E) \vee K_1)^{-1} = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (0,1) \\ (0,1) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_1 \\ P_1 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_1 & P_2 \end{pmatrix}.$$

2. $D_2 = (A^{-1}B^{-1})^T \vee P_2\,(\overline{A} \vee \overline{B}) \vee P_1\,C^{-1}\,A.$

Розв'язання. Побудуємо семантичне дерево для цієї початкової формули [2].



Тепер виконаємо можливі тотожні перетворення цієї формули:

$$(A^{-1}B^{-1})^T \vee P_2\,(\overline{A} \vee \overline{B}) \vee P_1\,C^{-1}\,A =$$

(*за законом де Моргана для* $\overline{A} \vee \overline{B}$)

$$= (A^{-1}B^{-1})^T \vee P_2\,(\overline{A \wedge B}) \vee P_1\,C^{-1}\,A =$$

(*за властивістю зворотної матриці для* A^{-1} *та* B^{-1})

$$= (A^T B^T)^T \vee P_2\,(\overline{A \wedge B}) \vee P_1\,C^{-1}\,A =$$

(*за правилом транспонування добутку матриць для* $A^T B^T$)

$$= ((B\,A)^T)^T \vee P_2\,(\overline{A \wedge B}) \vee P_1\,C^{-1}\,A =$$

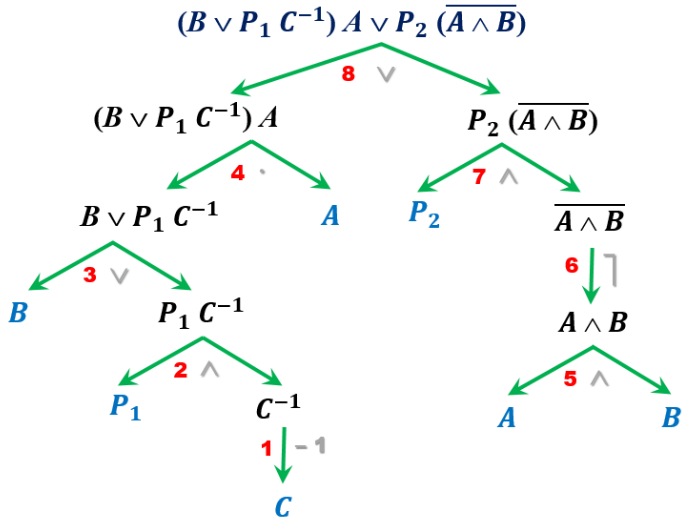
(*за правилом подвійного транспонування для* $((B\,A)^T)^T$)

$$= B\,A \vee P_2\,(\overline{A \wedge B}) \vee P_1\,C^{-1}\,A.$$

(*за законом дистрибутивності добутку щодо диз'юнкції для* BA *та* $P_1\,C^{-1}\,A$)

$$= (B \vee P_1\,C^{-1})\,A \vee P_2\,(\overline{A \wedge B}).$$

Побудуємо тепер семантичне дерево для цієї перетвореної формули.



При перетвореному способі обчислення вдалося не лише скоротити загальну кількість виконуваних операцій, але й зменшити з двох до однієї кількість операцій добутку матриць, що значно спрощує процедуру обчислення. Тому для реалізації доцільно прийняти саме цей спрощений варіант.

***Дія № 1*:**

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} P_3 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_1 & P_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_1 & P_2 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 2*:**

$$P_1 \wedge C^{-1} = P_1 \wedge \begin{pmatrix} P_3 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (0,1) \wedge \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,1) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_1 & P_0 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 3*:**

$$B \vee P_1\, C^{-1} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_1 & P_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,1) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix}.$$

Дія № 4:

$$(B \vee P_1\, C^{-1})\, A = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_3 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (P_1{\wedge}P_1){\vee}(P_0{\wedge}P_0){\vee}(P_2{\wedge}P_2) & (P_1{\wedge}P_0){\vee}(P_0{\wedge}P_3){\vee}(P_2{\wedge}P_0) & (P_1{\wedge}P_2){\vee}(P_0{\wedge}P_0){\vee}(P_2{\wedge}P_1) \\ (P_2{\wedge}P_1){\vee}(P_0{\wedge}P_0){\vee}(P_1{\wedge}P_2) & (P_2{\wedge}P_0){\vee}(P_0{\wedge}P_3){\vee}(P_1{\wedge}P_0) & (P_2{\wedge}P_2){\vee}(P_0{\wedge}P_0){\vee}(P_1{\wedge}P_1) \\ (P_0{\wedge}P_1){\vee}(P_3{\wedge}P_0){\vee}(P_0{\wedge}P_2) & (P_0{\wedge}P_0){\vee}(P_3{\wedge}P_3){\vee}(P_0{\wedge}P_0) & (P_0{\wedge}P_2){\vee}(P_3{\wedge}P_0){\vee}(P_0{\wedge}P_1) \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{matrix} ((0,1){\wedge}(0,1)) \vee ((0,0){\wedge}(0,0)) \vee ((1,0){\wedge}(1,0)) \\ ((1,0){\wedge}(0,1)) \vee ((0,0){\wedge}(0,0)) \vee ((0,1){\wedge}(1,0)) \\ ((0,0){\wedge}(0,1)) \vee ((1,1){\wedge}(0,0)) \vee ((0,0){\wedge}(1,0)) \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} ((0,1){\wedge}(0,0)) \vee ((0,0){\wedge}(1,1)) \vee ((1,0){\wedge}(0,0)) \\ ((1,0){\wedge}(0,0)) \vee ((0,0){\wedge}(1,1)) \vee ((0,1){\wedge}(0,0)) \\ ((0,0){\wedge}(0,0)) \vee ((1,1){\wedge}(1,1)) \vee ((0,0){\wedge}(0,0)) \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} ((0,1){\wedge}(1,0)) \vee ((0,0){\wedge}(0,0)) \vee ((1,0){\wedge}(0,1)) \\ ((1,0){\wedge}(1,0)) \vee ((0,0){\wedge}(0,0)) \vee ((0,1){\wedge}(0,1)) \\ ((0,0){\wedge}(1,0)) \vee ((1,1){\wedge}(0,0)) \vee ((0,0){\wedge}(0,1)) \end{matrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_3 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix}.$$

Дія № 5:

$$A \wedge B = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_3 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}.$$

Дія № 6:

$$\overline{A \wedge B} = \overline{\begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{(0,1)} & \overline{(0,0)} & \overline{(1,0)} \\ \overline{(0,0)} & \overline{(0,0)} & \overline{(0,0)} \\ \overline{(0,0)} & \overline{(0,0)} & \overline{(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,1) & (1,1) & (1,1) \\ (1,1) & (1,1) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_3 & P_1 \\ P_3 & P_3 & P_3 \\ P_3 & P_3 & P_3 \end{pmatrix}.$$

Дія № 7:

$$P_2 \wedge (\overline{A \wedge B}) = P_2 \wedge \begin{pmatrix} P_2 & P_3 & P_1 \\ P_3 & P_3 & P_3 \\ P_3 & P_3 & P_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (1,0) \wedge \begin{pmatrix} (1,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,1) & (1,1) & (1,1) \\ (1,1) & (1,1) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) & (1,0) & (0,0) \\ (1,0) & (1,0) & (1,0) \\ (1,0) & (1,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_2 & P_0 \\ P_2 & P_2 & P_2 \\ P_2 & P_2 & P_2 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 8*:**

$$(B \vee P_1\, C^{-1})\, A \vee P_2\, (\overline{A \wedge B}) = \begin{pmatrix} P_3 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_3 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_2 & P_2 & P_0 \\ P_2 & P_2 & P_2 \\ P_2 & P_2 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (1,0) & (1,0) & (0,0) \\ (1,0) & (1,0) & (1,0) \\ (1,0) & (1,0) & (1,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,0) \\ (1,0) & (1,0) & (1,1) \\ (1,0) & (1,1) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_0 \\ P_2 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_3 & P_2 \end{pmatrix}.$$

Отримана матриця не є ортогональною, тому вона не є оборотною. Якщо в якості допоміжної не ортогональної матриці обрати матрицю

$$K_2 = \begin{pmatrix} (1,1) & (0,1) & (0,0) \\ (0,1) & (0,1) & (1,1) \\ (0,1) & (1,1) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_1 & P_0 \\ P_1 & P_1 & P_3 \\ P_1 & P_3 & P_1 \end{pmatrix},$$

то для отримання оборотної і, як наслідок, ортогональної матриці можна запропонувати вираз:

$$M_2 = D_2 \wedge K_2.$$

Обчислимо цей вираз.

$$D_2 \wedge K_2 = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_0 \\ P_2 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_3 & P_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_3 & P_1 & P_0 \\ P_1 & P_1 & P_3 \\ P_1 & P_3 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,0) \\ (1,0) & (1,0) & (1,1) \\ (1,0) & (1,1) & (1,0) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (1,1) & (0,1) & (0,0) \\ (0,1) & (0,1) & (1,1) \\ (0,1) & (1,1) & (0,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_3 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця є ортогональною і, як наслідок, оборотною. Отже,

$$M_2^{-1} = (D_2 \wedge K_2)^{-1} = \begin{pmatrix} P_3 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_3 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} P_3 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_3 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix}^{T} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_3 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix}.$$

Можна помітити, що для отриманої матриці $\boldsymbol{M_2}$ виконується співвідношення

$$\boldsymbol{M_2} = \boldsymbol{M_2^T},$$

тобто ця матриця є симетричною. З урахуванням того, що вона до того ж є і ортогональною, отримуємо, що в даному прикладі

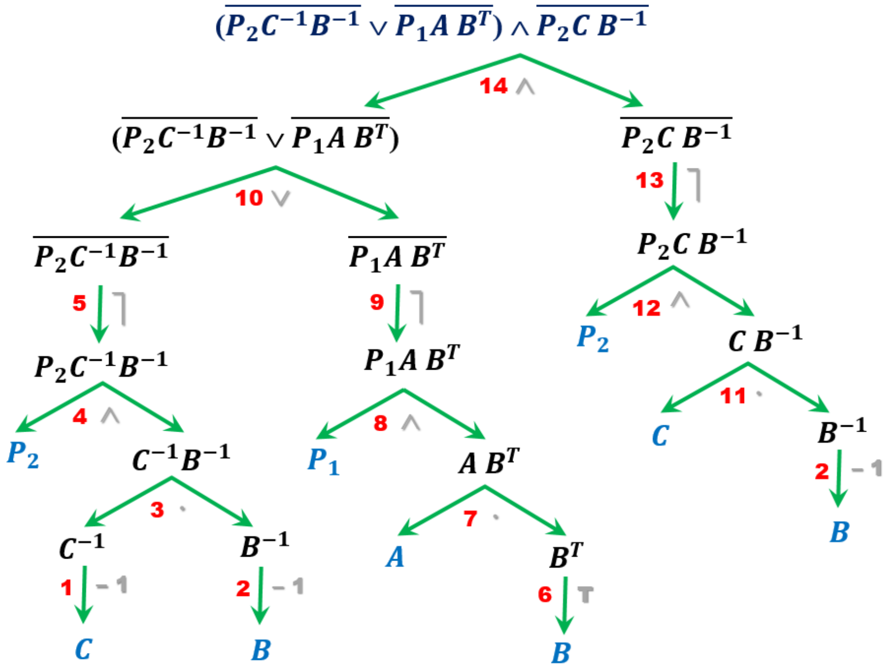
$$\boldsymbol{M_2} = \boldsymbol{M_2^{-1}}.$$

ВІДПОВІДЬ. $\boldsymbol{D_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_0} \\ \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_3} \\ \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_2} \end{pmatrix}$. **Ця матриця не є оборотною. З використанням матриці** $\boldsymbol{K_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_0} \\ \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_3} \\ \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_1} \end{pmatrix}$ **маємо**

$$(\boldsymbol{D_2} \wedge \boldsymbol{K_2})^{-1} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{1},\boldsymbol{1}) & (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}) & (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}) \\ (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}) & (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}) & (\boldsymbol{1},\boldsymbol{1}) \\ (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}) & (\boldsymbol{1},\boldsymbol{1}) & (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_0} \\ \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_3} \\ \boldsymbol{P_0} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_0} \end{pmatrix}.$$

3. $\boldsymbol{D_3} = (\overline{\boldsymbol{P_2 C^{-1} B^{-1}}} \vee \overline{\boldsymbol{P_1 A\, B^T}}) \wedge \overline{\boldsymbol{P_2 C\, B^{-1}}}$.

Розв'язання. Побудуємо семантичне дерево для цієї початкової формули [2].



Тепер виконаємо можливі тотожні перетворення цієї формули:

$$(\overline{\boldsymbol{P_2 C^{-1} B^{-1}}} \vee \overline{\boldsymbol{P_1 A\, B^T}}) \wedge \overline{\boldsymbol{P_2 C\, B^{-1}}} =$$

(*за законом де Моргана для* $\overline{P_2 C^{-1} B^{-1}} \vee \overline{P_1 A\, B^T}$)

$$= (\overline{\boldsymbol{P_2 C^{-1} B^{-1}} \wedge \boldsymbol{P_1 A\, B^T}}) \wedge \overline{\boldsymbol{P_2 C\, B^{-1}}} =$$

(*за властивістю зворотної матриці для* B^{-1})

$$= (\overline{\boldsymbol{P_2 C^{-1} B^T} \wedge \boldsymbol{P_1 A\, B^T}}) \wedge \overline{\boldsymbol{P_2 C\, B^T}} =$$

(*за законом дистрибутивності добутку щодо кон'юнкції для* $P_2 C^{-1} B^T$ *та* $P_1 A\, B^T$)

$$= \left(\overline{(P_2C^{-1} \wedge P_1A)\, B^T}\right) \wedge \overline{P_2C\, B^T} =$$

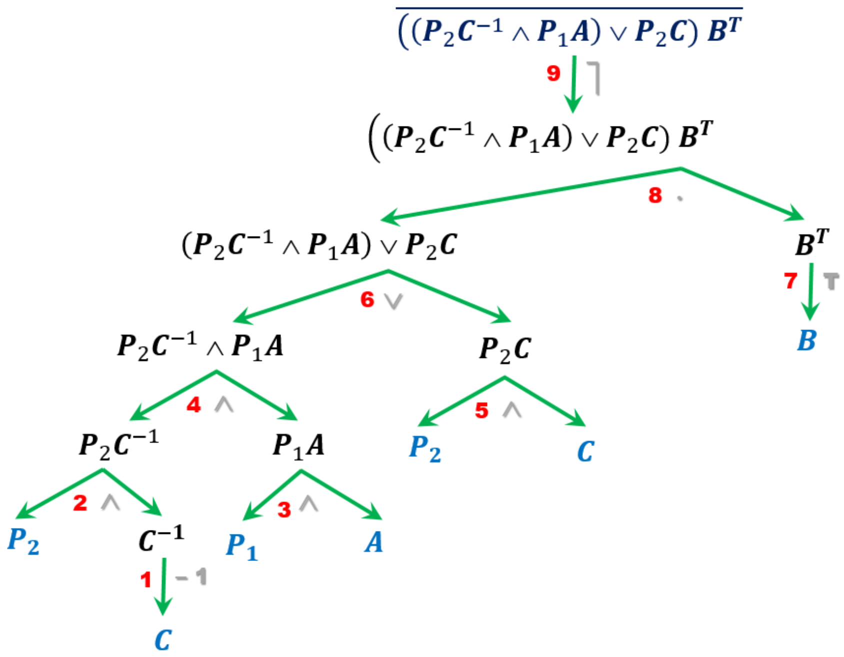
(*за законом де Моргана*)

$$= \overline{(P_2C^{-1} \wedge P_1A)B^T \vee P_2C\, B^T} =$$

(*за законом дистрибутивності добутку щодо диз'юнкції*)

$$= \overline{((P_2C^{-1} \wedge P_1A) \vee P_2C)\, B^T}.$$

Побудуємо тепер семантичне дерево для цієї перетвореної формули.



При перетвореному способі обчислення вдалося не лише скоротити загальну кількість виконуваних операцій, але й зменшити з трьох до однієї кількість операцій добутку матриць, що значно спрощує процедуру обчислення. Тому для реалізації доцільно прийняти саме цей спрощений варіант.

Дія № 1:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} P_3 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_1 & P_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_1 & P_2 \end{pmatrix}.$$

Дія № 2:

$$P_2 \wedge C^{-1} = P_2 \wedge \begin{pmatrix} P_3 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (1,0) \wedge \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_2 \end{pmatrix}.$$

Дія № 3:

$$P_1 \wedge A = P_1 \wedge \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_0 & P_3 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= (0,1) \wedge \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_1 \end{pmatrix}.$$

Дія № 4:

$$P_2C^{-1} \wedge P_1A = \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}.$$

Дія № 5:

$$P_2 \wedge C = P_2 \wedge \begin{pmatrix} P_3 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (1,0) \wedge \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_2 \end{pmatrix}.$$

Дія № 6:

$$(P_2C^{-1} \wedge P_1A) \vee P_2C = \begin{pmatrix} P_0 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_2 \end{pmatrix}.$$

Дія № 7:

$$B^T = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_0 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 8*:**

$$((P_2 C^{-1} \wedge P_1 A) \vee P_2 C)\; B^T = \begin{pmatrix} P_2 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (P_2 \wedge P_1) \vee (P_0 \wedge P_0) \vee (P_0 \wedge P_2) & (P_2 \wedge P_2) \vee (P_0 \wedge P_0) \vee (P_0 \wedge P_1) & (P_2 \wedge P_0) \vee (P_0 \wedge P_3) \vee (P_0 \wedge P_0) \\ (P_0 \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_0) \vee (P_0 \wedge P_2) & (P_0 \wedge P_2) \vee (P_2 \wedge P_0) \vee (P_0 \wedge P_1) & (P_0 \wedge P_0) \vee (P_2 \wedge P_3) \vee (P_0 \wedge P_0) \\ (P_0 \wedge P_1) \vee (P_0 \wedge P_0) \vee (P_2 \wedge P_2) & (P_0 \wedge P_2) \vee (P_0 \wedge P_0) \vee (P_2 \wedge P_1) & (P_0 \wedge P_0) \vee (P_0 \wedge P_3) \vee (P_2 \wedge P_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ((1,0) \wedge (0,1)) \vee ((0,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,0) \wedge (1,0)) & ((1,0) \wedge (1,0)) \vee ((0,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,0) \wedge (0,1)) & ((1,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,0) \wedge (1,1)) \vee ((0,0) \wedge (0,0)) \\ ((0,0) \wedge (0,1)) \vee ((1,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,0) \wedge (1,0)) & ((0,0) \wedge (1,0)) \vee ((1,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,0) \wedge (0,1)) & ((0,0) \wedge (0,0)) \vee ((1,0) \wedge (1,1)) \vee ((0,0) \wedge (0,0)) \\ ((0,0) \wedge (0,1)) \vee ((0,0) \wedge (0,0)) \vee ((1,0) \wedge (1,0)) & ((0,0) \wedge (1,0)) \vee ((0,0) \wedge (0,0)) \vee ((1,0) \wedge (0,1)) & ((0,0) \wedge (0,0)) \vee ((0,0) \wedge (1,1)) \vee ((1,0) \wedge (0,0)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}.$$

***Дія № 9*:**

$$\overline{((P_2 C^{-1} \wedge P_1 A) \vee P_2 C)\; B^T} = \overline{\begin{pmatrix} P_0 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_0 \end{pmatrix}} =$$

$$= \overline{\begin{pmatrix} (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (1,1) & (0,1) & (1,1) \\ (1,1) & (1,1) & (0,1) \\ (0,1) & (1,1) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_1 & P_3 \\ P_3 & P_3 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_3 \end{pmatrix}.$$

Отримана матриця не є ортогональною, тому вона не є оборотною. Якщо в якості допоміжної не ортогональної матриці обрати матрицю

$$K_3 = \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,1) & (1,0) \\ (1,0) & (1,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_2 \\ P_2 & P_1 & P_2 \\ P_2 & P_2 & P_1 \end{pmatrix},$$

то для отримання оборотної і, як наслідок, ортогональної матриці можна запропонувати вираз:

$$M_3 = D_3 \wedge K_3.$$

Обчислимо цей вираз.

$$D_3 \wedge K_3 = \begin{pmatrix} P_3 & P_1 & P_3 \\ P_3 & P_3 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_2 \\ P_2 & P_1 & P_2 \\ P_2 & P_2 & P_1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}(1,1) & (0,1) & (1,1)\\ (1,1) & (1,1) & (0,1)\\ (0,1) & (1,1) & (1,1)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}(0,1) & (1,0) & (1,0)\\ (1,0) & (0,1) & (1,0)\\ (1,0) & (1,0) & (0,1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(0,1) & (0,0) & (1,0)\\ (1,0) & (0,1) & (0,0)\\ (0,0) & (1,0) & (0,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1 & P_0 & P_2\\ P_2 & P_1 & P_0\\ P_0 & P_2 & P_1\end{pmatrix}.$$

Ця матриця є ортогональною і, як наслідок, оборотною. Отже,

$$M_3^{-1}=(D_3\wedge K_3)^{-1}=\begin{pmatrix}P_1 & P_0 & P_2\\ P_2 & P_1 & P_0\\ P_0 & P_2 & P_1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}P_1 & P_0 & P_2\\ P_2 & P_1 & P_0\\ P_0 & P_2 & P_1\end{pmatrix}^{T}=$$

$$=\begin{pmatrix}(0,1) & (0,0) & (1,0)\\ (1,0) & (0,1) & (0,0)\\ (0,0) & (1,0) & (0,1)\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}(0,1) & (1,0) & (0,0)\\ (0,0) & (0,1) & (1,0)\\ (1,0) & (0,0) & (0,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1 & P_2 & P_0\\ P_0 & P_1 & P_2\\ P_2 & P_0 & P_1\end{pmatrix}.$$

ВІДПОВІДЬ. $D_3=\begin{pmatrix}P_3 & P_1 & P_3\\ P_3 & P_3 & P_1\\ P_1 & P_3 & P_3\end{pmatrix}$. **Ця матриця не є оборотною. З використанням матриці** $K_3=\begin{pmatrix}P_1 & P_2 & P_2\\ P_2 & P_1 & P_2\\ P_2 & P_2 & P_1\end{pmatrix}$ **маємо**

$$(D_3\wedge K_3)^{-1}=\begin{pmatrix}(0,1) & (1,0) & (0,0)\\ (0,0) & (0,1) & (1,0)\\ (1,0) & (0,0) & (0,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1 & P_2 & P_0\\ P_0 & P_1 & P_2\\ P_2 & P_0 & P_1\end{pmatrix}.$$

Набутий досвід розв'язання цього типу завдань дозволяє дійти висновку, що при тотожних перетвореннях подібних виразів вважається за доцільне застосування законів де Моргана *в зворотному напрямку* з метою скорочення кількості виконуваних операцій при обчисленні.

2.2.2. *Контрольні запитання*

1. Яка логічна матриця називається діагональною?
2. За яким алгоритмом відбувається операція транспонування матриці?
3. Наведіть правила транспонування логічних матриць.
4. Яка логічна матриця називається симетричною?
5. Які логічні матриці називаються перестановочними?
6. Яка логічна матриця є ортогональною?
7. Сформулюйте необхідну і достатню умову існування зворотної логічної матриці.
8. Чому дорівнює зворотна логічна матриця за умови її існування?
9. Якою матрицею є результат добутку довільної логічної матриці та її транспонованої матриці?

2.2.3. *Контрольні завдання*

Задано наступні оборотні матриці над скалярним полем одномісних предикатів:

$$A = \begin{pmatrix} P_0 & P_3 & P_0 \\ P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_0 \\ P_2 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити наступні матриці, обравши за допомогою тотожних перетворень раціональніший спосіб. З'ясувати, чи є вони оборотними. Якщо так, знайти для них зворотні матриці. Якщо ні, запропонувати низку операцій з початковою матрицею, щоб в результаті отримати оборотну матрицю. При цьому припускається побудова деяких довільних допоміжних не ортогональних матриць та використання відомих матриць E та O. Для результату цієї низки операцій знайти зворотну матрицю.

1) $(\overline{\overline{P_2A^{-1}} \vee \overline{P_1B^T}})\,C^{-1} \vee P_2A^TC^T$;

2) $(\overline{(B\,C)^T} \wedge (A\,C)^{-1})\,(\overline{A} \vee \overline{B})^T$;

3) $\overline{\overline{B^T} \vee (\overline{A\,C})^T} \vee (A^{-1}\overline{C})^T$;

4) $(\overline{A})^T \vee \overline{(C\,A)^T \vee (B\,A)^T}$;

5) $\overline{(B^TC^{-1}) \vee (A^{-1}C^T)} \cdot \overline{(A^{-1}B^{-1}) \wedge (A^TC^{-1})}$;

6) $(\overline{P_1\overline{C}\,A^{-1}} \wedge \overline{P_2\overline{B}\,A^T}) \cdot (P_1\overline{A} \vee P_2A^T)$;

7) $P_1\,(\overline{(A\,B)^T} \vee (\overline{B^{-1}\overline{C}} \wedge \overline{B^T\overline{A}}))$;

8) $(C\,B \vee P_2A^{-1}B^{-1})^T \vee \overline{A}\,C$;

9) $(P_1B\,A^{-1} \vee P_2\overline{C}\,A^T) \cdot \overline{B^TA^T}$;

10) $(P_1A^T \vee P_2A^{-1}) \cdot (P_1B^{-1}C \vee P_2B^T\overline{A})$.

3. ПРЕДИКАТНА ТА БУЛЕВА МОДЕЛІ ВЕКТОРНИХ ЛОГІЧНИХ ПРОСТОРІВ

Мета занять з даної теми – закріплення теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок обробки логічних просторів, векторами яких є предикати довільної арності.

3.1. Векторний логічний простір. Лінійна комбінація векторів. Її графічна інтерпретація

Мета занять з даної теми – закріплення теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок побудови предикатних логічних просторів над довільним логічним скалярним полем.

Довільна непорожня множина елементів $\boldsymbol{L}$ називається **векторним логічним простором** над деяким логічним полем скалярів $\boldsymbol{G}$ [1, 10], якщо виконуються наступні умови:

а) задане правило, згідно з яким для будь-якої пари елементів (**логічних векторів**) $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}$ в $\boldsymbol{L}$ міститься новий елемент, що називається **диз'юнкцією** $\boldsymbol{l} \vee \boldsymbol{g}$ векторів $\boldsymbol{l}$ і $\boldsymbol{g}$;

б) задане правило, згідно з яким для будь-якого числа (логічного скаляра) $\alpha \in \boldsymbol{G}$ і будь-якого елемента (логічного вектора) $\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}$ в $\boldsymbol{L}$ міститься новий елемент, що називається **добутком** $\alpha\, \boldsymbol{l}$ скаляра α на вектор $\boldsymbol{l}$;

в) операції диз'юнкції та добутку скаляра на вектор задовольняють наступним законам:

ідемпотентності диз'юнкції векторів

$$\boldsymbol{l} \vee \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l};$$

комутативності диз'юнкції векторів

$$\boldsymbol{l} \vee \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g} \vee \boldsymbol{l};$$

асоціативності диз'юнкції векторів

$$(\boldsymbol{l} \vee \boldsymbol{g}) \vee \boldsymbol{h} = \boldsymbol{l} \vee (\boldsymbol{g} \vee \boldsymbol{h});$$

асоціативності відносно кон'юнкції скалярів

$$\alpha\, (\beta\, \boldsymbol{l}) = (\alpha\, \beta)\, \boldsymbol{l};$$

дистрибутивності щодо диз'юнкції скалярів

$$(\alpha \vee \beta)\, \boldsymbol{l} = \alpha\, \boldsymbol{l} \vee \beta\, \boldsymbol{l};$$

дистрибутивності щодо диз'юнкції векторів

$$\alpha\, (\boldsymbol{l} \vee \boldsymbol{g}) = \alpha\, \boldsymbol{l} \vee \alpha\, \boldsymbol{g};$$

закон нуля для диз'юнкції векторів існує єдиний нульовий вектор $\vec{\boldsymbol{0}} \in \boldsymbol{L}$ такий, що для будь-якого $\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}$

$$\vec{\boldsymbol{0}} \vee \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l},$$

закон одиниці для диз'юнкції векторів існує єдиний одиничний вектор $\vec{\mathbf{1}} \in \boldsymbol{L}$ такий, що для будь-якого $\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}$

$$\vec{\mathbf{1}} \vee \boldsymbol{l} = \vec{\mathbf{1}}.$$

Перелічені закони називаються **аксіомами логічного простору** та виконуються для будь-яких $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{L}$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{G}$. З аксіом випливає наступна тотожність: для кожного $\alpha \in \boldsymbol{G}$

$$\alpha \wedge \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}}.$$

Із законів комутативності та асоціативності диз'юнкції векторів також випливає, що ці операції, а також закони нуля, одиниці та дистрибутивності щодо диз'юнкції векторів можна узагальнити на будь-яку кількість логічних векторів, тобто

$$\vec{\mathbf{0}} \vee \bigvee_{i=1}^{s} \boldsymbol{l}_i = \bigvee_{i=1}^{s} \boldsymbol{l}_i\,,$$

$$\vec{\mathbf{1}} \vee \bigvee_{i=1}^{s} \boldsymbol{l}_i = \vec{\mathbf{1}}\,,$$

$$\alpha \bigvee_{i=1}^{s} \boldsymbol{l}_i = \bigvee_{i=1}^{s} \alpha \boldsymbol{l}_i\,.$$

Будемо розглядати два види векторних логічних просторів. Візьмемо в якості поля логічних скалярів множину $\boldsymbol{G} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. В якості логічних векторів розглянемо множину конституент одиниці по $\boldsymbol{m}$ змінним [2]. Такий логічний простір будемо називати **булевим**. У той же час, систему всіх скінченних предикатів арності $\boldsymbol{m}$, заданих на декартовому добутку $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{K}_m$, $|\boldsymbol{K}_i| = \boldsymbol{k}_i$, можна розглядати як логічний простір. Множина $\boldsymbol{K}_i$ є алфавітом, на якому заданий аргумент $\boldsymbol{x}_i$ розглянутих предикатів. Полем логічних скалярів для такого простору може бути будь-яка система всіх скінченних предикатів арності $\boldsymbol{n} < \boldsymbol{m}$. Однак алфавітами і для аргументів предикатів поля скалярів, і для аргументів предикатів множини векторів такого логічного простору мають виступати ті ж самі множини. Побудований в такий спосіб простір називається **предикатним логічним простором** або **простором *m*-місних предикатів над скалярним полем *n*-місних предикатів** [20]. Визначимо операції над елементами такого простору. Диз'юнкція векторів такого простору буде обчислюватися за правилом, аналогічному тому, що було введено для предикатів – елементів поля логічних скалярів, тобто

$$(\boldsymbol{Q}_i \vee \boldsymbol{Q}_j)(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) = \boldsymbol{Q}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) \vee \boldsymbol{Q}_j(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m).$$

В узагальненому на довільну кількість векторів це правило виглядатиме як

$$\left(\bigvee_{i=1}^{s} \boldsymbol{Q}_i\right)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m) = \bigvee_{i=1}^{s} \boldsymbol{Q}_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m)\,.$$

Розглянемо тепер поле логічних скалярів, що є множиною $\boldsymbol{n}$-місних предикатів $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{i_n})$, де $\boldsymbol{i}_t \neq \boldsymbol{i}_s$, $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{n}}$. Причому множина індексів $\{\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n\}$ є підмножиною множини індексів $\{\mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{m}\}$. В зв'язку з тим, що всі простори $\boldsymbol{m}$-місних предикатів, аргументами предикатів скалярного поля для яких є усілякі підмножини $\{\boldsymbol{x}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{i_n}\}$

множини $\{x_1, \ldots, x_m\}$, улаштовані однаково з точки зору операції добутку вектору на скаляр, будемо вважати, що предикати-скаляри задані на множині перших n елементів множини $\{x_1, \ldots, x_m\}$, тобто є n-місними предикатами $P(x_1, \ldots, x_n)$. Операція добутку вектора на скаляр у предикатних просторах буде виконуватися за наступним правилом:

$$(P \wedge Q)(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) = P(x_1, \ldots, x_n) \wedge Q(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m).$$

Випадок, коли полем логічних скалярів є множина двомісних предикатів $Q(x, y)$, поданий на рис. 6.

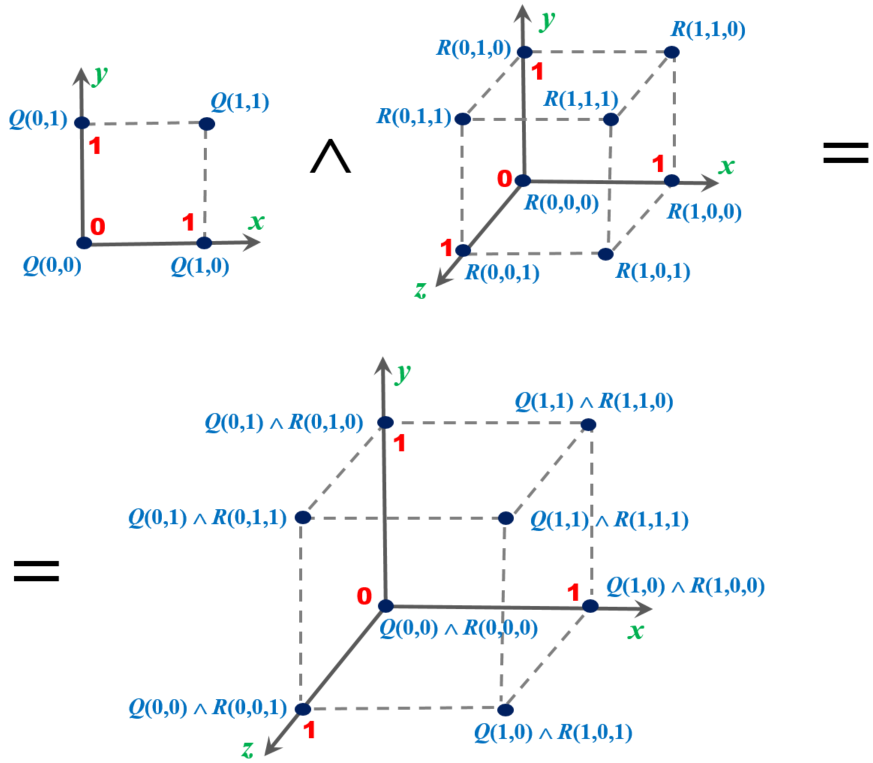


Рис. 6. Добуток логічного вектору, поданого тримісним предикатом *R*(*x*, *y*, *z*), і логічного скаляру, поданого двомісним предикатом *Q*(*x*, *y*)

Вирази вигляду

$$\alpha_1 l_1 \vee \alpha_2 l_2 \vee \ldots \vee \alpha_s l_s = \bigvee_{i=1}^{s} \alpha_i l_i,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ – логічні скаляри, називаються **<u>лінійними комбінаціями логічних векторів</u>** $l_1, l_2, \ldots, l_s \in L$. Якщо вектор $l \in L$ можна подати лінійною комбінацією [1]

$$l = \alpha_1 l_1 \vee \alpha_2 l_2 \vee \ldots \vee \alpha_s l_s = \bigvee_{i=1}^{s} \alpha_i l_i,$$

то говорять, що l **<u>залежить</u>** від $l_1, l_2, \ldots, l_s$ або l **<u>виражається</u>** через $l_1, l_2, \ldots, l_s$. Якщо вектор l неможливо виразити через $l_1, l_2, \ldots, l_s$, то говорять, що l **<u>не залежить</u>** від $l_1, l_2, \ldots, l_s$. Система векторів $l_1, l_2, \ldots, l_s$ називається **<u>незалежною</u>**, якщо кожний з векторів цієї системи не залежить від інших. У протилежному випадку скінченна система векторів називається **<u>залежною</u>**.

Розглянемо ***приклад*** логічного простору. В якості поля логічних скалярів візьмемо множину $\boldsymbol{P}$ всіх одномісних предикатів $\boldsymbol{P_i(x)}$, ($\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{0,3}}$), визначених на множині $\boldsymbol{K}$=**{0, 1}**. Множину таких предикатів задано таблицею 2. В якості простору логічних векторів візьмемо множину двомісних предикатів $\boldsymbol{Q_j(x,y)}$, $\boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{0,15}}$, визначених на декартовому добутку $\boldsymbol{K^2} = \{\boldsymbol{0,1}\}^{\boldsymbol{2}}$. Множина таких векторів, задана таблицею 3, записується у вигляді матриць

$$\boldsymbol{Q_j} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q_j(0,0)} & \boldsymbol{Q_j(1,0)} \\ \boldsymbol{Q_j(0,1)} & \boldsymbol{Q_j(1,1)} \end{pmatrix}.$$

Таблиця 3

Множина двомісних предикатів, заданих на декартовому добутку $\boldsymbol{K^2} = \{\boldsymbol{0,1}\}^{\boldsymbol{2}}$

x	y	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	Q_9	Q_{10}	Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}	Q_{14}	Q_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Відповідно до визначення операції диз'юнкції векторів та операції добутку вектору на скаляр, для векторів такого простору

$$\boldsymbol{Q_i \vee Q_j} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q_i(0,0) \vee Q_j(0,0)} & \boldsymbol{Q_i(1,0) \vee Q_j(1,0)} \\ \boldsymbol{Q_i(0,1) \vee Q_j(0,1)} & \boldsymbol{Q_i(1,1) \vee Q_j(1,1)} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{P_i\, Q_j} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_i(0) \wedge Q_j(0,0)} & \boldsymbol{P_i(1) \wedge Q_j(1,0)} \\ \boldsymbol{P_i(0) \wedge Q_j(0,1)} & \boldsymbol{P_i(1) \wedge Q_j(1,1)} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Нульові та одиничні елементи в цьому випадку мають вигляд: $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{P_0}$, $\vec{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{Q_0}$, $\boldsymbol{1} = \boldsymbol{P_3}$, $\vec{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{Q_{15}}$. Позначимо цей простір через $\boldsymbol{Q}$. В цьому просторі прикладом лінійної комбінації векторів $\boldsymbol{Q_1}$ і $\boldsymbol{Q_5}$ може бути лінійна комбінація

$$\boldsymbol{P_0\, Q_1 \vee P_2\, Q_5} = (\mathbf{0,0}) \wedge \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \vee (\mathbf{1,0}) \wedge \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0 \wedge 0} & \mathbf{0 \wedge 0} \\ \mathbf{0 \wedge 0} & \mathbf{0 \wedge 1} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \mathbf{1 \wedge 0} & \mathbf{0 \wedge 0} \\ \mathbf{1 \wedge 1} & \mathbf{0 \wedge 1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0 \vee 0} & \mathbf{0 \vee 0} \\ \mathbf{0 \vee 1} & \mathbf{0 \vee 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q_4},$$

або

$$\boldsymbol{P_2\, Q_1 \vee P_1\, Q_5} = (\mathbf{1,0}) \wedge \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \vee (\mathbf{0,1}) \wedge \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1 \wedge 0} & \mathbf{0 \wedge 0} \\ \mathbf{1 \wedge 0} & \mathbf{0 \wedge 1} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \mathbf{0 \wedge 0} & \mathbf{1 \wedge 0} \\ \mathbf{0 \wedge 1} & \mathbf{1 \wedge 1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0 \vee 0} & \mathbf{0 \vee 0} \\ \mathbf{0 \vee 0} & \mathbf{0 \vee 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q_1},$$

тощо.

3.1.1. *Задачі для самостійного опрацювання*

В якості поля логічних скалярів візьмемо множину $\boldsymbol{P}$ всіх одномісних предикатів $\boldsymbol{P_i(x)}$, ($\boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{0,3}}$), визначених на множині $\boldsymbol{K}$=**{0, 1}**. Множину таких предикатів задано таблицею 2. В якості поля логічних скалярів візьмемо множину тримісних предикатів $\boldsymbol{R_j(x, y, z)}$, $\boldsymbol{j} = \overline{\mathbf{0,255}}$, де $\boldsymbol{x, y, z} \in \mathbf{\{0, 1\}}$. Цю множину задано таблицею 1. В такому просторі добуток вектора на скаляр відбувається за схемою, яка представлена на рис. 7.

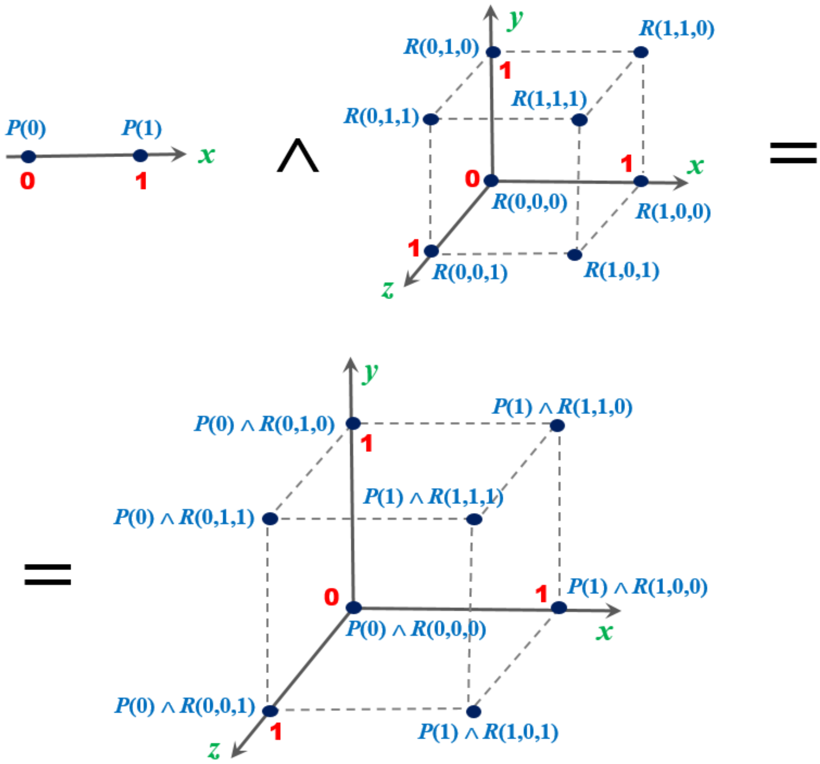


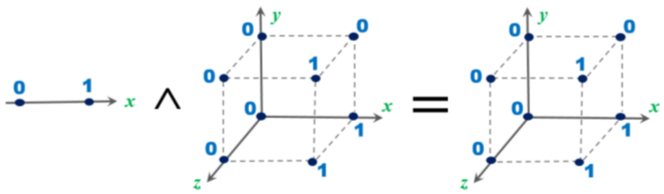
Рис. 7. Добуток логічного вектора, поданого тримісним предикатом *R*(*x, y, z*), і логічного скаляру, поданого одномісним предикатом *P*(*x*)

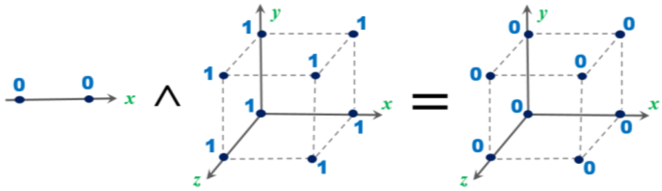
Обчислити графічно наступні лінійні комбінації векторів описаного предикатного логічного простору

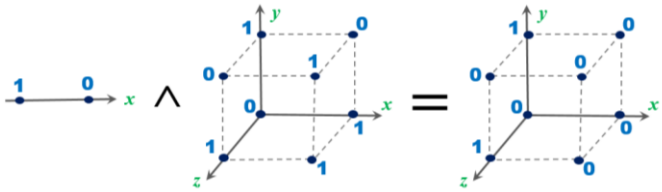
1. $\boldsymbol{P_1R_{13} \vee P_0R_{255} \vee P_2R_{109}}$.

Розв'язання. Обчислимо окремо кожний з диз'юнктів цієї лінійної комбінації.

$$\boldsymbol{P_1R_{13}} =$$

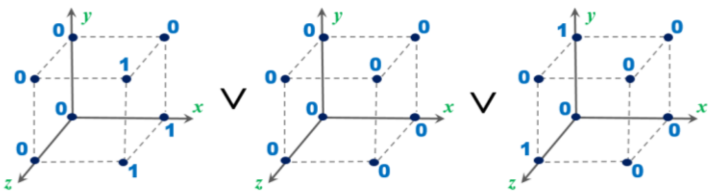


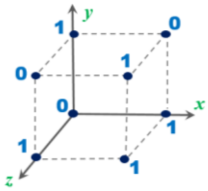
$P_0R_{255} =$ 

$P_2R_{109} =$ 

Тепер скористаємось узагальненням операції диз'юнкції на довільну кількість предикатів однакової арності.

$$P_1R_{13} \vee P_0R_{255} \vee P_2R_{109} =$$

$=$  $=$

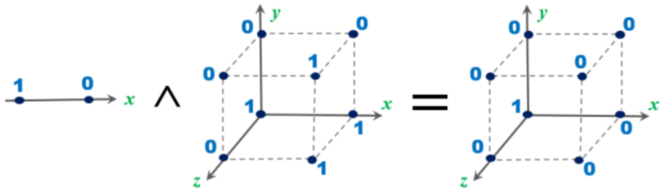
$=$  $= R_{109}$

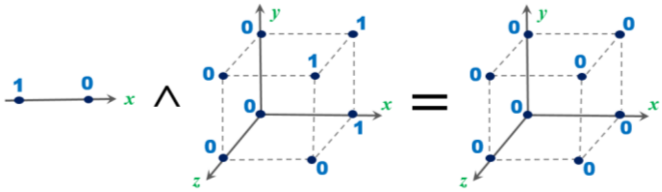
Для цього виразу неможливо застосувати виконання якихось тотожних перетворень. Тому для обчислення значення цієї лінійної комбінації існує лише наведений при розв'язанні порядок дій.

<u>ВІДПОВІДЬ</u>. $P_1R_{13} \vee P_0R_{255} \vee P_2R_{109} = R_{109}$.

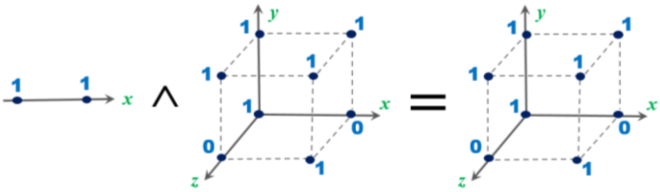
2. $P_2R_{141} \vee P_2R_{11} \vee P_3R_{183} \vee P_3R_{63}$.

<u>Розв'язання</u>. Обчислимо окремо кожний з диз'юнктів цієї лінійної комбінації.

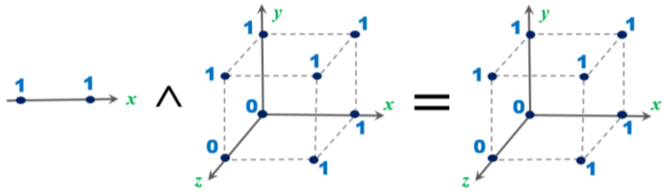
$P_2R_{141} =$ 

$P_2R_{11} =$ 

$P_3R_{183} =$

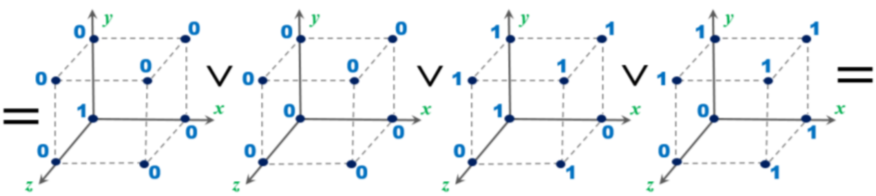


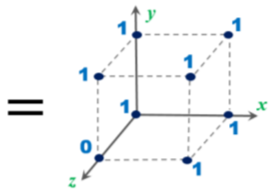
$P_3R_{63} =$



Тепер скористаємось узагальненням операції диз'юнкції на довільну кількість предикатів однакової арності.

$$P_2R_{141} \vee P_2R_{11} \vee P_3R_{183} \vee P_3R_{63} =$$





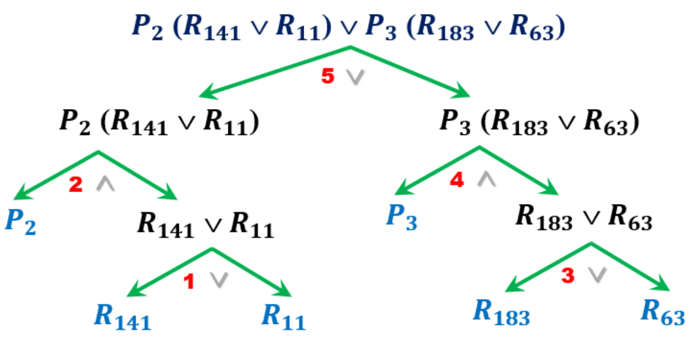
$= R_{191}$

Таким чином, для обчислення цієї лінійної комбінації *<u>графічним методом</u>* знадобилося виконання п'яти дій: чотири операції добутку вектора на скаляр і одна узагальнена операція диз'юнкції векторів.

Виконаємо тепер тотожні перетворення, скориставшись дистрибутивністю щодо диз'юнкції скалярів:

$$P_2R_{141} \vee P_2R_{11} \vee P_3R_{183} \vee P_3R_{63} = P_2\,(R_{141} \vee R_{11}) \vee P_3\,(R_{183} \vee R_{63}).$$

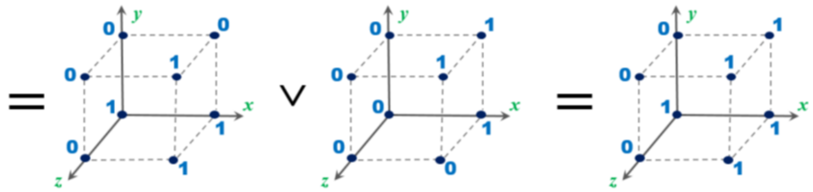
Побудуємо для отриманого перетвореного виразу семантичне дерево.



Обчислимо тепер цей вираз у відповідності з обраним порядком дій.

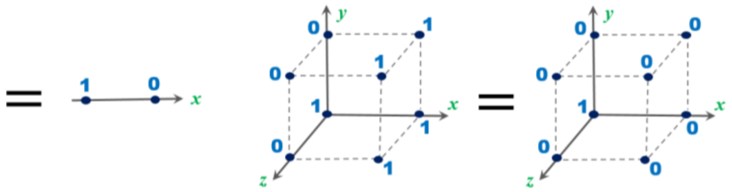
***Дія № 1*:**

$$R_{141} \vee R_{11} =$$



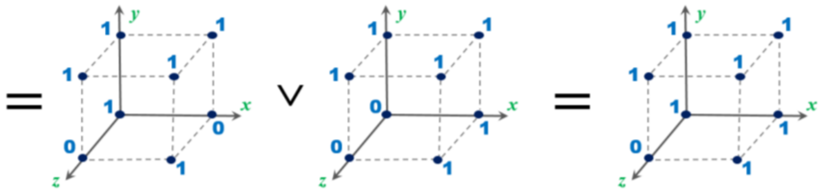
***Дія № 2*:**

$$P_2\,(R_{141} \vee R_{11}) =$$



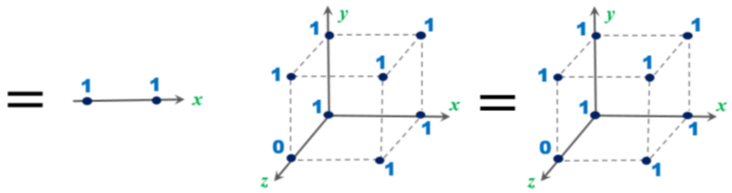
***Дія № 3*:**

$$R_{183} \vee R_{63} =$$



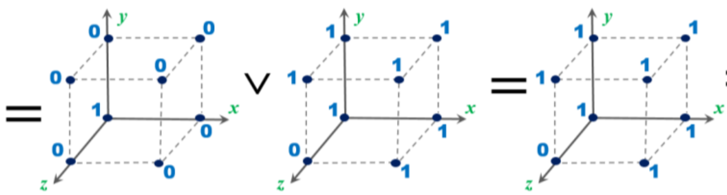
***Дія № 4*:**

$$P_3\,(R_{183} \vee R_{63}) =$$



***Дія № 5*:**

$$P_2\,(R_{141} \vee R_{11}) \vee P_3\,(R_{183} \vee R_{63}) =$$



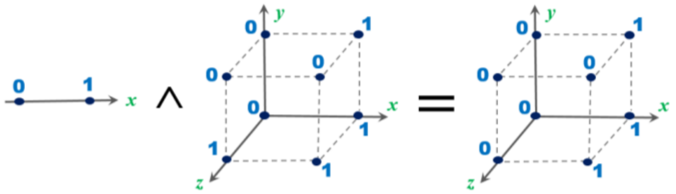
$$= R_{191}$$

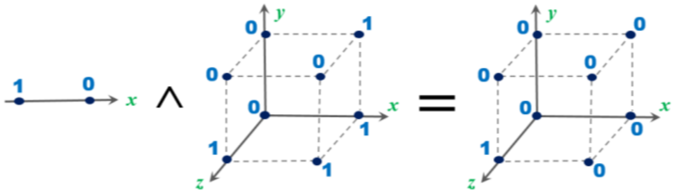
Як можна побачити, отримано той самий результат, що й за допомогою виключно графічного методу. При цьому <u>в даному прикладі</u> кількість дій, що підлягають виконанню при графічному та аналітично-графічному методах збігаються.

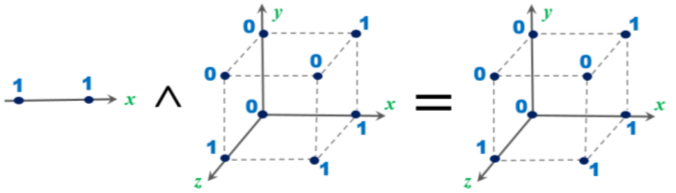
***<u>ВІДПОВІДЬ</u>*.** $P_2R_{141} \vee P_2R_{11} \vee P_3R_{183} \vee P_3R_{63} = R_{191}$.

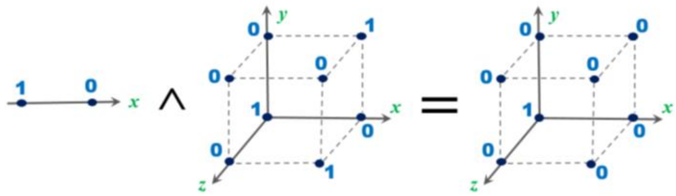
3. $P_1R_{78} \vee P_2R_{78} \vee P_3R_{134} \vee P_2R_{134}$.

<u>*Розв’язання*</u>. Обчислимо окремо кожний з диз’юнктів цієї лінійної комбінації.

$P_1R_{78} =$ 

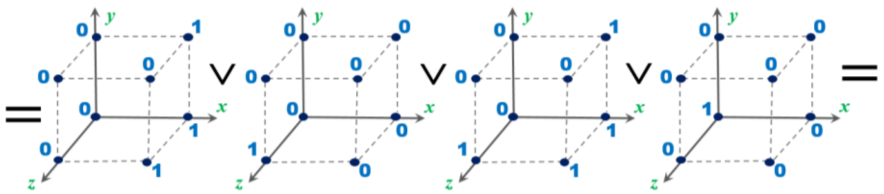
$P_2R_{78} =$ 

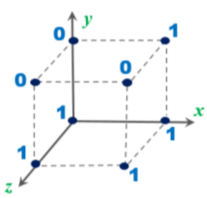
$P_3R_{78} =$ 

$P_2R_{134} =$ 

Тепер скористаємось узагальненням операції диз’юнкції на довільну кількість предикатів однакової арності.

$$P_1R_{78} \vee P_2R_{78} \vee P_3R_{78} \vee P_2R_{134} \quad =$$



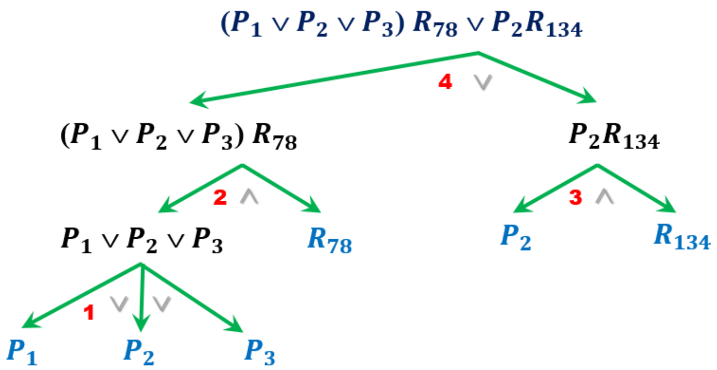
$=$  $= R_{206}$

Таким чином, для обчислення цієї лінійної комбінації <u>*графічним методом*</u> знадобилося виконання п’яти дій: чотири операції добутку вектора на скаляр і одна узагальнена операція диз’юнкції векторів, як і в попередньому прикладі.

Виконаємо тепер тотожні перетворення, скориставшись дистрибутивністю щодо диз’юнкції векторів:

$$P_1R_{78} \vee P_2R_{78} \vee P_3R_{134} \vee P_2R_{134} = (P_1 \vee P_2 \vee P_3)\, R_{78} \vee P_2R_{134}.$$

Побудуємо для отриманого перетвореного виразу семантичне дерево.



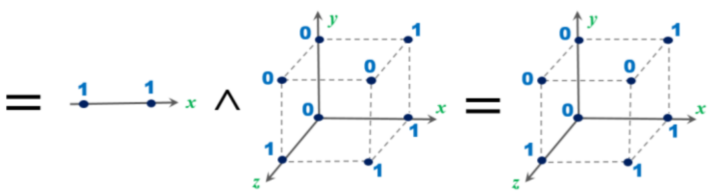
Обчислимо тепер цей вираз у відповідності з обраним порядком дій. При цьому слід зазначити, що перша дія є узагальненою операцією диз'юнкції довільної кількості логічних скалярів.

***Дія № 1*:**

$$P_1 \vee P_2 \vee P_3 =$$

***Дія № 2*:**

$$(P_1 \vee P_2 \vee P_3)\, R_{78} =$$

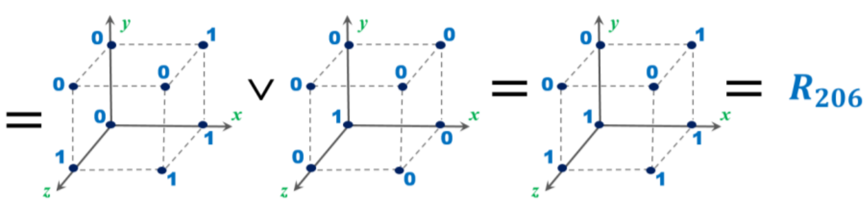


***Дія № 3*:**

Результат цієї дії було обчислено при попередніх розрахунках в цьому прикладі. Тому можна відразу обчислювати значення всього виразу.

***Дія № 4*:**

$$(P_1 \vee P_2 \vee P_3)\, R_{78} \vee P_2 R_{134} =$$



тобто, отримано той самий результат, що й за допомогою виключно графічного методу. При цьому <u>в даному прикладі</u> кількість дій, що підлягають виконанню при обчисленні перетвореної формули зменшилася порівняно з графічним методом.

<u>ВІДПОВІДЬ</u>. $P_1 R_{78} \vee P_2 R_{78} \vee P_3 R_{134} \vee P_2 R_{134} = R_{206}$.

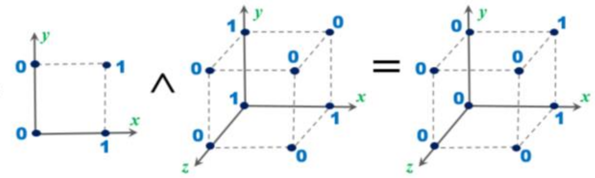
Тепер в якості поля логічних скалярів візьмемо множину $\boldsymbol{Q}$ всіх двомісних предикатів $\boldsymbol{Q_i}(\boldsymbol{x})$, ($\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{15}}$), де $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\}$. Множину таких предикатів задано таблицею 3. В якості поля логічних скалярів, як і в попередньому блоці прикладів, візьмемо множину тримісних предикатів $\boldsymbol{R_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{255}}$, де $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\}$. Цю множину задано таблицею 1. В такому просторі добуток вектора на скаляр відбувається за схемою, поданою на рис. 6.

Обчислити графічно наступні лінійні комбінації векторів описаного предикатного логічного простору

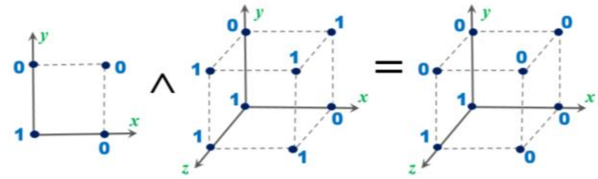
1. $\boldsymbol{Q_3 R_{168} \vee Q_8 R_{215} \vee Q_7 R_{215} \vee Q_3 R_{23}}$.

Розв'язання. Обчислимо окремо кожний з диз'юнктів цієї лінійної комбінації.

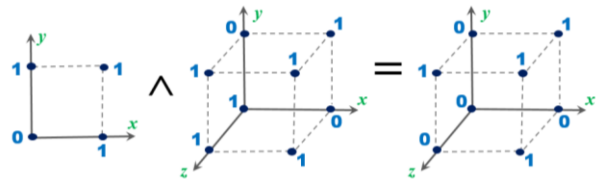
$\boldsymbol{Q_3 R_{168}} =$



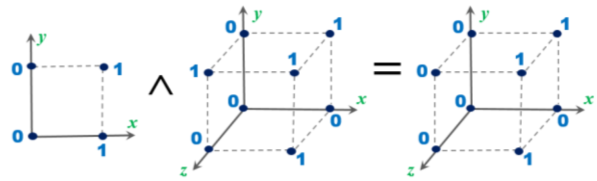
$\boldsymbol{Q_8 R_{215}} =$



$\boldsymbol{Q_7 R_{215}} =$

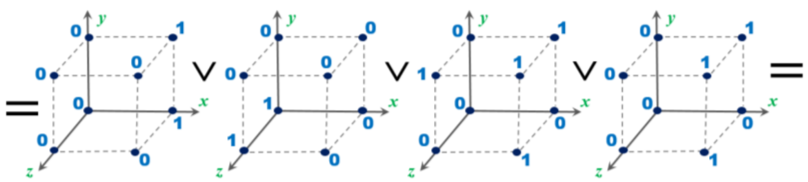


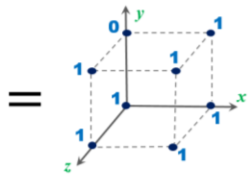
$\boldsymbol{Q_3 R_{23}} =$



Тепер скористаємось узагальненням операції диз'юнкції на довільну кількість предикатів однакової арності.

$$\boldsymbol{Q_3 R_{168} \vee Q_8 R_{215} \vee Q_7 R_{215} \vee Q_3 R_{23}} =$$





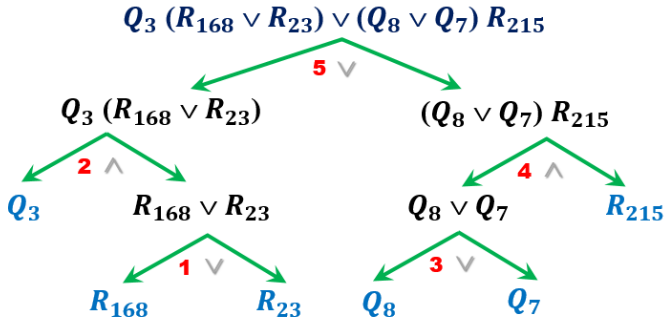
$= \boldsymbol{R_{223}}$

Таким чином, для обчислення цієї лінійної комбінації *графічним методом* знадобилося виконання п'яти дій: чотири операції добутку вектора на скаляр і одна узагальнена операція диз'юнкції векторів.

Виконаємо тепер тотожні перетворення, скориставшись дистрибутивністю щодо диз'юнкції векторів та дистрибутивністю щодо диз'юнкції скалярів:

$$\boldsymbol{Q_3 R_{168} \vee Q_8 R_{215} \vee Q_7 R_{215} \vee Q_3 R_{23} = Q_3\,(R_{168} \vee R_{23}) \vee (Q_8 \vee Q_7)\,R_{215}}.$$

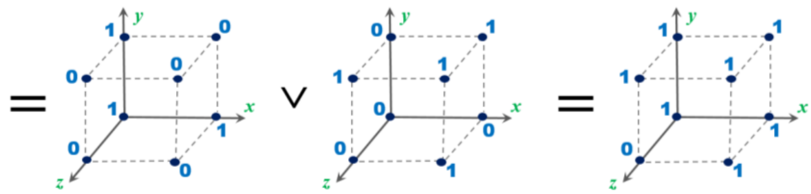
Побудуємо для отриманого перетвореного виразу семантичне дерево.



Обчислимо тепер цей вираз у відповідності з обраним порядком дій.

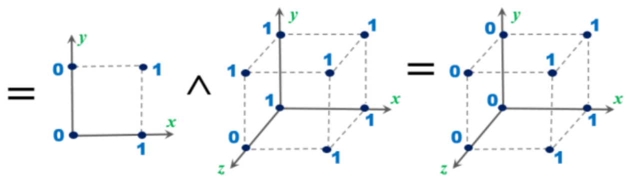
***Дія № 1*:**

$$\boldsymbol{R_{168} \vee R_{23}} =$$



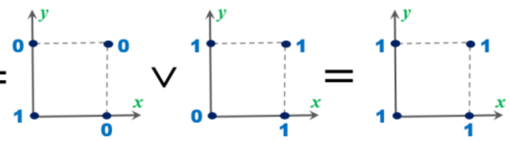
***Дія № 2*:**

$$\boldsymbol{Q_3\,(R_{168} \vee R_{23})} =$$



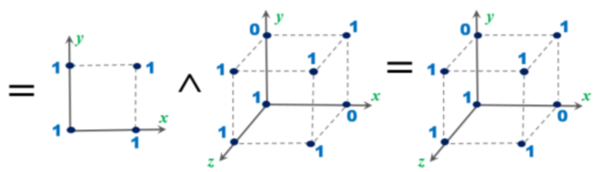
***Дія № 3*:**

$\boldsymbol{Q_8 \vee Q_7} =$



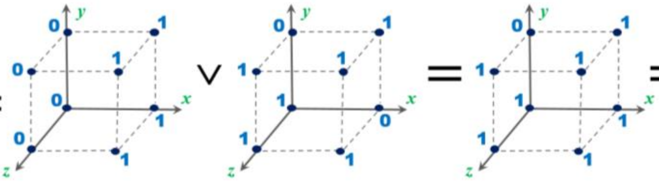
***Дія № 4*:**

$$\boldsymbol{(Q_8 \vee Q_7)\,R_{215}} =$$



***Дія № 5*:**

$$Q_3\,(R_{168} \vee R_{23}) \vee (Q_8 \vee Q_7)\,R_{215} \;=$$

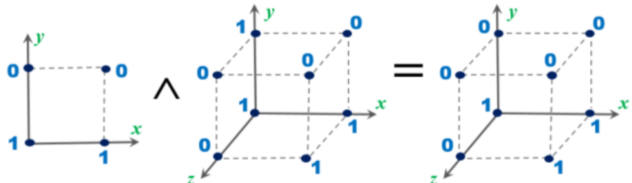
$=$  $= R_{223}$

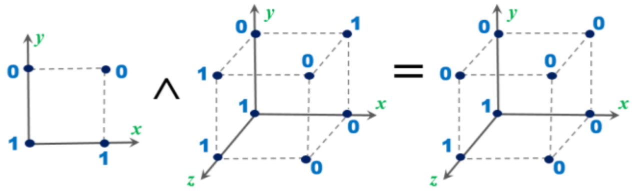
Як можна побачити, отримано той самий результат, що й за допомогою виключно графічного методу. При цьому <u>в даному прикладі</u> кількість дій, що підлягають виконанню при графічному та аналітично-графічному методах збігаються.

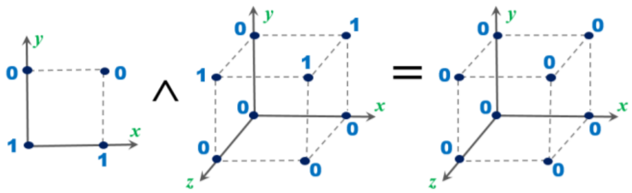
<u>ВІДПОВІДЬ</u>. $Q_3R_{168} \vee Q_8R_{215} \vee Q_7R_{215} \vee Q_3R_{23} = R_{223}$.

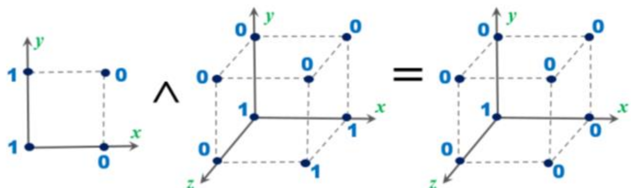
2. $Q_{10}R_{172} \vee Q_{10}R_{210} \vee Q_{10}R_{19} \vee Q_{12}R_{140}$.

<u>Розв'язання</u>. Обчислимо окремо кожний з диз'юнктів цієї лінійної комбінації.

$Q_{10}R_{172} =$ 

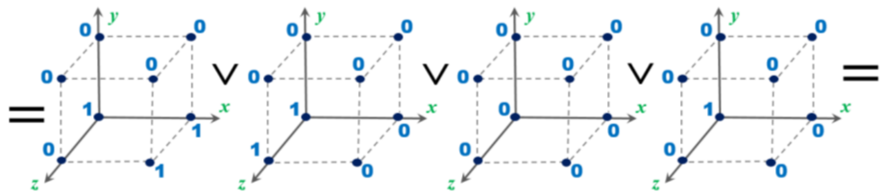
$Q_{10}R_{210} =$ 

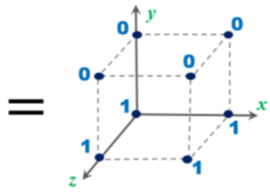
$Q_{10}R_{19} =$ 

$Q_{12}R_{140} =$ 

Тепер скористаємось узагальненням операції диз'юнкції на довільну кількість предикатів однакової арності.

$$Q_{10}R_{172} \vee Q_{10}R_{210} \vee Q_{10}R_{19} \vee Q_{12}R_{140} =$$





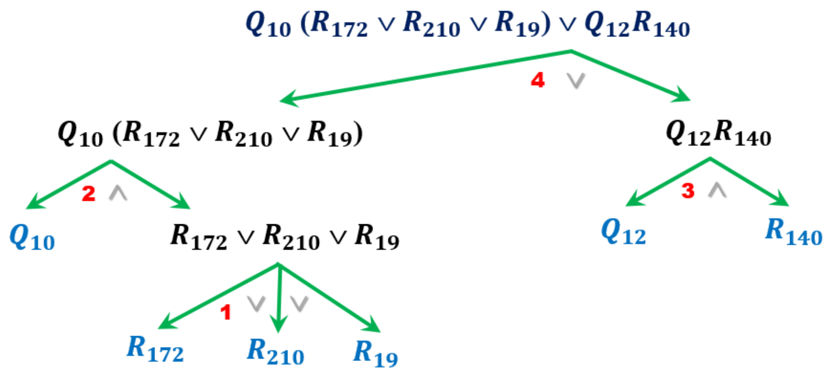
$$= R_{204}$$

Таким чином, для обчислення цієї лінійної комбінації *графічним методом* знадобилося виконання п’яти дій: чотири операції добутку вектора на скаляр і одна узагальнена операція диз’юнкції векторів.

Виконаємо тепер тотожні перетворення, скориставшись дистрибутивністю щодо диз’юнкції векторів:

$$Q_{10}R_{172} \vee Q_{10}R_{210} \vee Q_{10}R_{19} \vee Q_{12}R_{140} = Q_{10}\,(R_{172} \vee R_{210} \vee R_{19}) \vee Q_{12}R_{140}.$$

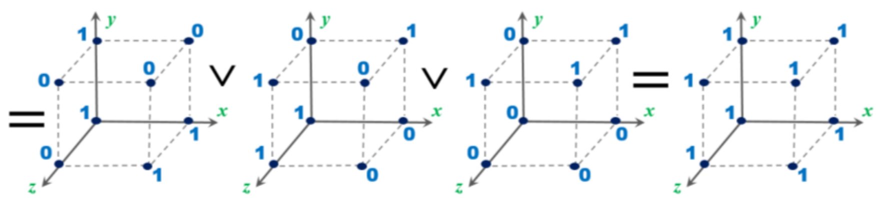
Побудуємо для отриманого перетвореного виразу семантичне дерево.



Обчислимо тепер цей вираз у відповідності з обраним порядком дій. При цьому слід зазначити, що перша дія є узагальненою операцією диз’юнкції довільної кількості логічних векторів.

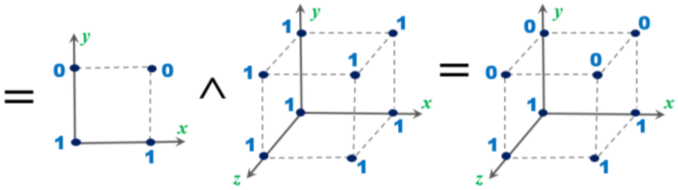
***Дія № 1*:**

$$R_{172} \vee R_{210} \vee R_{19} =$$



Дія № 2:

$$Q_{10}\,(R_{172} \vee R_{210} \vee R_{19}) =$$

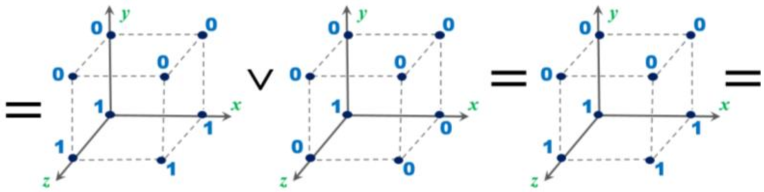


Дія № 3:

Результат цієї дії було обчислено при попередніх розрахунках в цьому прикладі. Тому можна відразу обчислювати значення всього виразу.

Дія № 4:

$$Q_{10}\,(R_{172} \vee R_{210} \vee R_{19}) \vee Q_{12}R_{140} =$$



R_{204}

тобто, отримано той самий результат, що й за допомогою виключно графічного методу. При цьому в даному прикладі кількість дій, що підлягають виконанню при обчисленні перетвореної формули зменшилася порівняно з графічним методом.

ВІДПОВІДЬ. $Q_{10}R_{172} \vee Q_{10}R_{210} \vee Q_{10}R_{19} \vee Q_{12}R_{140} = R_{204}$.

Наведені приклади показують, що для кожного виразу слід оцінювати кількість дій до виконання як без проведення тотожних перетворень формули, так і після проведенням таких перетворень із застосуванням відомих законів та правил. Щоразу обирається той алгоритм обчислення, який містить меншу кількість операцій.

Тепер в якості поля логічних скалярів візьмемо множину P всіх одномісних предикатів $P_i(x)$, ($i = \overline{0,3}$), визначених на множині K=$\{0, 1\}$. Множину таких предикатів задано таблицею 2. В якості поля логічних скалярів візьмемо множину двомісних предикатів $Q_j(x, y)$, $j = \overline{0,15}$, де $x, y \in \{0, 1\}$. Цю множину задано таблицею 3. В такому просторі диз'юнкція векторів відбувається за правилом (11), а добуток вектора на скаляр – за правилом (12).

Обчислити аналітично наступні лінійні комбінації векторів описаного предикатного логічного простору

1. $P_2Q_6 \vee P_1Q_6 \vee P_3Q_8 \vee P_0Q_8$.

Розв'язання. Обчислимо цю лінійну комбінацію без попереднього виконання тотожних перетворень:

$$P_2Q_6 \vee P_1Q_6 \vee P_3Q_8 \vee P_0Q_8 =$$

$$= (1, 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (0, 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (1, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vee (0, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q_{14}.$$

Обчислимо тепер цю лінійну комбінацію, виконавши попередньо тотожні перетворення.

$$P_2Q_6 \vee P_1Q_6 \vee P_3Q_8 \vee P_0Q_8 =$$

(*за законом дистрибутивності щодо диз'юнкції скалярів*)

$$= (P_2 \vee P_1)\, Q_6 \vee (P_3 \vee P_0)\, Q_8 =$$

$$= ((1, 0) \vee (0, 1))\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee ((1, 1) \vee (0, 0))\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (1, 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (1, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

(*за законом дистрибутивності щодо диз'юнкції векторів*)

$$= (1, 1)\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (1, 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q_{14}.$$

ВІДПОВІДЬ. $P_2Q_6 \vee P_1Q_6 \vee P_3Q_8 \vee P_0Q_8 = Q_{14}$.

2. $P_1Q_{13} \vee P_2Q_9 \vee P_1Q_{11} \vee P_1Q_9 \vee P_2Q_{13}$.

Розв'язання. Обчислимо цю лінійну комбінацію без попереднього виконання тотожних перетворень:

$$P_1Q_{13} \vee P_2Q_9 \vee P_1Q_{11} \vee P_1Q_9 \vee P_2Q_{13} =$$

$$= (0, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vee (1, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vee (0, 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vee (0, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vee (1, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = Q_{15}.$$

Обчислимо тепер цю лінійну комбінацію, виконавши попередньо тотожні перетворення.

$$P_1Q_{13} \vee P_2Q_9 \vee P_1Q_{11} \vee P_1Q_9 \vee P_2Q_{13} =$$

(*за законом дистрибутивності щодо диз'юнкції скалярів*)

$$= (P_1 \vee P_2)\, Q_{13} \vee (P_2 \vee P_1)\, Q_9 \vee P_1Q_{11} =$$

$$= ((0, 1) \vee (1, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vee (((1, 0) \vee (0, 1))\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vee (0, 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (1, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vee (1, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vee (0, 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

(*за законом дистрибутивності щодо диз'юнкції векторів*)

$$=(1, 1)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \vee (0, 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (1, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vee (0, 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = Q_{15}.$$

ВІДПОВІДЬ. $P_1Q_{13} \vee P_2Q_9 \vee P_1Q_{11} \vee P_1Q_9 \vee P_2Q_{13} = Q_{15}$.

Отже, розглянуті в цьому розділі приклади дозволяють висунути припущення про дуальну природу повної множини скінченних предикатів однакової арності. З одного боку, будь-яка повна множина скінченних предикатів деякої арності може служити скалярним полем для векторного простору предикатів більшої арності. Але, з іншого боку, та сама повна множина скінченних предикатів може в той же час виступати як векторний простір для скалярного поля предикатів меншої арності. В такий спосіб можна ввести порядкову ієрархію множин скінченних предикатів за їх арністю з точки зору їх векторної та скалярної ролі в різних просторах. Це тягне за собою також і ієрархію предикатних просторів. З цього випливає, що множина всіх можливих предикатних порядкових просторів може бути упорядкованою.

3.1.2. *Контрольні запитання*

1. За яких умов довільна непуста множина елементів ***L*** називається векторним логічним простором над деяким логічним полем скалярів ***G***?
2. Які операції було введено для елементів логічного простору?
3. Яким законам задовольняють операції диз'юнкції та добутку вектора на скаляр?
4. Наведіть графічні схеми виконання операції добутку вектора на скаляр в різних предикатних просторах.
5. За якими правилами відбувається аналітичне виконання операцій диз'юнкції векторів та добутку вектора на скаляр?
6. В який спосіб будується предикатний логічний простір або простір ***m***-місних предикатів над скалярним полем ***n***-місних предикатів?
7. Які вирази називаються лінійними комбінаціями логічних векторів?
8. Наведіть приклад предикатного логічного простору.
9. За якими ознаками можна проводити упорядкування різних предикатних логічних просторів?

3.1.3. *Контрольні завдання*

А) ***Обчислити аналітично-графічним методом наступні лінійні комбінації векторів*:**

1) $P_1R_{216} \vee P_2R_{14} \vee P_1R_{138} \vee P_2R_{93}$;

2) $P_3R_{201} \vee P_2R_{114} \vee P_1R_{201} \vee P_3R_{114}$;

3) $P_0R_{18} \vee P_1R_{18} \vee P_3R_{18} \vee P_2R_{220} \vee P_3R_{220}$;

4) $P_1R_{105} \vee P_1R_{108} \vee P_1R_{200} \vee P_2R_{71} \vee P_2R_{12}$;

5) $P_1R_{13} \vee P_1R_{205} \vee P_1R_{90} \vee P_2R_{90} \vee P_3R_{90}$;

6) $Q_{13}R_{21} \vee Q_8R_{65} \vee Q_1R_{120} \vee Q_5R_{202}$;

7) $Q_{14}R_{117} \vee Q_3R_{208} \vee Q_7R_{117} \vee Q_2R_{208}$;

8) $Q_{12}R_{181} \vee Q_5R_{181} \vee Q_6R_{135} \vee Q_9R_{135} \vee Q_{11}R_{135}$;

9) $Q_{13}R_{175} \vee Q_{13}R_{200} \vee Q_4R_{250} \vee Q_4R_{108} \vee Q_4R_{92}$;

10) $Q_{10}R_{150} \vee Q_7R_{150} \vee Q_0R_{150} \vee Q_7R_{211} \vee Q_7R_2$.

Б) ***Обчислити аналітично наступні лінійні комбінації векторів із застосуванням тотожних перетворень*:**

1) $P_1Q_{13} \vee P_2Q_{10} \vee P_3Q_1 \vee P_0Q_2$;

2) $P_1Q_3 \vee P_2Q_3 \vee P_1Q_4 \vee P_3Q_4$;

3) $P_2Q_8 \vee P_1Q_5 \vee P_3Q_8 \vee P_2Q_5$;

4) $P_3Q_2 \vee P_3Q_7 \vee P_3Q_9 \vee P_1Q_9 \vee P_1Q_{11}$;

5) $P_1Q_4 \vee P_2Q_4 \vee P_0Q_4 \vee P_3Q_{12} \vee P_2Q_{12}$;

6) $P_2Q_5 \vee P_1Q_5 \vee P_1Q_{13} \vee P_2Q_{13} \vee P_0Q_{13}$;

7) $P_1Q_{10} \vee P_1Q_2 \vee P_2Q_{10} \vee P_2Q_2 \vee P_3Q_6$;

8) $P_1Q_{11} \vee P_2Q_3 \vee P_3Q_3 \vee P_2Q_{14} \vee P_3Q_{14}$;

9) $P_1Q_3 \vee P_0Q_3 \vee P_0Q_9 \vee P_2Q_9 \vee P_1Q_{12} \vee P_2Q_{12}$;

10) $P_2Q_6 \vee P_3Q_6 \vee P_1Q_7 \vee P_3Q_7 \vee P_2Q_1 \vee P_1Q_1$.

3.2. Базис логічного простору. Координатне подання векторів логічного простору. Операції кон'юнкції, згортки та заперечення векторів досконалого логічного простору

Мета занять з даної теми – закріплення теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок аналітичного та графічного виконання різних операцій над предикатними логічними векторами, обчислення формул, що містять предикатні вектори та предикатні скаляри.

Нехай $\boldsymbol{M}$– множина, що складається з векторів логічного простору $\boldsymbol{L}$. Система векторів $\boldsymbol{l_1, l_2, \ldots}$ цієї множини називається **системою утворюючих** для $\boldsymbol{M}$, якщо будь-який вектор із $\boldsymbol{M}$ може бути виражений через якусь скінченну кількість векторів цієї системи. Логічний простір $\boldsymbol{L}$ називається **скінченновимірним**, якщо в ньому існує скінченна система утворюючих. Будь-який простір, що містить скінченну кількість векторів, є скінченновимірним. Мінімальна (за кількістю, з яких вона складається) система утворюючих логічного простору називається **базисом** цього простору. Нехай $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_p}$ – базис логічного простору $\boldsymbol{L}$. Тоді подання логічного вектора $\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}$ у вигляді лінійної комбінації

$$\boldsymbol{l = \xi_1 a_1 \vee \xi_2 a_2 \vee \ldots \vee \xi_p a_p}$$

називається **розкладанням вектора *l* за базисом** $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_p}$, а логічні скаляри $\boldsymbol{\xi_1}$, $\boldsymbol{\xi_2}$, …, $\boldsymbol{\xi_p}$ називаються **координатами вектора** $\boldsymbol{l}$ у цьому базисі. Для простору $\boldsymbol{Q}$ базисом є системи векторів $\boldsymbol{\{Q_6, Q_9\}}$ і $\boldsymbol{\{Q_5, Q_{10}\}}$ [20].

Приклад 10. Розкласти вектор $\boldsymbol{Q_{14}}$ за базисом $\boldsymbol{\{Q_6, Q_9\}}$.

Розв'язання. Нехай координатами вектора $\boldsymbol{Q_{14}}$ в базисі $\boldsymbol{\{Q_6, Q_9\}}$ є $\boldsymbol{\xi_1 = (\xi_1(0), \xi_1(1))}$ і $\boldsymbol{\xi_2 = (\xi_2(0), \xi_2(1))}$. Тоді

$$\boldsymbol{Q_{14} = (\xi_1(0), \xi_1(1)) \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (\xi_2(0), \xi_2(1)) \wedge \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =}$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_1(0) \wedge 0 & \xi_1(1) \wedge 1 \\ \xi_1(0) \wedge 1 & \xi_1(1) \wedge 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \xi_2(0) \wedge 1 & \xi_2(1) \wedge 0 \\ \xi_2(0) \wedge 0 & \xi_2(1) \wedge 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \xi_1(1) \wedge 1 \\ \xi_1(0) \wedge 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \xi_2(0) \wedge 1 & 0 \\ 0 & \xi_2(1) \wedge 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \vee \xi_2(0) \cdot 1 & \xi_1(1) \cdot 1 \vee 0 \\ \xi_1(0) \cdot 1 \vee 0 & 0 \vee \xi_2(1) \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_2(0) \wedge 1 & \xi_1(1) \wedge 1 \\ \xi_1(0) \wedge 1 & \xi_2(1) \wedge 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає система рівнянь:

$$\begin{cases} \xi_1(0) \wedge 1 = 1, \\ \xi_1(1) \wedge 1 = 1, \\ \xi_2(0) \wedge 1 = 1, \\ \xi_2(1) \wedge 1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1(0) = 1, \\ \xi_1(1) = 1, \\ \xi_2(0) = 1, \\ \xi_2(1) = 0. \end{cases}$$

Це означає, що

$$\xi_1 = (\xi_1(0), \xi_1(1)) = (1, 1) = P_3,$$
$$\xi_2 = (\xi_2(0), \xi_2(1)) = (1, 0) = P_2.$$

Таким чином, маємо

$$Q_{14} = (1, 1) \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (1, 0) \wedge \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_3\, Q_6 \vee P_2\, Q_9 .$$

Відповідь. $Q_{14} = P_3\, Q_6 \vee P_2\, Q_9$.

В розглянутому прикладі P_3 і P_2 є координатами вектора Q_{14} у базисі $\{Q_6, Q_9\}$. Координати кожного вектора l логічного простору L щодо заданого базису $a_1, a_2, \ldots, a_p$ визначають цей вектор однозначно. Зворотне, загалом кажучи, є невірним. Не в будь-якому логічному просторі розкладання вектора за базисом є єдиним. Логічний простір, у якому немає єдиного розкладання кожного його вектора за базисом, називається **недосконалим**. Якщо ж одиничність розкладання має місце для кожного вектора, то простір називається **досконалим** [21]. У досконалому логічному просторі нульовий вектор (і лише він) має всі координати, що дорівнюють нулю.

Теорема 3. *Формулювання*. При диз'юнкції двох будь-яких векторів будь-якого логічного простору для їхніх координат (щодо заданого базису простору L) виконується диз'юнкція; при добутку довільного вектора на будь-який скаляр α для всіх координат цього вектора виконується їх кон'юнкція з α.

У недосконалому логічному просторі за описаним вище алгоритмом виходить якийсь один із можливих наборів координат вектора $l \vee g$ (відповідно, $\alpha\, l$).

Будь-який базис логічного простору L, вектори якого беруться в певній послідовності, називається **координатною системою** в L. Нехай $l = \xi_1 a_1 \vee \xi_2 a_2 \vee \ldots \vee \xi_p a_p$. Логічні скаляри $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ називаються **координатами вектора *l* у системі координат** $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$. Стовпець $(\xi_1\ \xi_2\ \ldots\ \xi_p)^T$, складений з координат вектора l, узятих у певному порядку, називається **координатним стовпцем** і позначається як $[l]$. Отже, якщо в просторі обрано певну координатну систему, то кожному вектору відповідає координатний стовпець. Зворотно: для кожного стовпця довжини $\boldsymbol{p}$ формула $\boldsymbol{l} = \xi_1 \boldsymbol{a_1} \vee \xi_2 \boldsymbol{a_2} \vee \ldots \vee \xi_p \boldsymbol{a_p}$ задає певний вектор $\boldsymbol{l}$, що має цей стовпець своїм координатним стовпцем.

Нехай вектор $\boldsymbol{l}$ має координатний стовпець $(\xi_1\ \xi_2\ \ldots\ \xi_p)^T$, а вектор $\boldsymbol{g}$ – координатний стовпець $(\eta_1\ \eta_2\ \ldots\ \eta_p)^T$ у системі координат $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_p}\}$, тобто

$$\boldsymbol{l} = \xi_1 \boldsymbol{a_1} \vee \xi_2 \boldsymbol{a_2} \vee \ldots \vee \xi_p \boldsymbol{a_p},$$

$$\boldsymbol{g} = \eta_1 \boldsymbol{a_1} \vee \eta_2 \boldsymbol{a_2} \vee \ldots \vee \eta_p \boldsymbol{a_p}.$$

Тоді операції добутку вектора на скаляр і диз'юнкції векторів можна описати, використовуючи дії зі стовпцями [16, 17]. Маємо:

$$\boldsymbol{\alpha\, l} = (\alpha\, \xi_1)\boldsymbol{a_1} \vee (\alpha\, \xi_2)\boldsymbol{a_2} \vee \ldots \vee (\alpha\, \xi_p)\,\boldsymbol{a_p} = \bigvee_{i=1}^{p} (\alpha\, \xi_i)\boldsymbol{a_i}\,, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{l} \vee \mathbf{g} = (\xi_1 \vee \eta_1)\boldsymbol{a_1} \vee (\xi_2 \vee \eta_2)\boldsymbol{a_2} \vee \ldots \vee (\xi_p \vee \eta_p)\,\boldsymbol{a_p} = \bigvee_{i=1}^{p} (\xi_i \vee \eta_i)\boldsymbol{a_i}\,. \tag{14}$$

Скориставшись правилами дій зі стовпцями

$$\alpha\ (\xi_1\ \xi_2\ \ldots\ \xi_p)^T = (\alpha\xi_1\ \ \alpha\xi_2\ \ldots\ \alpha\xi_p)^T,$$

$$(\xi_1\ \xi_2\ \ldots\ \xi_p)^T \vee (\eta_1\ \eta_2\ \ldots\ \eta_p)^T = (\xi_1 \vee \eta_1\quad \xi_2 \vee \eta_2\ \ldots\ \xi_p \vee \eta_p)^T,$$

запишемо рівності (13) і (14) у наступному вигляді:

$$[\alpha\, \boldsymbol{l}] = \alpha\ [\boldsymbol{l}],$$

$$[\boldsymbol{l} \vee \boldsymbol{g}] = [\boldsymbol{l}] \vee [\boldsymbol{g}].$$

Отже, координатний стовпець диз'юнкції векторів дорівнює диз'юнкції координатних стовпців цих векторів, а координатний стовпець добутку скаляра на вектор дорівнює добутку цього скаляра на координатний стовпець вектора.

Нехай задано досконалий логічний простір $\boldsymbol{L}$ розмірності $\boldsymbol{p}$ над логічним скалярним полем $\boldsymbol{G}$. Позначимо через $\boldsymbol{L_p}$ простір рядків довжини $\boldsymbol{p}$ з елементами із $\boldsymbol{G}$. Оберемо в $\boldsymbol{L}$ певну координатну систему та поставимо кожному вектору з $\boldsymbol{L}$ у відповідність його координатний стовпець. Ця відповідність є ізоморфізмом між $\boldsymbol{L}$ і $\boldsymbol{L_p}$. Отже, незалежні вектори мають незалежні координатні стовпці та кожна залежність між заданими векторами має місце також і між їхніми координатними стовпцями.

Розглянемо ***приклад***. Нехай $\boldsymbol{L}$ – предикатний логічний простір $\boldsymbol{Q}$, заданий над скалярним полем $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{L_2}$ – простір рядків довжини $\mathbf{2}$ із елементами із $\boldsymbol{G}$, а $\{\boldsymbol{Q_6}, \boldsymbol{Q_9}\}$ – координатна система в $\boldsymbol{Q}$. Кожному вектору $\boldsymbol{Q_j(x, y)}$, $\boldsymbol{j} = \overline{\mathbf{0, 15}}$ із $\boldsymbol{Q}$ поставимо у відповідність його координатний стовпець із $\boldsymbol{L_2}$. Наприклад, вектору $\boldsymbol{Q_{14}}$, як було показано в прикладі 10, відповідає координатний стовпець $(\boldsymbol{P_3}, \boldsymbol{P_2})^T$. В аналогічний спосіб можна показати, що вектору $\boldsymbol{Q_2}$ відповідає координатний стовпець $(\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_0})^T$, вектору $\boldsymbol{Q_{13}}$ – координатний стовпець $(\boldsymbol{P_2}, \boldsymbol{P_3})^T$ тощо. Ця відповідність є ізоморфізмом між $\boldsymbol{Q}$ і $\boldsymbol{L_2}$.

У тому самому логічному просторі $\boldsymbol{L}$ існують різні координатні системи. Визначимо, як зміняться координати вектора, якщо від однієї координатної системи перейти до іншої.

Оберемо в $\boldsymbol{L}$ якісь дві координатні системи $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_p}\}$ та $\{\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \ldots, \boldsymbol{a'_p}\}$. В силу того, що вектори $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_p}$ є базисом простору $\boldsymbol{L}$, то $\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \ldots, \boldsymbol{a'_p}$ мають виражатися через $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_p}$. Нехай ці вирази будуть:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a'_1} = \boldsymbol{\alpha_{11} a_1} \vee \ldots \vee \boldsymbol{\alpha_{p1} a_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{a'_p} = \boldsymbol{\alpha_{1p} a_1} \vee \ldots \vee \boldsymbol{\alpha_{pp} a_p}. \end{cases} \tag{15}$$

Матриця

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha_{11}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{1p}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{\alpha_{p1}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{pp}} \end{pmatrix} \tag{16}$$

називається <u>**матрицею переходу**</u> від координатної системи $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_p}\}$ до системи $\{\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \ldots, \boldsymbol{a'_p}\}$. Візьмемо довільний вектор $\boldsymbol{l}$ і позначимо через $(\xi_1\ \xi_2\ \ldots\ \xi_p)^T$ і $(\xi'_1\ \xi'_2\ \ldots\ \xi'_p)^T$ його координатні стовпці в старій та новій координатних системах. Тоді маємо:

$$\boldsymbol{l} = \xi_1 \boldsymbol{a_1} \vee \xi_2 \boldsymbol{a_2} \vee \ldots \vee \xi_p \boldsymbol{a_p},$$
$$\boldsymbol{l} = \xi'_1 \boldsymbol{a'_1} \vee \xi'_2 \boldsymbol{a'_2} \vee \ldots \vee \xi'_p \boldsymbol{a'_p}.$$

Підставляючи в друге із цих рівнянь замість векторів $\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \ldots, \boldsymbol{a'_p}$ їхні вирази через $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_p}$, отримуємо вирази:

$$\boldsymbol{l} = \xi'_1 (\boldsymbol{\alpha_{11} a_1} \vee \boldsymbol{\alpha_{21} a_2} \vee \ldots \vee \boldsymbol{\alpha_{p1} a_p}) \vee \ldots \vee \xi'_p (\boldsymbol{\alpha_{1p} a_1} \vee \boldsymbol{\alpha_{2p} a_2} \vee \ldots \vee \boldsymbol{\alpha_{pp} a_p}),$$
$$\boldsymbol{l} = (\xi'_1 \boldsymbol{\alpha_{11}} \vee \xi'_2 \boldsymbol{\alpha_{12}} \vee \ldots \vee \xi'_p \boldsymbol{\alpha_{1p}})\, \boldsymbol{a_1} \vee \ldots \vee (\xi'_1 \boldsymbol{\alpha_{p1}} \vee \xi'_2 \boldsymbol{\alpha_{p2}} \vee \ldots \vee \xi'_p \boldsymbol{\alpha_{pp}})\, \boldsymbol{a_p}.$$

Встановлюючи рівність між відповідними коефіцієнтами, маємо:

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi'_1 \boldsymbol{\alpha_{11}} \vee \ldots \vee \xi'_p \boldsymbol{\alpha_{p1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_p = \xi'_1 \boldsymbol{\alpha_{1p}} \vee \ldots \vee \xi'_p \boldsymbol{\alpha_{pp}}. \end{cases}$$

Ці рівності і є шуканими формулами перетворення координат. Зауважуючи, що вирази

$$\xi_i = \xi'_1 \boldsymbol{\alpha_{i1}} \vee \xi'_2 \boldsymbol{\alpha_{i2}} \vee \ldots \vee \xi'_i \boldsymbol{\alpha_{ip}}$$

є добутком $\boldsymbol{i}$-того рядку матриці $\boldsymbol{A}$ на координатний стовпець $(\xi'_1\ \xi'_2\ \ldots\ \xi'_p)^T$. Отже, всю систему формул перетворення координат можна записати в короткому матричному вигляді:

$$(\xi_1\ \xi_2\ \ldots\ \xi_p)^T = \boldsymbol{A}(\xi'_1\ \xi'_2\ \ldots\ \xi'_p)^T. \tag{17}$$

Таким чином, можна сформулювати наступне правило перетворення координат: старий координатний стовпець дорівнює добутку матриці переходу на новий координатний стовпець.

Розглянемо в $\boldsymbol{p}$-вимірному логічному просторі $\boldsymbol{L}$ дві координатні системи $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_p}\}$ і $\{\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \ldots, \boldsymbol{a'_p}\}$. Можна або вектори $\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \ldots, \boldsymbol{a'_p}$ виразити через $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_p}$ за допомогою системи рівнянь (15), або, навпаки, вектори $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_p}$ виразити через $\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \ldots, \boldsymbol{a'_p}$ за допомогою наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{\beta_{11} a'_1} \vee \ldots \vee \boldsymbol{\beta_{p1} a'_p}\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{a_p} = \boldsymbol{\beta_{1p} a'_1} \vee \ldots \vee \boldsymbol{\beta_{pp} a'_p}\,. \end{cases}$$

Матриця $\boldsymbol{A}$, яку складено з коефіцієнтів $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$, є матрицею переходу від системи $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_p}\}$ до системи $\{\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \ldots, \boldsymbol{a'_p}\}$, а матриця

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta_{11}} & \cdots & \boldsymbol{\beta_{1p}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{\beta_{p1}} & \cdots & \boldsymbol{\beta_{pp}} \end{pmatrix} \tag{18}$$

яку складено з коефіцієнтів $\boldsymbol{\beta_{ij}}$, є матрицею зворотного переходу від системи $\{\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \ldots, \boldsymbol{a'_p}\}$ до системи $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_p}\}$. Далі координатну систему будемо називати базисом, маючи на увазі, що його вектори взяті в певній послідовності.

<u>Теорема 4.</u> *<u>Формулювання</u>*. У будь-якому логічному просторі існує ортогональна матриця $\boldsymbol{A}$ переходу до нового базису і ортогональна матриця $\boldsymbol{B}$ зворотного переходу, причому $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A^T}$.

<u>Доведення</u>. Позначимо через $[\boldsymbol{l}]$ і $[\boldsymbol{l}]'$ координатні стовпці довільного вектора $\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}$ у базисах $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_p}\}$ і $\{\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \ldots, \boldsymbol{a'_p}\}$ відповідно. Відповідно до рівності (17) $[\boldsymbol{l}] = \boldsymbol{A}\ [\boldsymbol{l}]'$. Це співвідношення виконується для всіх векторів простору, у тому числі й для його базисних векторів. Отже, $[\boldsymbol{a_i}] = \boldsymbol{A}\ [\boldsymbol{a_i}]'$, $\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{p}}$, де $[\boldsymbol{a_i}]$ і $[\boldsymbol{a_i}]'$ – координатні стовпці векторів $\boldsymbol{a_i}$ у базисах $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_p}\}$ і $\{\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \ldots, \boldsymbol{a'_p}\}$ відповідно. Якщо простір є недосконалим, то вектору $\boldsymbol{a_i}$ може відповідати кілька координатних стовпців. Однак серед них завжди існує такий, що $[\boldsymbol{a_i}] = (\boldsymbol{0} \ldots \boldsymbol{0}\ \ \boldsymbol{1}\ \ \boldsymbol{0} \ldots \boldsymbol{0})^{\boldsymbol{T}}$, де на $\boldsymbol{i}$-тому місці розташована тотожна одиниця, а на решті – тотожні нулі. Нехай у базисі $\{\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \ldots, \boldsymbol{a'_p}\}$ вектору $\boldsymbol{a_i}$ відповідає координатний стовпець $[\boldsymbol{a_i}]' = (\boldsymbol{\lambda_1^i} \ldots \boldsymbol{\lambda_p^i})^{\boldsymbol{T}}$. Завжди існує матриця $\boldsymbol{A}$ вигляду (16) така, що

$$\begin{cases} (\boldsymbol{1} \ldots \boldsymbol{0})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}\ (\boldsymbol{\lambda_1^1} \ldots \boldsymbol{\lambda_p^1})^{\boldsymbol{T}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\boldsymbol{0} \ldots \boldsymbol{1})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}\ (\boldsymbol{\lambda_1^p} \ldots \boldsymbol{\lambda_p^p})^{\boldsymbol{T}}. \end{cases} \tag{19}$$

З іншого боку, завжди існує матриця $\boldsymbol{B}$ вигляду (18) зворотного переходу така, що

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\lambda_1^1} \ldots \boldsymbol{\lambda_p^1})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{B}\ (\boldsymbol{1} \ldots \boldsymbol{0})^{\boldsymbol{T}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\boldsymbol{\lambda_1^p} \ldots \boldsymbol{\lambda_p^p})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{B}\ (\boldsymbol{0} \ldots \boldsymbol{1})^{\boldsymbol{T}}. \end{cases} \tag{20}$$

Підставляючи (20) в (19), отримуємо:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{1} \ldots \boldsymbol{0})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\ (\boldsymbol{1} \ldots \boldsymbol{0})^{\boldsymbol{T}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\boldsymbol{0} \ldots \boldsymbol{1})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\ (\boldsymbol{0} \ldots \boldsymbol{1})^{\boldsymbol{T}}. \end{cases} \tag{21}$$

Відповідно до означення, будь-який вектор логічного простору можна подати лінійною комбінацією базисних векторів, тобто лінійною комбінацією рівнянь системи (21). Отже, з означення базису логічного простору та властивостей логічних матриць випливає, що існують такі матриця переходу $\boldsymbol{A}$ від базису $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_p}\}$ до базису $\{\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \ldots, \boldsymbol{a'_p}\}$ і матриця $\boldsymbol{B}$ зворотного переходу такі, що для будь-якого вектора $\boldsymbol{l}$ логічного простору $[\boldsymbol{l}] = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\ [\boldsymbol{l}]$, тобто $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$. Отже, у будь-якому логічному просторі завжди існують оборотні, а виходить, відповідно до теореми 2, і ортогональні матриця переходу $\boldsymbol{A}$ і матриця зворотного переходу $\boldsymbol{B}$, причому $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$, тобто $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{T}$. Доведення проводилося для випадку, коли матриці $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ є булевими. Але якщо застосувати метод розшарування, описаний при доведенні теореми 2, то отриманий результат можна розповсюдити також і на предикатні матриці, задані над скалярним полем, елементами якого є скінченні предикати довільної арності. **Теорему доведено**.

Наслідком з теореми 4 є той факт, що в досконалому логічному просторі існують єдині матриця переходу $\boldsymbol{A}$ і матриця зворотного переходу $\boldsymbol{B}$, причому вони є ортогональними і виконується співвідношення $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{T}$.

<u>Кон'юнкцією</u> векторів $\boldsymbol{l}$ і $\boldsymbol{g}$ логічного простору $\boldsymbol{L}$ називається такий вектор цього простору, координатами якого є кон'юнкції відповідних координат векторів $\boldsymbol{l}$ і $\boldsymbol{g}$ [21].

<u>Приклад 11</u>. Для векторів $\boldsymbol{Q_7}$ і $\boldsymbol{Q_{10}}$ предикатного простору $\boldsymbol{Q}$ знайти розкладання їх кон'юнкції за базисом $\{\boldsymbol{Q_6}, \boldsymbol{Q_9}\}$.

<u>Розв'язання</u>. Розкладання векторів $\boldsymbol{Q_7}$ і $\boldsymbol{Q_{10}}$ за базисом $\{\boldsymbol{Q_6}, \boldsymbol{Q_9}\}$ буде наступним:

$$\boldsymbol{Q_7} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (0, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P_3 Q_6} \vee \boldsymbol{P_1 Q_9},$$

$$\boldsymbol{Q_{10}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (1, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P_1 Q_6} \vee \boldsymbol{P_2 Q_9}.$$

Отже, координатними стовпцями векторів $\boldsymbol{Q_7}$ і $\boldsymbol{Q_{10}}$ у базисі $\{\boldsymbol{Q_6}, \boldsymbol{Q_9}\}$ будуть стовпці

$$\boldsymbol{Q_7} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_3} \\ \boldsymbol{P_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1, 1) \\ (0, 1) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q_{10}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 1) \\ (1, 0) \end{pmatrix},$$

а їх кон'юнкція буде мати наступний вигляд:

$$\boldsymbol{Q_7} \wedge \boldsymbol{Q_{10}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_3} \\ \boldsymbol{P_1} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_3} \wedge \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_1} \wedge \boldsymbol{P_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1, 1) \wedge (0, 1) \\ (0, 1) \wedge (1, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 1) \\ (0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_0} \end{pmatrix}.$$

Отже, кон'юнкцією векторів $\boldsymbol{Q_7}$ і $\boldsymbol{Q_{10}}$ буде вектор

$$\boldsymbol{Q_7} \wedge \boldsymbol{Q_{10}} = \boldsymbol{P_1 Q_6} \vee \boldsymbol{P_0 Q_9} = (0, 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (0, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q_2}.$$

<u>Відповідь</u>. $\boldsymbol{Q_7} \wedge \boldsymbol{Q_{10}} = \boldsymbol{Q_2} = (\boldsymbol{P_1} \;\; \boldsymbol{P_0})^{T}$

<u>Теорема 5.</u> *<u>Формулювання</u>*. Кон'юнкція будь-яких векторів досконалого логічного простору є інваріантною щодо вибору базису.

<u>Доведення</u>. Нехай у базисі $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_p}\}$ вектори $\boldsymbol{l}$ і $\boldsymbol{g}$ мають координатні стовпці $[\boldsymbol{l}] = (\xi_1\ \xi_2\ \ldots\ \xi_p)^{T}$ і $[\boldsymbol{g}] = (\eta_1\ \eta_2\ \ldots\ \eta_p)^{T}$, а в базисі $\{\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \ldots, \boldsymbol{a'_p}\}$ – координатні стовпці $[\boldsymbol{l}]' = (\xi'_1\ \xi'_2\ \ldots\ \xi'_p)^{T}$ і $[\mathbf{g}]' = (\eta'_1\ \eta'_2\ \ldots\ \eta'_p)^{T}$ відповідно, а матриця вигляду (16) є матрицею переходу від базису $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_p}\}$ до базису $\{\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \ldots, \boldsymbol{a'_p}\}$. Очевидно, що

$$\boldsymbol{A}\,[\boldsymbol{l} \wedge \mathbf{g}]' = [\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{g}], \tag{22}$$

$$[\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{g}] = [\boldsymbol{l}] \wedge [\boldsymbol{g}], \tag{23}$$

$$[\boldsymbol{l}] \wedge [\boldsymbol{g}] = \boldsymbol{A}\,[\boldsymbol{l}]' \wedge \boldsymbol{A}\,[\mathbf{g}]'. \tag{24}$$

В силу того, що $[\boldsymbol{l}] = \boldsymbol{A}\ [\boldsymbol{l}]'$ і $[\boldsymbol{g}] = \boldsymbol{A}\ [\mathbf{g}]'$, можна записати наступні співвідношення:

$$\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\alpha}_{i1}\boldsymbol{\xi}'_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{\alpha}_{ip}\boldsymbol{\xi}'_p, \quad \boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{p}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{\alpha}_{i1}\boldsymbol{\eta}'_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{\alpha}_{ip}\boldsymbol{\eta}'_p, \quad \boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{p}}.$$

З огляду на (24), маємо

$$\boldsymbol{\xi}_i\boldsymbol{\eta}_i = (\boldsymbol{\alpha}_{i1}\boldsymbol{\xi}'_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{\alpha}_{ip}\boldsymbol{\xi}'_p) \wedge (\boldsymbol{\alpha}_{i1}\boldsymbol{\eta}'_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{\alpha}_{ip}\boldsymbol{\eta}'_p), \quad \boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{p}}. \tag{25}$$

Згідно з теоремою 4, матриця переходу $\boldsymbol{A}$ є ортогональною. Це означає, що кон'юнкція будь-яких двох елементів кожного її рядка дорівнює нулю. Отже, рівність (25) набуває вигляду

$$\boldsymbol{\xi}_i\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{\alpha}_{i1}\boldsymbol{\xi}'_1\boldsymbol{\eta}'_1 \vee \boldsymbol{\alpha}_{i2}\boldsymbol{\xi}'_2\boldsymbol{\eta}'_2 \vee \ldots \vee \boldsymbol{\alpha}_{ip}\boldsymbol{\xi}'_p\boldsymbol{\eta}'_p, \quad \boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{p}},$$

що в матричній формі запишеться як

$$[\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{g}] = \boldsymbol{A}\ ([\boldsymbol{l}]' \wedge [\mathbf{g}]'),$$

звідки, з урахуванням (22) і (23), випливає, що

$$\boldsymbol{A}\ [\boldsymbol{l} \wedge \mathbf{g}]' = \boldsymbol{A}\ ([\boldsymbol{l}]' \wedge [\mathbf{g}]'),$$

тобто кон'юнкція будь-яких двох векторів досконалого логічного простору є інваріантною щодо вибору базису. **Теорему доведено**.

У силу теореми 5, кон'юнкція векторів предикатного логічного простору обчислюється за правилом, аналогічним тому, що було введено для елементів поля скалярів такого простору, тобто

$$(\boldsymbol{Q}_i \wedge \boldsymbol{Q}_j)(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) = \boldsymbol{Q}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) \wedge \boldsymbol{Q}_j(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m).$$

В узагальненому на довільну кількість векторів це правило виглядатиме як

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{s} \boldsymbol{Q}_i\right)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m) = \bigwedge_{i=1}^{s} \boldsymbol{Q}_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m)\ .$$

Наприклад, для векторів простору двомісних предикатів $\boldsymbol{Q}$, маємо наступне правило для кон'юнкції векторів

$$\boldsymbol{Q}_i \wedge \boldsymbol{Q}_j = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_i(\mathbf{0},\mathbf{0}) \wedge \boldsymbol{Q}_j(\mathbf{0},\mathbf{0}) & \boldsymbol{Q}_i(\mathbf{1},\mathbf{0}) \wedge \boldsymbol{Q}_j(\mathbf{1},\mathbf{0}) \\ \boldsymbol{Q}_i(\mathbf{0},\mathbf{1}) \wedge \boldsymbol{Q}_j(\mathbf{0},\mathbf{1}) & \boldsymbol{Q}_i(\mathbf{1},\mathbf{1}) \wedge \boldsymbol{Q}_j(\mathbf{1},\mathbf{1}) \end{pmatrix}, \tag{26}$$

Для будь-яких логічних векторів $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{L}$ виконуються властивості

<u>*комутативності кон'юнкції*</u>

$$\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g} \wedge \boldsymbol{l},$$

<u>*дистрибутивності*</u>

$$(\boldsymbol{l} \vee \boldsymbol{g}) \wedge \boldsymbol{h} = (\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{h}) \vee (\boldsymbol{g} \wedge \boldsymbol{h}),$$

$$(\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{g}) \vee \boldsymbol{h} = (\boldsymbol{l} \vee \boldsymbol{h}) \wedge (\boldsymbol{g} \vee \boldsymbol{h}),$$

<u>*елімінації*</u>

$$\boldsymbol{l} \vee (\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{l},$$

$$\boldsymbol{l} \wedge (\boldsymbol{l} \vee \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{l},$$

<u>*ідемпотентності кон'юнкції*</u>

$$\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}.$$

<u>*закон нуля для кон'юнкції векторів*</u> існує єдиний одиничний вектор $\vec{\mathbf{1}} \in \boldsymbol{L}$ такий, що для будь-якого $\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}$

$$\boldsymbol{l} \wedge \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}}.$$

<u>*закон одиниці для кон'юнкції векторів*</u> існує єдиний одиничний вектор $\vec{\mathbf{1}} \in \boldsymbol{L}$ такий, що для будь-якого $\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}$

$$\vec{\mathbf{1}} \wedge \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}.$$

<u>**Згорткою**</u> $\langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{g} \rangle$ двох векторів $\boldsymbol{l}$ і $\boldsymbol{g}$ логічного простору $\boldsymbol{L}$ називається диз'юнкція кон'юнкцій координат цих векторів. Тобто якщо $[\boldsymbol{l}] = (\xi_1\ \xi_2\ \dots\ \xi_p)^T$ і $[\boldsymbol{g}] = (\eta_1\ \eta_2\ \dots\ \eta_p)^T$, то

$$\langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{g} \rangle = \xi_1\eta_1 \vee \xi_2\eta_2 \vee \dots \vee \xi_p\eta_p.$$

<u>**Приклад 12**</u>. Знайти згортку векторів $\boldsymbol{Q_7}$ і $\boldsymbol{Q_{10}}$ предикатного простору $\boldsymbol{Q}$ у базисі $\{\boldsymbol{Q_6}, \boldsymbol{Q_9}\}$.

<u>*Розв'язання*</u>. Як було показано в прикладі 11, в базисі $\{\boldsymbol{Q_6}, \boldsymbol{Q_9}\}$ для векторів $\boldsymbol{Q_7}$ і $\boldsymbol{Q_{10}}$ маємо

$$\boldsymbol{Q_7} = \boldsymbol{P_3 Q_6} \vee \boldsymbol{P_1 Q_9},$$
$$\boldsymbol{Q_{10}} = \boldsymbol{P_1 Q_6} \vee \boldsymbol{P_2 Q_9}.$$

Отже, згорткою цих векторів буде наступний логічний скаляр:

$$\langle \boldsymbol{Q_7}, \boldsymbol{Q_{10}} \rangle = \boldsymbol{P_3 P_1} \vee \boldsymbol{P_1 P_2} = ((1,1) \wedge (0,1)) \vee ((0,1) \wedge (1,0)) =$$
$$= (1 \wedge 0, 1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1, 1 \wedge 0) = (0,1) \vee (0,0) =$$
$$= (0 \vee 0, 1 \vee 0) = (0, 1) = \boldsymbol{P_1}.$$

<u>***Відповідь***</u>. $\langle \boldsymbol{Q_7}, \boldsymbol{Q_{10}} \rangle = (0, 1) = \boldsymbol{P_1}$.

<u>**Теорема 6.**</u> <u>*Формулювання*</u>. Згортка будь-яких векторів досконалого логічного простору інваріантна щодо вибору базису.

<u>*Доведення*</u>. Нехай у базисі $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_p}\}$ вектори $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}$ мають координатні стовпці $[\boldsymbol{l}] = (\xi_1\ \xi_2\ \dots\ \xi_p)^T$ і $[\boldsymbol{g}] = (\eta_1\ \eta_2\ \dots\ \eta_p)^T$, а в базисі $\{\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \dots, \boldsymbol{a'_p}\}$ – координатні стовпці $[\boldsymbol{l}]' = (\xi'_1\ \xi'_2\ \dots\ \xi'_p)^T$ і $[\mathbf{g}]' = (\eta'_1\ \eta'_2\ \dots\ \eta'_p)^T$ відповідно, а матриця вигляду (16) є матрицею переходу від базису $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_p}\}$ до базису $\{\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \dots, \boldsymbol{a'_p}\}$. Вектор $\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{g}$ у базисі $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_p}\}$ буде мати координатне подання $[\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{g}] = \left(\xi_1\eta_1\ \dots\ \xi_p\eta_p\right)^T$, а в базисі $\{\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \dots, \boldsymbol{a'_p}\}$ – $[\boldsymbol{l} \wedge \mathbf{g}]' = \left(\xi'_1\eta'_1 \dots \xi'_p\eta'_p\right)^T$, причому ці координатні подання пов'язані наступним співвідношенням:

$$\begin{pmatrix} \xi_1\eta_1 \\ \vdots \\ \xi_p\eta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_1\eta'_1 \\ \vdots \\ \xi'_p\eta'_p \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{cases} \xi_1\eta_1 = \alpha_{11}\xi_1'\eta_1' \vee \dots \vee \alpha_{1p}\xi_p'\eta_p', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_p\eta_p = \alpha_{p1}\xi_1'\eta_1' \vee \dots \vee \alpha_{pp}\xi_p'\eta_p'. \end{cases}$$

Отже,

$$\xi_1\eta_1 \vee \xi_2\eta_2 \vee\dots\vee \xi_p\eta_p = \xi_1'\eta_1' (\alpha_{11} \vee \alpha_{21} \vee\dots\vee \alpha_{p1}) \vee\dots\vee \xi_p'\eta_p' (\alpha_{1p} \vee \alpha_{2p} \vee\dots\vee \alpha_{pp}),$$

де коефіцієнт при $\xi_j'\eta_j'$ є диз'юнкцією елементів $\boldsymbol{j}$-го стовпця матриці переходу $\boldsymbol{A}$. Матриця переходу $\boldsymbol{A}$ є оборотною, а значить, і ортогональною [22]. Отже, диз'юнкція елементів будь-якого її стовпця дорівнює одиниці, звідки випливає, що

$$\xi_1\eta_1 \vee \xi_2\eta_2 \vee\dots\vee \xi_p\eta_p = \xi_1'\eta_1' \vee \xi_2'\eta_2' \vee \dots \vee \xi_p'\eta_p',$$

де ліва частина рівності є згорткою векторів $\boldsymbol{l}$ і $\boldsymbol{g}$ у базисі $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_p}\}$, а права – у базисі $\{\boldsymbol{a_1'}, \boldsymbol{a_2'}, \dots, \boldsymbol{a_p'}\}$. В силу того, що базиси обрано довільно, це й доводить інваріантність згортки векторів досконалого логічного простору щодо вибору базису. **Теорему доведено**.

Згортка векторів досконалого логічного простору має наступні властивості, аналогічні властивостям скалярного добутку векторів у лінійній алгебрі [15, 16]:

комутативність

$$\langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{g} \rangle = \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{l} \rangle,$$

дистрибутивність згортки відносно добутку на скаляр

$$\langle \alpha\, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{g} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{g} \rangle = \langle \boldsymbol{l}, \alpha\, \boldsymbol{g} \rangle,$$

дистрибутивність згортки відносно диз'юнкції скалярів

$$\langle (\alpha \vee \beta)\, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{h} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{h} \rangle \vee \beta \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{h} \rangle,$$

дистрибутивність згортки відносно диз'юнкції векторів

$$\langle (\boldsymbol{l} \vee \boldsymbol{g}), \boldsymbol{h} \rangle = \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{h} \rangle \vee \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h} \rangle,$$

закон нуля

$$\langle \vec{\mathbf{0}}, \boldsymbol{l} \rangle = \mathbf{0},$$

закон існування

$$\langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{l} \rangle \neq \mathbf{0}, \quad \textit{якщо} \quad \boldsymbol{l} \neq \vec{\mathbf{0}}.$$

Вектори $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}$ називаються **ортогональними**, якщо їхня згортка дорівнює нулю [3, 4]. Систему векторів називають **ортогональною**, якщо вона містить або лише один вектор, або вектори, що входять до її складу, є попарно ортогональними. З комутативності згортки векторів випливає властивість симетричності відношення ортогональності логічних векторів: якщо вектор $\boldsymbol{l}$ є ортогональним до вектора $\boldsymbol{g}$, то вектор $\boldsymbol{g}$, у свою чергу, є ортогональним до вектора $\boldsymbol{l}$ [20, 21]. Єдиним вектором, ортогональним одразу до всіх векторів логічного простору, є нульовий вектор. У предикатному просторі $\boldsymbol{Q}$ ортогональними є, наприклад, системи векторів $\{\boldsymbol{Q_3}, \boldsymbol{Q_{12}}\}$, і $\{\boldsymbol{Q_1}, \boldsymbol{Q_{14}}\}$.

Теорема 7. *Формулювання*. Система векторів, що складається з ненульових взаємно ортогональних векторів $\{\boldsymbol{l_1}, \dots, \boldsymbol{l_t}\}$, є незалежною [17].

З означення операції згортки логічних векторів випливає, що вона дорівнює диз'юнкції кон'юнкцій координат цих векторів, що може дорівнювати нулю тоді й лише тоді, коли кожний з диз'юнктів є тотожним нулем, тобто якщо всі координатні кон'юнкції дорівнюють нулю. Отже, можна дати інше означення ортогональності логічних векторів: вектори $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}$ є **ортогональними**, якщо їхня кон'юнкція є нульовим вектором.

Запереченням вектора $\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}$, $[\boldsymbol{l}] = (\xi_1\ \xi_2\ \dots\ \xi_p)^T$, називається вектор $[\bar{\boldsymbol{l}}] = (\bar{\xi}_1\ \bar{\xi}_2\ \dots\ \bar{\xi}_p)^T$ [21, 23]. Операцію заперечення логічного вектора, як і операцію кон'юнкції логічних векторів, також можна ввести лише в досконалому логічному просторі.

Теорема 8. *Формулювання*. Заперечення будь-якого вектора досконалого логічного простору є інваріантним щодо вибору базису.

Доведення. Нехай матриця вигляду (16) є матрицею переходу від базису $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_p}\}$ до базису $\{\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \dots, \boldsymbol{a'_p}\}$, а вектор $\boldsymbol{l}$ має координатні стовпці $[\boldsymbol{l}] = (\xi_1\ \xi_2\ \dots\ \xi_p)^T$ і $[\boldsymbol{l}]' = (\xi'_1\ \xi'_2\ \dots\ \xi'_p)^T$ у базисах $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_p}\}$ і $\{\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \dots, \boldsymbol{a'_p}\}$ відповідно. За означенням заперечення вектора, $[\bar{\boldsymbol{l}}] = (\bar{\xi}_1\ \bar{\xi}_2\ \dots\ \bar{\xi}_p)^T$. З іншого боку, відповідно до означення заперечення логічних матриць, $\overline{[\boldsymbol{l}]} = (\bar{\xi}_1\ \bar{\xi}_2\ \dots\ \bar{\xi}_p)^T$, звідки випливає, що

$$[\bar{\boldsymbol{l}}] = \overline{[\boldsymbol{l}]}. \tag{27}$$

Очевидно, що $[\bar{\boldsymbol{l}}] = \boldsymbol{A}\ [\bar{\boldsymbol{l}}]'$, $\overline{[\boldsymbol{l}]} = \overline{\boldsymbol{A}\ [\boldsymbol{l}]'}$, звідки, з урахуванням (27), випливає, що $\boldsymbol{A}\ [\bar{\boldsymbol{l}}]' = \overline{\boldsymbol{A}\ [\boldsymbol{l}]'}$. Іншими словами, переходячи до нового координатного подання вектора $\bar{\boldsymbol{l}}$ або виконуючи операцію заперечення над вектором $\boldsymbol{l}$ вже в новому базисі, у результаті отримуємо той самий вектор, що й доводить інваріантність заперечення векторів логічного простору щодо вибору базису. **Теорему доведено**.

В силу теореми 8, заперечення векторів досконалого предикатного логічного простору обчислюється за правилом, аналогічним тому, що було введено для елементів поля скалярів такого простору, тобто

$$\bar{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_m}) = \overline{\boldsymbol{Q_i}(\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_m})}.$$

Наприклад, для векторів простору двомісних предикатів $\boldsymbol{Q}$, маємо наступне правило для заперечення векторів

$$\bar{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{i}} = \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{Q_i}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})} & \overline{\boldsymbol{Q_i}(\boldsymbol{1},\boldsymbol{0})} \\ \overline{\boldsymbol{Q_i}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{1})} & \overline{\boldsymbol{Q_i}(\boldsymbol{1},\boldsymbol{1})} \end{pmatrix}, \tag{28}$$

Для будь-яких логічних векторів $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}$, виконуються наступні властивості:

згортання

$$\boldsymbol{l} \vee (\boldsymbol{h} \wedge \bar{\boldsymbol{h}}) = \boldsymbol{l},$$
$$\boldsymbol{l} \wedge (\boldsymbol{h} \vee \bar{\boldsymbol{h}}) = \boldsymbol{l}\,;$$

де Моргана

$$\overline{\boldsymbol{l} \vee \mathbf{g}} = \bar{\boldsymbol{l}} \wedge \bar{\mathbf{g}},$$
$$\overline{\boldsymbol{l} \wedge \mathbf{g}} = \bar{\boldsymbol{l}} \vee \bar{\mathbf{g}}\,;$$

подвійного заперечення

$$\bar{\bar{\boldsymbol{l}}} = \boldsymbol{l}\,;$$

виключення третього

$$\boldsymbol{l} \vee \bar{\boldsymbol{l}} = \vec{\mathbf{1}}\,;$$

протиріччя

$$\boldsymbol{l} \wedge \bar{\boldsymbol{l}} = \vec{\mathbf{0}},$$

заперечення нуля

$$\bar{\vec{\mathbf{0}}} = \vec{\mathbf{1}},$$

заперечення одиниці

$$\bar{\vec{\mathbf{1}}} = \vec{\mathbf{0}}.$$

Ці властивості, а також властивості ідемпотентності, комутативності та асоціативності диз'юнкції та кон'юнкції логічних векторів, властивості дистрибутивності, елімінації, законів нуля та одиниці доводять висунуте раніше припущення, що множину логічних векторів так само, як і множину логічних скалярів, можна розглядати як логічне поле.

Якщо вектор належить якомусь базису простору $\boldsymbol{L}$, то його заперечення можна подати як диз'юнкцію інших векторів, що входять у той же базис [23]:

$$\bar{\boldsymbol{a}}_i = \boldsymbol{a}_1 \vee \boldsymbol{a}_2 \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}_{i-1} \vee \boldsymbol{a}_{i+1} \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}_p. \qquad (29)$$

Наприклад, у предикатному просторі $\boldsymbol{Q}$ для базиса $\{\boldsymbol{Q}_6, \boldsymbol{Q}_9\}$ маємо:

$$\bar{\boldsymbol{Q}}_6 = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{1}} \\ \bar{\mathbf{1}} & \bar{\mathbf{0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}_9\,,$$

$$\bar{\boldsymbol{Q}}_9 = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{1}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}_6\,.$$

Очевидно, що

$$\langle \boldsymbol{l}, \bar{\boldsymbol{l}} \rangle = \mathbf{0}. \qquad (30)$$

Отже, будь-який логічний вектор завжди ортогональний своєму запереченню. Наслідком з теореми 8 і властивості (30) є той факт, що система ненульових векторів, що складається із довільного логічного вектора та його заперечення, є незалежною. ***Наприклад***, система векторів $\{\boldsymbol{Q}_7, \boldsymbol{Q}_8\}$ в просторі $\boldsymbol{Q}$ є незалежною.

У силу рівностей (29) і (30) можна записати наступне:

$$\langle \boldsymbol{a}_i, \bar{\boldsymbol{a}}_i \rangle = \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_1 \vee \boldsymbol{a}_2 \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}_{i-1} \vee \boldsymbol{a}_{i+1} \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}_p \rangle = \mathbf{0}. \qquad (31)$$

Із (31) та дистрибутивності згортки векторів відносно диз'юнкції скалярів випливає, що

$$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_1 \rangle \vee \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_2 \rangle \vee \ldots \vee \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i-1} \rangle \vee \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1} \rangle \vee \ldots \vee \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_p \rangle = \mathbf{0},$$

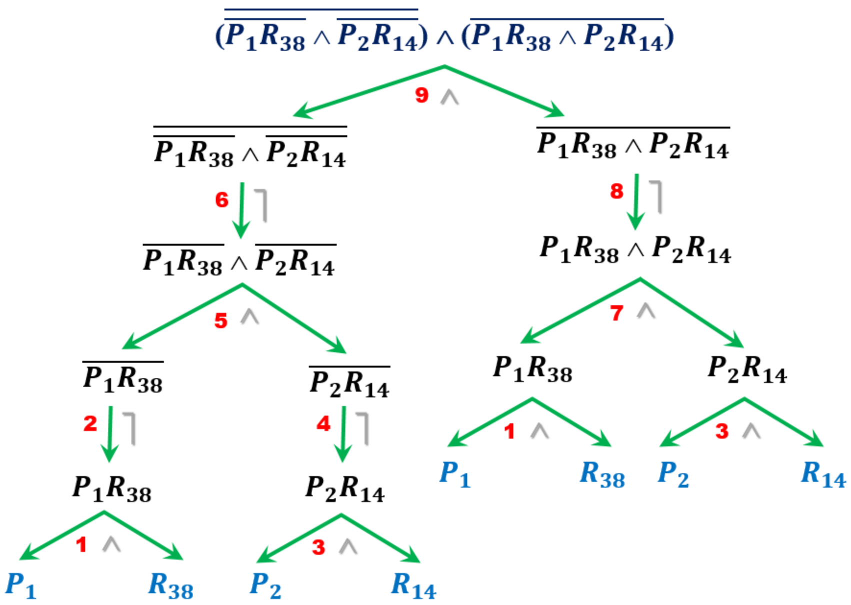
що є справедливим лише в тому випадку, коли кожний з диз'юнктів цього виразу дорівнює нулю. Отже, для будь-якого базису досконалого логічного простору $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{I} \neq \boldsymbol{j}$. Це означає, що будь-який базис досконалого логічного простору є ортогональною системою.

3.2.1. *Задачі для самостійного опрацювання*

Із використанням таблиці 1, таблиці 2 та таблиці 3 обчислити наступні вирази

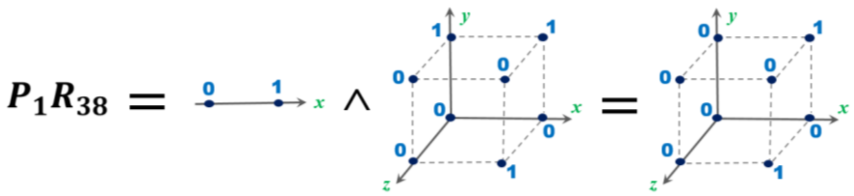
$$\mathbf{1.}\ \overline{(\overline{P_1R_{38}} \wedge \overline{P_2R_{14}})} \wedge (\overline{P_1R_{38} \wedge P_2R_{14}}).$$

Розв'язання. Побудуємо для цього виразу семантичне дерево [2].

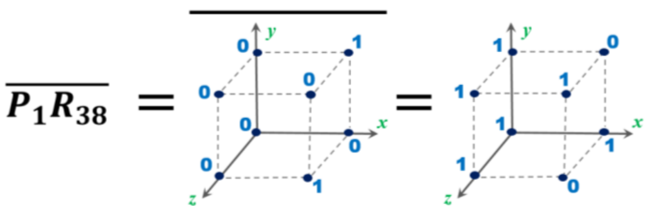


Тепер обчислимо цей вираз згідно з обраним порядком дій.

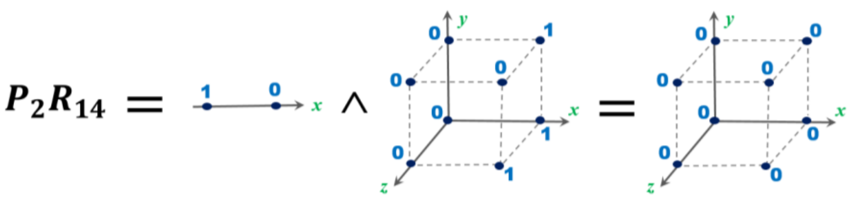
***Дія № 1*:**



***Дія № 2*:**

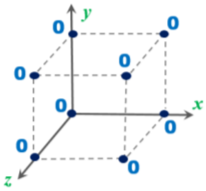


***Дія № 3*:**

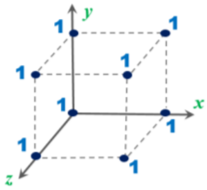


***Дія № 4*:**

$$\overline{P_2R_{14}} =$$



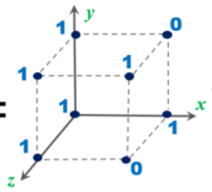
$$=$$



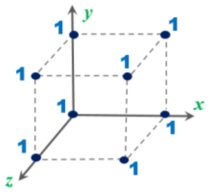
***Дія № 5*:**

$$\overline{P_1R_{38}} \wedge \overline{P_2R_{14}} =$$

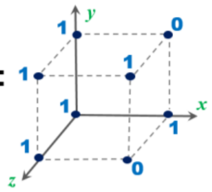
$$=$$



$$\wedge$$

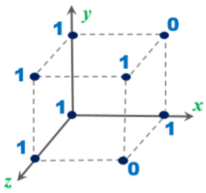


$$=$$

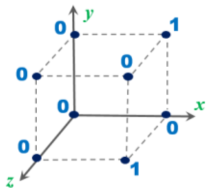


***Дія № 6*:**

$$\overline{\overline{P_1R_{38}} \wedge \overline{P_2R_{14}}} =$$



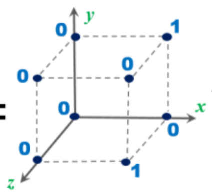
$$=$$



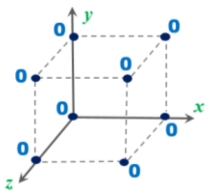
***Дія № 7*:**

$$P_1R_{38} \wedge P_2R_{14} =$$

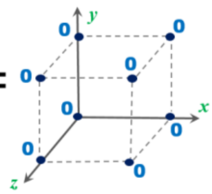
$$=$$



$$\wedge$$

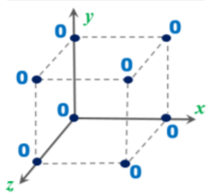


$$=$$

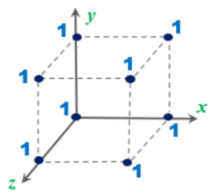


***Дія № 8*:**

$$\overline{P_1R_{38} \wedge P_2R_{14}} =$$



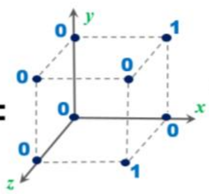
$$=$$



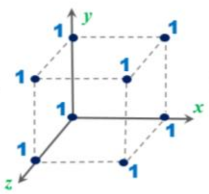
***Дія № 9*:**

$$(\overline{\overline{P_1R_{38}} \wedge \overline{P_2R_{14}}}) \wedge (\overline{P_1R_{38} \wedge P_2R_{14}}) =$$

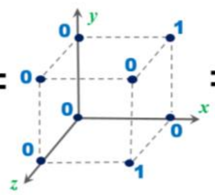
$$=$$



$$\wedge$$



$$=$$



$$= R_6$$

Виконаємо тепер тотожні перетворення заданої формули.

$$(\overline{\overline{P_1R_{38}} \wedge \overline{P_2R_{14}}}) \wedge (\overline{P_1R_{38} \wedge P_2R_{14}}) =$$

(*за законом де Моргана для* $\overline{\overline{P_1R_{38}} \wedge \overline{P_2R_{14}}}$ *та* $\overline{P_1R_{38} \wedge P_2R_{14}}$)

$$= (\overline{\overline{P_1R_{38}}} \vee \overline{\overline{P_2R_{14}}}) \wedge (\overline{P_1R_{38}} \vee \overline{P_2R_{14}}) =$$

(*за законом подвійного заперечення для* $\overline{\overline{P_1R_{38}}}$ *та* $\overline{\overline{P_2R_{14}}}$)

$$= (P_1R_{38} \vee P_2R_{14}) \wedge (\overline{P_1R_{38}} \vee \overline{P_2R_{14}}) =$$

(*за законом дистрибутивності*)

$$= (P_1R_{38} \wedge \overline{P_1R_{38}}) \vee (P_1R_{38} \wedge \overline{P_2R_{14}}) \vee (P_2R_{14} \wedge \overline{P_1R_{38}}) \vee (P_2R_{14} \wedge \overline{P_2R_{14}}) =$$

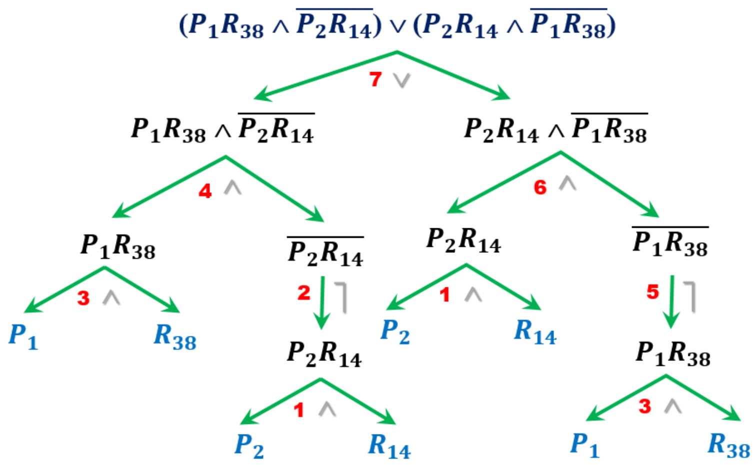
(*за законом протиріччя для* $P_1R_{38} \wedge \overline{P_1R_{38}}$ *та* $P_2R_{14} \wedge \overline{P_2R_{14}}$)

$$= \vec{0} \vee (P_1R_{38} \wedge \overline{P_2R_{14}}) \vee (P_2R_{14} \wedge \overline{P_1R_{38}}) \vee \vec{0} =$$

(*за законом нуля для диз'юнкції векторів*)

$$= (P_1R_{38} \wedge \overline{P_2R_{14}}) \vee (P_2R_{14} \wedge \overline{P_1R_{38}}).$$

Побудуємо тепер семантичне дерево для цієї перетвореної формули.



Як можна побачити з цього семантичного дерева, обчислення цієї формули потребує виконання семи дій. Але тотожні перетворення можна було зробити й іншим способом:

$$(\overline{\overline{P_1R_{38}} \wedge \overline{P_2R_{14}}}) \wedge (\overline{P_1R_{38} \wedge P_2R_{14}}) =$$

(*за законом де Моргана для* $\overline{\overline{P_1R_{38}} \wedge \overline{P_2R_{14}}}$ *та* $\overline{P_1R_{38} \wedge P_2R_{14}}$)

$$= (\overline{\overline{P_1R_{38}}} \vee \overline{\overline{P_2R_{14}}}) \wedge (\overline{P_1R_{38}} \vee \overline{P_2R_{14}}) =$$

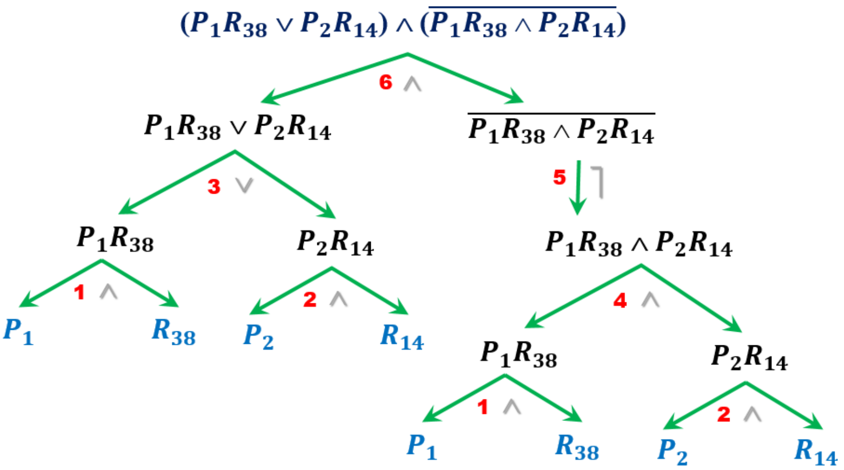
(*за законом подвійного заперечення для* $\overline{\overline{P_1R_{38}}}$ *та* $\overline{\overline{P_2R_{14}}}$)

$$= (P_1R_{38} \vee P_2R_{14}) \wedge (\overline{P_1R_{38}} \vee \overline{P_2R_{14}}) =$$

(*за законом де Моргана*)

$$= (P_1R_{38} \vee P_2R_{14}) \wedge (\overline{P_1R_{38} \wedge P_2R_{14}}).$$

Побудуємо тепер семантичне дерево і для цього варіанту перетвореної формули.



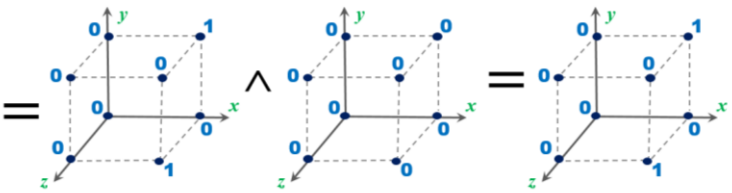
Обчислення цієї формули передбачає виконання лише шести дій, тобто цей варіант є раціональнішим. Тому для реалізації обираємо саме його.

Дія № 1 – Дія № 2:

Результати цих дій вже було отримано при обчисленні неперетвореної формули. Тому можна відразу проводити подальші обчислення.

Дія № 3:

$$P_1R_{38} \vee P_2R_{14} =$$

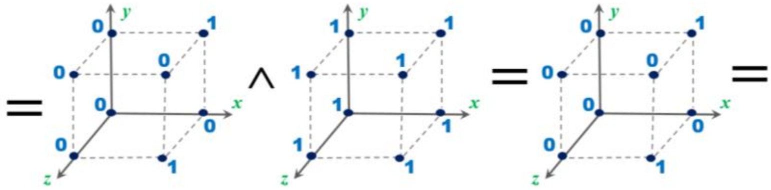


Дія № 4 – Дія № 5:

Результати цих дій також вже було отримано при обчисленні неперетвореної формули. Тому можна відразу обчислювати остаточний результат.

Дія № 6:

$$(P_1R_{38} \vee P_2R_{14}) \wedge (\overline{P_1R_{38} \wedge P_2R_{14}}) =$$



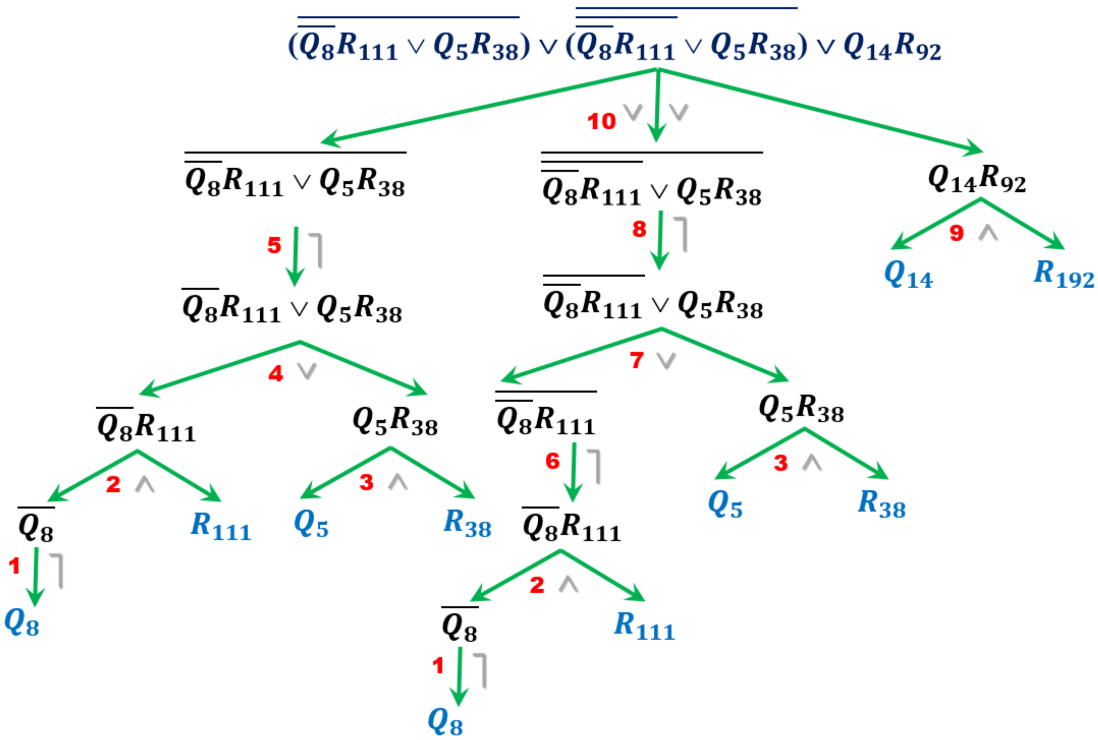
$= R_6$

Як можна побачити, отримано той самий результат, що й до проведення тотожних перетворень. Тому <u>в даному прикладі</u> їх проведення є доцільним, бо значно зменшує кількість виконуваних операцій при обчисленні остаточної формули.

<u>ВІДПОВІДЬ</u>. $(\overline{\overline{P_1R_{38}} \wedge \overline{P_2R_{14}}}) \wedge (\overline{P_1R_{38} \wedge P_2R_{14}}) = R_6$.

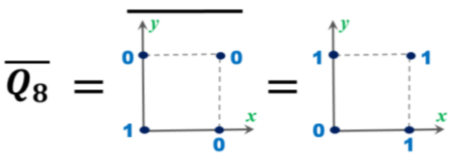
2. $(\overline{\overline{Q_8}R_{111} \vee Q_5R_{38}}) \vee (\overline{\overline{\overline{Q_8}R_{111}} \vee Q_5R_{38}}) \vee Q_{14}R_{92}$**.**

<u>Розв'язання</u>. Побудуємо для цього виразу семантичне дерево [2].

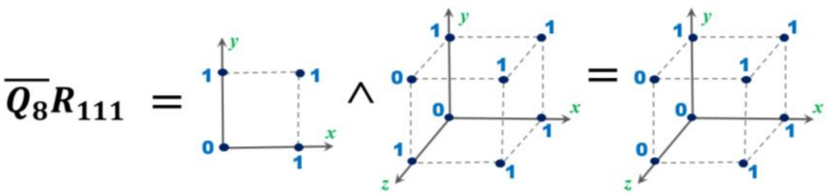


Тепер обчислимо цей вираз згідно з обраним порядком дій.

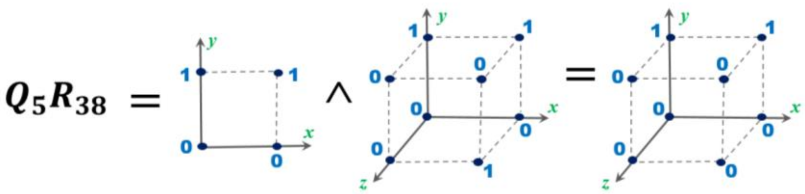
***Дія № 1*:**



***Дія № 2*:**

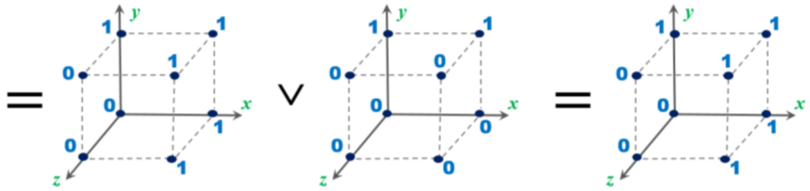


***Дія № 3*:**



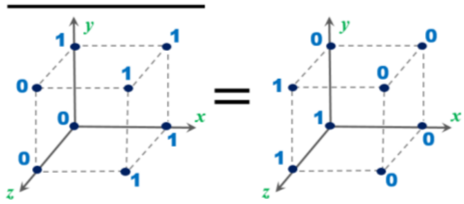
***Дія № 4*:**

$$\overline{Q_8}R_{111} \vee Q_5R_{38} =$$



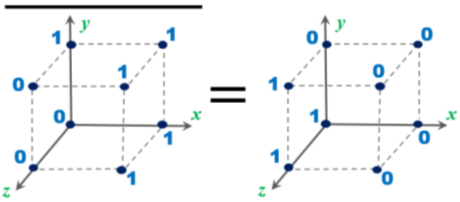
***Дія № 5*:**

$$\overline{\overline{Q_8}R_{111} \vee Q_5R_{38}} =$$



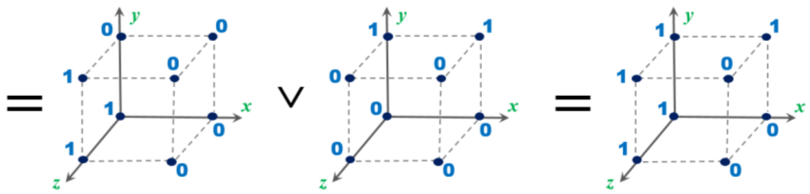
***Дія № 6*:**

$$\overline{\overline{Q_8}R_{111}} =$$



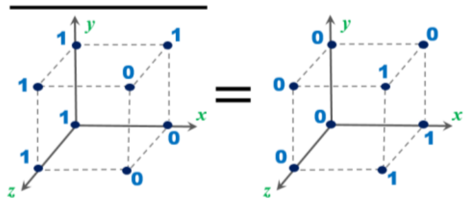
***Дія № 7*:**

$$\overline{\overline{Q_8}R_{111}} \vee Q_5R_{38} =$$



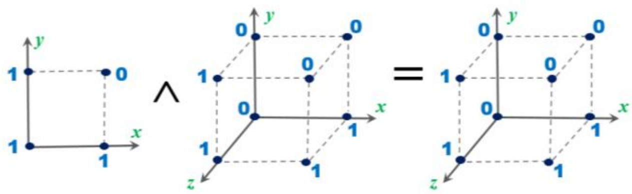
***Дія № 8*:**

$$\overline{\overline{\overline{Q_8}R_{111}} \vee Q_5R_{38}} =$$



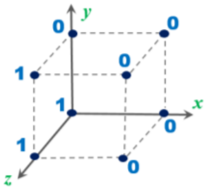
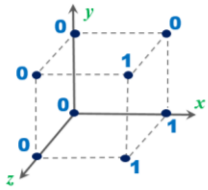
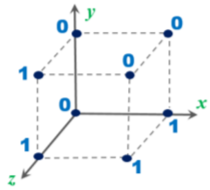
***Дія № 9*:**

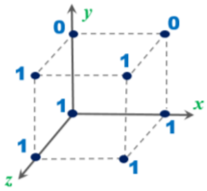
$$Q_{14}R_{92} =$$



Дія № 10:

$$\overline{(\overline{Q_8}R_{111} \vee Q_5R_{38})} \vee \overline{(\overline{\overline{\overline{Q_8}R_{111}}} \vee Q_5R_{38})} \vee Q_{14}R_{92} =$$

=  ∨  ∨  =

=  = R_{221}

Таким чином, для обчислення цієї формули <u>*графічним методом*</u> знадобилося виконання десяти дій, остання з яких є узагальненою операцією диз'юнкції векторів.

Виконаємо тепер тотожні перетворення заданої формули.

$$\overline{(\overline{Q_8}R_{111} \vee Q_5R_{38})} \vee \overline{(\overline{\overline{\overline{Q_8}R_{111}}} \vee Q_5R_{38})} \vee Q_{14}R_{92} =$$

(*за законом де Моргана для* $\overline{\overline{Q_8}R_{111} \vee Q_5R_{38}}$ *та* $\overline{\overline{\overline{Q_8}R_{111}} \vee Q_5R_{38}}$)

$$= (\overline{\overline{Q_8}R_{111}} \wedge \overline{Q_5R_{38}}) \vee (\overline{\overline{\overline{Q_8}R_{111}}} \wedge \overline{Q_5R_{38}}) \vee Q_{14}R_{92} =$$

(*за законом подвійного заперечення для* $\overline{\overline{\overline{Q_8}R_{111}}}$)

$$= (\overline{\overline{Q_8}R_{111}} \wedge \overline{Q_5R_{38}}) \vee (\overline{Q_8}R_{111} \wedge \overline{Q_5R_{38}}) \vee Q_{14}R_{92} =$$

(*за законом дистрибутивності векторів*)

$$= ((\overline{\overline{Q_8}R_{111}} \vee \overline{Q_8}R_{111}) \wedge \overline{Q_5R_{38}}) \vee Q_{14}R_{92} =$$

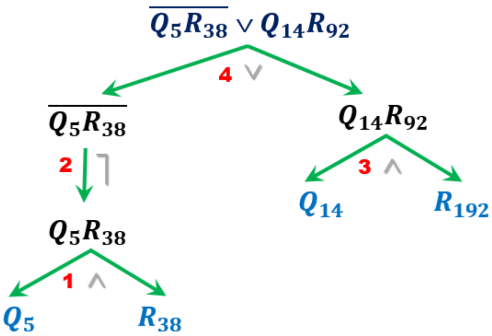
(*за законом виключення третього для* $\overline{\overline{Q_8}R_{111}} \vee \overline{Q_8}R_{111}$)

$$= (\vec{1} \wedge \overline{Q_5R_{38}}) \vee Q_{14}R_{92} =$$

(*за законом одиниці для кон'юнкції векторів*)

$$= \overline{Q_5R_{38}} \vee Q_{14}R_{92}.$$

Побудуємо тепер семантичне дерево для цієї перетвореної формули.



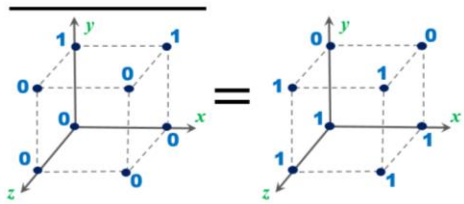
Отже, тотожні перетворення значно скоротили загальну кількість операцій для виконання з десяти до чотирьох, що є дуже суттєвим спрощенням. Обчислимо тепер значення перетвореної формули згідно з отриманим порядком дій.

***Дія № 1*:**

Результат цієї дії вже був отриманий при обчисленні початкової формули.

***Дія № 2*:**

$$\overline{Q_5R_{38}} =$$

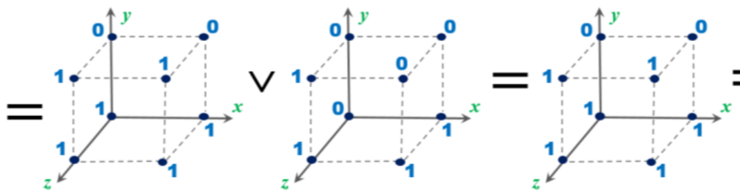


***Дія № 3*:**

Результат цієї дії також вже отриманий при попередніх розрахунках. Тому можна одразу обчислювати остаточну формулу.

***Дія № 4*:**

$$\overline{Q_5R_{38}} \vee Q_{14}R_{92} =$$



$$= R_{221}$$

Як можна побачити, отримано той самий результат, що й до проведення тотожних перетворень. Тому <u>в даному прикладі</u> їх проведення є дуже доцільним, бо значно зменшує кількість виконуваних операцій при обчисленні остаточної формули.

<u>ВІДПОВІДЬ</u>. $(\overline{\overline{Q_8}R_{111} \vee Q_5R_{38}}) \vee (\overline{\overline{\overline{Q_8}R_{111}} \vee Q_5R_{38}}) \vee Q_{14}R_{92} = R_{221}$.

При аналітичному розв'язанні наступних завдань для кон'юнкції та заперечення векторів можна скористатися правилами (26) та (28).

$$\textbf{3.}\ \ (P_1\overline{Q}_8 \wedge \langle Q_2, Q_{11}\rangle\, Q_7) \vee P_2Q_{13} \vee P_2\overline{Q}_7.$$

<u>Розв'язання</u>. Одним з базисів в просторі $\boldsymbol{Q}$ є система векторів $\{Q_6, Q_9\}$. В силу того, що згортка векторів є інваріантною відносно вибору базису, достатньо знайти координатні стовпці цих векторів хоча б в одному базисі. Отже, нехай координатами вектора Q_2 в базисі $\{Q_6, Q_9\}$ є $\xi_1^2 = (\xi_1^2(0), \xi_1^2(1))$ і $\xi_2^2 = (\xi_2^2(0), \xi_2^2(1))$. Тоді

$$Q_2 = (\xi_1^2(0), \xi_1^2(1)) \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (\xi_2^2(0), \xi_2^2(1)) \wedge \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_1^2(0) \wedge 0 & \xi_1^2(1) \wedge 1 \\ \xi_1^2(0) \wedge 1 & \xi_1^2(1) \wedge 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \xi_2^2(0) \wedge 1 & \xi_2^2(1) \wedge 0 \\ \xi_2^2(0) \wedge 0 & \xi_2^2(1) \wedge 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \xi_1^2(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} \\ \xi_1^2(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \xi_2^2(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \xi_2^2(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} \vee \xi_2^2(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{1} & \xi_1^2(\mathbf{1}) \cdot \mathbf{1} \vee \mathbf{0} \\ \xi_1^2(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{1} \vee \mathbf{0} & \mathbf{0} \vee \xi_2^2(\mathbf{1}) \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_2^2(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} & \xi_1^2(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} \\ \xi_1^2(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} & \xi_2^2(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає система рівнянь:

$$\begin{cases} \xi_1^2(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} = \mathbf{0}, \\ \xi_1^2(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1}, \\ \xi_2^2(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} = \mathbf{0}, \\ \xi_2^2(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1^2(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \\ \xi_1^2(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \\ \xi_2^2(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \\ \xi_2^2(\mathbf{1}) = \mathbf{1}. \end{cases}$$

Це означає, що

$$\xi_1^2 = (\xi_1^2(\mathbf{0}), \xi_1^2(\mathbf{1})) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \boldsymbol{P_1},$$

$$\xi_2^2 = (\xi_2^2(\mathbf{0}), \xi_2^2(\mathbf{1})) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \boldsymbol{P_1}.$$

Таким чином, маємо

$$\boldsymbol{Q_2} = (\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_1})^T.$$

Нехай тепер координатами вектора $\boldsymbol{Q_{11}}$ в базисі $\{\boldsymbol{Q_6}, \boldsymbol{Q_9}\}$ є $\xi_1^{11} = (\xi_1^{11}(\mathbf{0}), \xi_1^{11}(\mathbf{1}))$ і $\xi_2^{11} = (\xi_2^{11}(\mathbf{0}), \xi_2^{11}(\mathbf{1}))$. Тоді

$$\boldsymbol{Q_{11}} = (\xi_1^{11}(\mathbf{0}), \xi_1^{11}(\mathbf{1})) \wedge \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \vee (\xi_2^{11}(\mathbf{0}), \xi_2^{11}(\mathbf{1})) \wedge \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_1^{11}(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{0} & \xi_1^{11}(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} \\ \xi_1^{11}(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} & \xi_1^{11}(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{0} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \xi_2^{11}(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} & \xi_2^{11}(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{0} \\ \xi_2^{11}(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{0} & \xi_2^{11}(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \xi_1^{11}(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} \\ \xi_1^{11}(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \xi_2^{11}(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \xi_2^{11}(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} \vee \xi_2^{11}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{1} & \xi_1^{11}(\mathbf{1}) \cdot \mathbf{1} \vee \mathbf{0} \\ \xi_1^{11}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{1} \vee \mathbf{0} & \mathbf{0} \vee \xi_2^{11}(\mathbf{1}) \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_2^{11}(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} & \xi_1^{11}(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} \\ \xi_1^{11}(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} & \xi_2^{11}(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає система рівнянь:

$$\begin{cases} \xi_1^{11}(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} = \mathbf{0}, \\ \xi_1^{11}(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1}, \\ \xi_2^{11}(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1}, \\ \xi_2^{11}(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1^{11}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \\ \xi_1^{11}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \\ \xi_2^{11}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}, \\ \xi_2^{11}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}. \end{cases}$$

Це означає, що

$$\xi_1^{11} = (\xi_1^{11}(0), \xi_1^{11}(1)) = (0, 1) = \boldsymbol{P_1},$$
$$\xi_2^{11} = (\xi_2^{11}(0), \xi_2^{11}(1)) = (1, 1) = \boldsymbol{P_3}.$$

Таким чином, маємо

$$\boldsymbol{Q_{11}} = (\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_3})^T.$$

Отже,

$$\langle \boldsymbol{Q_2}, \boldsymbol{Q_{11}} \rangle = (\boldsymbol{P_1} \wedge \boldsymbol{P_1}) \vee (\boldsymbol{P_1} \wedge \boldsymbol{P_3}) =$$
$$= ((0, 1) \wedge (0, 1)) \vee ((0, 1) \wedge (1, 1)) = (0, 1) \vee (0, 1) = (0, 1) = \boldsymbol{P_1}.$$

Звідси випливає, що

$$(\boldsymbol{P_1}\overline{\boldsymbol{Q}}_8 \wedge \langle \boldsymbol{Q_2}, \boldsymbol{Q_{11}} \rangle\, \boldsymbol{Q_7}) \vee \boldsymbol{P_2}\boldsymbol{Q_{13}} \vee \boldsymbol{P_2}\overline{\boldsymbol{Q}}_7 =$$
$$= (\boldsymbol{P_1}\overline{\boldsymbol{Q}}_8 \wedge \boldsymbol{P_1}\boldsymbol{Q_7}) \vee \boldsymbol{P_2}\boldsymbol{Q_{13}} \vee \boldsymbol{P_2}\overline{\boldsymbol{Q}}_7 =$$

(*за законом дистрибутивності добутку на скаляр відносно кон'юнкції векторів*)

$$= \boldsymbol{P_1}\,(\overline{\boldsymbol{Q}}_8 \wedge \boldsymbol{Q_7}) \vee \boldsymbol{P_2}\boldsymbol{Q_{13}} \vee \boldsymbol{P_2}\overline{\boldsymbol{Q}}_7 =$$

(*за законом дистрибутивності добутку на скаляр відносно диз'юнкції векторів*)

$$= \boldsymbol{P_1}\,(\overline{\boldsymbol{Q}}_8 \wedge \boldsymbol{Q_7}) \vee \boldsymbol{P_2}\,(\boldsymbol{Q_{13}} \vee \overline{\boldsymbol{Q}}_7) =$$

$$= (0, 1)\left(\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \vee (1, 0)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}\right) =$$

$$= (0, 1)\left(\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \vee (1, 0)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= (0, 1)\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \vee (1, 0)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= (0, 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vee (1, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q_{15}}.$$

ВІДПОВІДЬ. $(\boldsymbol{P_1}\overline{\boldsymbol{Q}}_8 \wedge \langle \boldsymbol{Q_2}, \boldsymbol{Q_{11}} \rangle\, \boldsymbol{Q_7}) \vee \boldsymbol{P_2}\boldsymbol{Q_{13}} \vee \boldsymbol{P_2}\overline{\boldsymbol{Q}}_7 = \boldsymbol{Q_{15}}$.

4. $(\langle \boldsymbol{Q_2}, \boldsymbol{P_3}\boldsymbol{Q_3} \rangle \vee \langle \boldsymbol{P_3}\boldsymbol{Q_6}, \boldsymbol{Q_2} \rangle)\,(\overline{\boldsymbol{Q}}_7 \vee \overline{\boldsymbol{Q}}_5)$.

Розв'язання. Виконаємо спочатку тотожні перетворення з урахуванням властивостей згортки векторів:

$$(\langle \boldsymbol{Q_2}, \boldsymbol{P_3}\boldsymbol{Q_3} \rangle \vee \langle \boldsymbol{P_3}\boldsymbol{Q_6}, \boldsymbol{Q_2} \rangle)\,(\overline{\boldsymbol{Q}}_7 \vee \overline{\boldsymbol{Q}}_5) =$$

(*за законом дистрибутивності згортки щодо добутку вектора на скаляр*)

$$= ((\boldsymbol{P_3} \wedge \langle \boldsymbol{Q_2}, \boldsymbol{Q_3} \rangle) \vee (\boldsymbol{P_3} \wedge \langle \boldsymbol{Q_6}, \boldsymbol{Q_2} \rangle))\,(\overline{\boldsymbol{Q}}_7 \vee \overline{\boldsymbol{Q}}_5) =$$

(*за законом дистрибутивності скалярів*)

$$= (\boldsymbol{P_3} \wedge (\langle \boldsymbol{Q_2}, \boldsymbol{Q_3} \rangle \vee \langle \boldsymbol{Q_6}, \boldsymbol{Q_2} \rangle)) \, (\overline{\boldsymbol{Q}}_7 \vee \overline{\boldsymbol{Q}}_5) =$$

(*за законом комутативності згортки*)

$$= (\boldsymbol{P_3} \wedge (\langle \boldsymbol{Q_2}, \boldsymbol{Q_3} \rangle \vee \langle \boldsymbol{Q_2}, \boldsymbol{Q_6} \rangle)) \, (\overline{\boldsymbol{Q}}_7 \vee \overline{\boldsymbol{Q}}_5) =$$

(*за законом дистрибутивності згортки щодо диз'юнкції векторів*)

$$= (\boldsymbol{P_3} \wedge \langle \boldsymbol{Q_2}, \boldsymbol{Q_3} \vee \boldsymbol{Q_6} \rangle) \, (\overline{\boldsymbol{Q}}_7 \vee \overline{\boldsymbol{Q}}_5).$$

Обчислимо тепер диз'юнкцію векторів

$$\boldsymbol{Q_3} \vee \boldsymbol{Q_6} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q_7}.$$

Тобто маємо:

$$(\boldsymbol{P_3} \wedge \langle \boldsymbol{Q_2}, \boldsymbol{Q_3} \vee \boldsymbol{Q_6} \rangle) \, (\overline{\boldsymbol{Q}}_7 \vee \overline{\boldsymbol{Q}}_5) = (\boldsymbol{P_3} \wedge \langle \boldsymbol{Q_2}, \boldsymbol{Q_7} \rangle) \, (\overline{\boldsymbol{Q}}_7 \vee \overline{\boldsymbol{Q}}_5).$$

Для обчислення згортки $\langle \boldsymbol{Q_2}, \boldsymbol{Q_7} \rangle$ знайдемо розкладання цих векторів за базисом $\{\boldsymbol{Q_6}, \boldsymbol{Q_9}\}$. Як відомо із розв'язання попереднього прикладу, $\boldsymbol{Q_2} = (\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_1})^{\boldsymbol{T}}$. Нехай координатами вектора $\boldsymbol{Q_7}$ в базисі $\{\boldsymbol{Q_6}, \boldsymbol{Q_9}\}$ є $\xi_1^7 = (\xi_1^7(\mathbf{0}), \xi_1^7(\mathbf{1}))$ і $\xi_2^7 = (\xi_2^7(\mathbf{0}), \xi_2^7(\mathbf{1}))$. Тоді

$$\boldsymbol{Q_7} = (\xi_1^7(\mathbf{0}), \xi_1^7(\mathbf{1})) \wedge \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \vee (\xi_2^7(\mathbf{0}), \xi_2^7(\mathbf{1})) \wedge \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_1^7(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{0} & \xi_1^7(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} \\ \xi_1^7(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} & \xi_1^7(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{0} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \xi_2^7(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} & \xi_2^7(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{0} \\ \xi_2^7(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{0} & \xi_2^7(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \xi_1^7(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} \\ \xi_1^7(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \xi_2^7(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \xi_2^7(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} \vee \xi_2^7(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{1} & \xi_1^7(\mathbf{1}) \cdot \mathbf{1} \vee \mathbf{0} \\ \xi_1^2(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{1} \vee \mathbf{0} & \mathbf{0} \vee \xi_2^2(\mathbf{1}) \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_2^7(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} & \xi_1^7(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} \\ \xi_1^7(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} & \xi_2^7(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає система рівнянь:

$$\begin{cases} \xi_1^7(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1}, \\ \xi_1^7(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1}, \\ \xi_2^7(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{1} = \mathbf{0}, \\ \xi_2^7(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1^7(\mathbf{0}) = \mathbf{1}, \\ \xi_1^7(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \\ \xi_2^7(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \\ \xi_2^7(\mathbf{1}) = \mathbf{1}. \end{cases}$$

Це означає, що

$$\xi_1^7 = (\xi_1^7(\mathbf{0}), \xi_1^7(\mathbf{1})) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}) = \boldsymbol{P_3},$$

$$\xi_2^7 = (\xi_2^7(\mathbf{0}), \xi_2^7(\mathbf{1})) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \boldsymbol{P_1}.$$

Таким чином, маємо

$$\boldsymbol{Q_7} = (\boldsymbol{P_3}, \boldsymbol{P_1})^{\boldsymbol{T}}.$$

Отже,

$$\langle \boldsymbol{Q_2}, \boldsymbol{Q_7}\rangle = (\boldsymbol{P_1} \wedge \boldsymbol{P_3}) \vee (\boldsymbol{P_1} \wedge \boldsymbol{P_1}) =$$
$$= ((0,1) \wedge (1,1)) \vee ((0,1) \wedge (0,1)) = (0,1) \vee (0,1) = (0,1) = \boldsymbol{P_1}.$$

Звідси випливає, що

$$(\langle \boldsymbol{Q_2}, \boldsymbol{P_3Q_3}\rangle \vee \langle \boldsymbol{P_3Q_6}, \boldsymbol{Q_2}\rangle)\,(\overline{\boldsymbol{Q}}_7 \vee \overline{\boldsymbol{Q}}_5) =$$
$$= (\boldsymbol{P_3} \wedge \langle \boldsymbol{Q_2}, \boldsymbol{Q_7}\rangle)\,(\overline{\boldsymbol{Q}}_7 \vee \overline{\boldsymbol{Q}}_5) =$$
$$= (\boldsymbol{P_3} \wedge \boldsymbol{P_1},)\,(\overline{\boldsymbol{Q}}_7 \vee \overline{\boldsymbol{Q}}_5) =$$
$$= ((1,1) \wedge (0,1)) \wedge \left(\overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \vee \overline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}\right) =$$
$$= (0,1) \wedge \left(\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}\right) = (0,1) \wedge \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= (0,1) \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q_2}.$$

ВІДПОВІДЬ. $(\langle \boldsymbol{Q_2}, \boldsymbol{P_3Q_3}\rangle \vee \langle \boldsymbol{P_3Q_6}, \boldsymbol{Q_2}\rangle)\,(\overline{\boldsymbol{Q}}_7 \vee \overline{\boldsymbol{Q}}_5) = \boldsymbol{Q_2}$.

3.2.2. *Контрольні запитання*

1. Що називається базисом логічного простору?
2. Що є визначальною особливістю досконалого і недосконалого логічних просторів?
3. Який вигляд мають матриця переходу до нового базису і матриця зворотного переходу?
4. Який зв'язок існує між матрицею переходу до нового базису і матрицею зворотного переходу?
5. Яким є повний простір $\boldsymbol{m}$-місних предикатів, заданий над скалярним полем $\boldsymbol{n}$-місних предикатів, $\boldsymbol{n} < \boldsymbol{m}$?
6. Для яких логічних просторів можна ввести операції кон'юнкції, заперечення та згортки логічних векторів і чому? Наведіть приклади цих операцій для предикатного логічного простору.
7. Що можна стверджувати відносно цих операцій щодо вибору базису?
8. Які властивості щодо цих операцій виконуються для будь-яких логічних векторів $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{L}$?
9. Як можна подати заперечення базисного вектора логічного простору за допомогою решти базисних векторів цього простору?
10. За якими правилами можна виконувати операції кон'юнкції та заперечення логічних векторів незалежно від обраного базису?

3.2.3. *Контрольні завдання*

А) ***Із використанням таблиці 1, таблиці 2 і таблиці 3 обчислити наступні вирази аналітично-графічним методом*:**

1) $(\overline{\overline{P_1R_{18}} \vee P_2R_{114}}) \wedge (\overline{P_1R_{114}} \vee P_2R_{18}) \vee P_3\overline{R}_{204}$;

2) $(\overline{\overline{P_3R_{200}} \vee \overline{P_1R_{148}}}) \vee (\overline{P_1R_{43}} \vee P_2R_{148}) \vee \overline{P}_2R_3$;

3) $(\overline{P_1R_{218} \vee \overline{P_1R_{13}}}) \vee (P_2R_{218} \vee \overline{P_3R_{100}}) \vee P_1R_{13}$;

4) $(P_2\overline{R}_{158} \vee \overline{P_1R_{130}}) \wedge (\overline{P}_2R_{158} \vee \overline{P_1\overline{R}_{130}}) \vee P_3R_{10}$;

5) $(\overline{P_1\overline{R}_{12} \vee P_3R_{131} \vee P_2\overline{R}_{214}}) \wedge \overline{P_3R_{131}}$;

6) $(\overline{\overline{Q_5R_{203}} \vee Q_7R_{12}}) \vee (\overline{\overline{Q_7R_{12}} \vee Q_8R_{14}})$;

7) $(\overline{\overline{Q}_9\overline{R}_{13} \wedge Q_8R_{205}}) \vee (\overline{\overline{Q}_7\overline{R}_{13} \vee Q_8R_{205}})$;

8) $(\overline{Q_{10}R_{162} \vee \overline{\overline{Q}_{11}\overline{R}_{28}}}) \wedge Q_{12}\ (Q_1R_{162} \vee Q_1R_{28})$;

9) $(\overline{\overline{Q}_{14}R_{25}} \vee \overline{Q_6\overline{R}_{48}}) \vee (\overline{\overline{Q}_6R_{48}} \vee \overline{Q_8\overline{R}_{25}})$;

10) $(\overline{\overline{Q}_3\overline{R}_{115} \wedge \overline{Q}_{14}\overline{R}_2}) \wedge (\overline{Q}_3R_{115} \vee \overline{Q}_7R_2)$.

Б) ***Обчислити аналітично з використанням таблиці 2 і таблиці 3 наступні вирази*:**

1) $\overline{\langle Q_1, Q_{13}\rangle\, \overline{Q}_8} \vee (\overline{P}_2Q_7 \wedge \overline{\overline{P}_1\overline{Q}_6})$;

2) $((\overline{\overline{P_3\overline{Q}_4} \vee P_1Q_9}) \wedge \langle Q_3, Q_5\rangle\, Q_9) \vee P_2Q_4$;

3) $(\overline{(P_3 \wedge \langle Q_1, Q_7\rangle)\overline{Q}_{10} \vee \overline{P_1Q_{12}}}) \vee \overline{P_1(Q_3 \wedge Q_{10})}$;

4) $\overline{(P_2Q_2 \vee P_3Q_3 \vee P_1Q_{11}) \wedge (\overline{P_1\overline{Q}_3 \vee P_2\overline{Q}_{11}})} \vee \langle Q_2, Q_3\rangle\, Q_3$;

5) $(\langle Q_7, \overline{Q}_{12}\rangle\, Q_{10} \wedge P_3Q_2) \vee (\overline{P_1Q_2 \vee P_2Q_{12}})$;

6) $\overline{P_1\overline{Q}_7 \vee (\langle P_1Q_2, Q_8\rangle\, Q_{12} \wedge P_3\overline{Q}_7)}$;

7) $P_3Q_{14} \wedge (\overline{\langle P_3Q_{12}, P_2Q_{13}\rangle \vee \overline{\overline{P}_1Q_{14}}})$;

8) $(P_1Q_4 \vee ((\langle Q_8, Q_9\rangle \vee \langle Q_8, Q_{10}\rangle)\, Q_4 \wedge \overline{P_2Q_2})$;

9) $\overline{P_3Q_{10}} \vee ((P_1 \wedge \langle Q_6, Q_7\rangle) \vee (P_2 \wedge \langle Q_6, Q_{11}\rangle)\, (\overline{Q}_3 \vee \overline{Q}_2)$;

10) $\overline{(\langle Q_1, Q_3\rangle \vee \langle Q_1, Q_9\rangle)(\overline{Q}_8 \wedge \overline{Q}_{12})} \vee \overline{P_2Q_1}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Якімова Н. А. Логічна алгебра: методичний посібник. – Одеса: «Освіта України». – 2019.– 40 с.
2. Якімова Н. А. Дискретна математика. Частина 2. Булеві функції: курс лекцій. – Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. – 126 с.
3. Вечірська І. Д., Гончаров І. Є., Шепілов С. І. Дослідження логіки скінченних предикатів як композиційно-номінативної логіки.// Біоніка інтелекта. – 2014. – Вип. 2 (83). С. 53 – 60.
4. Гончаров С. В., Каніщева О. . Алгебра скінченних предикатів як складова інформаційних технологій. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – 67 с.
5. Yakimova N. A. Operations on predicate logic matrices.// The modern vector of the development of science. Proceedings of the XV international scientific conference. Philadelphia. USA. 15 – 16.08.2024.
6. Якімова Н. А. Дискретна математика. Частина 1. Теорія множин. Теорія графів: курс лекцій. – Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2022. – 102 с.
7. Dudar Z. V., Kravetz N. S., Shabanov-Kushnarenko Yu. P. On fundamental algebra of predicative operations. // Problems of bionic. 1998. Vol. 49. P. 3 – 13.
8. Gvozdinskaya N. A., Dudar Z. V., Poslavskiy S. A., Shabanov-Kushnarenko Yu. P. On logical spaces// ACS and automation devices. 1997. Vol. 106. P. 21 – 30.
9. Shabanov-Kushnarenko Yu. P. Incomplete and complete logical spaces// Problems of bionic. 1991. Vol. 46. P. 10 – 17.
10. Shabanov-Kushnarenko Yu. P. Logical algebra// Problems of bionic. 1991. Vol.46. P.3 – 10.
11. Yakimova N.A. Rotating logical matrices. // Current challenges of science and education. Proceedings of the 12th International scientific and practical conference. MDPC Publishing. Berlin, Germany. July 29 – 31, 2024. Pp. 177-180.
12. Зиков. О. О. Лекції з алгебри. – Одеса: «Астропринт», 2007. – 400 с.
13. Шабанов-Кушнаренко Ю. П. Теорія інтелекту. Математичні засоби. – Харків: Вища школа, 1984. – 144 с.
14. Gvozdinskiy A. N., Yakimova N. A. Logical-algebraic models of knowledge representation systems// ACS and automation devices. 2003. Vol. 124. P. 43 – 47.
15. Якімова Н. А. Операції над блочними предикатними матрицями.// Вісник Одеського національного університету ім. І. І. Мечникова. Дослідження в математиці і механіці. – 2023. – Том 28. – Випуск 1 – 2 (41 – 42). – С. 185-199.
16. Літнарович Р. К. Алгебра матриць. Курс лекцій. – Рівне: МЕГУ, 2007. – 112 с.
17. Гантмахер Ф. Р. Теорія матриць. – Київ: Надруковано в Україні, 2010. – 560 с.
18. Gvozdinskaya N. A., Dudar Z. V., Poslavskiy S. A., Shabanov-Kushnarenko Yu. P. On logical matrices. // Problems of bionic. 1998. Vol. 48. P. 12 – 22.
19. Якімова Н. А. Предикатні логічні матриці// Вісник Одеського національного університету ім. І.І. Мечникова. Дослідження в математиці і механіці. – 2019. – Том 24. – Випуск 2 (34) – С. 67 – 74.
20. Дементьєва В. І. Лінійна алгебра: Конспект лекцій. – Одеса: «Астропринт», 1999. – 256 с.

21. Булдигін В. В., Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник. – Київ: ТВіМС, 2011. – 224 с.
22. Yakimova N. A. Operation of reversing of logical matrices// SWorldJournal. – September, 2024. – Issue № 27. Part 1. – P. 165 – 172.
23. Якімова Н. А. Елементи теорії множин: навчально-методичний посібник. - Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. – 84 с.

Навчальне видання

Якімова Наталія Анатоліївна

ВЕКТОРНА ЛОГІЧНА АЛГЕБРА

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

з дисципліни «Алгебра скінченних предикатів»
для здобувачів спеціальності 111 Математика

Електронне видання мережевого використовування

В авторській редакції

Затвердж. авт. 27.01.2025. Шрифт Times New Roman.
Системні вимоги: операційна система сумісна з програмним забезпеченням
для читання файлів формату PDF.
Обсяг 7,1 МБ. Зам. № 2926.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
вул. Університетська, 12, м. Одеса, 65082, Україна
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua