

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій  
Кафедра методів математичної фізики

## Дипломна робота

бакалавра

на тему: **«Вісісиметрична задача кручення пружнього  
циліндру з круговою тріщиною»**

«Axisymmetric problem of torsion of an elastic cylinder with a circular crack»

Виконав: студент денної форми навчання  
спеціальності 113 Прикладна математика  
Іванов Віктор Ігорович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Проце-  
ров Ю. С.

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук, проф.  
Вайсфельд Н.Д.

Рекомендовано до захисту:  
Протокол засідання кафедри  
№ \_\_\_\_ від «\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ р.  
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № \_\_\_\_\_  
Протокол № \_\_\_\_ від «\_\_\_\_» \_\_\_\_ р.  
Оцінка \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_  
Голова ЕК

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Одеса — 2022 р.

## ЗМІСТ

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| Вступ                                                                 | 3  |
| 1 Основна частина                                                     | 4  |
| 1.1 Постановка задачі . . . . .                                       | 4  |
| 1.2 Зведення задачі до одновимірної крайової задачі . .               | 6  |
| 1.3 Розв’язок одновимірної крайової задачі . . . . .                  | 7  |
| 1.4 Отримання інтегрального рівняння та аналіз його<br>ядра . . . . . | 12 |
| Висновки                                                              | 14 |
| Список літератури                                                     | 15 |

## ВСТУП

В багатьох конструкціях машинобудування та будівництва використовуються елементи циліндричної форми, що підлягають крученню. Наявність у цих елементах дефектів у вигляді тріщин знижає їх механічну стійкість та може спричинити руйнування. Тому задачі теорії пружності для тіл циліндричної форми з дефектами є актуальними.

Дана дипломна робота саме присвячена розгляданню вісісиметричної задачі кручення пружного циліндру з круговою тріщиною. За допомогою методу інтегральних перетворень розв'язок цієї задачі зведено до інтегрального рівняння відносно невідомого стрибка переміщень на тріщині. Отримане інтегральне рівняння, після виділення сингулярної частини ядра, було представлено у такому вигляді, який допускає його розв'язання за допомогою метода ортогональних многочленів.

# РОЗДІЛ 1

## ОСНОВНА ЧАСТИНА

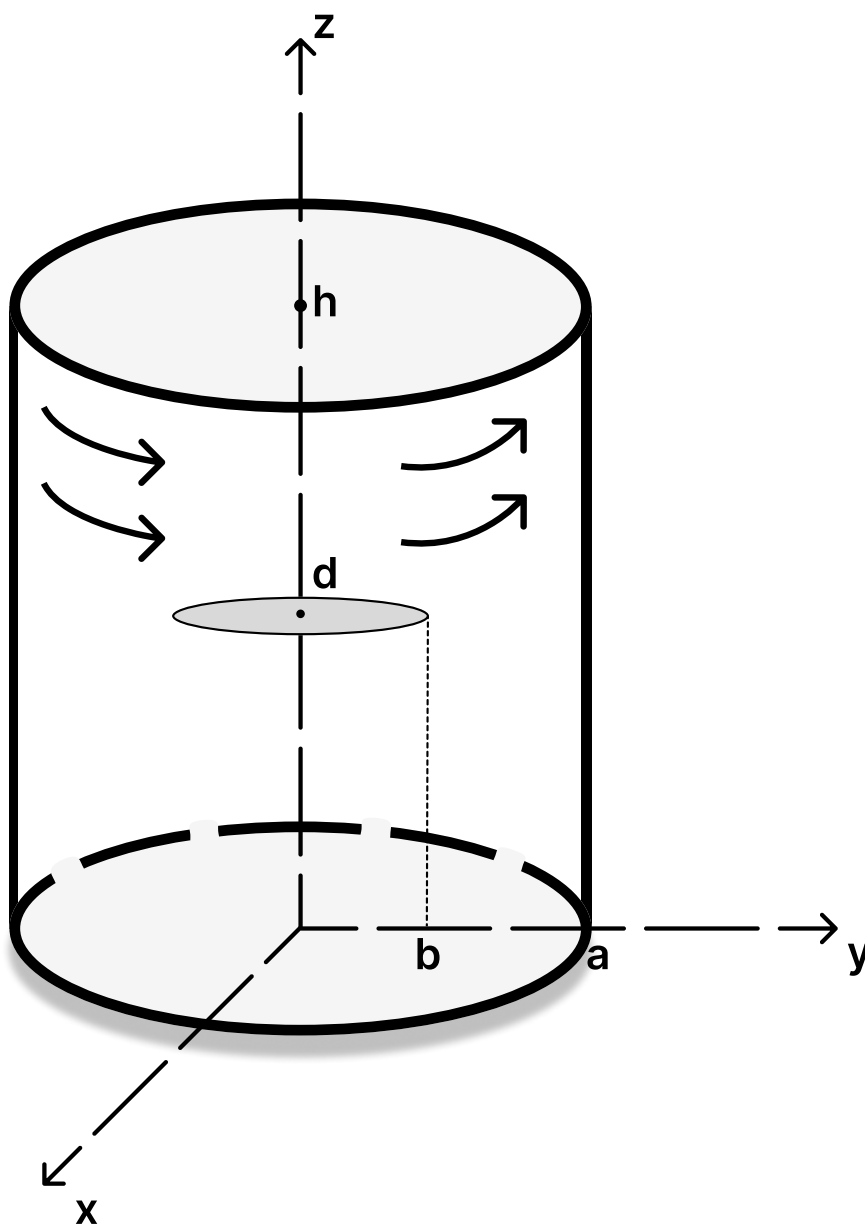
### Постановка задачі

Розглянемо прямий круговий циліндр, який займає у циліндричній системі координат

$$(r, \varphi, z)$$

область

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h.$$



Нижня основа циліндра  $z = 0$  нерухомо закріплена, верхня основа  $z = h$  вільна від напружень. До бічної поверхні прикладено вісісиметричне дотичне навантаження, що викликає кручення циліндра. У цьому випадку всі величини не будуть залежати від кутової координати  $\varphi$ .

Відмінні від нуля будуть:

кутове переміщення

$$u(r, z) = u_\varphi(r, z)$$

та дотичні напруження

$$\tau_{r\varphi} = G\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}u\right)$$

та

$$\tau_{z\varphi} = G\frac{\partial u}{\partial z},$$

де  $G$  модуль зсуву матеріала циліндра. Переміщення  $u(r, \varphi)$  повинне задовольняти рівнянню Ламе:

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}u + r\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$0 \leq r \leq a$$

$$0 \leq z \leq h$$

та крайовим умовам:

$$u|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=h} = 0$$

$$\tau_{r\varphi} = G\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}u\right)|_{r=a} = p(z)$$

$$u(r, z) \text{ обмежена при } r \rightarrow 0.$$

У середині циліндра в області

$$0 \leq r \leq b, z = d$$

є кругова тріщина, береги якої вільні від напружень. При переході через тріщину переміщення зазнає невідомий стрибок.

$$\langle u \rangle = u(r, d-0) - u(r, d+0) = \chi(r), \quad 0 \leq r \leq b$$

$$\chi(r) = 0, \quad b \leq r \leq a$$

$$\chi(b) = 0$$

Береги тріщини вільні від напружень:

$$\tau_{z\varphi}|_{z=d\pm 0} = G \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=d\pm 0} = 0$$

$$\text{звідки } \langle \frac{\partial u}{\partial z} \rangle = 0.$$

### Зведення задачі до одновимірної крайової задачі

Для зведення задачі до одновимірної застосуємо перетворення Фур'є за змінною  $z$  за узагальненою схемою до рівняння та крайової умови, коли  $r = a$ :

$$u_k(r) = \int_0^h u(r, z) \sin \lambda_n z dz$$

де

$$\lambda_k = \frac{\pi}{2h}(2k-1), k \in \mathbb{N}.$$

З формулою обернення:

$$u(r, z) = \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(r) \sin \lambda_k z$$

У результаті ми отримали неоднорідну одновимірну крайову задачу від змінної  $r$  відносно трансформанти Фур'є  $u_k(r)$ :

$$ru_k''(r) + u_k'(r) - \frac{1}{z}u_k(r) - r\lambda_k^2 u_k(r) = \lambda_k \chi(r) \cos \lambda_k d.$$

та крайову умову:

$$u'_k(a) - \frac{1}{a}u_k(a) = \frac{1}{G}p_k,$$

де

$$p_k = \int_0^h p(z) \sin \lambda_k z dz.$$

Права частина отриманого рівняння містить невідому функцію  $\chi(\rho)$ . Отримане рівняння є рівнянням Бесселя для модифікованих функцій Бесселя  $I_1(\lambda_k r)$  та  $K_1(\lambda_k r)$ .

### Розв'язок одновимірної крайової задачі

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$ru_k''(r) + u_k'(r) - \frac{1}{z}u_k(r) - r\lambda_k^2 u_k(r) = 0$$

має вигляд:

$$u_k(r) = A_k I_1(\lambda_k r) + B_k K_1(\lambda_k r),$$

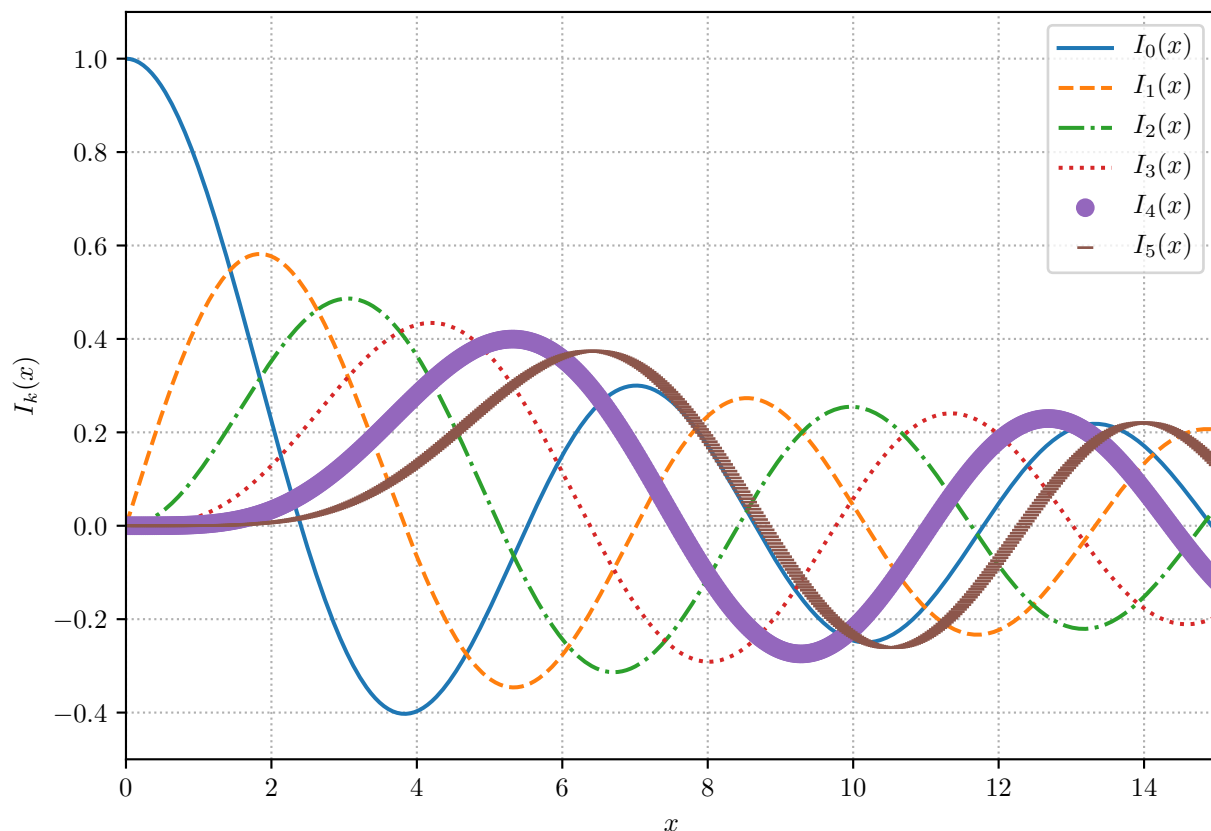
де  $A_k$  та  $B_k$  – невідомі сталі.

Беручи до уваги, що функція Бесселя  $I_1(\lambda_k r)$  обмежена коли  $r \rightarrow 0$ , а функція  $K_1(\lambda_k r)$  необмежена при  $r \rightarrow 0$ . З умови обмеженості переміщення при  $r = 0$  покладемо  $B_k = 0$ . Таким чином розв'язок однорідного рівняння:

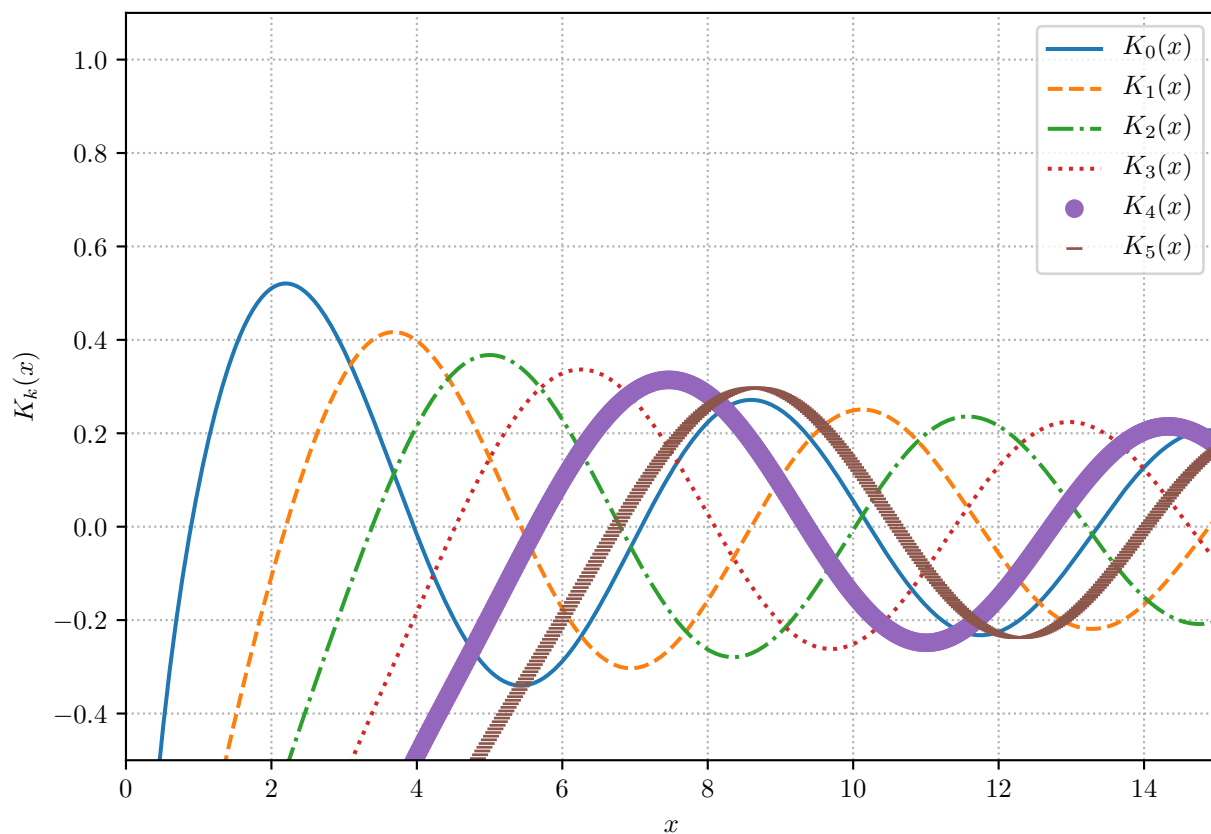
$$u_k(r) = A_k I_1(\lambda_k r)$$

Графіки функцій Бесселя 1-го та 2-го роду (Неймана) має вигляд:

## Bessel function of the 1st kind



## Bessel function of the 2nd kind





Щоб отримати частинний розв'язок неоднорідного рівняння, можна скористатися фундаментальною функцією  $\Phi_k(r, \rho)$ :

$$\Phi_k(r, \rho) = - \begin{cases} I_1(\lambda_k \rho) K_1(\lambda_k r), & 0 \leq \rho < r \leq a; \\ I_1(\lambda_k r) K_1(\lambda_k \rho), & 0 \leq r < \rho \leq a. \end{cases}$$

Яку також можна записати у вигляді:

$$\Phi_k(r, \rho) = - \int_0^\infty J_1(\rho x) J_1(r x) \frac{x dx}{x^2 + \lambda_k^2}$$

У результаті, загальний розв'язок неоднорідного рівняння, обмеженого при  $r = 0$ , має вигляд:

$$u_k(r) = A_k I_1(\lambda_k r) + \lambda_k \cos \lambda_k d \int_0^b \chi(\rho) \Phi_k(r, \rho) \rho d\rho.$$

Знайдемо  $A_k$  із крайової умови:

$$a u'_k(a) - u_k(a) = \frac{a}{G} p_n.$$

У ході розв'язку, скористаємося формулами диференціювання модифікованих функцій Бесселя:

$$\begin{bmatrix} a \lambda_k I_2(\lambda_k a) = a \lambda_k I'_1(\lambda_k a) - I_1(\lambda_k a) \\ -a \lambda_k K_2(\lambda_k a) = a \lambda_k K'_1(\lambda_k a) - K_1(\lambda_k a) \end{bmatrix}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} & a A_k I'_1(\lambda_k a) \lambda_k - A_k I_1(\lambda_k r) - \\ & - \lambda_k \cos \lambda_k d a \int_0^b \chi(\rho) I_1(\lambda_k \rho) K'_1(\lambda_k a) \lambda_k d\rho + \\ & + \lambda_k \cos \lambda_k d \int_0^b \chi(\rho) I_1(\lambda_k \rho) K_1(\lambda_k a) d\rho = \frac{a}{G} p_k \end{aligned}$$

Отримали:

$$A_k = \frac{p_k}{G\lambda_k I_2(\lambda_k a)} - \frac{\lambda_k \cos \lambda_k d}{I_2(\lambda_k a)} \int_0^b \chi(\rho) I_1(\lambda_k \rho) K_2(\lambda_k a) d\rho$$

Підставимо  $A_k$  у вираз для  $u_k(r)$ :

$$\begin{aligned} u_k(r) = & \frac{p_k I_1(\lambda_k r)}{G\lambda_k I_2(\lambda_k a)} - \frac{\lambda_k I_1(\lambda_k r) \cos \lambda_k d}{I_2(\lambda_k a)} K_2(\lambda_k a) \int_0^b \chi(\rho) I_1(\lambda_k \rho) d\rho + \\ & + \lambda_k \cos \lambda_k d \int_0^b \chi(\rho) \Phi_k(r, \rho) \rho d\rho. \end{aligned}$$

Далі, застосуємо формулу звернення

$$u(r, z) = \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(r) \sin \lambda_k z$$

та отримуємо:

$$\begin{aligned} u_k(r) = & \frac{2}{Gh} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k I_2(\lambda_k a)} \sin \lambda_k r - \\ & - \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k I_1(\lambda_k r) \cos \lambda_k d \sin \lambda_k z}{I_2(\lambda_k a)} K_2(\lambda_k a) \int_0^b \chi(\rho) I_1(\lambda_k \rho) \rho d\rho + \\ & + \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos \lambda_k d \sin \lambda_k z \int_0^b \chi(\rho) \Phi_k(r, \rho) \rho d\rho \end{aligned}$$

Розглянемо останній доданок та запишемо його у вигляді:

$$\frac{2}{h} \int_0^b \chi(\rho) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \cos \lambda_k d \sin \lambda_k z \Phi(k(r, \rho)) \right] \rho d\rho$$

Підставимо вираз:

$$\Phi_k(r, \rho) = - \int_0^{\infty} J_1(rx) J_1(\rho x) \frac{x dx}{x^2 + \lambda_k^2}$$

та використаємо тотожність

$$J_1(rx)J_1(\rho x) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \rho} J_0(rx)J_0(\rho x)$$

і застосуємо формулу

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1) \sin(2k-1)x}{(2k-1)^2 + a^2} = \frac{\pi \cosh(\frac{\pi}{2} - x)a}{4 \cosh \frac{\pi a}{2}}$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned} u(r, z) = & -\frac{1}{2} \int_0^b \chi(\rho) \rho d\rho \frac{\partial^2}{\partial r \partial \rho} \int_0^\infty J_0(rx) J_0(\rho x) [\cosh(h - (z + d))x + \\ & + \operatorname{sign}(z - d) \cosh(h - |z - d|)] x \frac{dx}{x \cosh hx} + \\ & + \frac{2}{h} \int_0^b \chi(\rho) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \cos \lambda_k d \sin \lambda_k z}{I_2(\lambda_k)} I_1(\lambda_k r) I_1(\lambda_k \rho) K_2(\lambda_k a) \right] \rho d\rho + \\ & + \frac{2}{Gh} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k I_2(\lambda_k a)} \sin \lambda_k z. \end{aligned}$$

Для того щоб знайти  $\chi(\rho)$ , скористаємося умовою на тріщину:

$$\tau_{z\varphi}|_{z=d\pm 0} = G \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=d\pm 0} = 0, \implies \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=d\pm 0} = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \int_0^b \chi(\rho) \rho d\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^\infty J_0(rx) J_0(\rho x) dx + \\ & + \int_0^b \chi(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty J_1(rx) J_1(\rho x) \left[ \frac{\sinh(h - 2d)x}{\cosh hx} + \tanh hx - 1 \right] x^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{h} \int_0^b \chi(\rho) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 \cos \lambda_k d^2}{I_2(\lambda_k a)} I_1(\lambda_k r) I_1(\lambda_k \rho) K_2(\lambda_k a) \right] \rho d\rho = \\ - = \frac{4}{Gh} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{I_1(\lambda_k r)}{I_2(\lambda_k a)} \cos \lambda_k d \end{aligned}$$

Перейдемо від проміжку  $(0, b)$  до проміжку  $(0, 1)$ .

Зробимо заміну:

$$r = b\eta, \quad \rho = b\xi, \quad \eta, \xi \in (0, 1), \quad x = \frac{t}{b}.$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^1 \chi(b\xi) \xi d\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\infty J_0(\eta t) J_0(\xi t) dt + \\ + b \int_0^1 \chi(b\xi) \xi d\xi \int_0^\infty J_1(\eta t) J_1(\xi t) \left[ \frac{\sin(\frac{h-2d}{b}t)}{\cosh tbh} + \tanh \frac{h}{b}t - 1 \right] t^2 dt + \\ \frac{4b^3}{h} \int_0^1 \chi(b\xi) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 \cos \lambda_k d^2}{I_2(\lambda_k a)} I_1(\lambda_k b\eta) I_1(\lambda_k b\xi) K_2(\lambda_k a) \right] \xi d\xi = \\ = -\frac{4b}{Gh} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{I_1(\lambda_k b\eta)}{I_2(\lambda_k a)} \cos \lambda_k d. \end{aligned}$$

## Отримання інтегрального рівняння та аналіз його ядра

Позначимо:  $\Psi(\xi) = \chi(b\xi)$

$$K_1(r, \xi) = b \int_0^\infty J_1(t\eta) J_1(t\xi) \left[ \frac{\sinh \frac{h-2d}{b}t}{\cosh \frac{h}{b}t} + \tanh \frac{h}{b}t - 1 \right] t^2 dt$$

$$K_2(\eta, \xi) = \frac{4b^3}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda k^2 \cos \lambda k^2 d}{I_2(\lambda k a)}$$

$$S(\eta, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} W_{oo}(\eta, \xi)$$

де

$$W_{oo}(\eta, \xi) = \int_0^1 J_0(t\eta) J_0(t\xi) dt$$

- інтеграл Вебера-Шафхейтліна, який має розрив при  $\eta = \xi$ .

Ядра  $K_1(r, \xi)$  та  $K_2(\eta, \xi)$  - регулярні, містять інтеграли та ряди, які сходяться.

Ядро  $S(\eta, \xi)$  - сингулярне, має особливість при  $\eta = \xi$ .

Отримаємо інтегрально-диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^1 \Psi(\xi) S(\eta, \xi) \xi d\xi + \int_0^1 [K_1(\eta, \xi) + K_2(\eta, \xi)] \Psi(\xi) \xi d\xi = f(\eta),$$

де

$$f(\eta) = -\frac{4b}{Gh} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{I_1(\lambda_k b \eta)}{I_2(\lambda_k a)} \cos \lambda_k d.$$

Для розв'язання цього інтегрально-диференційного рівняння можна застосувати метод ортогональних многочленів. [3] [4]

## ВИСНОВКИ

В дипломній роботі була розглянута вісісиметрична задача кручення пружнього циліндру з круговою тріщиною. Розв'язок цієї задачі зведено до інтегрально-диференційного рівняння. Проаналізовано ядра цього рівняння та виділено його сингулярну частину у вигляді похідної від інтеграла Вебера-Шефхейтліна. Після цього розв'язок отриманого рівняння може бути побудовано методом ортогональних многочленів.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Процеров Ю.С. Методичні вказівки до курсу «Математичне моделювання деяких задач механіки і техніки» для студентів 3 курсу спеціальності «Прикладна математика» / Ю.С. Процеров, О.П. Мойсєєнок. – Одеса, 2015. – 61 с.
2. Попов Г.Я., Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. Навчальний посібник з курсу «Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень», Одеса, 2005, 184 с.
3. Попов Г.Я., Реут В.В., Моїсєєв Н.Г., Вайсфельд Н.Д. Навчальний посібник з курсу «Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів», Одеса, 2010, 120 с.
4. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и напряжений. М. Наука, 1982, 343 с.
5. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М. Наука, 1974, 296 с.
6. Yu. Protserov, N. Vaysfeld. The torsion problem for an elastic multilayered finite cylinder with a circular crack. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition). Vol. 38, No 3, Mar. 2017, p. 423 – 438.
7. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, Д.И. Маричев. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М. Наука, 1981, 800с.