

УДК 517.956

О. Д. Кічмаренко, М. Л. Карпичева

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

УСЕРЕДНЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ КЕРОВАНИХ СИСТЕМ З ПОСТІЙНИМ ЗАПІЗНЕННЯМ НА ДИСКРЕТНОМУ ЧАСІ

**Кічмаренко О. Д., Карпичева М. Л. Усреднение периодических керо-
ванных систем с постоянным запаздыванием на дискретном времени.** У роботі розглядаються системи дискретних рівнянь із запізненням у задачах керування та обґрунтовується метод усереднення для систем дискретних рівнянь з періодичними правими частинами, які містять малий параметр.

Ключові слова: система дискретних рівнянь, керування, запізнення, малий параметр, усереднення.

**Кичмаренко О. Д., Карпичева М. Л. Усреднение периодических управ-
ляемых систем с постоянным запаздыванием на дискретном времени.** В работе рассматриваются системы дискретных уравнений с запаздыванием в задачах управления и обосновывается метод усреднения для систем дискретных уравнений с периодическими правыми частями, которые содержат малый параметр.

Ключевые слова: система дискретных уравнений, управление, запаздывание, малый параметр, усреднение.

**Kichmarengo O. D., Karpicheva M. L. Averaging of periodic controlled sys-
tems with constant delay on discrete time.** In this paper we consider a system of discrete equations with delay in control problems and proves method of averaging for systems of discrete equations with periodic right-hand sides containing a small parameter.

Key words: system of discrete equations, control, delay, a small parameter, the average.

Вступ. Багато наукових і технічних задач приводять до необхідності розв'язувати дискретні рівняння. Прикладами можуть служити: проектування імпульсних систем в теорії автоматичного керування, розрахунок цифрових фільтрів у теорії зв'язку, аналіз погрешностей розв'язків диференціальних рівнянь чисельними методами тощо.

Застосуванню дискретних рівнянь для дослідження процесів, пов'язаних з визначенням стану системи у дискретні моменти часу, присвячені роботи [8, 9]. Для таких досліджень використовуються як класичні методи знаходження розв'язку дискретних рівнянь та їх систем, так і метод усереднення, який дозволяє отримати асимптотичний розв'язок.

У даний час в теорії дискретних рівнянь сформувався напрям – дискретні рівняння із запізненням. Рівняння цього типу по суті є дискретними рівняннями вищого порядку або порівняно легко зводяться до останніх. Інша справа, що таке зведення в більшості випадків не спрощує поставлену проблему. Величина запізнення є суттєвим фактором, що впливає на поведінку розв'язку дискретного рівняння, зокрема, на його стійкість.

Перехід від рівняння із запізненням до відповідного рівняння без запізнення, але вищого порядку, передбачає фіксацію величини запізнення. Це ускладнює отримання висновків про залежність властивостей розв'язків від величини

і характеру запізнення. Не кажучи вже про те, що при такому підході важко отримати функціональну залежність від величини запізнення умови наявності тієї або іншої властивості. Тому для дискретних рівнянь із запізненням доцільно розвивати спеціальні методи дослідження [1, 5].

У роботі розглядаються системи дискретних рівнянь із запізненням у задачах керування та обґрунтовується метод усереднення для систем дискретних рівнянь з періодичними правими частинами, які містять малий параметр.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ.

1. Постановка задачі. Нехай рух керованого об'єкта описується системою дискретних рівнянь із запізненням:

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon \cdot [f(i, x_i, x_{i-1}) + A(x_i, x_{i-1}) \cdot \varphi(i, u_i)], \quad (1)$$

$$x_{-1} = x^1, \quad x_0 = x^0,$$

де $x_i \in D \subset R^n$ – фазовий вектор, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $f(i, x_i, x_{i-1})$, $\varphi(i, u_i)$ – задані вектор-функції, $A(x_i, x_{i-1})$ – задана $n \times m$ -матриця, $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, $N = E(L\varepsilon^{-1})$, $L = \text{const}$, $E(s)$ – ціла частина числа s , задані значення x^0 , x^1 визначають початковий та попередній стан, що характеризує вплив запізнення на поточний стан системи, $u_i \in U \subset \text{comp}(R^r)$ – вектор керування, $\text{comp}(R^r)$ – простір компактних підмножин у просторі R^r з метрикою Хаусдорфа

$$\delta(A, B) = \min \{ d \geq 0 : B \subset S_d(A), A \subset S_d(B) \},$$

де $S_d(A)$ – замкнутий d -окіл компактної множини $A \subset R^r$.

2. Лема заморожування. Розглянемо допоміжну систему дискретних рівнянь із запізненням, рівним нулю,

$$z_{i+1} = z_i + \varepsilon \cdot [f(i, z_i, z_i) + A(z_i, z_i) \cdot \varphi(i, u_i)], \quad z_0 = x^0 \quad (2)$$

і доведемо лему "заморожування".

Лема. Нехай в області $Q = \{ i \in I; x, y \in D; u \in U \}$ виконані умови:

1) функції $f(i, x, y)$ і $A(x, y)$ обмежені константою M і задовольняють умові Ліпшиця по x, y з постійною λ ;

2) функція $\varphi(i, u)$ обмежена константою M ;

3) для будь-яких керувань $u_i \in U$ розв'язок $z = z_i$, $i \in I$ системи (2) при $z_0 = x^0 \in D' \subset D$ разом з ρ -околом належать області D .

Тоді існують такі $C > 0$ і $\varepsilon_1 > 0$, що для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ і для будь-якого $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, $N = E(L\varepsilon^{-1})$ справедлива оцінка

$$\|x_i - z_i\| \leq C\varepsilon,$$

де x_i і z_i – розв'язки систем рівнянь (1) і (2) відповідно.

Доведення. Запишемо рівняння (1) і (2) у вигляді

$$x_{i+1} = x^0 + \varepsilon \sum_{j=0}^i [f(j, x_j, x_{j-1}) + A(x_j, x_{j-1}) \cdot \varphi(j, u_j)],$$

$$z_{i+1} = x^0 + \varepsilon \sum_{j=0}^i [f(j, z_j, z_j) + A(z_j, z_j) \cdot \varphi(j, u_j)]$$

і оцінимо їх різницю з урахуванням виконання умов 1), 2) леми:

$$\begin{aligned} \|x_{i+1} - z_{i+1}\| &= \varepsilon \sum_{j=0}^i \|f(j, x_j, x_{j-1}) - f(j, z_j, z_j)\| + \\ &+ \varepsilon \sum_{j=0}^i \| [A(x_j, x_{j-1}) - A(z_j, z_j)] \cdot \varphi(j, u_j) \| \leq \\ &\leq \varepsilon \lambda \sum_{j=0}^i [\|x_j - z_j\| + \|x_{j-1} - z_j\|] + \varepsilon \lambda M \sum_{j=0}^i [\|x_j - z_j\| + \|x_{j-1} - z_j\|] = \\ &= \varepsilon \lambda (1 + M) \sum_{j=0}^i [\|x_j - z_j\| + \|x_{j-1} - z_j\|] \leq \\ &\leq \varepsilon \lambda (1 + M) \sum_{j=0}^i [\|x_j - z_j\| + \|x_{j-1} - x_j\| + \|x_j - z_j\|] = \\ &= \varepsilon \lambda (1 + M) \sum_{j=0}^i [2 \cdot \|x_j - z_j\| + \|x_{j-1} - x_j\|]. \end{aligned}$$

Останній доданок під знаком суми можна оцінити, якщо представити систему (1) у вигляді

$$\begin{aligned} \|x_{i+1} - x_i\| &\leq \varepsilon \cdot [\|f(i, x_i, x_{i-1})\| + \|A(x_i, x_{i-1})\| \cdot \|\varphi(i, u_i)\|] \leq \\ &\leq \varepsilon M (1 + M) \end{aligned}$$

при $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$.

Тоді

$$\begin{aligned} \varepsilon \lambda (1 + M) \sum_{j=0}^i \|x_{j-1} - x_j\| &\leq \varepsilon \lambda (1 + M) \cdot \left(\|x_{-1} - x_0\| + \sum_{j=0}^{i-1} \|x_{j+1} - x_j\| \right) \leq \\ &\leq \varepsilon \lambda (1 + M) \cdot (\|x^1 - x^0\| + \varepsilon M (1 + M) N) = \end{aligned}$$

$$= \varepsilon \lambda (1 + M) \cdot (\Delta + M (1 + M) L),$$

де $\Delta = \|x^1 - x^0\|$. Отже

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \leq 2\varepsilon \lambda (1 + M) \sum_{j=0}^i \|x_j - z_j\| + \varepsilon \lambda (1 + M) (\Delta + M (1 + M) L).$$

Застосувавши дискретний аналог леми Гронуолла–Белмана, отримаємо:

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \leq \varepsilon \lambda (1 + M) (\Delta + M (1 + M) L) \cdot e^{2\lambda(1+M)L}.$$

Оскільки різниця $\|x_{i+1} - z_{i+1}\|$ повинна бути не більше ρ , то знайдеться таке ε_1 , що для всіх $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ виконується:

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \leq \varepsilon \lambda (1 + M) (\Delta + M (1 + M) L) \cdot e^{2\lambda(1+M)L} \leq \rho,$$

тобто справедливе твердження леми, де

$$C = \lambda (1 + M) (\Delta + M (1 + M) L) \cdot e^{2\lambda(1+M)L},$$

$$\varepsilon_1 \leq \frac{\rho}{\lambda (1 + M) (\Delta + M (1 + M) L)} \cdot e^{-2\lambda(1+M)L}.$$

Лема доведена.

3. Усереднення систем дискретних рівнянь з періодичними правилами частинами. Нехай в системі (1) функції $f(i, x_i, x_{i-1})$, $\varphi(i, u_i) \in$ функціями, періодичними по i з періодом p , тобто для будь-якого $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ справедливі рівності

$$f(i + p, x_i, x_{i-1}) = f(i, x_i, x_{i-1}),$$

$$\varphi(i + p, u_i) = \varphi(i, u_i).$$

Множину $I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ розіб'ємо на відрізки довжиною p точками поділу kp , $k \in I_k = \{0, 1, 2, \dots, N_k\}$, вибір значень k визначимо з умови $kp \leq \frac{L}{\varepsilon}$, тому $N_k = E\left(\frac{L}{\varepsilon p}\right)$.

На множині значень $k \in I_k = \{0, 1, 2, \dots, N_k\}$ системі (1) поставимо у відповідність усереднену систему вигляду:

$$w_{k+1} = w_k + \varepsilon p \cdot [f_0(w_k) + A(w_k, w_k) \cdot v_k], \quad w_0 = x^0, \quad (3)$$

$$y_i = w_k + \frac{(i - kp)(w_{k+1} - w_k)}{p}, \quad i \in [kp, (k+1)p), \quad (4)$$

де

$$f_0(w) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p f(j, w, w), \quad (5)$$

$$v_k \in V_0 = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \varphi(j, U). \quad (6)$$

Тут $v_k, k \in I_k$ – новий вектор керування.

Зауважимо, що множина $V_0 \in \text{conv}(R^n)$ у (5) не є опуклою.

Відповідність між керуванням $u_i \in U$ системи (1) і керуванням $v_k \in V_0$ системи (3), (4) встановимо з врахуванням (6) таким чином:

$$v_k = \frac{1}{p} \sum_{i=kp}^{(k+1)p-1} \varphi(i, u_i), \quad k \in I_k. \quad (7)$$

Теорема. Нехай в області $Q = \{i \in I; x, y \in D; u \in U\}$ виконуються умови 1)-3) лемми і, крім того:

1) функції $f(i, x, y), \varphi(i, u)$ є p -періодичними по i ;

2) для будь-яких керувань $v_k \in V_0$ розв'язок $w = w_k, k \in I_k$ системи (3) при $w_0 = x^0 \in D' \subset D$ разом з ρ -околом належать області D .

Тоді для будь-якого $L > 0$ існують такі $C > 0$ і $\varepsilon_0 > 0$, що для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і для будь-якого $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}, N = E(L\varepsilon^{-1})$ справедливі наступні твердження:

1) для будь-якого керування $u_i \in U$ системи (1) відповідно до (7) існує керування $v_k \in V_0$ системи (3), (4) таке, що справедлива оцінка

$$\|x_i - y_i\| \leq C\varepsilon, \quad (8)$$

де x_i – розв'язок системи (1), породжений керуванням u_i, y_i – розв'язок системи (3), (4), породжений керуванням $v_k, i, x_0 = y_0 = x^0 \in D' \subset D, x_{-1} = x^1$;

2) для будь-якого керування $v_k \in V_0$ системи (3), (4) відповідно до (7) існує керування $u_i \in U$ системи (1) таке, що справедлива оцінка (8).

Доведення. Доведемо перше твердження теореми.

Нехай $u_i \in U, i \in I$ – довільні допустимі керування системи (1). Керуванню $u_i \in U$ поставимо у відповідність керування $v_k \in V_0, k \in I_k$ системи (3), (4) відповідно до (7). Оцінимо різницю $\|x_i - y_i\|$, де x_i – розв'язок системи (1), породжений керуванням u_i, y_i – розв'язок системи (3), (4), породжений керуванням $v_k, i, x_{-1} = x^1, x_0 = y_0 = x^0 \in D' \subset D$.

З нерівності трикутника виходить

$$\|x_{i+1} - y_{i+1}\| \leq \|x_{i+1} - z_{i+1}\| + \|z_{i+1} - y_{i+1}\|. \quad (9)$$

Оцінимо кожний доданок у правій частині нерівності окремо. За лемою існує таке $\varepsilon_1 > 0$, що для будь-якого $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ справедлива нерівність:

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \leq \varepsilon \lambda (1 + M) (\Delta + M (1 + M) L) \cdot e^{2\lambda(1+M)L}, \quad (10)$$

де z_i – розв’язок замороженої системи (2), породжений керуванням u_i , $i \in I$ з системи (1).

Розглянемо другий доданок в правій частині нерівності (9) і для будь-якого $k \in I_k$ і $i \in [kp, (k+1)p-1]$ отримаємо

$$\|z_{i+1} - y_{i+1}\| \leq \|z_{i+1} - z_{kp}\| + \|z_{kp} - y_{kp}\| + \|y_{kp} - y_{i+1}\|. \quad (11)$$

Оцінимо перший доданок у правій частині нерівності (11). Для цього систему (2) представимо у вигляді

$$z_{i+1} = z_{kp} + \varepsilon \sum_{j=kp}^i [f(j, z_j, z_j) + A(z_j, z_j) \cdot \varphi(j, u_j)],$$

тоді

$$\begin{aligned} & \|z_{i+1} - z_{kp}\| \leq \\ & \leq \varepsilon \sum_{j=kp}^i [\|f(j, z_j, z_j)\| + \|A(z_j, z_j)\| \cdot \|\varphi(j, u_j)\|] \leq \varepsilon p \cdot M(1+M). \end{aligned} \quad (12)$$

Оцінимо третій доданок в правій частині нерівності (11). Для цього із співвідношень (3), (4) при будь-якому $k \in I_k$ для $i \in [kp, (k+1)p-1]$ буде:

$$\|y_{i+1} - y_{kp}\| \leq \varepsilon \cdot \sum_{j=kp}^i [\|f_0(y_{kp})\| + \|A(y_{kp}, y_{kp})\| \cdot \|v_k\|].$$

Враховуючи співвідношення (5) і (7), додатково отримаємо

$$\|y_{i+1} - y_{kp}\| \leq \varepsilon p \cdot M(1+M). \quad (13)$$

У правій частині нерівності (11) залишилося оцінити другий доданок $\|z_{kp} - y_{kp}\|$ на проміжку $[kh, (k+1) \cdot h]$ для будь-якого $k \in I_k$.

Для цього відповідні системи представимо у вигляді

$$z_{(k+1)p} = z_{kp} + \varepsilon \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} [f(j, z_j, z_j) + A(z_j, z_j) \cdot \varphi(j, u_j)],$$

$$y_{(k+1)p} = y_{kp} + \varepsilon \cdot \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} [f_0(y_{kp}) + A(y_{kp}, y_{kp}) \cdot v_k].$$

Далі отримаємо

$$\|z_{(k+1)p} - y_{(k+1)p}\| \leq \|z_{kp} - y_{kp}\| + \varepsilon \left\| \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} (f(j, z_j, z_j) - f_0(y_{kp})) \right\| +$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon \left\| \sum_{j=k_p}^{(k+1)p-1} (A(z_j, z_j) \cdot \varphi(j, u_j) - A(y_{k_p}, y_{k_p}) \cdot v_k) \right\| \leq \\
& \leq \|z_{k_p} - y_{k_p}\| + \varepsilon \sum_{j=k_p}^{(k+1)p-1} \|f(j, z_j, z_j) - f(j, y_{k_p}, y_{k_p})\| + \\
& +\varepsilon \left\| \sum_{j=k_p}^{(k+1)p-1} f(j, y_{k_p}, y_{k_p}) - p \cdot f_0(y_{k_p}) \right\| + \\
& +\varepsilon \sum_{j=k_p}^{(k+1)p-1} \|A(z_j, z_j) \cdot \varphi(j, u_j) - A(y_{k_p}, y_{k_p}) \cdot \varphi(j, u_j)\| + \\
& +\varepsilon \|A(y_{k_p}, y_{k_p})\| \cdot \left\| \sum_{j=k_p}^{(k+1)p-1} \varphi(j, u_j) - p \cdot v_k \right\|.
\end{aligned}$$

В останній нерівності третій і п'ятий доданки через співвідношення (5) і (7) обертаються в нуль, тому при виконанні умов теореми маємо

$$\begin{aligned}
& \|z_{(k+1)p} - y_{(k+1)p}\| \leq \|z_{k_p} - y_{k_p}\| + \\
& +\varepsilon \sum_{j=k_p}^{(k+1)p-1} \|f(j, z_j, z_j) - f(j, z_{k_p}, z_{k_p})\| + \\
& +\varepsilon \sum_{j=k_p}^{(k+1)p-1} \|f(j, z_{k_p}, z_{k_p}) - f(j, y_{k_p}, y_{k_p})\| + \\
& +\varepsilon \sum_{j=k_p}^{(k+1)p-1} \|\varphi(j, u_j)\| \cdot \|A(z_j, z_j) - A(z_{k_p}, z_{k_p})\| + \\
& +\varepsilon \sum_{j=k_p}^{(k+1)p-1} \|\varphi(j, u_j)\| \cdot \|A(z_{k_p}, z_{k_p}) - A(y_{k_p}, y_{k_p})\| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|z_{kp} - y_{kp}\| + \varepsilon \lambda \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} 2 \|z_j - z_{kp}\| + \varepsilon \lambda \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} 2 \|z_{kp} - y_{kp}\| + \\
&\quad + \varepsilon \lambda M \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} 2 \|z_j - z_{kp}\| + \varepsilon \lambda M \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} 2 \|z_{kp} - y_{kp}\| \leq \\
&\leq \|z_{kp} - y_{kp}\| + 2\varepsilon \lambda (1 + M) \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \|z_j - z_{kp}\| + \\
&\quad + 2\varepsilon \lambda (1 + M) \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \|z_{kp} - y_{kp}\| \leq \\
&\leq \|z_{kp} - y_{kp}\| + 2\varepsilon \lambda (1 + M) \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} [\varepsilon p \cdot M (1 + M)] + \\
&\quad + 2\varepsilon \lambda (1 + M) p \cdot \|z_{kp} - y_{kp}\| \leq \\
&\leq 2(\varepsilon p)^2 \lambda M (1 + M)^2 + (1 + 2\varepsilon p \lambda (1 + M)) \cdot \|z_{kp} - y_{kp}\|.
\end{aligned}$$

Отже, отримали нерівність

$$\begin{aligned}
&\|z_{(k+1)p} - y_{(k+1)p}\| \leq \\
&\leq (1 + 2\varepsilon p \lambda (1 + M)) \cdot \|z_{kp} - y_{kp}\| + 2(\varepsilon p)^2 \lambda M (1 + M)^2.
\end{aligned} \tag{14}$$

З нерівності (14) отримаємо оцінку для $\|z_{kp} - y_{kp}\|$, для цього введемо позначення $\beta_k = \|z_{kp} - y_{kp}\|$, $a = (1 + 2\varepsilon p \lambda (1 + M))$, $b = 2(\varepsilon p)^2 \lambda M (1 + M)^2$ і запишемо нерівність (14) у вигляді

$$\beta_{k+1} \leq a \cdot \beta_k + b. \tag{15}$$

Перетворимо нерівність, враховуючи, що вона є рекурентною,

$$\begin{aligned}
\beta_{k+1} &\leq a \cdot \beta_k + b \leq a \cdot (a \cdot \beta_{k-1} + b) + b \leq a^2 \cdot \beta_{k-1} + ab + b \leq \\
&\leq a^2 \cdot (a \cdot \beta_{k-2} + b) + ab + b \leq a^3 \cdot \beta_{k-2} + a^2 b + ab + b \leq \dots \leq
\end{aligned}$$

$$\leq a^{k+1}\beta_0 + a^k b + \dots + a^2 b + ab + b = a^{k+1}\beta_0 + b \cdot (a^k + \dots + a^2 + a + 1).$$

Тут $\beta_0 = \|z_0 - y_0\| = 0$ через рівні початкові умови $z_0 = y_0 = x^0$ для зв'язків системи (2) і (3), (4) відповідно, а сума в дужках є сумою k доданків геометричної прогресії. Остаточно, з нерівності (15) отримаємо

$$\beta_{k+1} \leq b \cdot \frac{a^k - 1}{a - 1}. \quad (16)$$

Повернемося до початкових змінних і застосуємо до нерівності (14) оцінку (16)

$$\begin{aligned} \|z_{(k+1)p} - y_{(k+1)p}\| &\leq 2(\varepsilon p)^2 \lambda M (1+M)^2 \cdot \frac{(1+2\varepsilon p \lambda (1+M))^k - 1}{1+2\varepsilon p \lambda (1+M) - 1} = \\ &= 2(\varepsilon p)^2 \lambda M (1+M)^2 \cdot \frac{(1+2\varepsilon p \lambda (1+M))^k - 1}{2\varepsilon p \lambda (1+M)} = \\ &= \varepsilon p M (1+M) \cdot \left((1+2\varepsilon p \lambda (1+M))^k - 1 \right). \end{aligned}$$

Враховуючи, що $(1+\alpha)^k = \left((1+\alpha)^{1/\alpha} \right)^{\alpha k} \sim e^{\alpha k}$ при $\alpha \rightarrow 0$, можна знайти таке $\varepsilon_2 > 0$, що для всіх $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ будуть еквівалентні вирази $(1+2\varepsilon p \lambda (1+M))^k \sim e^{2\varepsilon p \lambda (1+M)k}$, остаточно отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} \|z_{(k+1)p} - y_{(k+1)p}\| &\leq \varepsilon p M (1+M) \cdot \left(e^{2\varepsilon p \lambda (1+M)k} - 1 \right) \leq \\ &\leq \varepsilon p M (1+M) \cdot \left(e^{2\lambda L(1+M)} - 1 \right). \end{aligned} \quad (17)$$

З урахуванням отриманих оцінок (12), (13), (17) нерівність (11) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \|z_{i+1} - y_{i+1}\| &\leq 2\varepsilon p \cdot M (1+M) + \varepsilon p M (1+M) \cdot \left(e^{2\lambda L(1+M)} - 1 \right) \leq \\ &\leq \varepsilon p \cdot M (1+M) \cdot \left(e^{2\lambda L(1+M)} + 1 \right). \end{aligned} \quad (18)$$

З умови теореми повинна виконуватися нерівність $\|z_{i+1} - y_{i+1}\| < \rho$, тоді знайдеться таке ε_3 , що для всіх $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_3$ виконується:

$$\|z_{i+1} - y_{i+1}\| \leq \varepsilon p \cdot M (1+M) \cdot \left(e^{2\lambda L(1+M)} + 1 \right) < \rho.$$

З урахуванням оцінок (10), (18) нерівність (9) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \|x_{i+1} - y_{i+1}\| &\leq \varepsilon \lambda (1 + M) (\Delta + M (1 + M) L) \cdot e^{2\lambda(1+M)L} + \\ &+ \varepsilon p \cdot M (1 + M) \cdot \left(e^{2\lambda L(1+M)} + 1 \right) = \varepsilon C. \end{aligned}$$

Оберемо в якості $\varepsilon_0 = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.

Таким чином, справедливе перше твердження теореми (8), де

$$\begin{aligned} C &= \lambda (1 + M) (\Delta + M (1 + M) L) \cdot e^{2\lambda(1+M)L} + \\ &+ p M (1 + M) \cdot \left(e^{2\lambda L(1+M)} + 1 \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Друге твердження теореми доводиться аналогічно.

4. Практична реалізація методу усереднення дискретних рівнянь із запізненням. Розглянемо деякі приклади застосування методу усереднення при розв'язуванні задач керування, які описуються системами дискретних рівнянь з постійним запізненням.

Приклад 1. Нехай рух керованого об'єкта описується системою дискретних рівнянь з запізненням виду

$$\begin{aligned} x_{i+1}^1 &= x_i^1 + \varepsilon \cdot [(-9 \cos^2 6ih + 6 \sin 12ih) \cdot x_i^1 - x_{i-1}^1 + \\ &+ (12 \cos^2 6ih + 4.5 \sin 12ih) \cdot x_i^2 + u_i^1], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} x_{i+1}^2 &= x_i^2 + \varepsilon \cdot [(-12 \sin^2 6ih + 4.5 \sin 12ih) \cdot x_i^1 - \\ &- (9 \sin^2 6ih + 6 \sin 12ih) \cdot x_i^2 - x_{i-1}^2 + u_i^2], \end{aligned} \quad (21)$$

де $x_i = \begin{pmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \end{pmatrix} \in D \subset R^2$ – фазовий вектор, $u_i = \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \end{pmatrix} \in U \subset \text{comp}(R^2)$ – вектор керування, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, $N = E(L\varepsilon^{-1})$.

В правих частинах рівнянь (20), (21) визначимо функції, що відповідають представленню системи у вигляді (1),

$$\begin{aligned} f^1(i, x_i, x_{i-1}) &= (-9 \cos^2 6ih + 6 \sin 12ih) \cdot x_i^1 - x_{i-1}^1 + \\ &+ (12 \cos^2 6ih + 4.5 \sin 12ih) \cdot x_i^2, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} f^2(i, x_i, x_{i-1}) &= (-12 \sin^2 6ih + 4.5 \sin 12ih) \cdot x_i^1 - \\ &- (9 \sin^2 6ih + 6 \sin 12ih) \cdot x_i^2 - x_{i-1}^2, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \varphi^1(i, u_i) &= u_i^1, \\ \varphi^2(i, u_i) &= u_i^2, \end{aligned} \quad A(x_i, x_{i-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

і перевіримо для них виконання умов теорем усереднення.

Внаслідок того, що

$$\cos^2 6ih = \frac{1}{2} (1 + \cos 12ih), \quad \sin^2 6ih = \frac{1}{2} (1 - \cos 12ih),$$

функції $f^1(i, x_i, x_{i-1})$ і $f^2(i, x_i, x_{i-1})$ у (22) і (23) є періодичними по i з періодом p . Для визначення періоду цих функцій відзначимо, що вони містять залежність $f(12ih)$, а у відповідності з визначенням періодичності функцій, рівняння

$$f(12 \cdot (i + p) \cdot h) = f(12ih + 12ph) = f(12ih)$$

виконується лише тоді, коли $12ph = 2\pi$, звідки період $p = E\left(\frac{\pi}{6h}\right)$.

Можна перевірити, що всі умови теореми виконані, тому до системи (20), (21) можна застосувати метод усереднення, описаний в пункті 3.

Множину $I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ розіб'ємо на відрізки довжиною $p = E\left(\frac{\pi}{6h}\right)$ точками ділення kp , $k \in I_k = \{0, 1, 2, \dots, N_k\}$, вибір значень k визначимо з умови $kp \leq \frac{L}{\varepsilon}$, тому $N_k = E\left(\frac{L}{\varepsilon p}\right) = \left(\frac{6Lh}{\varepsilon\pi}\right)$.

На множині значень $k \in I_k = \{0, 1, 2, \dots, N_k\}$ системі (20), (21) поставимо у відповідність усереднену систему виду (3), (4):

$$w_{k+1}^1 = w_k^1 + \varepsilon p \cdot [-5, 5 \cdot w_k^1 + 6 \cdot w_k^2 + v_k^1], \quad (25)$$

$$w_{k+1}^2 = w_k^2 + \varepsilon p \cdot [-6 \cdot w_k^1 - 5, 5 \cdot w_k^2 + v_k^2], \quad (26)$$

$$y_i^1 = w_k^1 + \frac{(i - kp)(w_{k+1}^1 - w_k^1)}{p}, \quad y_i^2 = w_k^2 + \frac{(i - kp)(w_{k+1}^2 - w_k^2)}{p}, \quad (27)$$

$$i \in [kp, (k+1)p),$$

де функції керування v_k , $k \in I_k$ визначаються у відповідності з (7) за формулами

$$v_k^1 = \frac{1}{p} \sum_{i=kp}^{(k+1)p-1} \varphi^1(i, u_i) = \frac{1}{p} \sum_{i=kp}^{(k+1)p-1} u_i^1, \quad (28)$$

$$v_k^2 = \frac{1}{p} \sum_{i=kp}^{(k+1)p-1} \varphi^2(i, u_i) = \frac{1}{p} \sum_{i=kp}^{(k+1)p-1} u_i^2 \quad (29)$$

і остаточно набувають вигляду залежно від того, як задані функції керування u_i , $i \in I$ вихідної задачі (20), (21).

Розглянемо деякі варіанти завдання керуючих функцій.

Варіант 1. Нехай

$$u_i^1 \equiv 1, \quad u_i^2 \equiv -1. \quad (30)$$

Тоді

$$v_k^1 = \frac{1}{p} \sum_{i=kp}^{(k+1)p-1} 1 \equiv 1, \quad v_k^2 = \frac{1}{p} \sum_{i=kp}^{(k+1)p-1} (-1) \equiv -1. \quad (31)$$

Варіант 2. Нехай

$$u_i^1 = \sin 12ih, \quad u_i^2 = \cos^2 6ih. \quad (32)$$

Тоді

$$v_k^1 = \frac{1}{p} \sum_{i=kp}^{(k+1)p-1} \sin 12ih = 0, \quad v_k^2 = \frac{1}{p} \sum_{i=kp}^{(k+1)p-1} \cos^2 6ih = 0.5 \quad (33)$$

Побудуємо графіки розв'язків x_i^1, x_i^2 вихідної (20), (21) і y_i^1, y_i^2 усередненої (25) – (27) систем для кожного з варіантів керування при відповідних значеннях малого параметра $\varepsilon = 0.01$ і $\varepsilon = 0.005$.

Для цього використаємо програмний код для розв'язання систем дискретних рівнянь з прикладу 1, який створений у середовищі програмування Matlab.

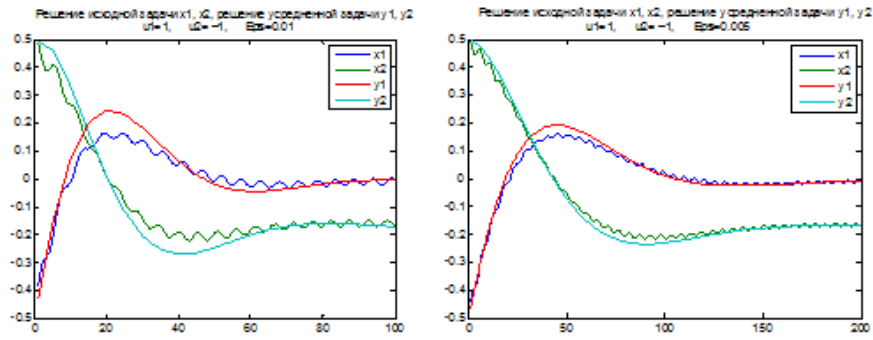


Рис. 1. Графічний розв'язок x_i^1, x_i^2 вихідної та y_i^1, y_i^2 усередненої задач, якщо $u_i^1 = 1, u_i^2 = -1, \varepsilon = 0.01$ та $\varepsilon = 0.005$

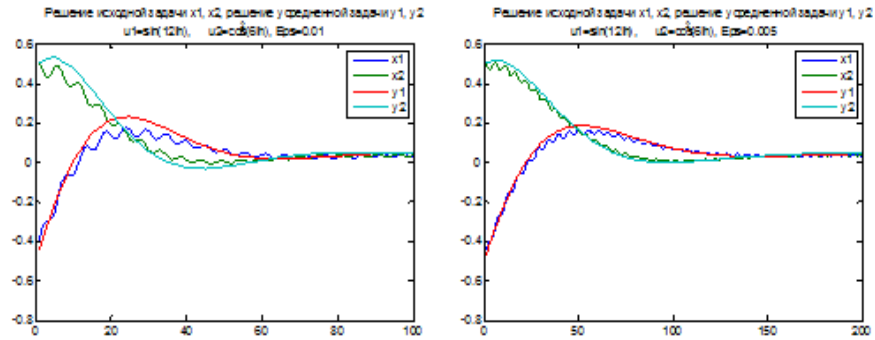


Рис. 2. Графічний розв'язок x_i^1 , x_i^2 вихідної та y_i^1 , y_i^2 усередненої задач, якщо $u_i^1 = \sin 12ih$, $u_i^2 = \cos^2 6ih$, $\varepsilon = 0.01$ та $\varepsilon = 0.005$

За результатами обчислень для заданих керувань можна скласти таблицю оцінок близькості розв'язків вихідної та усередненої систем (таблиця 1).

u	ε	$\max x_i^1 - y_i^1 $	$\max x_i^2 - y_i^2 $	$\ x_i - y_i\ $
$u_i^1 \equiv 1,$ $u_i^2 \equiv -1$	0.01	0.0980	0.0664	0.1078
	0.005	0.0434	0.0288	0.0479
	0.001	0.0080	0.0055	0.0088
$u_i^1 = \sin 12ih,$ $u_i^2 = \cos^2 6ih$	0.01	0.1024	0.0424	0.1184
	0.005	0.0457	0.0182	0.0532
	0.001	0.0086	0.0028	0.0097

Таблиця оцінок близькості розв'язків вихідної та усередненої систем

Аналізуючи отримані результати, можна зробити висновок, що з наведених графіків та таблиці оцінка близькості розв'язків має вигляд:

$$\|x_i - y_i\| \leq C\varepsilon,$$

що відповідає висновкам теореми.

Приклад 2. Нехай рух керованого об'єкта описується системою дискретних рівнянь з запізненням виду

$$x_{i+1}^1 = x_i^1 + \varepsilon \cdot ((-4.5 + 7.5 \sin 12ih) \cdot x_i^1 - x_{i-1}^1 + (7.5 \cos 12ih) \cdot x_i^2 + u_i^1), \quad (34)$$

$$x_{i+1}^2 = x_i^2 + \varepsilon \cdot ((7.5 \cos 12ih) \cdot x_i^1 + (-4.5 - 7.5 \sin 12ih) \cdot x_i^2 - x_{i-1}^2 + u_i^2). \quad (35)$$

У системі визначимо функції

$$f^1(i, x_i, x_{i-1}) = (-4.5 + 7.5 \sin 12ih) \cdot x_i^1 - x_{i-1}^1 + (7.5 \cos 12ih) \cdot x_i^2, \quad (36)$$

$$f^2(i, x_i, x_{i-1}) = (7.5 \cos 12ih) \cdot x_i^1 + (-4.5 - 7.5 \sin 12ih) \cdot x_i^2 - x_{i-1}^2, \quad (37)$$

які є періодичними функціями з періодом $p = E \left(\frac{\pi}{6h} \right)$. Усі умови теореми виконані, тому до системи (34), (35) застосуємо метод усереднення, описаний у пункті 3.

Множину $I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ розіб'ємо на відрізки довжиною $p = E \left(\frac{\pi}{6h} \right)$ точками ділення kp , $k \in I_k = \{0, 1, 2, \dots, N_k\}$, вибір значень k визначимо з умови $kp \leq \frac{L}{\varepsilon}$, тому $N_k = E \left(\frac{L}{\varepsilon p} \right) = \left(\frac{6Lh}{\varepsilon \pi} \right)$.

На множині значень $k \in I_k = \{0, 1, 2, \dots, N_k\}$ системі (34), (35) поставимо у відповідність усереднену систему виду (3), (4):

$$w_{k+1}^1 = w_k^1 + \varepsilon p \cdot [-5, 5 \cdot w_k^1 + v_k^1], \quad (38)$$

$$w_{k+1}^2 = w_k^2 + \varepsilon p \cdot [-5, 5 \cdot w_k^2 + v_k^2], \quad (39)$$

$$y_i^1 = w_k^1 + \frac{(i - kp)(w_{k+1}^1 - w_k^1)}{p}, \quad y_i^2 = w_k^2 + \frac{(i - kp)(w_{k+1}^2 - w_k^2)}{p}, \quad (40)$$

$$i \in [kp, (k+1)p).$$

Функції керування v_k , $k \in I_k$ будемо обчислювати залежно від того, як задані функції керування u_i , $i \in I$ вихідної задачі (34), (35), як і у попередньому прикладі двома способами.

Варіант 1. Керування будемо обчислювати за формулами (30), (31).

Варіант 2. Керування будемо обчислювати за формулами (32), (33).

Побудуємо графіки розв'язків x_i^1 , x_i^2 вихідної (34), (35) і y_i^1 , y_i^2 усередненої (38) – (40) систем для кожного з варіантів керування при відповідних значеннях малого параметра $\varepsilon = 0.01$ і $\varepsilon = 0.005$ (рис. 3, рис. 4).

Для цього використаємо програмний код для розв'язання систем дискретних рівнянь з прикладу 2, який створений у середовищі програмування Matlab.

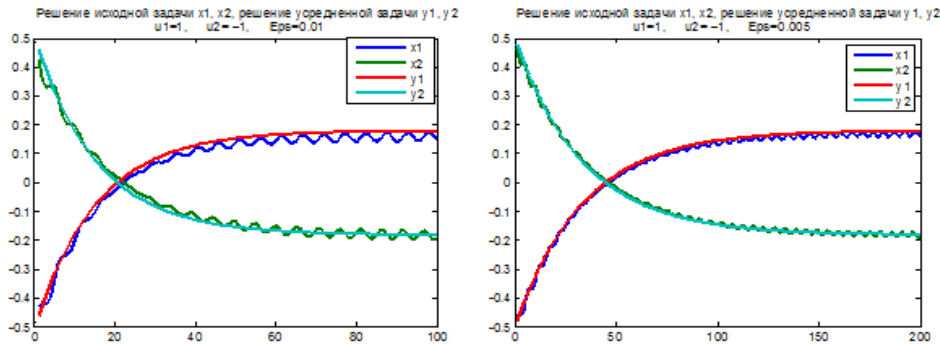


Рис. 3. Графічний розв'язок x_i^1 , x_i^2 вихідної та y_i^1 , y_i^2 усередненої задач, якщо $u_i^1 = 1$, $u_i^2 = -1$, $\varepsilon = 0.01$ та $\varepsilon = 0.005$

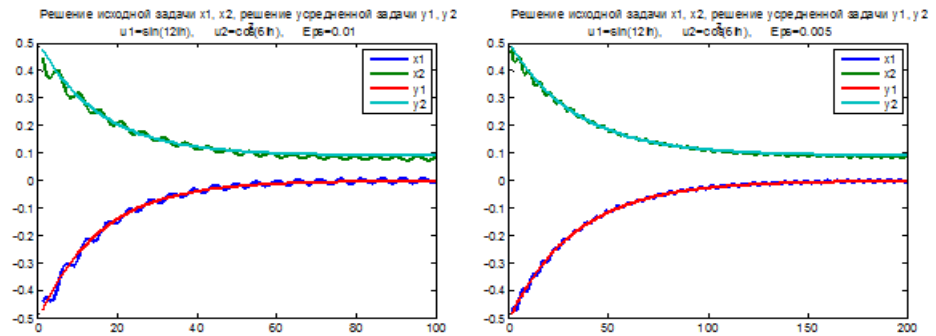


Рис. 4. Графічний розв'язок x_i^1 , x_i^2 вихідної та y_i^1 , y_i^2 усередненої задач, якщо $u_i^1 = \sin 12ih$, $u_i^2 = \cos^2 6ih$, $\varepsilon = 0.01$ та $\varepsilon = 0.005$

За результатами обчислень для заданих керувань можна скласти таблицю оцінок близькості розв'язків вихідної та усередненої систем (таблиця 2).

u	ε	$\max x_i^1 - y_i^1 $	$\max x_i^2 - y_i^2 $	$\ x_i - y_i\ $
$u_i^1 \equiv 1,$ $u_i^2 \equiv -1$	0.01	0.0475	0.0596	0.0727
	0.005	0.0265	0.0347	0.0398
	0.001	0.0058	0.0078	0.0088
$u_i^1 = \sin 12ih,$ $u_i^2 = \cos^2 6ih$	0.01	0.0390	0.0329	0.0705
	0.005	0.0216	0.0243	0.0371
	0.001	0.0047	0.0049	0.0079

Таблиця оцінок близькості розв'язків вихідної та усередненої систем

Аналізуючи отримані результати для приклада 2, можна теж зробити висновок, що з наведених графіків та таблиці оцінка близькості розв'язків буде:

$$\|x_i - y_i\| \leq C\varepsilon,$$

що відповідає висновкам теореми.

Висновки. У даній роботі були розглянуті системи дискретних рівнянь із запізненням у задачах керування. Була доказана теорема про усереднення систем з періодичними правими частинами та побудований алгоритм відновлення керування вихідної задачі за знайденим керуванням усередненої задачі та навпаки. Було розглянуто приклади застосування методу усереднення та проведена оцінка близькості розв'язків вихідної та усередненої систем.

1. **Анашкин О. В.** Об устойчивости разностных уравнений с запаздыванием [текст] / О. В. Анашкин, Й. Диблик // Динамические системы. – 2007. – Вып. 23. – С. 113–122.
2. **Карпычева М. Л.** Применение численно-асимптотического алгоритма решения задач управления к системам дискретных уравнений с запаздыванием [текст] / М. Л. Карпычева // Междун. научная конф. студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов – 2012". – Севастополь, 2012. – С. 245–246.
3. **Кичмаренко О. Д.** Усреднение управляемых систем, описываемых дискретными уравнениями с запаздыванием. Периодический случай [текст] / О. Д. Кичмаренко, М. Л. Карпычева // Междун. конф. "Вычислительная и прикладная математика". – Киев, 2011. – С. 87–88.
4. **Кичмаренко О. Д.** Усреднение управляемых систем, описываемых дискретными уравнениями с запаздыванием [текст] / О. Д. Кичмаренко, М. Л. Карпычева // Междун. научно-техн. конф. "Моделирование, идентификация, синтез систем управления". – Донецк, 2011. – С. 47–48.
5. **Куликов А. Ю.** Устойчивость линейного неавтономного разностного уравнения с ограниченными запаздываниями [текст] / А. Ю. Куликов // Известия вузов. Математика. – 2010. – №11. – С. 22–30.
6. **Плотников В. А.** Квазидифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом [текст] / В. А. Плотников, О. Д. Кичмаренко // Нелінійні коливання. – 2000. – № 3. – С. 393–399.
7. **Плотников В. А.** Численно-асимптотическое построение множества достижимости для управляемых систем с переменным запаздыванием [текст] / В. А. Плотников, О. Д. Кичмаренко // Кибернетика и вычислительная техника. – 2000. – Вып. 128. – С. 63–68.
8. **Плотников В. А.** Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления [текст] / В. А. Плотников, Л. И. Плотникова, А. Т. Яровой // Нелинейные колебания. – 2004. – Т. 7, № 2. – С. 241–254.
9. **Романко В. К.** Разностные уравнения: учебное пособие [текст] / В. К. Романко – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 112 с.