МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Ю. С. Процеров

АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ В АНАЛІЗІ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти
спеціальності 113 «Прикладна математика»

ОДЕСА
ОНУ
2024

УДК 517.58(076)
П845

Автор:

Ю. С. Процеров, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри методів математичної фізики ОНУ імені І. І. Мечникова.

Рецензенти:

А. О. Кореновський, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу ОНУ імені І. І. Мечникова;

А. В. Усов, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики та моделювання систем Національного університету «Одеська політехніка».

Рекомендовано до видання науково-методичною радою
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.
Протокол № 2 від 16 травня 2024 року.

Процеров Ю. С.

П845 Асимптотичні методи в аналізі : навч.-метод. посіб. для здобув. другого (магістер.) рівня вищ. освіти спец. 113 «Прикладна математика» / Ю. С. Процеров. Електронні текстові дані (1 файл : 1,8 МБ). Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2024. – 93 с.

ISBN 978-617-689-568-8

Посібник призначений для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 113 Прикладна математика. В ньому розглянуті основні поняття асимптотичних розвинень, а також методи отримання асимптотичних розвинень інтегралів, які містять великий параметр: метод інтегрування частинам, метод Лапласа, метод стаціонарної фази, метод перевалу. Виклад матеріалу супроводжується численними прикладами. Є також завдання для самостійної роботи здобувачів.

УДК 517.58(076)

ISBN 978-617-689-568-8

Зміст

Вступ

Класичний аналіз є основою багатьох розділів прикладної математики, зокрема асимптотичних методів. Асимптотичні методи та асимптотичний підхід до явищ використовується чи не в половині сучасних досліджень з математики, механіки, фізики та багатьох інших наук. Перші результати по асимптотичним методам з’явились ще у XVIII столітті та були присвячені відшуканню наближеної простої формули для обчислення значень складної функції. Типовим прикладом асимптотичної формули є формула Дж. Стірлінга для обчислення $n!$ за досить великих n

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Іншим прикладом є формула, отримана Л. Ейлером

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

де $C = 0{,}57215...$ є стала Ейлера.

Ці та інші подібні формули дозволили тодішнім математикам набути значення багатьох математичних сталих з великим ступенем точності. Сучасна теорія асимптотичних розвинень починається у XIX столітті з робіт А. Пуанкаре, якій побудував їхню сувору теорію.

Асимптотичні методи відіграють велику роль у математичній фізиці, зокрема при вивченні властивостей спеціальних функцій, а також при дослідженні питання збіжності інтегралів та рядів, що містять дані функції. Слід також зазначати, що багато важливих результатів теорії диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей, математичної статистики та інших розділів математики також є асимптотичними. Навіть у такий суто теоретичній дисципліні, як теорія чисел, використовуються асимптотичні методи.

Наприклад, для функції $\pi(n)$ – кількості простих чисел, менших за n, має місце асимптотична формула $\pi(n) \approx \dfrac{n}{\ln n}$.

Цій посібник призначено викладу основ асимптотичного аналізу. При цьому акцент робиться на знаходженні асимптотичних оцінок інтегралів, що містять великий параметр: метод Лапласа, метод стаціонарної фази, метод перевалу.

§1. Найпростіші асимптотичні оцінки

Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені на деякій множині X і нехай a є граничною точкою цієї множини.

Означення 1. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, то говорять, що функції $f(x)$ і $g(x)$ еквівалентні або асимптотичне рівні коли $x\to a$ та позначають $f(x)\sim g(x)$.

Наприклад, $\sin x \sim x$ коли $x\to 0$ або $\sqrt{x^4+3x^3+x+1}\sim x^2$ коли $x\to\infty$, так як $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ та $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+3x^3+x+1}}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\sqrt{1+3x^{-1}+x^{-3}+x^{-4}}}{x^2}=1$

Означення 2. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, то це позначають $f(x)=o\big(g(x)\big)$, коли $x\to a$.

Найчастіше це означення вживається у разі, коли обидві функції $f(x)$ та $g(x)$ є одночасно або нескінченно малими або нескінченно великими, коли $x\to a$.

У першому випадку говорять, що функція $f(x)$ є нескінченно мала більш високого порядку ніж $g(x)$, або що $f(x)$ прагне до нуля швидше ніж $g(x)$.
У другому випадку говорять, що функція $g(x)$ є нескінченно велика більш

високого порядку ніж $f(x)$, або що $g(x)$ прагне до нескінченності швидше ніж $f(x)$. Наприклад,

$$\cos x = 1 + o(x),\ x \to 0; \quad n! = o\left(n^n\right),\ n \to \infty; \quad a^n = o(n!),\ n \to \infty,\ a > 1$$

Так як з курсу математичного аналізу відомо, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \text{ та } \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \text{ коли } a > 1.$$

$$\ln x = o\left(x^{-\alpha}\right),\ x \to +0,\ \alpha > 0; \quad \ln(x) = o\left(x^{\alpha}\right),\ x \to +\infty,\ \alpha > 0.$$

Так як, використовуючи правило Лопіталя, отримуємо

$$\lim_{x\to+0} x^{\alpha} \ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to+0} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to+0} \frac{x^{\alpha}}{-\alpha} = 0 \text{ та}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha}} = 0 \text{ коли } \alpha > 0.$$

Із співвідношення $f(x) = o(g(x))$ коли $x \to a$ випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий окіл точки a, де $|f(x)| \le \varepsilon |g(x)|$. Зокрема, якщо $f(x) = o(1)$ коли $x \to a$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ $|f(x)| \le \varepsilon$ у деякому околі точки a, тобто $f(x) \to 0$, коли $x \to a$.

Означення 3. Якщо існує стала $C > 0$ така, що $|f(x)| \le C|g(x)|$ у деякому околі точки a, то говорять, що $f(x) = O(g(x))$ коли $x \to a$.

Наприклад,

$$e^x - 1 = O(x), \quad \sin x = O(x) \text{ коли } x \to 0,$$

так як за правилом Лопіталя $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{e^x}{1} = 1$ та $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

Зокрема, якщо $f(x)=O(1)$ коли $x\to a$, то існує стала $C>0$ така, що $|f(x)|\le C$ у деякому околі точки a, тобто $f(x)$ обмежена коли $x\to a$.

Співвідношення виду $f(x)\sim g(x)$, $f(x)=o(g(x))$, $f(x)=O(g(x))$ називають найпростішими асимптотичними оцінками або відношеннями порядку, а символи o та O – символами Ландау. Позначення $o(g)$ та $O(g)$ використовують також для позначення класів функцій f з відповідними властивостями. Тому символ $o(g)$ не обов'язково означає одну і ту саму функцію f.

Наприклад, через те що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{1+x^2}=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2x)=0$, маємо що

$\ln(1+x^2)=o(x)$ і $x^3+2x^2=o(x)$ коли $x\to 0$.

Теж саме стосується і для символу $O(g)$.

Нескладно переконатися, що мають місце наступні формули коли $x\to a$

$$o(f)+o(f)=o(f),\quad o(f)\cdot o(g)=o(f\cdot g),\quad o(o(f))=o(f)$$

$$O(f)+O(f)=O(f),\quad O(f)\cdot O(g)=O(f\cdot g),\quad O(O(f))=O(f)$$

$$O(f)+o(f)=O(f),\quad O(o(f))=o(f),\quad o(O(f))=o(f).$$

Доведемо, наприклад, першу з них. Нехай $g(x)=o(f(x))$ і $h(x)=o(f(x))$ коли $x\to a$. Розглянемо

$\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)+h(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}+\lim\limits_{x\to a}\frac{h(x)}{f(x)}=0$, тобто $o(f)+o(f)=o(f)$.

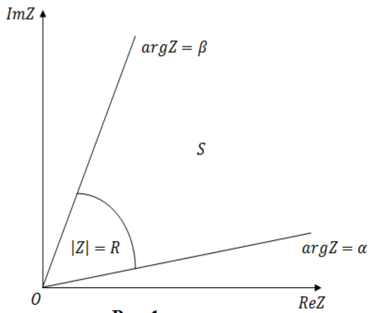

Рис. 1

Узагальнимо введені поняття на випадок функцій комплексної змінної. Нехай функції $f(z)$ і $g(z)$ визначені у нескінченому секторі $S:\alpha \le \arg z \le \beta$ (рис. 1). Якщо тепер $z \to \infty$, залишаючись у секторі S, то вираз $f(z)=O(g(z))$ означає, що для деякого значення $R>0$ існує таке число $C>0$, яке не залежить від $\arg z$, що $|f(z)| \le C|g(z)|$ коли $|z| \ge R,\ z \in S$. Аналогічно визначаються символи o та $\sim$.

§ 2. Інтегрування та диференціювання найпростіших асимптотичних оцінок

Введені асимптотичні оцінки можна інтегрувати при певних обмеженнях щодо збіжності інтегралів. Наведемо прості достатні умови, за яких асимптотичні оцінки можна інтегрувати.

Теорема 1. Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні, $g(x)>0$ коли $a<x<b$ та

$\int\limits_{x_0}^{b} g(x)dx=+\infty$, де $a<x_0<b$. Тоді

1. Якщо $f(x)\sim g(x)$ коли $x\to b$, то $\int\limits_{x}^{b} f(t)dt \sim \int\limits_{x}^{b} g(t)dt$, коли $x\to b$.

2. Якщо $f(x)=o(g(x))$ коли $x\to b$, то $\int\limits_{x}^{b} f(t)dt = o\left(\int\limits_{x}^{b} g(t)dt\right)$, коли $x\to b$.

3. Якщо $f(x)=O(g(x))$ коли $x\to b$, то $\int\limits_{x}^{b} f(t)dt = O\left(\int\limits_{x}^{b} g(t)dt\right)$, коли $x\to b$

Доведемо, наприклад, друге твердження. Використовуючи правило Лопіталя, отримуємо

$$\lim_{x\to b}\frac{\int_x^b f(t)dt}{\int_x^b g(t)dt}=\lim_{x\to b}\frac{-f(x)}{-g(x)}=0,$$ так як $f(x)=o\big(g(x)\big)$, коли $x\to b$, тобто

$$\int_x^b f(t)dt=o\left(\int_x^b g(t)dt\right).$$

З цієї теореми, наприклад, випливає, що якщо функція $f(x)$ інтегрована та $f(x)\sim x^{\alpha}$, коли $x\to+\infty$, то

$$\int_x^{\infty} f(t)dt\sim-\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ \mathrm{Re}\,\alpha<-1 \text{ і } \int_a^x f(t)dt\sim\begin{cases}\ln x, \alpha=-1\\ \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \mathrm{Re}\,\alpha>-1\end{cases}.$$

Використовуючи розглянуті результати, отримаємо просту оцінку для сум.

Теорема 2. Нехай функція $f(x)$ неперервна, додатна та монотонна, коли $x\geq 0$.

Тоді $\sum_{k=0}^{n} f(k)=\int_0^n f(x)dx+O\big(f(n+1)\big)+O(1)$, коли $n\to\infty$.

Доведення. Нехай, наприклад, для визначеності $f(x)$ зростає. Тоді

$$\int_{k-1}^{k} f(x)dx\leq f(k)\leq\int_k^{k+1} f(x)dx$$

Підсумовуючі ці нерівності по k від 1 до n, отримаємо

$$\int_0^n f(x)dx\leq\sum_{k=1}^{n} f(k)\leq\int_1^{n+1} f(x)dx,$$ звідки

$$\int_0^n f(x)dx\leq\sum_{k=0}^{n} f(k)-f(0)\leq\int_0^n f(x)dx+\int_n^{n+1} f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx.$$

Тоді $f(0)\leq\sum_{k=0}^{n} f(k)-\int_0^n f(x)dx\leq f(0)+\int_n^{n+1} f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx$.

За теоремою про середнє $\int_{n}^{n+1} f(x)dx = f(\xi)\cdot 1 \le f(n+1)$, де $n < \xi < n+1$.

Отже $\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_{0}^{n} f(x)dx \le f(n+1) + f(0) - \int_{0}^{1} f(x)dx$.

Так як величина $f(0) - \int_{0}^{1} f(x)dx$ являє собою сталу, то ми остаточно отримаємо

$\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_{0}^{n} f(x)dx \le O(f(n+1)) + O(1)$.

Використовуючи цю теорему, знайдемо асимптотику наступних сум, коли $n \to \infty$

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int_{1}^{n} \frac{dx}{x} + O\left(\frac{1}{n+1}\right) + O(1) = \ln n + O(1) \sim \ln n$

2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln k)^{\alpha}}{k} = \int_{1}^{n} \frac{(\ln x)^{\alpha}}{x} dx + O\left(\frac{\ln^{\alpha}(n+1)}{n+1}\right) + O(1) = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{bmatrix} =$

$$= \int_{0}^{\ln n} t^{\alpha} dt + O(1) \sim \frac{(\ln n)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha > -1.$$

Диференціювання асимптотичних оцінок не завжди допустиме. Наприклад, якщо $f(x) = x + \cos x$, то , $f(x) \sim x$, коли $x \to \infty$. Похідна від цієї функції $f'(x) = 1 - \sin x$ не задовольняє співвідношенню $f'(x) \sim 1$, яке ми отримаємо, диференціюючи співвідношення еквівалентності. Для того, щоб диференціювання було можливим, необхідні додаткові умови. Для функцій від дійсних змінних ці умови можна сформулювати в термінах монотонності похідної. Наприклад, наступним чином:

Нехай функція $f(x)$ має неперервну похідну і $f(x) \sim x^{p}$, коли $x \to \infty$, де $p \ge 1$. Тоді, якщо $f'(x)$ є не спадною функцією при всіх досить великих значеннях x, то $f'(x) \sim px^{p-1}$, коли $x \to \infty$.

Для функцій комплексної змінної диференціювання асимптотичних оцінок зазвичай припустимо в підобластях області, де вони справедливі. Важливим окремим випадком для аналітичних функцій є наступна теорема.

Теорема 3. Нехай функція $f(z)$ аналітична в області, що містить замкнутий сектор $S: \alpha \le \arg z \le \beta$ і

$f(z) = O\left(z^p\right)$ (або $f(z) = o\left(z^p\right)$) коли $z \to \infty$ в S,

де p будь-яке фіксовано дійсне число. Тоді

$f^{(m)}(z) = O\left(z^{p-m}\right)$ (або $f^{(m)}(z) = o\left(z^{p-m}\right)$)

коли $z \to \infty$ в будь-якому замкнутому секторі S', що лежить строго всередині S і має ту ж саму вершину.

Доведення. Воно базується на інтегральній формулі Коші для m-ої похідної аналітичної функції

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{m+1}},$$

де L замкнутий контур, що охоплює точку $t = z$.

Нехай сектор S визначається нерівностями $\alpha \le \arg z \le \beta, |z| \ge R$. Розглянемо сектор S', який задається умовами $\alpha + \delta \le \arg z \le \beta - \delta, |z| \ge R'$,

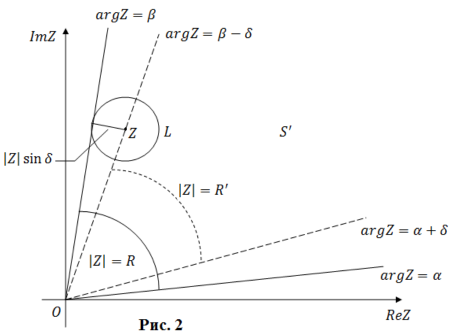

Рис. 2

де δ додатній гострий кут і $R' = \dfrac{R}{1 - \sin\delta}$.

Вибираючи δ досить малим, ми можемо домогтися, що сектор S' міститься в секторі S (рис. 2).

Візьмемо в інтегральній формулі Коші контур інтегрування L у вигляді кола $|t - z| = |z| \sin\delta$ Тоді $|z|(1 - \sin\delta) \le |t| \le |z|(1 + \sin\delta)$. Отже $t \in S$, якщо $z \in S'$.

За умовою $f(z)=O\left(z^p\right)$, тобто існує стала $K>0$ така, що $\left|f(z)\right|\le K|z|^p$. За інтегральною формулою Коші

$$\left|f^{(m)}(z)\right|\le\frac{m!}{2\pi}\oint_L\frac{K|t|^p}{\left(|z|\sin\delta\right)^{m+1}}|dt|\le\frac{m!}{2\pi}\frac{K|z|^p\left(1\pm\sin\delta\right)^p}{\left(|z|\sin\delta\right)^{m+1}}\int_0^{2\pi}|z|\sin\delta d\varphi=$$

$$=\frac{Km!}{\left(\sin\delta\right)^m}|z|^{p-m}\left(1\pm\sin\delta\right)^p,$$

де верхній або нижній знак вибираються відповідно до умов $p\ge 0$ або $p<0$.

В будь-якому випадку $f^{(m)}(z)$ має порядок $O\left(z^{p-m}\right)$, що й потрібно було довести.

Завдання.

1. Довести, що

   а) $\sin x=O(x\cos x),\ x\to 0$; б) $e^{-x}=o(x^m),\ x\to+\infty,\ m=1,2,...$

   в) $e^{ix}=O(1),\ x\to x_0$ для будь якого x_0.

2. Довести, що $\sum_{k=1}^{n}k^\alpha\sim\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ \alpha>-1$ коли $n\to\infty$.

§ 3. Асимптотичні послідовності та ряди

Нехай функції $\varphi_n(x), n=0,1,2,...$ визначені на множині X, яка має граничну точку a, та нехай $\varphi_n(x)\ne 0$ в деякому околі U_n точки a.

Означення 1. Послідовність $\{\varphi_n(x)\}$ зветься асимптотичною, коли $x\to a$, якщо для будь-якого $n\ge 0$

$$\varphi_{n+1}(x)=o\left(\varphi_n(x)\right),\quad x\to a.$$

Прикладами асимптотичних послідовностей є наступні послідовності:

1) $\varphi_n(x)=(x-a)^n$ коли $x\to a$

2) $\varphi_n(x)=\frac{1}{x^n}$ коли $x\to\infty$

3) $\varphi_n(x)=e^{-\lambda_n x}$, де $0<\lambda_n<\lambda_{n+1}$ коли $x\to\infty$

4) $\varphi_n(x)=x^{n+1}\ln^n x$ коли $x\to+0$

З означення асимптотичної послідовності випливають їх такі очевидні властивості :

1. Будь-яка підпослідовність асимптотичної послідовності сама є асимптотичною послідовністю.
2. Якщо функція $f(x)\neq 0$ в деякому околі точки a і $\{\varphi_n(x)\}$ є асимптотичною послідовністю, коли $x\to a$, то і послідовність $\{f(x)\varphi_n(x)\}$ є асимптотичною, коли $x\to a$.
3. Якщо послідовності $\{\varphi_n(x)\}$ та $\{\psi_n(x)\}$ є асимптотичними, коли $x\to a$, то і послідовність $\{\varphi_n(x)\psi_n(x)\}$ є асимптотичною, коли $x\to a$.

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині X і a гранична точка цієї множини. Нехай $\{\varphi_n(x)\}, x\in X$ асимптотична послідовність, коли $x\to a$.

Означення 2. Говорять, що функція $f(x)$ розкладається а асимптотичний ряд

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x),\ x\to a \qquad (1)$$

де a_n сталі, якщо для будь-якого цілого N

$$f(x)-\sum_{n=0}^{N}a_n\varphi_n(x)=o\big(\varphi_N(x)\big),\ x\to a.$$

Ряд (1) називають асимптотичним розвиненням функції $f(x)$ за асимптотичною послідовністю $\{\varphi_n(x)\}$. Це означення вперше було введено А. Пуанкаре, тому розвинення (1) також називають асимптотичним розвиненням у сенсі Пуанкаре.

Асимптотичний ряд (1) можна також записати у еквівалентній формі

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N}a_n\varphi_n(x)+o\big(\varphi_N(x)\big) \text{ або } f(x)=\sum_{n=0}^{N}a_n\varphi_n(x)+O\big(\varphi_{N+1}(x)\big) \quad (2)$$

Перший, відмінний від нуля, доданок асимптотичного розвинення зветься головним членом асимптотичного розвинення.

Асимптотичний ряд дає нам послідовність асимптотичних формул для функції $f(x)$, при цьому кожна наступна формула уточняє попередню

$$f(x)=a_0\varphi_0(x)+o\big(\varphi_0(x)\big),$$

$$f(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+o\big(\varphi_1(x)\big) \text{ і так далі.}$$

З визначення асимптотичного ряду безпосередньо випливає можливість складати асимптотичні ряди і множити їх на сталу величину. Так, якщо

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x) \text{ і } g(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}b_n\varphi_n(x) \text{ коли } x\to a \text{ та } \alpha \text{ і } \beta \text{ стали, то}$$

$$\alpha f(x)+\beta g(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)\varphi_n(x) \text{ коли } x\to a.$$

Покажемо тепер, що асимптотичне розвинення у сенсі Пуанкаре даної функції за даною асимптотичною послідовністю єдино. Припустимо, що функція $f(x)$ має два асимптотичних розвинення

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x) \text{ і } f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}b_n\varphi_n(x)$$

за асимптотичною послідовністю $\{\varphi_n(x)\}$, коли $x\to a$. За означенням

$$f(x)-a_0\varphi_0(x)=o\big(\varphi_0(x)\big) \text{ і } f(x)-b_0\varphi_0(x)=o\big(\varphi_0(x)\big), \text{ коли } x\to a.$$

Віднімаючи з першої рівності другу, отримуємо

$(b_0-a_0)\varphi_0(x)=o\big(\varphi_0(x)\big)$, звідки $b_0-a_0=o(1)$, отже $b_0=a_0$.

Аналогічно доводиться, що $b_1 = a_1$ і так далі. Таким чином, розвинення єдине.

З формули (2) також нескладно отримати формулу для знаходження коефіцієнтів асимптотичного розвинення

$$a_n = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x)}{\varphi_n(x)} \qquad (3)$$

Ми показали, що асимптотичне розвинення функції за даною асимптотичною послідовністю єдине. З іншого боку дві різні функції можуть мати одне й теж асимптотичне розвинення за даною асимптотичною послідовністю. Наприклад,

$f(x) = 0 \sim 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^{-1} + \ldots + 0 \cdot x^{-n} + \ldots$ коли $x \to +\infty$

$g(x) = e^{-x} \sim 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^{-1} + \ldots + 0 \cdot x^{-n} + \ldots$ коли $x \to +\infty$, так як

$a_n = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^{-n}} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$.

Відзначимо, що в першому прикладі ряд збігається до функції, яку ми розклали, а в другому прикладі ряд також збігається, але вже до іншої функції.

З визначення асимптотичного ряду випливає, що він може бути розбіжним. Справді, з (2) випливає, що залишковий член ряду $R_N(x) = f(x) - \sum\limits_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x)$ має вигляд $R_N(x) = \varphi_N(x)\varepsilon_N(x)$, де $\varepsilon_N(x) = o(1)$, коли $x \to a$. Однак нічого не йдеться про поведінку $R_N(x)$, коли x фіксовано і $N \to \infty$. На відміну від рядів, що збігаються, розбіжний асимптотичний ряд дозволяє обчислити значення функції $f(x)$ в даній точці x_0 лише з деякою відносною похибкою $\varepsilon = \varepsilon(x_0)$, при цьому $\lim\limits_{x_0 \to a} \varepsilon(x_0) = 0$. Пізніше, при розгляді методів знаходження асимптотичних розвинень, ми отримаємо приклади асимптотичних рядів, що розбігаються.

Таким чином, можливі три варіанти поведінки асимптотичного ряду для функції $f(x)$:

1) ряд збігається до функції $f(x)$;
2) ряд збігається до функції $g(x) \neq f(x)$;
3) ряд розбігається.

Однак, починаючи з XVIII століття, розбіжні асимптотичні ряди широко використовувалися в чисельних та аналітичних розрахунках багатьма математиками. Зокрема Л. Ейлером з їх допомогою були отримані з великим ступенем точності значення багатьох сталих, наприклад сталої Ейлера C.

§ 4. Степеневі асимптотичні ряди та їх властивості

Серед асимптотичних рядів найпоширенішими є степеневі асимптотичні ряди, тобто ряди виду

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \quad \text{коли } x \to 0 \text{ та}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots \quad \text{коли } x \to \infty$$

Степеневі асимптотичні ряди мають наступні властивості (сформулюємо їх та доведемо для рядів другого виду, для рядів першого виду все аналогічно).

1) Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ можуть бути розвинені в асимптотичні ряди

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n} \text{ та } g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n} \text{ коли } x \to \infty,$$

то і функція $f(x)g(x)$ також може бути розвинена в асимптотичний ряд

$$f(x)g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n} \text{ коли } x \to \infty, \text{ де } c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0.$$

Дійсно, $f(x)g(x) = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n x^{-n} + o\left(x^{-N}\right) \right) \left(\sum_{n=0}^{N} b_n x^{-n} + o\left(x^{-N}\right) \right) =$

$$= a_0 b_0 + \left(a_0 b_1 + a_1 b_0\right) x^{-1} + \left(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0\right) x^{-2} + \ldots + \left(a_0 b_N + \ldots + a_N b_0\right) x^{-N} +$$

$$+\left(a_1 b_N + \ldots + a_N b_1\right) x^{-N-1} + \ldots + a_N b_N x^{-2N} + \left(\sum_{n=0}^{N} a_n x^{-n}\right) \cdot o\left(x^{-N}\right) +$$

$$+\left(\sum_{n=0}^{N} b_n x^{-n}\right) \cdot o\left(x^{-N}\right) + o\left(x^{-N}\right) \cdot o\left(x^{-N}\right) = \sum_{n=0}^{N} c_n x^{-n} + o\left(x^{-N}\right)$$

2) Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ можуть бути розвинені в асимптотичні ряди

$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$ та $g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n}$ коли $x \to \infty$,

то і функція $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ також може бути розвинена в асимптотичний ряд

$\dfrac{f(x)}{g(x)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{-n}$, коли $x \to \infty$, якщо $b_0 \neq 0$.

Для знаходження коефіцієнтів d_0 розглянемо спочатку $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_0 + o(1)}{b_0 + o(1)}$.

Коли $x \to \infty$, цей вираз прямує до $\dfrac{a_0}{b_0}$, тобто $d_0 = \dfrac{a_0}{b_0}$.

Далі за формулою (3) знаходимо

$$d_1 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a_0}{b_0}\right) : \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_0 + a_1 x^{-1} + o\left(x^{-1}\right)}{b_0 + b_1 x^{-1} + o\left(x^{-1}\right)} - \frac{a_0}{b_0}\right) \cdot x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_0 x + a_1 + o(1)}{b_0 + b_1 x^{-1} + o\left(x^{-1}\right)} - \frac{a_0 x}{b_0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 b_0 x + a_1 b_0 + o(1) - a_0 b_0 x - a_0 b_1 - o(1)}{b_0\left(b_0 + b_1 x^{-1} + o\left(x^{-1}\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1 + o(1)}{b_0\left(b_0 + b_1 x^{-1} + o\left(x^{-1}\right)\right)} = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2}$$ і так далі.

З огляду на єдиність асимптотичне розвинення побудовано.

3) Якщо функція $f(x)$ неперервна, коли $x \ge a > 0$ і може бути розвинена в асимптотичний ряд $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$, коли $x \to \infty$, то, якщо $a_0 = a_1 = 0$, то цей асимптотичний можна інтегрувати за членами.

$$\int_x^{\infty} f(t)dt = \int_x^{\infty} \left(\frac{a_2}{t^2} + \frac{a_3}{t^3} + \ldots + \frac{a_n}{t^n} + O\left(\frac{1}{t^n}\right) \right) dt =$$

$$= \left(-\frac{a_2}{t} - \frac{a_3}{2t^2} - \ldots - \frac{a_n}{(n-1)t^{n-1}} + O\left(\frac{1}{t^n}\right) \right) \Bigg|_x^{\infty} = = \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \ldots + \frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}} + O\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

коли $x \to \infty$,отже ми знов отримали асимптотичний ряд.

Якщо $a_0 \ne 0$ і $a_1 \ne 0$, то відповідні доданки не інтегровані. В цьому випадку розглядають функцію $F(x) = f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} \sim \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \ldots$, яка має порядок $O\left(x^{-2}\right)$ і яку вже можна інтегрувати та отримати асимптотичне розвинення

$$\int_x^{\infty} F(t)dt = \int_x^{\infty} \left(f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right) dt \sim \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \ldots \text{ коли } x \to \infty.$$

4) Якщо функція $f(x)$ має неперервну похідну $f'(x)$, коли $x \ge a > 0$ і ця похідна може бути розвинена в асимптотичний ряд, коли $x \to \infty$, то це розвинення можна отримати формальним диференціюванням за членами асимптотичного ряду для $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$, тобто $f'(x) \sim -\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^{-n}$, коли $x \to \infty$.

Дійсно, нехай $f'(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n} = b_0 + \frac{b_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, коли $x \to \infty$. Тоді

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt = f(a) + b_0(x-a) + b_1 \ln\frac{x}{a} + O(1), \text{ коли } x \to \infty.$$

Оскільки $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots$, то $b_0 = b_1 = 0$.

Тоді за попередньою властивістю

$$f(x) = -\int_x^{\infty} f'(t)\,dt \sim -\int_x^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} b_n t^{-n} dt = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n-1} x^{-n} .$$

Враховуючи єдиність асимптотичного розвинення, маємо, що $-\frac{b_n}{n-1} = a_n$, тобто

$b_n = -(n-1)a_{n-1}$ і $f'(x) \sim -\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^{-n}$.

Таким чином отримано той ряд, який виходить при диференціюванню за членами.

Якщо функція $f(x)$ нескінченно диференційована в околі точки a, то її можна розвинути в ряд за формулою Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

Зрозуміло, що дане розвинення є також асимптотичним розвиненням функції $f(x)$, коли $x \to a$. Цей спосіб отримання асимптотичних розвинень досить простий, але, на жаль, має обмежену сферу застосування.

Нагадаємо деякі розвинення за формулою Маклорена, які ми часто будемо використовувати при розв’язанні прикладів.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k},\quad -1<x\le 1$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots,\quad -1<x<1$$

З останньої формули випливає

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots \text{ та } \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$$

Приклади

1. Для функції $f(x)=\frac{x}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$ знайти три перших члена асимптотичного розвинення, коли $x\to+\infty$.

Зробимо заміну $x=\frac{1}{t}$, при якої $t\to 0$, коли $x\to+\infty$. Тоді $f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{1+t}e^{t}$.

Скористаємося двома формулами з наведених вище

$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+o\left(t^3\right)$, коли $|t|<1$та $e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o\left(t^3\right)$, яке виконується для будь-яких t. Тоді

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\left(1-t+t^2-t^3+o\left(t^3\right)\right)\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o\left(t^3\right)\right)=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}-$$

$$-t-t^2-\frac{t^3}{2}+t^2+t^3-t^3+o\left(t^3\right)=1+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+o\left(t^3\right).$$

Звідси $f(x)=1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$, коли $x\to+\infty$.

Відповідний асимптотичний ряд буде абсолютно збіжним за ознакою Д'Аламбера $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{nx^n}{(n+1)x^{n+1}}\right|=\frac{1}{|x|}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{|x|}<1$,коли $|x|>1$.

2. Для функції $F(x)=\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^2(x+\ln t)^{1/3}}$ отримати асимптотичне розвинення, коли $x\to\infty$.

Запишемо цю функцію у вигляді $F(x)=x^{-\frac{1}{3}}\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^2\left(1+\frac{\ln t}{x}\right)^{1/3}}$ та зробимо в інтегралі заміну $\tau=\frac{\ln t}{x}$, тобто $\ln t=x\tau, t=e^{x\tau}, dt=xe^{x\tau}d\tau$. Тоді

$$F(x)=x^{-\frac{1}{3}}\int_0^{\infty}\frac{xe^{x\tau}d\tau}{e^{2x\tau}(1+\tau)^{1/3}}=x^{\frac{2}{3}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-x\tau}d\tau}{(1+\tau)^{1/3}}.$$

Використаємо відоме розвинення за формулою Маклорена

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+o(x^n) \text{ при } \alpha=-\frac{1}{3},$$

яке виконується, коли $|x|<1$, звідки

$$(1+\tau)^{-\frac{1}{3}}=1+\frac{\left(-1/3\right)}{1!}\tau+\frac{\left(-1/3\right)\left(-4/3\right)}{2!}\tau^2+\frac{\left(-1/3\right)\left(-4/3\right)\left(-7/3\right)}{3!}\tau^3+...+o(\tau^n)=$$

$$=1-\frac{1}{3\cdot 1!}\tau+\frac{1\cdot 4}{3^2\cdot 2!}\tau^2-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3^3\cdot 3!}\tau^3+...+(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot(3n-2)}{3^n\cdot n!}\tau^n+o(\tau^n).$$

Тоді $F(x)=x^{\frac{2}{3}}\int_0^{\infty}\left(1-\frac{1}{3\cdot 1!}\tau+\frac{1\cdot 4}{3^2\cdot 2!}\tau^2-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3^3\cdot 3!}\tau^3+...+o(\tau^n)\right)e^{-x\tau}d\tau$

Обчислимо інтеграл

$$\int_0^{\infty}\tau^n e^{-x\tau}d\tau=\left[z=x\tau,\tau=\frac{z}{x},d\tau=\frac{dz}{x}\right]=\int_0^{\infty}\frac{z^n}{x^n}e^{-z}\frac{dz}{x}=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^{\infty}z^ne^{-z}dz=\frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}}=\frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Таким чином

$$F(x)=x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3\cdot 1!}\cdot\frac{1!}{x^2}+\frac{1\cdot 4}{3^2\cdot 2!}\cdot\frac{2!}{x^3}-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3^3\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{x^4}+...+o\left(x^{-n-1}\right)\right)=$$

$$=x^{-\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{3x}+\frac{1\cdot 4}{(3x)^2}-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{(3x)^3}+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{(3x)^n}+o\left(x^{-n}\right)\right)$$

і ми отримали асимптотичне розвинення, коли $x\to\infty$.

З'ясуємо, збігається чи ні відповідний асимптотичний ряд

$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{(3x)^n}$. За ознакою Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)(3x)^n}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)(3x)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{3x}=\infty,$$

тобто ряд є абсолютно не збіжним. Легко бачити, що він також є умовно не збіжним. Але цій ряд можна використовувати для обчислення значень $F(x)$ при достатньо великих значеннях x з високим ступенем точності. Справа в тому, що коли x фіксовано члени ряду спадають доки n не стане достатньо великим, а далі вони зростають. Така поведінка членів ряду характерна для багатьох асимптотичних рядів, проте це не заважає їх використанню для наближеного обчислення значень відповідних функцій.

Розглянемо ще асимптотичні розвинення для функцій комплексної змінної.

Теорема 1. Якщо функція $f(z)$ аналітична, коли $|z|>R$ та має асимптотичне розвинення $f(z)\sim\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^{-n}$, коли $z\to\infty$, то для достатньо великих z цей ряд збігається до функції $f(z)$, тобто $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^{-n}, |z|>R$.

Доведення. Так як $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=a_0$, то функція $f(z)$ аналітична у нескінченно віддаленій точці та може бути розвинена у ряд Лорана $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^{-n}$, який збігається, коли $R<|z|<\infty$. Оскільки для будь-якого цілого $N\geq 0$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N} c_n z^{-n} + O\left(z^{-N-1}\right), \text{ коли } z\to\infty,$$

то ряд Лорана є асимптотичним рядом для функції $f(z)$ коли $z\to\infty$.

Через те, що розвинення функції в асимптотичний ряд єдине, отримуємо, що

$c_n = a_n$ і $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$.

З доведеної раніше в § 2 теореми 3 про диференціювання асимптотичних оцінок для аналітичних функцій випливає, що асимптотичне розвинення для $f(z)$ можна диференціювати скільки завгодно разів в будь-якому замкнутому секторі S', який знаходиться строго в середині сектора $S:\alpha\le\arg z\le\beta, |z|>R$, де виконується розвинення, та має спільну з S вершину.

З використанням розвинень за формулою Маклорена виконати наступне.

Завдання

1. Довести, що $\int_1^x \left(1+\frac{1}{t}\right)^t dt = e\left(x-\frac{1}{2}\ln x\right)+O(1)$, коли $x>1$
2. Знайти асимптотичні розвинення інтегральних синуса та косинуса

   $si(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ та $ci(x)=\int_0^x \frac{\cos t-1}{t}dt$ коли $x\to 0$.

   Дослідити на збіжність отримані асимптотичні ряди.
3. Отримати асимптотичні розвинення функцій, коли $x\to 0$

   а) $f(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+2t)}{t}dt$; б) $g(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

   Дослідити на збіжність отримані асимптотичні ряди.

§ 5. Інтегрування частинами як метод отримання асимптотичних розвинень

Простий і досить ефективний метод отримання асимптотичних розвинень інтегралів, що містять параметр, полягає в інтегруванні частинами. Кожне інтегрування частинами дає новий член розвинення, а залишковий член отримуємо явно як інтеграл, який можна оцінити. Особливо часто він застосовується для інтегралів зі змінною верхньою або нижньою межами. Однак сфера застосування цього методу обмежена і сформулювати скільки-небудь загальні теореми важко. Тому розглянемо цей метод на конкретних прикладах.

1) Розглянемо функцію $f\left(x\right)=\int\limits_1^x \frac{e^t}{t}dt$ та знайдемо її асимптотичне розвинення, коли $x\to+\infty$.

Інтегруємо частинами

$$\int\limits_1^x t^{-1}e^t dt=\begin{bmatrix} u=t^{-1}, du=-t^{-2}dt \\ dv=e^t dt, v=e^t \end{bmatrix}=t^{-1}e^t\Big|_1^x+\int\limits_1^x t^{-2}e^t dt=x^{-1}e^x-e+\int\limits_1^x t^{-2}e^t dt$$

Оцінимо останній інтеграл $\int\limits_1^x t^{-2}e^t dt=\int\limits_1^{x/2} t^{-2}e^t dt+\int\limits_{x/2}^x t^{-2}e^t dt$. Враховуючи, що

$$\int\limits_1^{x/2} t^{-2}e^t dt<\int\limits_1^{x/2} e^t dt=e^{x/2}-e<e^{x/2} \text{ і } \int\limits_{x/2}^x t^{-2}e^t dt<\left(\frac{x}{2}\right)^{-2}\int\limits_{x/2}^x e^t dt=4x^{-2}\left(e^x-e^{x/2}\right)<4x^{-2}e^x,$$

отримуємо, що $-e+\int\limits_1^x t^{-2}e^t dt=O\left(x^{-2}e^x\right)$, так як величини $e, 4x^{-2}e^{x/2}$ мають порядок $O\left(x^{-2}e^x\right)$, тобто $f\left(x\right)=x^{-1}e^x+O\left(x^{-2}e^x\right)$.

Інтегруємо частинами ще раз

$$f(x)=x^{-1}e^x-e+\int_1^x t^{-2}e^t dt=\begin{bmatrix} u=t^{-2}, du=-2t^{-3}du \\ dv=e^t dt, \quad v=e^t \end{bmatrix}=x^{-1}e^x-e+t^{-2}e^t\Big|_1^x+$$

$$+2\int_1^x t^{-3}e^t dt=x^{-1}e^x+x^{-2}e^x-2e+2\int_1^x t^{-3}e^t dt=\left(x^{-1}+x^{-2}\right)e^x+O\left(x^{-3}e^x\right).$$

Повторюючи цей процес, отримуємо

$$f(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}+\ldots+\frac{(n-1)!}{x^n}\right)e^x+O\left(x^{-n-1}e^x\right), \text{ звідки}$$

$$e^{-x}f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}+\ldots+\frac{(n-1)!}{x^n}+O\left(x^{-n-1}\right).$$

Таким чином асимптотичне розвинення має вигляд

$$e^{-x}f(x)\sim\frac{1}{x}+\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}+\ldots+\frac{(n-1)!}{x^n}+\ldots, \text{ коли } x\to\infty.$$

При цьому ряд у правій частині не збігається за жодного значення x. Однак цей ряд можна використовувати для обчислення значень $f(x)$ за досить великих x з гарним ступенем точності. Справа в тому, що при фіксованому x члени ряду $\frac{n!}{x^{n+1}}$ зменшуються поки n не стає більше цілої частини x, а потім вони необмежено зростають. Наприклад, коли $x=10$, то $\frac{[x]!}{x^{[x]+1}}\approx 0{,}36\cdot 10^{-33}$ і значення $f(x)$, коли $x\geq 10$ можна знайти з гарною точністю.

2. Розглянемо так звані інтеграли Френеля

$$C(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt \text{ і } S(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$$

та знайдемо їх асимптотичні розвинення, коли $x\to+\infty$.

Скористаємося наступними значеннями інтегралів

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}$$

та запишемо інтеграли Френеля у вигляді

$$C(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt \text{ та } S(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

Легко бачити, що обидва інтеграли виражаються через відповідно дійсну та уявну частини інтегралу $f(x)=\int_x^\infty \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}dt=\int_x^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{it}dt$. Будемо інтегрувати цей інтеграл частинами

$$f(x)=\int_x^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{it}dt=\begin{bmatrix} u=t^{-\frac{1}{2}}, du=-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}dt \\ dv=e^{it}dt, v=\frac{1}{i}e^{it}=-ie^{it} \end{bmatrix}=-it^{-\frac{1}{2}}e^{it}\Big|_x^\infty-\frac{i}{2}\int_x^\infty t^{-\frac{3}{2}}e^{it}dt=$$

$$=\begin{bmatrix} u=t^{-\frac{3}{2}}, du=-\frac{3}{2}t^{-\frac{5}{2}}dt \\ dv=e^{it}dt, v=-ie^{it} \end{bmatrix}=ix^{-\frac{1}{2}}e^{ix}-\frac{i}{2}\left(-it^{-\frac{3}{2}}e^{it}\Big|_x^\infty-\frac{3i}{2}\int_x^\infty t^{-\frac{5}{2}}e^{it}dt\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} u=t^{-\frac{5}{2}}, du=-\frac{5}{2}t^{-\frac{7}{2}}dt \\ dv=e^{it}dt, v=-ie^{it} \end{bmatrix}=ix^{-\frac{1}{2}}e^{ix}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}e^{ix}-\frac{3}{2^2}\left(-it^{-\frac{5}{2}}e^{it}\Big|_x^\infty-\frac{5i}{2}\int_x^\infty t^{-\frac{7}{2}}e^{it}dt\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} u=t^{-\frac{7}{2}}, du=-\frac{7}{2}t^{-\frac{9}{2}}dt \\ dv=e^{it}dt, v=-ie^{it} \end{bmatrix}=ix^{-\frac{1}{2}}e^{ix}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}e^{ix}-i\frac{1\cdot 3}{2^2}x^{-\frac{5}{2}}e^{ix}+i\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\left(-it^{-\frac{7}{2}}e^{it}\Big|_x^\infty-\right.$$

$$\left.-\frac{7i}{2}\int_x^\infty t^{-\frac{9}{2}}e^{it}dt\right)=ix^{-\frac{1}{2}}e^{ix}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}e^{ix}-i\frac{1\cdot 3}{2^2}x^{-\frac{5}{2}}e^{ix}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}x^{-\frac{7}{2}}e^{ix}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4}\int_x^\infty t^{-\frac{9}{2}}e^{it}dt$$

Отже

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{ix}\left(i+\frac{1}{2x}-i\frac{1\cdot 3}{(2x)^2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x)^3}\right)+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4}\int_x^\infty t^{-\frac{9}{2}}e^{it}dt$$

Продовжуючи інтегрування частинами, отримуємо асимптотичне розвинення

$$f(x)\sim\frac{1}{\sqrt{x}}e^{ix}\left(i+\frac{1}{2x}-i\frac{1\cdot3}{(2x)^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2x)^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\cos x+i\sin x\right)\left(i+\frac{1}{2x}-i\frac{1\cdot3}{(2x)^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2x)^3}+\ldots\right)$$

Відокремлює дійсну та уявну частину маємо

$$\operatorname{Re} f(x)\sim\frac{1}{\sqrt{x}}\left[-\left(1-\frac{1\cdot3}{(2x)^2}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{(2x)^4}\ldots\right)\sin x+\left(\frac{1}{2x}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2x)^3}+\ldots\right)\cos x\right]$$

$$\operatorname{Im} f(x)\sim\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\left(1-\frac{1\cdot3}{(2x)^2}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{(2x)^4}+\ldots\right)\cos x+\left(\frac{1}{2x}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2x)^3}+\ldots\right)\sin x\right]$$

Тоді

$$C(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1-\frac{1\cdot3}{(2x)^2}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{(2x)^4}-\ldots\right)-\frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2x)^3}+\ldots\right)$$

$$S(x)\sim\frac{1}{2}-\frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1-\frac{1\cdot3}{(2x)^2}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{(2x)^4}-\ldots\right)-\frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2x)^3}+\ldots\right)$$

Отримані асимптотичні ряди також не є збіжними.

3. Розглянемо неповну гамма-функцію, яка визначається формулою

$$\gamma(\alpha,x)=\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t}dt,\quad \alpha>0.$$

Якщо розвинути показникову функцію за формулою Маклорена та інтегрувати за членами, то отримуємо

$$\gamma(\alpha,x)=\int_0^x t^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x t^{n+\alpha-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+\alpha}}{(n+\alpha)n!}$$

Цей ряд збігається для будь-яких $x>0$ і буде асимптотичним рядом, коли $x\to 0$, але не є асимптотичним рядом, коли $x\to\infty$. Для отримання останнього треба розглянути додаткову гамма-функцію

$$\Gamma(\alpha,x)=\Gamma(\alpha)-\gamma(\alpha,x)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt-\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t}dt=\int_x^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt.$$

Будемо інтегрувати частинами

$$\Gamma(\alpha,x)=\int_x^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt=\begin{bmatrix} u=t^{\alpha-1},\ du=(\alpha-1)t^{\alpha-2}dt \\ dv=e^{-t}dt,\quad v=-e^{-t}\end{bmatrix}=-t^{\alpha-1}e^{-t}\Big|_x^\infty+(\alpha-1)\int_x^\infty t^{\alpha-2}e^{-t}dt=$$

$$=x^{\alpha-1}e^{-x}+(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1,x)=$$

$$=x^{\alpha-1}e^{-x}+(\alpha-1)x^{\alpha-2}e^{-x}+(\alpha-1)(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2,x)=\ldots=$$

$$=x^{\alpha-1}e^{-x}\left(1+\frac{\alpha-1}{x}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{x^2}+\ldots+\frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{x^{n-1}}\right)+$$

$$+(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)\Gamma(\alpha-n,x).$$

Для скорочення запису використаємо властивість гамма-функції $z=\dfrac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)}$:

$$(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)=\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha-2)}\cdots\frac{\Gamma(\alpha-n+2)}{\Gamma(\alpha-n+1)}=\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n+1)}$$

Отже $\Gamma(\alpha,x)=e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k+1)}x^{\alpha-k}+\dfrac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}\Gamma(\alpha-n,x).$

Розглянемо залишковий член

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}\Gamma(\alpha-n,x)\right|=\left|\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}\right|\int_x^\infty t^{\alpha-n-1}e^{-t}dt<\left|\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}\right|x^{\alpha-n-1}\int_x^\infty e^{-t}dt=$$

$$=\left|\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}\right|x^{\alpha-n-1}e^{-x}.$$

Таким чином, залишковий член обмежений за абсолютною величиною $(n+1)$-шим членом ряду. Отже отримано асимптотичне розвинення додаткової гамма-функції

$$\Gamma(\alpha,x)\sim e^{-x}\Gamma(\alpha)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}, \text{ коли } x\to+\infty.$$

Тоді асимптотичне розвинення неповної гамма-функції має вигляд

$$\gamma(\alpha,x)=\Gamma(\alpha)-\Gamma(\alpha,x)\sim\Gamma(\alpha)\left(1-e^{-x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\right) \text{ коли } x\to+\infty.$$

Досліджуємо на збіжність отриманий ряд. Застосуємо ознаку Д'Аламбера

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha-k+1)x^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)x^{\alpha-k}}\right|=\left|\frac{(\alpha-k)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha-k)x}\right|=\left|\frac{\alpha-k}{x}\right|\to\infty$$

коли $k\to\infty$ та x фіксовано. Отже ряд розбіжний. При цьому члени ряду за абсолютною величиною спочатку монотонно спадають (коли $k-\alpha<x$), а потім (коли $k+1-\alpha>x$) монотонно зростають до нескінченності. Така поведінка членів ряду, як ми вже знаємо, характерна для багатьох асимптотичних рядів, що не заважає їх використанню для обчислення значень відповідних функцій за досить великих x.

4. Розглянемо функцію Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

та знайдемо її асимптотичне розвинення, коли $x\to+\infty$.

Зробимо в інтегралі заміну змінної $z=\frac{t^2}{2}, t=\sqrt{2z}, dt=\frac{dz}{\sqrt{2z}}$. Тоді

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x^2/2}e^{-z}\frac{dz}{\sqrt{2z}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{x^2/2}z^{-\frac{1}{2}}e^{-z}dz=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{x^2}{2}\right),$$

тобто ми звели функцію Лапласа до неповної гамма-функції та можемо використати отриманий раніше результат

$$\Phi(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}-k}\right).$$

Враховуючи, що

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right) = \left(\frac{1}{2}-k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right) = \left(\frac{1}{2}-k\right)(-1)^k \frac{\sqrt{\pi}\,2^k}{(2k-1)!!}$, отримуємо

$$\Phi(x) \sim \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(2k-1)!!\,x^{1-2k}}{\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2}-k\right)2^k \cdot 2^{\frac{1}{2}-k}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k-1)x^{2k}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1\cdot 3}{x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^6} + \ldots\right), \text{ коли } x \to +\infty.$$

Цей ряд є також розбіжний.

Завдання.

1. Для функцій $Si(x) = \int_x^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ та $Ci(x) = \int_x^{\infty}\frac{\cos t}{t}dt$ отримати асимптотичні розвинення, коли $x \to \infty$. Дослідити на збіжність отримані асимптотичні ряди.
2. Інтегруючи частинами, отримати асимптотичне розвинення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, коли $x \to +\infty$.

   Порада: взяти до уваги значення інтегралу Лапласа $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2}$ і те, що $\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right) = -te^{-\frac{t^2}{2}}$.

3. Довести, що $\int\limits_0^{\pi} x^n \sin x dx \sim \dfrac{\pi^{n+2}}{n^2}$, коли $n \to \infty$.

4. Довести, якщо $\alpha > 0$, то

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{(1+t)^{\alpha}} dt = \frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \text{ та } \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos \lambda t}{(1+t)^{\alpha}} dt = \frac{\alpha}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right), \text{коли } \lambda \to \infty.$$

5. Знайти асимптотичне розвинення, коли $x \to +\infty$ інтегралу

$$\int\limits_x^{\infty} t^{-\alpha} e^{it} dt, \text{ де } \alpha > 0.$$

6. Знайти асимптотичні розвинення, коли $x \to +\infty$ інтегралів

а) $\int\limits_0^{x} t^{\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $\alpha > -1$; б) $\int\limits_x^{\infty} t^{\alpha} e^{-t^{\beta}} dt$, $\beta > 0$.

7. Інтегруючи частинами, отримати асимптотичне розвинення інтегралу

$$\int\limits_0^{x} t^{\alpha} e^{-\frac{1}{t}} dt, \alpha > -1 \text{ коли } x \to +0.$$

§ 6. Інтеграли Лапласа

Одним із загальних типів інтегралів, до яких можна застосувати метод інтегрування частинами, є інтеграли Лапласа

$$F(z) = \int\limits_0^{\infty} \varphi(t) e^{-zt} dt,$$

і це є не що інше як перетворення Лапласа функції $\varphi(t)$.

Відносно функції $\varphi(t)$ припустимо, що вона інтегрована на будь-якому кінцевому проміжку і на нескінченності росте не швидше експоненти, тобто існує таке $\sigma > 0$, що $\varphi(t) = O\left(e^{\sigma t}\right)$, коли $t \to +\infty$. В цьому випадку інтеграл $F(z)$ збігається коли $\operatorname{Re} z > \sigma$, а коли $\operatorname{Re} z \geq \sigma_0 > \sigma$, він збігається рівномірно.

Якщо функція $\varphi(t)$ має неперервні похідні будь-якого порядку, то інтегруючи частинами отримуємо

$$F(z)=\int_0^\infty \varphi(t)e^{-zt}dt=\begin{bmatrix} u=\varphi(t),\, du=\varphi'(t)dt \\ dv=e^{-zt}dt,\, v=-\dfrac{1}{z}e^{-zt} \end{bmatrix}=-\frac{\varphi(t)}{z}e^{-zt}\Big|_0^\infty+$$

$$+\frac{1}{z}\int_0^\infty \varphi'(t)e^{-zt}dt=\frac{\varphi(0)}{z}+\frac{1}{z}\int_0^\infty \varphi'(t)e^{-zt}dt=\frac{\varphi(0)}{z}+\frac{\varphi'(0)}{z^2}+$$

$$+\frac{1}{z^2}\int_0^\infty \varphi''(t)e^{-zt}dt=\ldots=\frac{\varphi(0)}{z}+\frac{\varphi'(0)}{z^2}+\frac{\varphi''(0)}{z^3}+\ldots+\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{z^n}+R_n(z).$$

Оцінимо залишковий член

$$R_n(z)=\frac{1}{z^n}\int_0^\infty \varphi^{(n)}(t)e^{-zt}dt=\frac{1}{z^n}\int_0^\infty O\left(e^{\sigma t}\right)\cdot e^{-zt}dt=\frac{1}{z^n}O\left(\int_0^\infty e^{-(z-\sigma)t}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{z^n}O\left(-\frac{1}{z-\sigma}e^{-(z-\sigma)t}\Big|_0^\infty\right)=\frac{1}{z^n}O\left(\frac{1}{z-\sigma}\right)=O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right).$$

Отже має місце асимптотична формула

$$F(z)\sim\sum_{k=0}^\infty \frac{\varphi^{(k)}(0)}{z^{k+1}} \quad \text{коли } z\to\infty.$$

З іншого боку, дане асимптотичне розвинення формально можна отримати шляхом розкладення функції $\varphi(t)$ в ряд Маклорена $\varphi(t)=\sum_{k=0}^\infty \frac{\varphi^{(k)}(o)}{k!}t^k$ з наступним інтегруванням за членами

$$\int_0^\infty \varphi(t)e^{-zt}dt=\int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}t^k e^{-zt}dt=\sum_{k=0}^\infty \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\int_0^\infty t^k e^{-zt}dt=\sum_{k=0}^\infty \frac{\varphi^{(k)}(0)}{z^{k+1}},$$

де враховано, що $\int_0^\infty t^k e^{-zt}dt=\frac{\Gamma(k+1)}{z^{k+1}}=\frac{k!}{z^{k+1}}$.

Обґрунтуванням цього формального процесу є наступна лема Ватсона, яка широко використовується при знаходженні асимптотичних розвинень.

Лема Ватсона. Якщо $\varphi(t)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^{\frac{k+\lambda}{\mu}-1}$, коли $t\to 0$, де λ та μ додатні сталі, то

$$F(z)=\int_0^{\infty}\varphi(t)e^{-zt}dt\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\mu}\right)z^{-\frac{k+\lambda}{\mu}},$$

коли $|z|\to\infty$ в секторі $|\arg z|\le\frac{\pi}{2}-\varepsilon<\frac{\pi}{2}$.

Доведення. Для будь-якого натурального числа N маємо

$$\int_0^{\infty}\varphi(t)e^{-zt}dt=\sum_{k=0}^{N-1}a_k\int_0^{\infty}t^{\frac{k+\lambda}{\mu}-1}e^{-zt}dt+R_N(z),$$

де $R_N(z)=\int_0^{\infty}\left(\varphi(t)-\sum_{k=0}^{N-1}a_k t^{\frac{k+\lambda}{\mu}-1}\right)e^{-zt}dt$.

Обчислимо інтеграл

$$\int_0^{\infty}t^{\frac{k+\lambda}{\mu}-1}e^{-zt}dt=\left[t=\frac{\tau}{z},\,dt=\frac{d\tau}{z}\right]=\int_0^{\infty}\left(\frac{\tau}{z}\right)^{\frac{k+\lambda}{\mu}-1}e^{-\tau}\frac{d\tau}{z}=$$

$$=z^{-\frac{k+\lambda}{\mu}}\int_0^{\infty}\tau^{\frac{k+\lambda}{\mu}-1}e^{-\tau}d\tau=\Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\mu}\right)z^{-\frac{k+\lambda}{\mu}}.$$

Отже $\int_0^{\infty}\varphi(t)e^{-zt}dt=\sum_{k=0}^{N-1}a_k\Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\mu}\right)z^{-\frac{k+\lambda}{\mu}}+R_N(z)$.

Покажемо, що залишковий член $R_N(z)=O\left(z^{-\frac{N+\lambda}{\mu}}\right)$, тобто функція $z^{\frac{N+\lambda}{\mu}}R_N(z)$

обмежена коли $|z|\to\infty$ в секторі $|\arg z|\le\frac{\pi}{2}-\varepsilon<\frac{\pi}{2}$. Для будь-якого натурального числа N можна вибрати сталу C так, щоб виконувалася нерівність

$$\left|\varphi(t)-\sum_{k=0}^{N-1}a_k t^{\frac{k+\lambda}{\mu}-1}\right|\le Ce^{\sigma t}t^{\frac{N+\lambda}{\mu}-1},\, t\ge 0.$$

Нехай $x=\operatorname{Re} z$. Тоді, коли $x>\sigma$,

$$\left|R_N(z)\right|\le C\int_0^\infty e^{\sigma t}t^{\frac{N+\lambda}{\mu}-1}e^{-xt}dt=\frac{C}{(x-\sigma)^{\frac{N+\lambda}{\eta}}}\Gamma\left(\frac{N+\lambda}{\mu}\right).$$

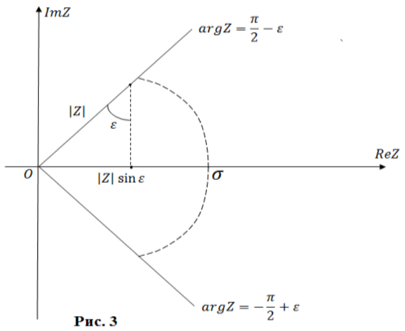

Рис. 3

Так як $x\ge|z|\sin\varepsilon$, то $x>\sigma$, якщо $|z|>\dfrac{\sigma}{\sin\varepsilon}$ (рис. 3).

Отже, якщо $|\arg z|\le\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$ і $|z|>\dfrac{\sigma}{\sin\varepsilon}$, то

$$\left|z^{\frac{N+\lambda}{\mu}}R_N(z)\right|\le\frac{C|z|^{\frac{N+\lambda}{\mu}}}{(|z|\sin\varepsilon-\sigma)^{\frac{N+\lambda}{\mu}}}\Gamma\left(\frac{N+\lambda}{\mu}\right),$$ тобто

обмежена, коли $|z|\to\infty$ і лема доведена.

Зауваження 1. Якщо функція $\varphi(t)$ може бути розкладена в ряд Маклорена, то він буде також її асимптотичним розвиненням, отже буде справедлива лема Ватсона, тобто допустимо інтегрування за членами ряду Маклорена.

Зауваження 2. Якщо розглянемо інтеграл більш загального вигляду $\int_0^\infty\varphi(t)e^{-zt^\alpha}dt$, де $\alpha>0$, він за допомогою заміни змінної $t=\tau^{\frac{1}{\alpha}}$ зведеться до інтегралу $\dfrac{1}{\alpha}\int_0^\infty\varphi\left(\tau^{\frac{1}{\alpha}}\right)\tau^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-z\tau}d\tau$, до якого вже може бути застосована лема Ватсона.

Приклади

1. Для функції $F(x)=\int_0^\infty\dfrac{e^{-t}}{t+x}dt$ отримати асимптотичне розвинення, коли $x\to+\infty$.

Зробимо заміну змінної $t=x\tau$. Тоді $F(x)=\int_0^\infty\dfrac{e^{-x\tau}xd\tau}{x\tau+x}=\int_0^\infty\dfrac{e^{-x\tau}}{1+\tau}d\tau$.

Скористаємося наступним розкладанням за формулою Маклорена

$$\frac{1}{1+\tau}=(1+\tau)^{-1}=1-\tau+\tau^2-\tau^3+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tau^n.$$ Тоді

$$F(x)\sim\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tau^n e^{-x\tau}d\tau=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\infty}\tau^n e^{-x\tau}d\tau=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}},\text{коли } x\to+\infty.$$

Зазначимо також, що цей асимптотичний ряд є розбіжним.

2. Знайдемо асимптотичне розвинення інтегралу

$$F(x)=\int_0^{\infty}e^{-x\,sht}dt \text{ коли } x\to+\infty.$$

Зведемо його до інтегралу Лапласа за допомогою заміни змінної

$\tau=sht$, звідки $t=arcsh\tau=\ln\left(\tau+\sqrt{1+\tau^2}\right)$ і

$$dt=\frac{1}{\tau+\sqrt{1+\tau^2}}\left(1+\frac{2\tau}{2\sqrt{1+\tau^2}}\right)d\tau=\frac{1}{\tau+\sqrt{1+\tau^2}}\frac{\sqrt{1+\tau^2}+\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}d\tau=\frac{d\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}.$$

Отримуємо $F(x)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}e^{-x\tau}d\tau$. Скористаємося розкладенням за формулою Маклорена

$$\left(1+\tau^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{\left(-1/2\right)}{1!}\tau^2+\frac{\left(-1/2\right)\left(-3/2\right)}{2!}\tau^4+...,$$ яке виконується коли $|\tau|<1$.

Згідно з лемою Ватсона $F(x)\sim\int_0^{\infty}\left(1-\frac{1}{2\cdot 1!}\tau^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\tau^4-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\tau^6+...\right)e^{-x\tau}d\tau$.

Враховуючи, що $\int_0^{\infty}\tau^n e^{-x\tau}d\tau=\frac{n!}{x^{n+1}}$, отримуємо

$$F(x)\sim\frac{1}{x}-\frac{1}{2\cdot 1!}\cdot\frac{2!}{x^3}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{4!}{x^5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{6!}{x^7}+...==\frac{1}{x}-\frac{1^2}{x^3}+\frac{(1\cdot 3)^2}{x^5}-\frac{(1\cdot 3\cdot 5)^2}{x^7}+...,$$

коли $x\to+\infty$.

За ознакою Д’Аламбера цей асимптотичний ряд є розбіжним

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\left((2n-1)!!\right)^2}{x^{2n+1}} \cdot \frac{x^{2n-1}}{\left((2n-3)!!\right)^2} = \frac{(2n-1)^2}{x^2} \to \infty \text{ коли } n \to \infty.$$

3. Знайдемо асимптотичне розвинення функції Макдональда (модифікованої функції Бесселя другого роду)

$$K_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_1^\infty \left(t^2-1\right)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-xt}dt \text{ коли } x \to +\infty.$$

Для зручності розглянемо інтеграл $F(x) = \int_1^\infty \left(t^2-1\right)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-xt}dt$ та зробимо в ньому заміну змінної $t = \tau + 1$, щоб звести проміжок інтегрування до $(0;\infty)$ та отримати інтеграл Лапласа

$$F(x) = \int_0^\infty \left(\tau^2+2\tau+1-1\right)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-x(\tau+1)}d\tau = e^{-x}\int_0^\infty (2\tau)^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\tau}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-x\tau}d\tau =$$

$$= e^{-x}2^{\nu-\frac{1}{2}}\int_0^\infty \tau^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\tau}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-x\tau}d\tau$$

Використаємо розвинення за формулою Маклорена

$$\left(1+\frac{\tau}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\nu-\frac{1}{2}}{1!}\frac{\tau}{2} + \frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 + \ldots$$

Тоді

$$F(x) = e^{-x}2^{\nu-\frac{1}{2}}\int_0^\infty \tau^{\nu-\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{\nu-\frac{1}{2}}{1!\cdot 2}\tau + \frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{3}{2}\right)}{2!\cdot 2^2}\tau^2 + \ldots\right]e^{-x\tau}d\tau =$$

$$=e^{-x}2^{\nu-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\left[\tau^{\nu-\frac{1}{2}}+\frac{\nu-\frac{1}{2}}{1!\cdot 2}\tau^{\nu+\frac{1}{2}}+\frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{3}{2}\right)}{2!\cdot 2^2}\tau^{\nu+\frac{3}{2}}+\ldots\right]e^{-x\tau}d\tau$$

Використовуючи лему Ватсона та беручи до уваги відомий вже нам інтеграл $\int_0^{\infty}\tau^{\alpha}e^{-x\tau}d\tau=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}$, отримуємо

$$F(x)=e^{-x}2^{\nu-\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{x^{\nu+\frac{1}{2}}}+\frac{\nu-\frac{1}{2}}{1!\cdot 2}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{x^{\nu+\frac{3}{2}}}+\frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{3}{2}\right)}{2!\cdot 2^2}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{5}{2}\right)}{x^{\nu+\frac{3}{2}}}+\ldots\right]=$$

$$=e^{-x}\frac{2^{\nu-\frac{1}{2}}}{x^{\nu+\frac{1}{2}}}\left[\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)+\frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{1!\cdot(2x)}+\frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{2!\cdot(2x)^2}+\ldots\right]$$

Так як

$$\nu-\frac{1}{2}=\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)},\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{3}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{3}{2}\right)}$$

і так далі, то

$$F(x)=e^{-x}\frac{2^{\nu-\frac{1}{2}}}{x^{\nu+\frac{1}{2}}}\left[\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)+\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{1!\cdot(2x)}+\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{3}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{5}{2}\right)}{2!\cdot(2x)^2}+\ldots\right]=$$

$$=e^{-x}\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2x}}\left[1+\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)1!\cdot(2x)}+\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{3}{2}\right)2!\cdot(2x)^2}+\ldots\right]$$

Отже $K_\nu(x)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu F(x)=$

$$=e^{-x}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left[1+\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)1!\cdot(2x)}+\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{3}{2}\right)2!\cdot(2x)^2}+\dots\right]=$$

$$=e^{-x}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}-n\right)n!(2x)^n}\quad \text{коли } x\to+\infty.$$

Завдання

1. Для функції $F(x)=\int\limits_0^\infty \ln\left(1+t^2\right)e^{-xt}dt$ отримати асимптотичне розвинення, коли $x\to+\infty$. Дослідити на збіжність отриманий асимптотичний ряд.
2. Для функції $F(x)=\int\limits_0^\infty \sqrt{1+t^2}e^{-x\sqrt{t}}dt$ отримати асимптотичне розвинення, коли $x\to+\infty$. Дослідити на збіжність отриманий асимптотичний ряд.
3. Отримати асимптотичне розвинення функції

   $F(x)=\int\limits_0^{\pi/2} e^{-x\,tg\,t}dt$ коли $x\to+\infty$.

   Дослідити на збіжність отриманий асимптотичний ряд.
4. Отримати асимптотичне розвинення, коли $x\to+\infty$ функції

   $F(x)=\int\limits_0^\infty e^{-x\,ch t}dt$.

   Дослідити на збіжність отриманий асимптотичний ряд.

   Порада: зробити заміну змінної $\tau=ch t-1$.

§ 7. Метод Лапласа

Розглянемо наступне узагальнення інтеграла Лапласа

$$F(\lambda)=\int_a^b \varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt,$$

де $\varphi(t)$ і $p(t)$ досить гладкі функції, а λ параметр. Нас цікавитиме асимптотика $F(\lambda)$, коли $\lambda\to+\infty$.

Почнемо з евристичних міркувань, що привели Лапласа до цього методу. Нехай максимум функції $p(t)$ досягається в точці t_0. Тоді функція $e^{\lambda p(t)}$ має максимум в точці t_0, який тим різкіше, чим більше λ (рис. 4).

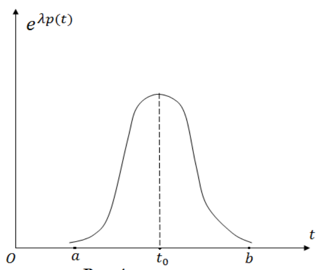

Рис. 4

Інтеграл $F(\lambda)$ можна приблизно замінити інтегралом по малому околу точки максимуму t_0 і це наближення буде тим точніше, чим більше буде λ. Далі, в цьому околі функції $\varphi(t)$ і $p(t)$ можна приблизно замінити головними членами розкладів за формулою Тейлора. У результаті отримаємо інтеграл, асимптотика якого легко обчислюється.

Нехай спочатку точка максимуму t_0 збігається з одним з кінців проміжку $[a;b]$, наприклад, $t_0=a$, при цьому $p'(a)<0$. Замінимо

$$F(\lambda)\approx\int_a^{a+\varepsilon}\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt,$$ де $\varepsilon>0$ достатньо мале фіксоване число.

Замінімо далі в інтегралі $\varphi(t)\approx\varphi(a)$ і $p(t)\approx p(a)+p'(a)(t-a)$. Тоді

$$F(\lambda)\approx\varphi(a)e^{\lambda p(a)}\int_a^{a+\varepsilon}e^{\lambda p'(a)(t-a)}dt.$$

Зробивши в інтегралі заміну змінної $\tau=t-a$, отримаємо

$$F(\lambda)\approx\varphi(a)e^{\lambda p(a)}\int_0^{\varepsilon}e^{\lambda p'(a)\tau}d\tau=\varphi(a)e^{\lambda p(a)}\frac{1}{\lambda p'(a)}e^{\lambda p'(a)\tau}\Big|_0^{\varepsilon}=\frac{\varphi(a)e^{\lambda p(a)}}{\lambda p'(a)}\left(e^{\lambda p'(a)\varepsilon}-1\right)$$

Так як $e^{\lambda p'(a)\varepsilon}\to 0$, коли $\lambda\to+\infty$, то отримуємо асимптотичну формулу

$$F(\lambda)\sim-\frac{\varphi(a)}{\lambda p'(a)}e^{\lambda p(a)},\text{ коли } \lambda\to+\infty.$$

Якщо точка максимуму збігається з іншим кінцем проміжку $t_0=b$ при цьому $p'(b)>0$, то так саме отримуємо

$$F(\lambda)\sim\frac{\varphi(b)}{\lambda p'(b)}e^{\lambda p(b)}\quad\text{коли } \lambda\to+\infty.$$

Розглянемо тепер випадок, коли точка максимуму t_0 є внутрішньою точкою проміжку $[a;b]$. Тоді $p'(t_0)=0$ і $p''(t_0)<0$. Замінімо далі в інтегралі проміжок інтегрування $(a;b)$ на $(t_0-\varepsilon;t_0+\varepsilon)$, $\varphi(t)\approx\varphi(t_0)$ і $p(t)\approx p(t_0)+\frac{1}{2}p''(t_0)(t-t_0)^2$.

Тоді $F(\lambda)\approx\varphi(t_0)e^{\lambda p(t_0)}\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}e^{\frac{\lambda}{2}p''(t_0)(t-t_0)^2}dt$. Зробив заміну змінної $\tau=t-t_0$, маємо

$$F(\lambda)\approx\varphi(t_0)e^{\lambda p(t_0)}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}e^{\frac{\lambda}{2}p''(t_0)\tau^2}d\tau.$$

Зробимо в останньому інтегралі заміну змінної $\tau=\dfrac{z}{\sqrt{-\lambda p''(t_0)}}$. Тоді

$$F(\lambda)\approx\frac{\varphi(t_0)}{\sqrt{-\lambda p''(t_0)}}e^{\lambda p(t_0)}\int\limits_{-\varepsilon\sqrt{-\lambda p''(t_0)}}^{\varepsilon\sqrt{-\lambda p''(t_0)}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Коли $\lambda\to+\infty$, інтеграл $\int\limits_{-\varepsilon\sqrt{-\lambda p''(t_0)}}^{\varepsilon\sqrt{-\lambda p''(t_0)}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ прямує до інтегралу Пуассону

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}.$$

Отже ми отримуємо асимптотичну формулу

$$F(\lambda) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda p''(t_0)}}\varphi(t_0)e^{\lambda p(t_0)} \text{ коли } \lambda \to +\infty.$$

При отриманні цих двох асимптотичних формул припущення про те, що лише окіл «піку» функції $e^{\lambda p(t)}$ відіграє головну роль, використалося двічі: при заміні функцій $\varphi(t)$ і $p(t)$ головними членами їх розкладів за ступенями $t-t_0$ та при заміні проміжку інтегрування $(a;b)$ на проміжок $(a;a+\varepsilon)$ або на $(t_0-\varepsilon;t_0+\varepsilon)$. Проте наведені міркування не є суворим доказом отриманих асимптотичних формул, а мають евристичний характер. Перейдемо тепер до суворого обґрунтування викладеного методу Лапласа отримання асимптотичних розвинень.

Почнемо з однієї допоміжної леми.

Лема. Нехай $\sup\limits_{a<t<b} p(t) = K$ та при деякому $\lambda_0 > 0$ інтеграл $F(\lambda) = \int\limits_a^b \varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt$ збігається абсолютно $\left|F(\lambda_0)\right| \le \int\limits_a^b |\varphi(t)|\left|e^{\lambda_0 p(t)}\right|dt < \infty$.

Тоді має місце оцінка

$$\left|F(\lambda)\right| \le C\left|e^{\lambda K}\right|, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \ge \lambda_0.$$

Доведення. Коли $\mathrm{Re}\,\lambda \ge \lambda_0$ маємо

$$\left|F(\lambda)\right| = \left|\int\limits_a^b \varphi(t)e^{\lambda_0 p(t)+(\lambda-\lambda_0)K+(\lambda-\lambda_0)(p(t)-K)}dt\right| \le$$

$$\le \left|e^{(\lambda-\lambda_0)K}\right|\int\limits_a^b |\varphi(t)|\left|e^{\lambda_0 p(t)}\right|\left|e^{(\lambda-\lambda_0)(p(t)-K)}\right|dt.$$

Так як $p(t)-K<0$, то $\left|e^{(\lambda-\lambda_0)(p(t)-K)}\right| \le 1$ і $F(\lambda) \le \left|e^{(\lambda-\lambda_0)K}\right|\int\limits_a^b |\varphi(t)|\left|e^{\lambda_0 p(t)}\right|dt \le C\left|e^{\lambda K}\right|$.

Теорема 1 (Вклад від граничної точки максимуму)

Нехай $[a;b]$скінченний проміжок та виконані умови

1. максимум функції $p(t)$ досягається лише у точці $t=a$;
2. функції $\varphi(t)$ та $p(t)$ належать класу $C([a;b])$, тобто неперервні;
3. $\varphi(t)$ та $p(t)$ належать класу C^{∞} при t, близьких до a, тобто мають неперервні похідні будь-якого порядку, і $p'(a)\neq 0$.

Тоді, коли $\lambda\to\infty, |\arg\lambda|\leq\frac{\pi}{2}-\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ справедливо асимптотичне розвинення

$$F(\lambda)=\int_a^b\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt\sim e^{\lambda p(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda^{k+1}},$$

де коефіцієнті c_k мають вигляд

$$c_k=-M^k\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\Bigg|_{t=a}, \text{ а оператор } M=-\frac{1}{p'(t)}\cdot\frac{d}{dt}.$$

Це розвинення можна диференціювати по λ будь-яку кількість разів.

Головний член цього розвинення має вигляд

$$F(\lambda)\sim-\frac{\varphi(a)}{\lambda p'(a)}e^{\lambda p(a)}.$$

Доведення. Візьмемо $\varepsilon>0$ таке, що $p'(t)\neq 0$, коли $t\in[a;a+\varepsilon]$ та представимо

$$F(\lambda)=\int_a^b\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt=F_1(\lambda)+F_2(\lambda), \text{ де}$$

$$F_1(\lambda)=\int_a^{a+\varepsilon}\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt \text{ і } F_2(\lambda)=\int_{a+\varepsilon}^{b}\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt.$$

Відповідно до леми інтеграл $F_2(\lambda)$ експоненціальне малий в порівнянні з $e^{\lambda p(a)}$

$\left|F_2(\lambda)\right| \le C\left|e^{\lambda p(a)}\right|.$

Інтеграл $F_1(\lambda)$ будемо інтегрувати частинами

$$F_1(\lambda)=\int_a^{a+\varepsilon}\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt=\frac{1}{\lambda}\int_a^{a+\varepsilon}\frac{\varphi(t)}{p'(t)}d\left(e^{\lambda p(t)}\right)=\frac{1}{\lambda}\frac{\varphi(t)}{p'(t)}e^{\lambda p(t)}\Bigg|_a^{a+\varepsilon}-$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int_a^{a+\varepsilon}\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)e^{\lambda p(t)}dt=\frac{1}{\lambda}\frac{\varphi(t)}{p'(t)}e^{\lambda p(t)}\Bigg|_a^{a+\varepsilon}-\frac{1}{\lambda^2}\int_a^{a+\varepsilon}\frac{1}{p'(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)d\left(e^{\lambda p(t)}\right)$$

Інтегруючи частинами ще раз, отримуємо

$$F_1(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\frac{\varphi(t)}{p'(t)}e^{\lambda p(t)}\Bigg|_a^{a+\varepsilon}-\frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{p'(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)e^{\lambda p(t)}\Bigg|_a^{a+\varepsilon}+$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}\int_a^{a+\varepsilon}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{p'(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\right)e^{\lambda p(t)}dt.$$

Введемо оператор $M=-\frac{1}{p'(t)}\frac{d}{dt}$, при цьому будемо вважати, що M^0 є одиничний оператор, та продовжимо інтегрування частинами

$$F_1(\lambda)=\frac{1}{\lambda}M^0\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)e^{\lambda p(t)}\Bigg|_a^{a+\varepsilon}+\frac{1}{\lambda^2}M^1\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)e^{\lambda p(t)}\Bigg|_a^{a+\varepsilon}-$$

$$-\frac{1}{\lambda^2}\int_a^{a+\varepsilon}\frac{d}{dt}\left(M^1\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\right)e^{\lambda p(t)}dt=\ldots=$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{\lambda^{k+1}}M^k\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)e^{\lambda p(t)}\Bigg|_a^{a+\varepsilon}-\frac{1}{\lambda^{N+1}}\int_a^{a+\varepsilon}\frac{d}{dt}\left(M^N\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\right)e^{\lambda p(t)}dt.$$

Поза інтегральна підстановка, коли $t=a$, дає $e^{\lambda p(a)}\sum_{k=0}^{N}\frac{c_k}{\lambda^{k+1}}$, де

$c_k = -M^k \left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)} \right) \Bigg|_{t=a}$. Підстановка, коли $t = a + \varepsilon$, буде експоненціальне мала в порівнянні з $e^{\lambda p(a)}$.

Останній інтеграл в отриманій формулі є $O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}} e^{\lambda p(a)} \right)$. Отже ми отримали, що $F(\lambda) = e^{\lambda p(a)} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{\lambda^{k+1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}} \right) \right)$. В силу тог, що N довільне, отримуємо необхідне асимптотичне розвинення

$F(\lambda) \sim e^{\lambda p(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda^{k+1}}$, коли $\lambda \to \infty$.

Коли $k = 0$, отримуємо головний член розвинення $F(\lambda) \sim -\frac{\varphi(a)}{\lambda p'(a)} e^{\lambda p(a)}$.

Можливість диференціювання за членами випливає з того, що диференціювання $F(\lambda)$ по λ призводить до інтегралів того ж виду.

Якщо точка максимуму збігається з іншим кінцем проміжку $t = b$ і $p'(b) \neq 0$, то головний член розвинення буде мати вигляд $F(\lambda) \sim \frac{\varphi(b)}{\lambda p'(b)} e^{\lambda p(b)}$, а коефіцієнти

$c_k = M^k \left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)} \right) \Bigg|_{t=b}$

Приклади

1. Розглянемо так звану функцію помилки

   $$Erfc(x) = \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$

   та знайдемо її асимптотичне розвинення, коли $x \to +\infty$.

Ми вже розглядали подібні інтеграли, коли розбирали метод інтегрування частинами. На цей раз отримуємо асимптотичне розвинення методом Лапласа.

Зробимо в інтегралі заміну змінної $t = x\tau$ та отримуємо

$$Erfc(x) = x\int_{1}^{\infty} e^{-x^2\tau^2}d\tau .$$

В даному випадку $\varphi(\tau)=1,\ p(\tau)=-\tau^2$ і $\lambda = x^2$. На проміжку $[1;\infty)$ функція $p(\tau)$ спадає і її максимум буде, коли $\tau=1$, звідки $p(1)=-1$. Обчислимо $p'(\tau)=-2\tau$ та $p'(1)=-2$. Тоді за теоремою 1

$$Erfc(x) \sim xe^{-x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{x^{2(k+1)}} .$$

Знайдемо $c_0 = -\left.\frac{1}{p'(\tau)}\right|_{\tau=1} = \left.\frac{1}{2\tau}\right|_{\tau=1} = \frac{1}{2}$,

$$c_1 = -\frac{1}{p'(\tau)}\frac{d}{d\tau}\left.\left(\frac{1}{p'(\tau)}\right)\right|_{\tau=1} = \frac{1}{2\tau}\frac{d}{d\tau}\left.\left(\frac{1}{-2\tau}\right)\right|_{\tau=1} = \frac{1}{2\tau}\left.\left(\frac{1}{2\tau^2}\right)\right|_{\tau=1} = \left.\frac{1}{2^2\tau^3}\right|_{\tau=1} = \frac{1}{2^2}$$

$$c_2 = -\frac{1}{-2\tau}\frac{d}{d\tau}\left.\left(\frac{1}{2^2\tau^3}\right)\right|_{\tau=1} = \frac{1}{2\tau}\left.\left(\frac{-3}{2^2\tau^4}\right)\right|_{\tau=1} = -\left.\frac{1\cdot 3}{2^3\tau^5}\right|_{\tau=1} = -\frac{1\cdot 3}{2^3}$$ і так далі.

Отже, отримано асимптотичне розвинення

$$Erfc(x) \sim xe^{-x^2}\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2^2x^4}+\frac{1\cdot 3}{2^3x^6}-...\right)=\frac{e^{-x^2}}{2x}\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1\cdot 3}{2^2x^4}-...\right)=$$

$$=\frac{e^{-x^2}}{2x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^kx^{2k}},\ \text{коли}\ x\to+\infty.$$

Відповідний асимптотичний ряд є розбіжним при усіх значеннях x, так як не виконується необхідна умова збіжності – загальний член ряду не прямує до нулю, коли $k\to\infty$.

2. Знайдемо головний член асимптотичного розвинення функції

$F_\nu(x)=\int_{0}^{\infty}e^{-\nu t-x\,sht}dt$, коли $x\to+\infty$, а параметр ν фіксований.

Запишемо цій інтеграл у вигляді $F_\nu(x)=\int\limits_0^\infty e^{-\nu t}e^{-xsht}dt$. Візьмемо

$\varphi(t)=e^{-\nu t}$, $p(t)=-sht$, а $\lambda=x$. На проміжку $[0;\infty)$ функція $p(t)$ спадає та має максимум у точці $t_0=0$. При цьому $\varphi(0)=1,\ p(0)=0,\ p'(t)=-cht$ і $p'(0)=-1$.

За теоремою 1 $F_\nu(x)\sim-\dfrac{\varphi(0)}{xp'(0)}e^{x\,p(0)}=\dfrac{1}{x}$ або $F_\nu(x)=\dfrac{1}{x}+O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Теорема 2 (Вклад від внутрішньої точки максимуму)

Нехай $[a;b]$скінченний проміжок та виконані умови

1. Максимум функції $p(t)$ досягається лише в точці $t=t_0,\ a<t_0<b$;
2. функції $\varphi(t)$ та $p(t)$ належать класу $C([a;b])$, тобто неперервні;
3. $\varphi(t)$ та $p(t)$ належать класу C^∞ при t, близьких до t_0, тобто мають неперервні похідні будь-якого порядку, і $p'(t_0)=0,\ p''(t_0)<0$.

Тоді, коли $\lambda\to\infty, |\arg\lambda|\le\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$ справедливе асимптотичне розвинення

$$F(\lambda)=\int\limits_a^b\varphi(t)e^{\lambda\,p(t)}dt\sim e^{\lambda\,p(t_0)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda^{k+\frac{1}{2}}},$$

де коефіцієнти c_k мають вигляд

$$c_k=\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(2k)!}\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\varphi(t)\left(\frac{p(t_0)-p(t)}{(t-t_0)^2}\right)^{-k-\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{t=t_0}.$$

Це розвинення можна диференціювати по λ будь-яку кількість разів.

Головний член цього розвинення має вигляд

$$F(\lambda)\sim\sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda p''(t_0)}}\varphi(t_0)e^{\lambda\,p(t_0)}.$$

Доведення. Напишемо інтеграл $F(\lambda)$ у вигляді

$$F(\lambda)=\int_{a}^{t_0-\varepsilon}\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt+\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt+\int_{t_0+\varepsilon}^{b}\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt.$$

Відповідно до леми перший і останній інтеграли експоненціально мали в порівнянні з $e^{\lambda p(t_0)}$ і ми можемо ними знехтувати. Інтеграл, який залишився, напишемо у вигляді

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}\varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt=e^{\lambda p(t_0)}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}\varphi(t)e^{\lambda\left(p(t)-p(t_0)\right)}dt.$$

Зробимо в ньому заміну змінної $t=g(y)$, де функція $g(y)$ визначається неявно рівнянням $p(t)-p(t_0)=-y^2$. З умов даної теореми випливає, що буде виконуватися теорема об існуванні, неперервності та диференційованості цієї неявної функції. При цьому вона буде взаємно однозначно відображати проміжок $[-\delta;\delta]$ на проміжок $[t_0-\varepsilon;t_0+\varepsilon]$. Тоді

$$F(\lambda)\sim e^{\lambda p(t_0)}\int_{-\delta}^{\delta}\varphi(g(y))e^{-\lambda y^2}g'(y)dy=e^{\lambda p(t_0)}\int_{0}^{\delta}f(y)e^{-\lambda y^2}dy,$$

де $f(y)=\varphi(g(y))g'(y)+\varphi(g(-y))g'(-y)$.

Розглянемо інтеграл $\int_{0}^{\delta}f(y)e^{-\lambda y^2}dy=\int_{0}^{\infty}f(y)e^{-\lambda y^2}dy-\int_{\delta}^{\infty}f(y)e^{-\lambda y^2}dy$.

Так як $e^{-\lambda y^2}\le e^{-\lambda\delta^2}$, коли $y\ge\delta$, то останній інтеграл експоненціальне малий і ми можемо їм знехтувати. Отже

$$F(\lambda)\sim e^{\lambda p(t_0)}\int_{0}^{\infty}f(y)e^{-\lambda y^2}dy.$$

Розкладемо функцію $f(y)$ в ряд Маклорена. Так як ця функція парна, то її похідні непарного порядку коли $y=0$ будуть дорівнювати нулю і ми отримуємо

$$f(y)=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{2k}}{(2k)!}y^{2k}\text{, де } a_{2k}=\frac{d^{2k}}{dy^{2k}}\Big(\varphi\big(g(y)\big)g'(y)\Big)\Big|_{y=0}.$$

Отже $F(\lambda)\sim 2e^{\lambda p(t_0)}\int_0^{\infty}e^{-\lambda y^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{2k}}{(2k)!}y^{2k}dy$.

Обґрунтуванням законності інтегрування ряду за членами служить лема Ватсона і зауваження 2 до неї. При цьому врахуємо, що

$$\int_0^{\infty}y^{2k}e^{-\lambda y^2}dy=\left[z=\lambda y^2,\, dy=\frac{1}{2\sqrt{\lambda z}}\right]=\frac{1}{2\lambda^{k+\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty}z^{k-\frac{1}{2}}e^{-z}dz=\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{k+\frac{1}{2}}}.$$

Тоді $F(\lambda)\sim e^{\lambda p(t_0)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{2k}}{(2k)!}\int_0^{\infty}y^{2k}e^{-\lambda y^2}dy=e^{\lambda p(t_0)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{2k}}{(2k)!}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\lambda^{-k-\frac{1}{2}}$.

Залишилося перетворити вирази для коефіцієнтів отриманого розвинення в ті, що входять до умов теореми.

Так як в околі точки t_0 функції $\varphi(t)$ і $p(t)$ аналітичні, то для малого $\delta>0$ за інтегральною формулою Коші для похідної аналітичної функції маємо

$$a_{2k}=\frac{d^{2k}}{dy^{2k}}\Big(\varphi\big(g(y)\big)g'(y)\Big)\Big|_{y=0}=\frac{d^{2k}}{dy^{2k}}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\delta}\frac{\varphi\big(g(z)\big)g'(z)}{z-y}dz\Bigg|_{y=0}=$$

$$=\frac{(2k)!}{2\pi i}\int_{|z|=\delta}\frac{\varphi\big(g(z)\big)g'(z)}{z^{2k+1}}dz=\frac{(2k)!}{2\pi i}\int_{|t-t_0|=\varepsilon}\varphi(t)\big(p(t_0)-p(t)\big)^{-k-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{(2k)!}{2\pi i}\int_{|t-t_0|=\varepsilon}\varphi(t)\left(\frac{p(t_0)-p(t)}{(t-t_0)^2}\right)^{-k-\frac{1}{2}}\frac{dt}{(t-t_0)^{2k+1}}=$$

$$=\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left.\left(\varphi(t)\left(\frac{p(t_0)-p(t)}{(t-t_0)^2}\right)^{-k-\frac{1}{2}}\right)\right|_{t=t_0}$$

Отже ми отримали, що $F(\lambda)\sim e^{\lambda\, p(t_0)}\sum_{k=0}^{\infty}c_k\lambda^{-k-\frac{1}{2}}$, де

$$c_k=\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(2k)!}a_{2k}=\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(2k)!}\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left.\left(\varphi(t)\left(\frac{p(t_0)-p(t)}{(t-t_0)^2}\right)^{-k-\frac{1}{2}}\right)\right|_{t=t_0}$$

Коли $k=0$, отримуємо головний член асимптотичного розвинення

$$F(\lambda)\sim e^{\lambda\, p(t_0)}\frac{c_0}{\sqrt{\lambda}},\text{ де } c_0=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\varphi(t_0)\left.\left(\frac{p(t_0)-p(t)}{(t-t_0)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right|_{t=t_0}$$

Врахуємо, що $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ та розкриємо невизначеність за правилом Лопіталя

$$\lim_{t\to t_0}\left(\frac{p(t_0)-p(t)}{(t-t_0)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\lim_{t\to t_0}\frac{(t-t_0)^2}{p(t_0)-p(t)}}=\sqrt{\lim_{t\to t_0}\frac{2(t-t_0)}{-p'(t)}}=$$

$$=\sqrt{\lim_{t\to t_0}\frac{2}{-p''(t)}}=\sqrt{\frac{2}{-p''(t_0)}}.$$

Отже $c_0=\varphi(t_0)\sqrt{\frac{2\pi}{-p''(t_0)}}$ і $F(\lambda)\sim\sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda p''(t_0)}}\varphi(t_0)e^{\lambda\, p(t_0)}$.

Можливість диференціювання за членами випливає з того, що диференціювання $F(\lambda)$ по λ призводить до інтегралів того ж виду.

Теорема 3. Нехай $[a;b]$– скінченний проміжок та виконані умови

1. Максимум функції $p(t)$ досягається лише в точці $t=a$;
2. функції $\varphi(t)$ та $p(t)$ належать класу $C([a;b])$, тобто неперервні;
3. функції $\varphi(t)$ та $p(t)$ належать класу C^{∞} при t близьких до a, тобто мають неперервні похідні будь-якого порядку, і $p'(a)=0,\ p''(a)<0$.

Тоді, коли $\lambda\to\infty, |\arg\lambda|\le\frac{\pi}{2}-\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ справедливе асимптотичне розвинення

$$F(\lambda)=\int_a^b \varphi(t)e^{\lambda p(t)}dt \sim e^{\lambda p(a)}\sum_{k=0}^{\infty}c_k\lambda^{-\frac{k+1}{2}},$$

де коефіцієнті c_k мають вигляд

$$c_k=\frac{\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)}{k!}\frac{d^k}{dt^k}\left(\varphi(t)\left(\frac{p(a)-p(t)}{(t-a)^2}\right)^{\frac{k+1}{2}}\right)\Bigg|_{t=a}$$

Це розвинення можна диференціювати по λ будь-яку кількість разів.

Головний член цього розвинення має вигляд

$$F(\lambda)\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda p''(a)}}\varphi(a)e^{\lambda p(a)}.$$

Доведення цієї теореми проводиться за схемою доведення Теореми 2. Заважимо тільки, що якщо максимум функції $p(t)$ досягається лише в іншому кінці проміжку $t=b$ і $p'(b)=0,\ p''(b)<0$, то у формулі для головного члена розвинення треба лише замінити a на b.

Для всіх трьох теорем необхідно зробити такі зауваження.

Зауваження 1. Теореми справедливі і для напівнескінченного проміжку $[a;\infty)$, якщо за деякого $\lambda_0 > 0$ збігається абсолютно інтеграл $\int\limits_a^{\infty} |\varphi(t)| \left|e^{\lambda_0 p(t)}\right| dt$ і $p(t) \le p(t_0) - \delta, \delta > 0$ поза деякого околу точки максимуму t_0.

Зауваження 2. Щоб отримати скінченне число членів асимптотичного розвинення, достатньо вимагати, щоб функції $\varphi(t)$ і $p(t)$ мали скінченне число неперервних похідних в деякому околі точки максимуму t_0. Відзначимо, що диференціальні властивості функцій $\varphi(t)$ та $p(t)$ суттєві лише в околі точки максимуму.

Зауваження 3. Якщо функція $p(t)$ має скінченне число точок максимуму $t_1, t_2, ..., t_n$ на проміжку, який розглядається, то асимптотика $F(\lambda)$ дорівнює сумі вкладів від кожної з цих точок.

Приклади

1. Знайдемо асимптотичне розвинення для гамма-функції Ейлера

$$\Gamma(z+1) = \int\limits_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = \int\limits_0^{\infty} e^{z \ln t} e^{-t} dt \text{ коли } z \to +\infty.$$

Якщо взяти $\varphi(t) = e^{-t}$ та $p(t) = \ln t$, то функція $\ln t$ не має точок максимуму і метод Лапласа не застосовний. Тому напишемо цей інтеграл у вигляді

$$\Gamma(z+1) = \int\limits_0^{\infty} e^{-z \ln t - t} dt$$

і візьмемо $\varphi(t) = 1$ та $p(t) = z \ln t - t$. Тоді $p'(t) = \dfrac{z}{t} - 1 = 0$, коли $t = z$, тобто точка максимуму зміщується при зміні z. Щоб цього уникнути і можна було застосувати метод Лапласа, зробимо заміну змінної $t = z\tau, dt = zd\tau$. Тоді

$$\Gamma(z+1) = z \int\limits_0^{\infty} e^{z \ln(z\tau) - z\tau} d\tau = z e^{z \ln z} \int\limits_0^{\infty} e^{z(\ln \tau - \tau)} d\tau = z^{z+1} \int\limits_0^{\infty} e^{z(\ln \tau - \tau)} d\tau.$$

Тепер вже $\varphi(\tau)=1$ і $p(\tau)=\ln\tau-\tau$. Знайдемо точку максимуму функції $p(\tau)$:

$p'(\tau)=\frac{1}{\tau}-1=0$, коли $\tau=1$. При цьому $p(1)=-1,\ p''(1)=-\frac{1}{\tau^2}\Big|_{\tau=1}=-1.$

За теоремою 2 знаходимо головний член асимптотичного розвинення

$$\Gamma(z+1)\sim z^{z+1}\sqrt{\frac{2\pi}{z}}e^{-z}=\sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^z \text{ коли } z\to+\infty.$$

Якщо покласти $z=n$, то отримуємо відому формулу Стірлінга

$$\Gamma(n+1)=n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

За тою же теоремою 2 можна знайти і наступні члени асимптотичного розвинення

$$\Gamma(z+1)\sim\sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^z\left[1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}+\ldots\right].$$

2. Знайдемо головний член асимптотичного розвинення модифікованої функції Бесселя першого роду

$$I_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nt\, e^{x\cos t}dt \text{ коли } x\to+\infty, \text{ де } n\geq 0 \text{ ціле.}$$

У даному інтегралі $\varphi(t)=\cos nt$ і $p(t)=\cos t$. На проміжку $[0;\pi]$ функція $p(t)$ є спадною і її максимум досягається, коли $t=a=0$, при цьому

$\varphi(0)=1,\ p(0)=1,\ p'(0)=-\sin 0=0,\ p''(0)=-\cos 0=-1.$

За теоремою 3 отримуємо

$$I_n(x)\sim\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}e^{-x}=\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}} \text{ коли } x\to+\infty.$$

3. Покажемо, що

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{k!}{n^k}=\sqrt{\frac{\pi n}{2}}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \text{ коли } n\to\infty.$$

Скористаємося відомим вже нам інтегралом $\int\limits_0^{\infty} t^k e^{-nt} dt = \frac{k!}{n^{k+1}}$ та формулою бінома Ньютона. Тоді

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k!}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k n \int\limits_0^{\infty} t^k e^{-nt} dt = n \int\limits_0^{\infty} e^{-nt} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k \right) dt = n \int\limits_0^{\infty} e^{-nt} (1+t)^n dt = n \int\limits_0^{\infty} e^{n(\ln(1+t)-t)} dt$$

Візьмемо $\varphi(t) = 1,\ p(t) = \ln(1+t) - t$. Знайдемо $p'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = 0$ коли $t = 0$.

При цьому $p(0) = 0,\ p''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$ і $p''(0) = -1.$

За теоремою 3 головним членом асимптотичного розвинення буде

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k!}{n^k} = n \int\limits_0^{\infty} e^{n(\ln(1+t)-t)} dt \sim n \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}}.$$

Ми розглянули застосування методу Лапласа для знаходження асимптотики інтегралів виду $F(\lambda) = \int\limits_a^b \varphi(t) e^{\lambda p(t)} dt$ коли $\lambda \to \infty$, який ґрунтувався на тому, що основний внесок в асимптотику дає малий окіл точки максимуму функції $p(t)$, а значить і максимуму виразу $e^{p(t)}$. Цей прийом може бути також використаний і для знаходження асимптотик інтегралів виду $F_1(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} \varphi(t) \left(p_1(t) \right)^{\lambda} dt$, коли $\lambda \to \infty$, які можуть бути отримані з попередніх інтегралів формальною заміною $p_1(t) = e^{p(t)}$, тобто $p(t) = \ln p_1(t)$. Ми не будемо тут наводити доведення відповідних теорем, а обмежимося лише їх формулюванням.

Теорема 4. Нехай $[a;b]$скінченний проміжок та виконані умови

1. Функції $\varphi(t)$ та $p_1(t)$ належать класу $C([a;b])$,тобто неперервні,і $p_1(t) > 0$;
2. максимум функції $p_1(t)$ досягається лише у точці $t = a$;

3. функції $\varphi(t)$ та $p_1(t)$ належать класу C^∞ при t близьких до a, тобто мають неперервні похідні будь-якого порядку, і $p'(a)\neq 0$

Тоді, коли $\lambda\to\infty, |\arg\lambda|\leq\frac{\pi}{2}-\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ справедливо асимптотичне співвідношення

$$F_1(\lambda)=\int_a^b\varphi(t)\big(p_1(t)\big)^\lambda dt\sim\frac{\varphi(a)}{\lambda p_1'(a)}\big(p_1(a)\big)^{\lambda+1}.$$

Теорема 5. Нехай $[a;b]$скінченний проміжок та виконані умови

1. Функції $\varphi(t)$ та $p_1(t)$ належать класу $C([a;b])$, тобто неперервні, і $p_1(t)>0$;
2. максимум функції $p_1(t)$ досягається лише у точці $t=t_0$;
3. функції $\varphi(t)$ та $p_1(t)$ належать класу C^∞ при t близьких до t_0, тобто мають неперервні похідні будь-якого порядку, і $p'(t_0)=0,\ p''(t_0)<0$.

Тоді, коли $\lambda\to\infty, |\arg\lambda|\leq\frac{\pi}{2}-\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ справедливо асимптотичне співвідношення

$$F_1(\lambda)=\int_a^b\varphi(t)\big(p_1(t)\big)^\lambda dt\sim\varepsilon\cdot\varphi(t_0)\sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda p_1''(t_0)}}\big(p_1(t_0)\big)^{\lambda+\frac{1}{2}},$$

де $\varepsilon=1$, якщо $a<t_0<b$, і $\varepsilon=\frac{1}{2}$, якщо $t_0=a$ або $t_0=b$.

Ще одне узагальнення методу Лапласа відноситься до інтегралів виду

$$F(\lambda)=\int_a^b\varphi(t,\lambda)e^{p(t,\lambda)}dt,$$

де функція $\varphi(t,\lambda)$ обмежена, коли $\lambda\to\infty$, а функція $p(t,\lambda)$ має максимум лише в точці $t=t_0(\lambda)$, яка не є фіксованою, а змінюється разом з λ. Припускаючи, що основний внесок в асимптотику дає інтеграл по деякій малій околиці точки максимуму $t_0(\lambda)$, ми можемо отримати аналог доведеної теореми 2. Зокрема

$$F(\lambda)=\int_a^b \varphi(t,\lambda)e^{p(t,\lambda)}dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-p''(t_0(\lambda),\lambda)}}\varphi(t_0(\lambda),\lambda)e^{p(t_0(\lambda),\lambda)} \text{ коли } \lambda\to\infty.$$

Однак у багатьох випадках доцільніше зробити в інтегралі заміну змінної так, щоб зафіксувати точку максимуму. Ми вже застосовували цей прийом при отриманні асимптотики гамма-функції Ейлера.

Приклади

1. Знайдемо головний член асимптотичного розвинення, коли $n\to\infty$ поліномів Лежандра

   $$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos t\right)^n dt, \text{ де } x>1.$$

Ми можемо прийняти $\varphi(t)=1$ та $p_1(t)=x+\sqrt{x^2-1}\cos t$. Функція $p_1(t)$ досягає максимуму, коли $t=t_0=0$, при цьому

$$p_1(0)=x+\sqrt{x^2-1},\ p'(0)=-\sqrt{x^2-1}\sin 0=0,\ \ p''(0)=-\sqrt{x^2-1}\cos 0=-\sqrt{x^2-1}$$

За теоремою 5 отримуємо

$$P_n(x)\sim\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{n\sqrt{x^2-1}}}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+\frac{1}{2}}=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi n}\sqrt[4]{x^2-1}}.$$

2. Знайдемо головний член асимптотичного розвинення функції Макдональда (модифікованої функції Бесселя другого роду)

   $$K_\nu(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\nu t-x\,\mathrm{ch}\,t}dt, \text{ де } x>0 \text{ коли } \nu\to+\infty.$$

Якщо дотримуватися стандартної схеми методу Лапласа та прийняти $\varphi(t)=e^{-x\,\mathrm{ch}\,t}$ та $p(t)=t$, то функція $p(t)$ не має максимуму. Якщо ми візьмемо

$\varphi(t)=1$ і $p(t,\nu)=\nu t-xcht$, то точка максимуму буде знаходитися з рівняння

$p'(t,\nu)=\nu-xsht=0$, звідки $sht=\dfrac{\nu}{x}$ і

$t_0(\nu)=arcsh\dfrac{\nu}{x}=\ln\left(\dfrac{\nu}{x}+\sqrt{\dfrac{\nu^2}{x^2}+1}\right)\approx\ln\dfrac{2\nu}{x}$, так як ν велике.

Щоб зафіксувати точку максимуму зробимо заміну змінної $t=\tau+\ln\dfrac{2\nu}{x}, dt=d\tau$.

Тоді $K_\nu(x)=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\nu\tau+\nu\ln\dfrac{2\nu}{x}-xch\left(\tau+\ln\dfrac{2\nu}{x}\right)\right)d\tau$.

Врахуємо, що $\exp\left(\nu\tau+\nu\ln\dfrac{2\nu}{x}\right)=e^{\nu\tau}\left(\dfrac{2\nu}{x}\right)^\nu$, а

$$ch\left(\tau+\ln\frac{2\nu}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(\exp\left(\tau+\ln\frac{2\nu}{x}\right)+\exp\left(-\tau-\ln\frac{2\nu}{x}\right)\right)=$$

$=\dfrac{1}{2}\left(e^\tau\dfrac{2\nu}{x}+e^{-\tau}\dfrac{x}{2\nu}\right)=\dfrac{\nu}{x}e^\tau+\dfrac{x}{4\nu}e^{-\tau}$, отже отримуємо

$$K_\nu(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\nu\tau}\left(\frac{2\nu}{x}\right)^\nu\exp\left(-x\left(\frac{\nu}{x}e^\tau+\frac{x}{4\nu}e^{-\tau}\right)\right)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2\nu}{x}\right)^\nu\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\nu\tau}e^{-\nu e^\tau}exp\left(-\frac{x^2}{4\nu}e^{-\tau}\right)d\tau=\frac{1}{2}\left(\frac{2\nu}{x}\right)^\nu\int\limits_{-\infty}^{\infty}exp\left(-\frac{x^2}{4\nu}e^{-\tau}\right)e^{\nu\left(\tau-e^\tau\right)}d\tau.$$

Тут вже $\varphi(\tau,\nu)=\exp\left(-\dfrac{x^2}{4\nu}e^{-\tau}\right)\to1$ коли $\nu\to+\infty$, а $p(\tau)=\tau-e^\tau$ має єдину точку максимуму $p'(\tau)=1-e^\tau=0$, коли $\tau=0$. При цьому $p(0)=-1$, $p''(\tau)=-e^\tau$ і $p''(0)=-1$. Тоді згідно з наведеною вище формулою головний член асимптотичного розвинення має вигляд

$K_\nu(x)\sim\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\nu}{x}\right)^\nu\sqrt{\dfrac{2\pi}{-\nu(-1)}}e^{-\nu}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2\nu}}\left(\dfrac{2\nu}{x}\right)^\nu e^{-\nu}$, коли $\nu\to+\infty$.

Завдання. Знайти головні члени асимптотичних розвинень наступних інтегралів:

1. $F(\lambda)=\int\limits_0^{\pi}\sin^2 t\cdot e^{-\lambda\left(e^t-2t\right)}dt$, коли $\lambda\to+\infty$.

2. $F(n)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt$, коли $n\to+\infty$.

3. $F(n)=\int\limits_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^n dt$, коли $n\to+\infty$.

4. $F(n)=\int\limits_0^{1}e^t t^n\left(1+t^2\right)^{-n} dt$, коли $n\to+\infty$.

5. $F(x)=\int\limits_0^{1}\exp\left(-\frac{1}{t}-xt\right)dt$, коли $x\to+\infty$.

Порада: зробити заміну змінної $t=\frac{\tau}{\sqrt{x}}$.

§ 8. Метод стаціонарної фази

Розглянемо знаходження асимптотичних розвинень інтегралів Фур'є

$$F(\lambda)=\int\limits_a^b\varphi(t)e^{i\lambda p(t)}dt,$$

де $p(t)$ дійсна функція, яку називають фазовою функцією, $\varphi(t)$ дійсна або комплексна функція, λ великий додатній параметр.

Інтеграл $F(\lambda)$ буде малим при великих λ за рахунок швидкої осциляції експоненти $e^{i\lambda p(t)}$, оскільки коливання компенсуватимуть один одного. Найбільш загальним результатом для таких інтегралів є

Лема Рімана-Лебега. Якщо $\varphi(t)\in L_1(-\infty;\infty)$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{i\lambda t}dt=o(1),\text{ коли }\lambda\to+\infty.$$

Ніякої більш точної інформації про швидкість зменшення інтеграла за цих умов отримати не можна.

Поведінка підінтегральної функції у цьому випадку різко відрізняється від поведінки підінтегральної функції у методі Лапласа. Якщо там вона мала

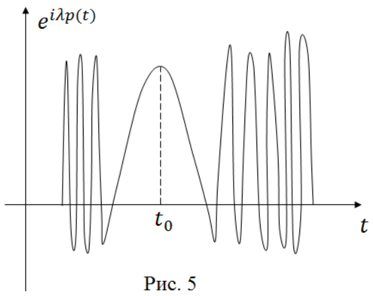

Рис. 5

δ-образний вигляд і була зосереджена поблизу точки максимуму функції $p(t)$, то тут $\left|e^{i\lambda p(t)}\right|=1$ і значення функції як би рівномірно розподілені по відрізку. Тем не менш і в цьому випадку основний внесок в асимптотику інтеграла $F(\lambda)$ вносять стаціонарні, тобто критичні точки фазової функції $p(t)$, оскільки поблизу них уповільнюється осциляція (рис. 5). Звідси походить і назва методу – метод стаціонарної фази. Відзначимо ще, що на відміну від інтегралів Лапласа для інтегралів Фур'є гладкість функцій $\varphi(t)$ і $p(t)$ істотна по всьому проміжку інтегрування.

У разі, коли фазова функція $p(t)$ не має стаціонарних точок, асимптотичне розвинення інтеграла $F(\lambda)$ знаходиться за допомогою інтегрування частинам.

Теорема 1. Нехай $[a;b]$скінченний проміжок та виконані умови

1. $\varphi(t)\in C^{N+1}([a;b])$, $p(t)\in C^{N+2}([a;b])$, тобто мають неперервні похідні відповідно до $N+1$ та $N+2$ порядків на вказаному проміжку;
2. $p'(t)\neq 0$ на проміжку $[a;b]$.

Тоді, коли $\lambda\to+\infty$, справедливо асимптотичне розвинення

$$F(\lambda)=\int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda p(t)}dt=\sum_{k=0}^{N}(i\lambda)^{-k-1}M^k\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)e^{i\lambda p(t)}\Bigg|_a^b+o\left(\lambda^{-N}\right),$$

де оператор $M=-\dfrac{1}{p'(t)}\dfrac{d}{dt}$ та вважаємо, що M^0 є одиничний оператор.

Головний член цього розвинення має вигляд

$$F(\lambda)=(i\lambda)^{-1}\left(\frac{\varphi(b)}{p'(b)}e^{i\lambda p(b)}-\frac{\varphi(a)}{p'(a)}e^{i\lambda p(a)}\right)+o\left(\lambda^{-1}\right).$$

Доведення. Інтегрування частинами дає

$$F(\lambda)=\int_a^b\varphi(t)e^{i\lambda p(t)}dt=\frac{1}{i\lambda}\int_a^b\frac{\varphi(t)}{p'(t)}d\left(e^{i\lambda p(t)}\right)=\frac{1}{i\lambda}\frac{\varphi(t)}{p'(t)}e^{i\lambda p(t)}\Big|_a^b-$$

$$-\frac{1}{i\lambda}\int_a^b\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)e^{i\lambda p(t)}dt=(i\lambda)^{-1}\frac{\varphi(t)}{p'(t)}e^{i\lambda p(t)}\Big|_a^b-$$

$$-(i\lambda)^{-2}\int_a^b\frac{1}{p'(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)d\left(e^{i\lambda p(t)}\right)=$$

$$=(i\lambda)^{-1}M^0\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)e^{i\lambda p(t)}\Big|_a^b+(i\lambda)^{-2}\int_a^b M^1\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)d\left(e^{i\lambda p(t)}\right).$$

Повторюючи далі інтегрування частинами, отримуємо

$$F(\lambda)=\sum_{k=0}^{N}(i\lambda)^{-k-1}M^k\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)e^{i\lambda p(t)}\Big|_a^b+R_{N+1},$$

де $R_{N+1}=(i\lambda)^{-N}\int_a^b\frac{d}{dt}\left(M^N\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\right)e^{i\lambda p(t)}dt$.

Оцінимо $\left|R_{N+1}\right|\le\lambda^{-N}\int_a^b\left|\frac{d}{dt}\left(M^N\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\right)e^{i\lambda p(t)}\right|dt=o\left(\lambda^{-N}\right)$,

так як за лемою Рімана-Лебега останній інтеграл є $o(1)$, коли $\lambda\to+\infty$.

Теорема доведена.

Зауваження 1. Якщо вимагати, щоб функції $\varphi(t)$ та $p(t)$ були нескінченно диференційовані на проміжку $[a;b]$, то замість скінченної суми отримуємо асимптотичний ряд.

Зауваження 2. Якщо проміжком інтегрування є $[0;\infty)$, виконані умови теореми і коли $0 \le k \le N$:

$$\frac{d}{dt}M^k\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right) \in L_1[0;\infty) \text{ та } M^k\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right) = o(1), \text{ коли } t \to +\infty, \text{ то}$$

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \varphi(t)e^{i\lambda p(t)}dt = -\sum_{k=0}^{N}(i\lambda)^{-k-1}M^k\left(\frac{\varphi(t)}{p'(t)}\right)\Bigg|_{t=0} + o\left(\lambda^{-N}\right), \text{ коли } \lambda \to +\infty.$$

Варто звернути увагу на повну схожість отриманих асимптотичних формул для інтегралів Лапласа і Фур'є: вони виходять один з одного формальною заміною $\lambda \leftrightarrow i\lambda$.

При розгляді інтегралів Лапласа велику роль грала лема Ватсона, для інтегралів Фур'є цю роль відіграє лема Ердейї.

Лема Ердейї. Нехай $\alpha \ge 1, \beta > 0$, функція $\varphi(t) \in C^\infty([0;a])$ та дорівнює нулю разом з усіма похідними у точці $t = a$. Тоді

$$\int_0^a t^{\beta-1}\varphi(t)e^{i\lambda t^\alpha}dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}, \text{ коли } \lambda \to +\infty,$$

де $a_k = \dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{\alpha k!}\Gamma\left(\dfrac{k+\beta}{\alpha}\right)\exp\left[\dfrac{i\pi(k+\beta)}{2\alpha}\right]$.

Це розвинення можна диференціювати за λ будь-яке число раз.

Доведення цієї леми досить складно і вимагає попередніх міркувань, тому ми його проводити не будемо.

Розглянемо тепер випадок коли фазова функція $p(t)$ має на проміжку $[a;b]$ єдину не вироджену стаціонарну точку $t = t_0$, тобто $p'(t_0) = 0,\ p''(t_0) \ne 0$.

Тоді основний внесок в асимптотику дає інтеграл за малим околом цієї точки. Загальне асимптотичне розвинення інтегралу $F(\lambda)$ досить громіздко та будується за схемою теореми 2 методу Лапласа з використанням леми Ердейї. Тому обмежимося тільки виразом для головного члена асимптотичного розвинення, коли $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda)=\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\left|p''(t_0)\right|}}\exp\left(i\lambda p(t_0)+\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} p''(t_0)\right)\left(\varphi(t_0)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right). \quad (6)$$

У випадку, коли стаціонарна точка $t=t_0$ є виродженою, тобто $p'(t_0)=p''(t_0)=...=p^{(m-1)}(t_0)=0$, а $p^{(m)}(t_0)\neq 0$, то для головного члену асимптотичного розвинення маємо формулу

$$F(\lambda)=\frac{2}{m}\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{m!}{\lambda\left|p^{(m)}(t_0)\right|}\right)^{\frac{1}{m}}\exp\left[i\lambda p(t_0)+\frac{i\pi}{2m}\operatorname{sgn} p^{(m)}(t_0)\right]\left(\varphi(t_0)+O\left(\lambda^{-\frac{1}{m}}\right)\right)$$

Зокрема, якщо $m=2$, то враховуючі що $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, отримуємо формулу (6).

Якщо $m=3$, тобто $p'(t_0)=0,\ p''(t_0)=0,\ p'''(t_0)\neq 0$, то головний член асимптотичного розвинення приймає вигляд

$$F(\lambda)=\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{\frac{6}{\lambda\left|p'''(t_0)\right|}}\exp\left[i\lambda p(t_0)+\frac{i\pi}{6}\operatorname{sgn} p'''(t_0)\right]\left(\varphi(t_0)+O\left(\lambda^{-\frac{1}{3}}\right)\right) \quad (7)$$

Якщо стаціонарна точка t_0 співпадає з одним із кінців проміжку $[a;b]$, то в цих формулах перед коренем треба взяти множник $\frac{1}{2}$.

У загальному випадку в асимптотиці інтеграла $F(\lambda)$ слід враховувати вклади як від усіх стаціонарних точок, так і від кінців проміжку.

Приклади

1. Знайдемо головний член асимптотичного розвинення функції Бесселя цілого індексу $n \geq 0$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t - nt)\,dt \quad \text{коли } x \to +\infty.$$

Напишемо інтеграл у вигляді

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\pi} e^{i(x\sin t - nt)}dt = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\pi} e^{-int}e^{ix\sin t}dt$$

та візьмемо $\varphi(t) = e^{-int}$ і $p(t) = \sin t$. Знайдемо, $p'(t) = \cos t = 0$, коли

$t = t_0 = \dfrac{\pi}{2} \in [0;\pi]$. При цьому $p''(t_0) = -\sin\dfrac{\pi}{2} = -1$, а $p(t_0) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1, \varphi(t_0) = e^{-i\frac{\pi n}{2}}$.

За формулою (6) знаходимо

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{x\cdot 1}}\,\mathrm{Re}\left(e^{ix - i\frac{\pi}{4}}\left(e^{-i\frac{\pi n}{2}} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right).$$

Враховуючи, що згідно з теоремою 1 вклади від кінців проміжку $t = 0$ і $t = \pi$ мають порядок $O\left(\dfrac{1}{x}\right)$, остаточно отримуємо

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. Розглянемо тепер функцію Бесселя дійсного індексу ν, яка має інтегральне подання

$$J_\nu(\nu x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\nu(t - x\sin t)\,dt - \frac{\sin\pi\nu}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\nu(t + x\,\mathrm{sh}\,t)}dt$$

та знайдемо головний член її асимптотичного розвинення, коли $\nu \to +\infty$ та фіксований $x > 1$.

Другий доданок в цьому поданні має порядок $O\left(\dfrac{1}{\nu}\right)$, так як

$$\left|\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\int_0^\infty e^{-\nu(t+xsht)}dt\right| \le \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\nu t}dt = \frac{1}{\pi\nu}.$$

Перший доданок напишемо у вигляді

$$\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^\pi e^{i\nu(t-x\sin t)}dt$$

та візьмемо $\varphi(t)=1,\ p(t)=t-x\sin t$. Тоді $p'(t)=1-x\cos t=0$, якщо $t=t_0=\arccos\frac{1}{x}\in(0;\pi)$. При цьому

$$p(t_0)=\arccos\frac{1}{x}-x\sin\left(\arccos\frac{1}{x}\right)=\arccos\frac{1}{x}-x\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=\arccos\frac{1}{x}-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\arccos\frac{1}{x}-\sqrt{x^2-1}.$$

Знайдемо $p''(t)=x\sin t$ и $p''(t_0)=x\sin\left(\arccos\frac{1}{x}\right)=\sqrt{x^2-1}$.

За формулою (6) отримуємо

$$\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^\pi e^{i\nu(t-x\sin t)}dt=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{\nu\sqrt{x^2-1}}}\,\mathrm{Re}\,e^{i\left(\nu\arccos\frac{1}{x}-\nu\sqrt{x^2-1}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(1+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\nu\arccos\frac{1}{x}-\nu\sqrt{x^2-1}+\frac{\pi}{4}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right).$$

Отже

$$J_\nu(\nu x)=\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\nu\arccos\frac{1}{x}-\nu\sqrt{x^2-1}+\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\nu^{-\frac{3}{2}}\right).$$

3. Знайдемо головний член асимптотичного розвинення функції

$$J_\nu(\nu)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos\nu(t-\sin t)dt-\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\int_0^\infty e^{-\nu(t+sht)}dt \text{ коли } \nu\to+\infty.$$

Цей випадок не можна отримати з попереднього розвинення, бо за $x=1$ воно стане не визначеним.

Другий доданок, як було показано у попередньому прикладі, має порядок $O\left(\frac{1}{\nu}\right)$. Перший доданок напишемо у вигляді $\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int\limits_0^{\pi} e^{i\nu(t-\sin t)}dt$ та візьмемо $\varphi(t)=1,\ p(t)=t-\sin t$. Обчислимо $p'(t)=1-\cos t=0$, якщо $t=t_0=0$.

При цьому $p(t_0)=0,\ p''(t_0)=\sin t_0=0,\ p'''(t_0)=\cos t_0=1.$

За формулою (7) отримуємо

$$J_\nu(\nu)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{6}{\nu\cdot 1}}\,\mathrm{Re}\,e^{i\left(\nu\cdot 0+\frac{\pi}{6}\cdot 1\right)}\left(1+O\left(\nu^{-\frac{1}{3}}\right)\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{6}}{3\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cos\frac{\pi}{6}\nu^{-\frac{1}{3}}\left(1+O\left(\nu^{-\frac{1}{3}}\right)\right)=\frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)2^{-\frac{2}{3}}3^{-\frac{1}{6}}\nu^{-\frac{1}{3}}+O\left(\nu^{-\frac{2}{3}}\right).$$

4. Знайдемо головний член асимптотичного розвинення функції

$$F(\lambda)=\int\limits_0^1\frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\sin\lambda t\,dt \text{ коли } \lambda\to+\infty.$$

Зробимо спочатку в інтегралі заміну змінної $t=\sin\tau,\ \tau=\arcsin t,\ d\tau=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Тоді

$$F(\lambda)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\tau\sin(\lambda\sin\tau)\,d\tau=\mathrm{Im}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\tau e^{i\lambda\sin\tau}d\tau.$$

Візьмемо $\varphi(\tau)=\tau$ та $p(\tau)=\sin\tau$. Знайдемо $p'(\tau)=\cos\tau=0$ коли $\tau=\frac{\pi}{2}$.

Далі $p''(\tau)=-\sin\tau$ і $p''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$. Тепер обчислимо $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},\ p\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ та за формулою (6) отримуємо

$$F(\lambda) = \mathrm{Im}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda \cdot 1}} exp\left(i\lambda \cdot 1 + \frac{i\pi}{4} \cdot (-1)\right)\left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \sin\left(\lambda - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right).$$

Завдання. Знайти головні члени асимптотичних розвинень наступних інтегралів:

1. $F(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda t^3} dt$ коли $\lambda \to +\infty$.
2. $F(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\lambda(t - \sin t) dt$ коли $\lambda \to +\infty$.
3. $F(\lambda) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} e^{i\lambda cht} dt$ коли $\lambda \to +\infty$.
4. $F_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{i(\nu t - x\sin t)} dt$ коли $x \to +\infty$, а ν дійсно та фіксовано.

§ 9. Асимптотика коренів деяких рівнянь з функціями Бесселя

Розглянемо деякі приклади застосування асимптотичних методів в математичній фізиці. Для розв'язання рівнянь в частинних похідних в циліндричній системі координат (r, φ, z) використовують інтегральне перетворення Ганкеля за змінною r, у ядрі якого є функція Бесселя $J_\nu(\lambda r)$. Тому нагадаємо спочатку деякі властивості цих функцій.

Рівняння $r^2 \frac{d^2 w}{dr^2} + r\frac{dw}{dr} + (r^2 - \nu^2) w = 0$ або

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) w = 0 \qquad (8)$$

зветься рівнянням Бесселя. Воно має два лінійно-незалежних розв'язка – функцію Бесселя $J_\nu(r)$ та функцію Неймана $N_\nu(r)$ (їх ще називають циліндричними функціями першого роду). Функція Бесселя $J_\nu(r)$ обмежена коли $r=0$, функція Неймана $N_\nu(r)$ необмежена коли $r\to 0$.

Для функції Бесселя має місце розвинення у степеневий ряд

$$J_\nu(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{\nu+2k}.$$

Для неї також справедлива формула диференціювання

$$J'_\nu(r)=J_{\nu-1}(r)-\frac{\nu}{r}J_\nu(r) \tag{9}$$

Якщо $\nu\ge -1$, то функція Бесселя $J_\nu(r)$ має зчисленну множину дійсних нулів (рис. 6) і все вони є простими за винятком, може бути, точки $r=0$. Якщо позначати додатні нулі, упорядковані за зростанням, через $j_{\nu,1}, j_{\nu,2},\ldots$, то

$$0<j_{\nu,1}<j_{\nu+1,1}<j_{\nu,2}<j_{\nu+1,2}<j_{\nu,3}<\ldots$$

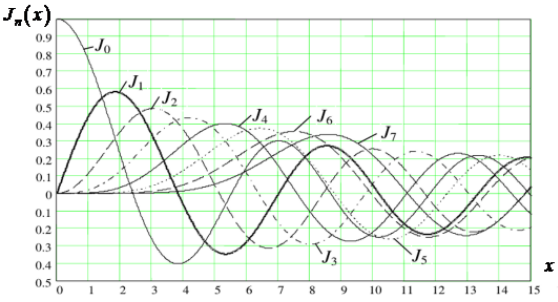

Рис. 6

Якщо $\nu\ge 0$, то таку ж властивість мають нулі $j'_{\nu,k}$ похідної функції Бесселя $J'_\nu(r)$. Крім того нулі $j_{\nu,k}$ і $j'_{\nu,k}$ перемежаються один з одним.

Повернемося тепер до скінченного інтегрального перетворення Ганкеля. Нехай функція $f(r)$ визначена на проміжку $[0;a]$ та задовольняє на ньому умови Діріхле, тобто має лише скінченне число максимумів та мінімумів на проміжку $[0;a]$ та має лише скінченне число розривів першого роду на цьому проміжку. Тоді скінченним інтегральним перетворенням Ганкеля або трансформантою Ганкеля функції $f(r)$ називають функцію

$$F_\nu(\lambda_k)=\int_0^a f(r)J_\nu(\lambda_k r)rdr. \tag{10}$$

Тут λ_k є корені одного з рівнянь $J_\nu(\lambda a)=0,\ J'_\nu(\lambda a)=0$ або $\alpha\lambda J'_\nu(\lambda a)+\beta J_\nu(\lambda a)=0$ в залежності від крайової умови коли $r=a$. Дійсно, будемо вважати, що крайова умова коли $r=0$ є умова обмеженості функції, а коли $r=a$ маємо або крайову умову I роду $f(a)=0$, або крайову умову II роду $f'(a)=0$, або III роду $\alpha f'(a)+\beta f(a)=0$, де α та β сталі. Розглянемо перетворення Ганкеля від диференціального оператора за змінною r, який зазвичай міститься в рівняннях у частинних похідних в циліндричній системі координат

$$L_\nu=\int_0^a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)-\frac{\nu^2}{r^2}f\right]J_\nu(\lambda r)rdr$$

та інтегруємо частинами два рази

$$L_\nu=\begin{bmatrix} u=J_\nu(\lambda r) & du=\dfrac{\partial J_\nu(\lambda r)}{\partial r}dr \\ dv=\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)dr & v=r\dfrac{\partial f}{\partial r}\end{bmatrix}=r\frac{\partial f}{\partial r}J_\nu(\lambda r)\Big|_0^a-$$

$$-\int_0^a\left[r\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial J_\nu(\lambda r)}{\partial r}+\frac{\nu^2}{r}J_\nu(\lambda r)f\right]dr=$$

$$=\begin{bmatrix} u=r\dfrac{\partial J_\nu(\lambda r)}{\partial r} & du=\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial J_\nu(\lambda r)}{\partial r}\right)dr \\ dv=\dfrac{\partial f}{\partial r}dr & v=f\end{bmatrix}=af'(a)J_\nu(\lambda a)-$$

$$-fr\frac{\partial J_\nu(\lambda r)}{\partial r}\Big|_o^a+\int_0^a f\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial J_\nu(\lambda r)}{\partial r}\right)-\frac{\nu^2}{r^2}J_\nu(\lambda r)\right]rdr$$

З рівняння Бесселя (8) виразимо $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial J_\nu(\lambda r)}{\partial r}\right)-\frac{\nu^2}{r^2}J_\nu(\lambda r)=-\lambda^2J_\nu(\lambda r)$, отже

$$L_\nu=af'(a)J_\nu(\lambda a)-a\lambda f(a)J'_\nu(\lambda a)-\lambda^2\int_0^a f(r)J_\nu(\lambda r)rdr=$$

$$= af'(a)J_\nu(\lambda a) - a\lambda f(a)J'_\nu(\lambda a) - \lambda^2 F_\nu(\lambda).$$

Щоб не було поза інтегральних доданків для крайової умови $f(a)=0$, необхідно взяти λ_k як корені рівняння $J_\nu(\lambda a)=0$, для крайової умови $f'(a)=0$ взяти λ_k як корені рівняння $J'_\nu(\lambda a)=0$. У випадку крайової умови $\alpha f'(a)+\beta f(a)=0$, тобто $f'(a)=-\dfrac{\beta}{\alpha}f(a)$, маємо

$$af'(a)J_\nu(\lambda a) - a\lambda f(a)J'_\nu(\lambda a) = -\frac{\beta}{\alpha}af(a)J_\nu(\lambda a) - a\lambda f(a)J'_\nu(\lambda a) =$$

$$= -af(a)\left[\frac{\beta}{\alpha}J_\nu(\lambda a) + \lambda J'_\nu(\lambda a)\right]$$

Цей вираз буде дорівнювати нулю коли λ_k є коренями рівняння $\alpha\lambda J'_\nu(\lambda a)+\beta J_\nu(\lambda a)=0$.

Формула обернення для скінченного перетворення Ганкеля (10) має вигляд

$$f(r) = \sum_k F_\nu(\lambda_k)\frac{J_\nu(\lambda_k r)}{\left\|J_\nu(\lambda_k r)\right\|^2}, \qquad (11)$$

де сума береться по всіх додатних коренів λ_k відповідного рівняння. Тут

$$\left\|J_\nu(\lambda_k r)\right\|^2 = \int_0^a J_\nu^2(\lambda_k r)rdr = \frac{a^2}{2}\left[J'_\nu(\lambda_k a)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{\nu^2}{\lambda_k^2}\right)J_\nu^2(\lambda_k a) \qquad (12)$$

Цю формулу можна спростити, якщо врахувати коренем якого рівняння є λ_k.

Припустимо, що за допомогою скінченного інтегрального перетворення Ганкеля отримано розв’язок деякої крайової задачі у вигляді ряду (11). Наступний крок – це дослідити цей ряд на збіжність. Для цього необхідно знати асимптотику коренів λ_k відповідного рівняння. Покажемо як це можна зробити.

Якщо λ_k є корені рівняння $J_\nu(\lambda a)=0$, то використаємо головний член асимптотичного розвинення функції Бесселя, який був отримано в першому прикладі попереднього параграфу для цілого індексу n

$$J_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi n}{2}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right), \text{коли } x\to+\infty,$$

але він остається справедливим також для довільного індексу ν, що ми покажемо далі у §10. З рівняння $J_\nu(\lambda a)=0$ випливає рівняння для знаходження першого асимптотичного наближення для кореня

$$\cos\left(\lambda a-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\nu}{2}\right)=0, \text{ звідки } \lambda a-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\nu}{2}=-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k=1,2,...$$

Отже $\lambda=\lambda_k=\dfrac{\pi}{a}\left(k-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\nu}{2}\right)+O\left(\dfrac{1}{k}\right)$, коли k достатньо велике.

Якщо λ_k є корені рівняння $J'_\nu(\lambda a)=0$, то за формулою диференціювання (9) приходимо до рівняння $J_{\nu-1}(\lambda a)-\dfrac{\nu}{\lambda a}J_\nu(\lambda a)=0$. Враховуючи, що основний внесок в асимптотику, коли $\lambda\to\infty$, дає перший доданок, отримуємо рівняння $J_{\nu-1}(\lambda a)=0$. З нього для першого асимптотичного наближення для кореня маємо рівняння

$$\cos\left(\lambda a-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi(\nu-1)}{2}\right)=0, \text{ звідки } \lambda a-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k=1,2,...$$

Отже $\lambda=\lambda_k=\dfrac{\pi}{a}\left(k-\dfrac{3}{4}+\dfrac{\nu}{2}\right)+O\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

Нарешті, якщо λ_k є корені рівняння $\alpha\lambda J'_\nu(\lambda a)+\beta J_\nu(\lambda a)=0$, то за формулою диференціювання (9) зводимо його до рівняння

$$\alpha\lambda J_{\nu-1}(\lambda a)+\left(\beta-\alpha\frac{\nu}{a}\right)J_\nu(\lambda a)=0,$$

з якого випливає, що основний внесок в асимптотику дає перший доданок. Таким чином, отримуємо рівняння $J_{\nu-1}(\lambda a)=0$, тобто ми приходимо до попереднього випадку.

Крім того, бажано знати асимптотику квадратів норм, які містяться в формулі обернення (11). Припустимо, що λ_k є корені рівняння $J'_\nu(\lambda a)=0$. Тоді за формулою (12)

$$\|J_\nu(\lambda_k a)\|^2=\frac{1}{2}\left(a^2-\frac{\nu^2}{\lambda_k^2 a^2}\right)J_\nu^2(\lambda_k a)\sim\frac{a^2}{2}\left[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_k a}}\cos\left(\lambda_k a-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\nu}{2}\right)\right]^2\sim$$

$$\sim\frac{\pi a}{2\lambda_k}\cos^2\left(\lambda_k a-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\nu}{2}\right)\sim\frac{\pi a}{2\lambda_k},\text{ коли }\lambda_k\to\infty.$$

Якщо λ_k є корені рівняння $J_\nu(\lambda a)=0$, тоді $\|J_\nu(\lambda_k a)\|^2=\frac{a^2}{2}\left[J'_\nu(\lambda_k a)\right]^2$.

За формулою диференціювання (9) маємо

$$J'_\nu(\lambda_k a)=J_{\nu-1}(\lambda_k a)-\frac{\nu}{\lambda_k a}J_\nu(\lambda_k a)\sim J_{\nu-1}(\lambda_k a),\text{отже}$$

$$\|J_\nu(\lambda_k a)\|^2\sim\frac{a^2}{2}\left[J_{\nu-1}(\lambda_k a)\right]^2\sim\frac{a^2}{2}\left[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_k a}}\cos\left(\lambda_k a-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi(\nu-1)}{2}\right)\right]^2\sim$$

$$\sim\frac{\pi a}{2\lambda_k}\cos^2\left(\lambda_k a+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\nu}{2}\right)\sim\frac{\pi a}{2\lambda_k}.$$

Так само, якщо λ_k є корені рівняння $\alpha\lambda J'_\nu(\lambda a)+\beta J_\nu(\lambda a)=0$, звідки

$$J'_\nu(\lambda_k a)=-\frac{\beta}{\alpha\lambda_k}J_\nu(\lambda_k a),\text{ отже}$$

$$\|J_\nu(\lambda_k a)\|^2=\frac{a^2}{2}\left[-\frac{\beta}{\alpha\lambda_k}J_\nu(\lambda_k a)\right]^2+\frac{1}{2}\left(a^2-\frac{\nu^2}{\lambda_k^2}\right)J_\nu^2(\lambda_k a)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2\beta^2}{\alpha^2\lambda_k^2}+a^2-\frac{\nu^2}{\lambda_k^2}\right]J_\nu^2(\lambda_k a)\sim\frac{a^2}{2}J_\nu^2(\lambda_k a)\sim\frac{\pi a}{2\lambda_k}.$$

Як бачимо, у всіх трьох випадках головний член асимптотики квадрату норми однаковий.

Розглянутий метод знаходження асимптотики коренів можна застосувати і до рівнянь загального виду $f(x)=0$ при умові, що це рівняння має зростаючу послідовність додатних коренів та відомо головний член асимптотичного розвинення функції $f(x)\sim a_0(x)$, коли $x\to+\infty$.

Далі з рівняння $a_0(x)=0$ знаходимо асимптотичне наближення до кореня.

§ 10.Метод перевалу

Метод перевалу призначений для знаходження асимптотичних розвинень для контурних інтегралів Лапласу

$$F(\lambda)=\int_C \varphi(z)e^{\lambda p(z)}dz \text{ коли } \lambda\to+\infty,$$

де C деяка кускова гладка крива у комплексної площини, а функції $\varphi(z)$ та $p(z)$ є аналітичними в деякому околі цієї кривої.

Так само, як і при розгляданні методу Лапласу для інтегралів з дійсними змінними, можна очікувати, що при великих значеннях параметру λ величина інтегралу $F(\lambda)$ визначається тією ділянкою кривої C, на якій значення $\operatorname{Re} p(z)$ велике в порівнянні зі значеннями на решті кривої C, а $\operatorname{Im} p(z)$ залишається сталою, щоб забезпечити відсутність небажаних швидких осциляцій підінтегральної функції. При цьому інтеграл оцінюється тим легше, чим менша ця ділянка і чим крутіше змінюється величина $\operatorname{Re} p(z)$. Так як за теоремою Коші при деформуванні контуру інтегрування в області аналітичності величина інтегралу не змінюється (вона залежить тільки від початкової та кінцевої точок кривої C), то контур інтегрування ми можемо продеформувати в найбільш зручний для нас контур $\tilde{C}$, щоб він проходив через потрібні точки і в потрібному напрямку.

Означення. Точка z_0 зветься точкою перевалу або сідловою точкою функції

$$p(z), \text{ якщо } p'(z_0)=0.$$

Порядок точки перевалу дорівнює $n \geq 1$, якщо $p'(z_0)=p''(z_0)=...=p^{(n)}(z_0)=0$, а $p^{(n+1)}(z_0)\neq 0$.

Коли $n=1$, то точка перевалу зветься простою, тобто $p'(z_0)=0,\ p''(z_0)\neq 0$. Величину $\operatorname{Re} p(z_0)$ називають висотою точки перевалу.

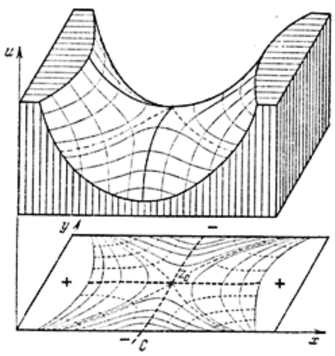

Рис. 7

Щоб пояснити це поняття геометрично, покладемо $z=x+iy$ та $p(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Розглянемо поверхню S у просторі (x,y,u). Так як функція $u(x,y)$ є гармонічною, то вона не може мати точок максимуму і мінімуму, але тоді поверхня S не має піків і западин. Точки, у яких $p'(z_0)=0$, будуть для неї точками перевалу (рис. 7).

Як вже говорилося, найбільш зручний для оцінки інтеграла контур інтегрування, принаймні на ділянці, що має найбільше значення для оцінки інтеграла, повинен проходити у напрямку найбільш швидкої зміни функції $u=\operatorname{Re} p(z)$. Цей напрямок, як відомо, визначається напрямом вектора $gradu=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x};\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$. Нехай $gradu\neq 0$. Оскільки для аналітичної функції $p(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ справедлива властивість $gradu\cdot gradv=0$, то $gradv=0$, тобто напрямок вектора $gradu$ визначає криву $\operatorname{Im} p(z)=v(x,y)=const$. Таким чином, контур $\tilde{C}$, принаймні на ділянці, найбільш істотній для оцінки інтеграла, повинен збігатися з лінією рівня $v(x,y)=const$. Далі контур інтегрування $\tilde{C}$ повинен містити точку z_0, в якій $u(x,y)$ досягає найбільшого значення серед значень цієї функції на $\tilde{C}$.

Покажемо, що $p'(z_0)=0$, тобто точка лінії $v(x,y)=const$, на якій $\operatorname{Re} p(z)=u(x,y)$ досягає найбільшого значення, є точкою перевалу.

Дійсно, в точці z_0 похідна від $u(x,y)$ вздовж лінії $\tilde{C}$ повинна дорівнювати нулю $\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{z_0}=0$, а так як $v(x,y)=const$ на лінії $\tilde{C}$, то $\frac{\partial v}{\partial s}=0$, отже

$p'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial s}+i\frac{\partial v}{\partial s}=0$.

Отже, при застосуванні методу перевалу контур інтегрування C слід деформувати в контур $\tilde{C}$, що проходить через точку перевалу z_0 і в околиці цієї точки йде вздовж лінії рівня $v(x,y)=const$.

Форма поверхні S може бути відображена на площині (x,y) за допомогою ліній рівня, на яких $u(x,y)=const$. Лінії рівня, що проходять через точку перевалу, поділяють найближню до неї частину поверхні S на долині, що лежать нижче за точку перевалу, і височини, що лежать вище за точку перевалу. Лінії, у яких $v(x,y)=const$, утворюють ортогональні траєкторії до ліній рівня і тому є образами на площині (x,y) кривих якнайшвидшого спуску чи якнайшвидшого підйому на поверхні S.

Якщо точка перевалу z_0 має порядок $n-1\,(n\geq 2)$, то в околі цієї точки розвинення функції $p(z)$ в ряд Тейлора має вигляд

$p(z)=p(z_0)+a_n(z-z_0)^n+O\left((z-z_0)^{n+1}\right)$, де $a_n\neq 0$.

Покладемо тут $z-z_0=re^{i\psi}$ і $a_n=\rho e^{i\alpha}$, де $\alpha=\arg p^{(n)}(z_0)$. Тоді

$p(z)-p(z_0)=r^n\rho\cos(n\psi+\alpha)+ir^n\rho\sin(n\psi+\alpha)+O\left(r^{n+1}\right)$.

Звідки $\operatorname{Re}\left(p(z)-p(z_0)\right)=u-u_0=r^n\rho\cos(n\psi+\alpha)+O\left(r^{n+1}\right)$.

Лініям рівня $u = u_0$ відповідають значення ψ приблизно рівні нулям $\cos(n\psi + \alpha)$. Таким чином з точки z_0 виходить $2n$ ліній рівня $\tilde{\psi}_k = \frac{\pi}{2n}(2k-1) - \frac{\alpha}{n}, k = 1, 2, ..., 2n$. Ці лінії розбивають околицю точки z_0 на $2n$ секторів, всередині яких функція $\mathrm{Re}\big(p(z) - p(z_0)\big)$ зберігає свій знак і змінює його при переході від сектора до сектора. Поверхня S ділиться цими лініями на долини, що лежать нижче за точку перевалу, і височини, що лежать вище за точку перевалу.

Так само, лінії $v = v_0$ визначають $2n$ значень ψ, які приблизно дорівнюють нулям $\sin(n\psi + \alpha)$, тобто $\psi_k = \frac{\pi k}{n} - \frac{\alpha}{n}, k = 1, 2, ..., 2n$. Вони визначають лінії якнайшвидшого спуску і якнайшвидшого підйому. Вони є бісектрисами відповідних секторів.

Таким чином, шлях інтегрування $\tilde{C}$ треба вибирати вздовж однієї з ліній найшвидшого спуску в секторах де $\mathrm{Re}\big(p(z) - p(z_0)\big) < 0$.

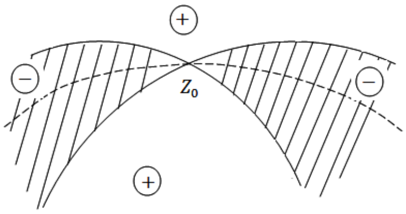

Рис. 8

Для випадку, коли точка перевалу є простою, маємо чотири секторі (рис.8).

Серед них є два від'ємних сектори, де $\mathrm{Re}\big(p(z) - p(z_0)\big) < 0$ (вони заштриховані на рисунку) і є два додатних, де $\mathrm{Re}\big(p(z) - p(z_0)\big) > 0$. Лінія найшвидшого спуску проходить через від'ємні сектори і через точку z_0. Напрямок дотичної до цієї лінії в точці z_0 визначається кутами $\psi_1 = \frac{\pi - \alpha}{2}$ і $\psi_2 = \frac{3\pi - \alpha}{2} = \psi_1 + \pi$, для яких $\cos(2\psi_k + \alpha) = -1, k = 1, 2$. Вибір кута визначається завданням напрямку інтегрування вздовж лінії найшвидшого спуску. При цьому $a_2 = \frac{1}{2} p''(z_0)$ і $\alpha = \arg p''(z_0)$.

Якщо поверхня S має декілька точок перевалу, то зазвичай слід вибирати контур $\tilde{C}$, що проходить через найбільш крутий з перевалів. Втім, питання про вибір точки перевалу у загальному випадку вирішується далеко не просто і його доводиться розглядати окремо у кожному конкретному випадку. Зокрема, якщо є кілька точок перевалу, то асимптотика інтеграла $F(\lambda)$ складається із суми вкладів усіх цих точок.

Відзначимо важливу обставину, що забезпечує ефективність застосування методу перевалу: так як уздовж лінії $\tilde{C}$ в околиці точки перевалу маємо $\operatorname{Im} p(z) = const$, то асимптотична оцінка інтеграла $F(\lambda)$ зводиться до оцінки інтеграла від функції дійсної змінної, яка може бути проведена за методом Лапласа.

Теорема 1. Нехай функції $\varphi(z)$ і $p(z)$ є аналітичними в деякий області, що містить криву C. Нехай максимум $\operatorname{Re} p(z)$ досягається лише в початковій точці $z = a$ кривої C і $p'(a) \neq 0$. Тоді, коли $\lambda \to +\infty$,

$$F(\lambda) = \int_C \varphi(z) e^{\lambda p(z)} dz \sim e^{\lambda p(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda^{k+1}},$$

де $c_k = -M^k \left(\frac{\varphi(z)}{p'(z)} \right) \Bigg|_{z=a}, \quad M = -\frac{1}{p'(z)} \cdot \frac{d}{dz}.$

Це розвинення можна диференціювати за λ будь-яку кількість разів.

Головний член цього розвинення має вигляд

$$F(\lambda) = -e^{\lambda p(a)} \frac{1}{\lambda p'(a)} \left(\varphi(a) + O\left(\frac{1}{\lambda} \right) \right).$$

Доведення. В такому разі точка максимуму $z = a$ не є точкою перевалу. Представимо шлях інтегрування C у вигляді $C = C_0 \bigcup C_1$, де C_0 мала дуга, що містить точку $z = a$ і така, що на ній $p'(z) \neq 0$. На кривій C_1 в силу умов теореми $\operatorname{Re} p(z) < \operatorname{Re} p(a) - h$, де $h > 0$. Тоді інтеграл вздовж кривій C_1 буде мати порядок $O\left(e^{\lambda(\operatorname{Re} p(a)-h)}\right)$, тобто експоненційно малий порівняно з $e^{\lambda \operatorname{Re} p(a)}$ і ми їм можемо знехтувати. Це твердження доводиться абсолютно аналогічно до леми з методу Лапласа. На кривій C_0 введемо натуральний параметр s та напишемо рівняння цієї кривої у вигляді $z = z(s), \alpha \le s \le \beta$. Тоді інтеграл вздовж кривої C_0 набуде вигляду $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(z(s)) e^{\lambda p(z(s))} z'(s) ds$. Інтегруючи його частинами, як це було зроблено при доведенні теореми 1 методу Лапласа, отримуємо необхідну асимптотичну формулу.

Теорема 2. Нехай функції $\varphi(z)$ і $p(z)$ є аналітичними в деякий області, що містить криву C. Нехай максимум $\operatorname{Re} p(z)$ досягається в єдиній точці z_0, яка є внутрішньою точкою кривої C і простою точкою перевалу $p'(z_0) = 0, \ p''(z_0) \ne 0$. Тоді, коли $\lambda \to +\infty$,

$$F(\lambda) = \int\limits_{C} \varphi(z) e^{\lambda p(z)} dz \sim e^{\lambda p(z_0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda^{k+\frac{1}{2}}}.$$

Це розвинення можна диференціювати за λ будь-яку кількість разів.

Головний член цього розвинення має вигляд

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda p''(z_0)}} e^{\lambda p(z_0)} \left(\varphi(z_0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right).$$

Вибір гілки кореня в цьому виразі наступний: $\arg \sqrt{-p''(z_0)}$ дорівнює куту між позитивним напрямком дотичної до кривої інтегрування в точці z_0 і позитивним напрямом дійсної осі.

Доведення. Деформуємо шлях інтегрування C в криву $\tilde{C} = C_1 \cup C_0 \cup C_2$, де C_0 мала дуга, що проходить через точку перевалу z_0 вздовж лінії найшвидшого спуску. На кривих C_1 і C_2 маємо $\operatorname{Re} p(z) < \operatorname{Re} p(z_0) - h, \ h > 0$. Інтеграли вздовж цих кривих експоненційно малі у порівнянні з $e^{\lambda \operatorname{Re} p(a)}$ і ми ними можемо знехтувати. Отже

$$F(\lambda) \sim \int_{C_0} \varphi(z) e^{\lambda p(z)} dz = e^{i\lambda \operatorname{Im} p(z_0)} \int_{C_0} \varphi(z) e^{\lambda \operatorname{Re} p(z)} dz .$$

На кривій C_0 введемо натуральний параметр s та напишемо рівняння цієї кривої у вигляді $z = z(s), \alpha \le s \le \beta$. Тоді інтеграл вздовж кривої C_0 набуде вигляду

$$F(\lambda) \sim e^{i\lambda \operatorname{Im} p(z_0)} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(z(s)) e^{\lambda \operatorname{Re} p(z(s))} z'(s) ds .$$

Отже, проблема звелася до оцінки інтеграла, до якого можна застосувати теорему 2 методу Лапласа. Повторюючи міркування цієї теореми, отримуємо наведену в умові теореми асимптотичну формулу, а також вираз для коефіцієнтів c_k.

Зауваження. Якщо точка перевалу z_0 буде граничною точкою контуру інтегрування C, наприклад, $z_0 = a$, то твердження теореми залишаються в силі, але у виразі асимптотичного розвинення з'явиться множник $\frac{1}{2}$.

У випадку, коли розглядаються інтеграли з більш складною залежністю від параметра виду

$$F(\lambda) = \int_C \varphi(z, \lambda) e^{p(z, \lambda)} dz ,$$

де функція $\varphi(z, \lambda)$ обмежена коли $\lambda \to +\infty$, а функція $p(z, \lambda)$ має точку перевалу $z = z_0(\lambda)$, яка змінюється разом з λ, то головний член розвинення має вигляд

$$F(\lambda) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-p''(z_0(\lambda), \lambda)}} \varphi(z_0(\lambda), \lambda) e^{p(z_0(\lambda), \lambda)} \text{ коли } \lambda \to +\infty$$

Приклади

1) Знайдемо головні члени асимптотичних розвинень циліндричних функцій третього роду, тобто функцій Ганкеля першого та другого роду $H_\nu^{(1)}(x)$ і $H_\nu^{(2)}(x)$, які є також розв'язками рівняння Бесселя (8) і можуть бути представлені у вигляді контурних інтегралів.

Функція Ганкеля першого роду має таке інтегральне подання

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_C e^{ix\sin z - i\nu z}dz,$$

де контур інтегрування C на комплексній площині $z = \tau + i\sigma$ переходить із пів смуги $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}\,z < \frac{\pi}{2}, \mathrm{Im}\,z > 0$ в пів смугу $\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}\,z < \frac{3\pi}{2}, \mathrm{Im}\,z < 0$ через точку $z_0 = \frac{\pi}{2}$. За допомогою методу перевалу знайдемо головний член її асимптотичного розвинення, коли $x \to +\infty$.

В даному випадку $\varphi(z) = e^{-i\nu z}$, $p(z) = i\sin z$. Знайдемо $p'(z) = i\cos z$. У смузі $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}\,z < \frac{3\pi}{2}$ рівняння $\cos z = 0$ має тільки один корінь $z_0 = \frac{\pi}{2}$. Так як $p''(z) = -i\sin z$ і $p''(z_0) = -i$, то точка $z_0 = \frac{\pi}{2}$ є простою точкою перевалу. При цьому $p(z_0) = i$, отже $\mathrm{Re}\,p(z_0) = 0$. Знайдемо

$$\mathrm{Re}\,p(z) = \mathrm{Re}\big(i\sin(\tau + i\sigma)\big) = \mathrm{Re}\big(i(\sin\tau\cos i\sigma + \cos\tau\sin i\sigma)\big) =$$

$$= \mathrm{Re}\big(i(\sin\tau ch\sigma + i\cos\tau sh\sigma)\big) = \mathrm{Re}\big(i\sin\tau ch\sigma - \cos\tau sh\sigma\big) = -\cos\tau sh\sigma.$$

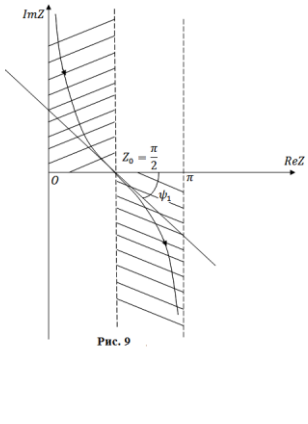

Рис. 9

Тоді $\mathrm{Re}\,p(z) - \mathrm{Re}\,p(z_0) = -\cos\tau sh\sigma < 0$ в пів смугах $0 < \mathrm{Re}\,z < \frac{\pi}{2}, \mathrm{Im}\,z > 0$ та $\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}\,z < \pi, \mathrm{Im}\,z < 0$. Вони є долинами і шлях інтегрування мусить проходити через них (на рис. 9 вони заштриховані). Напрямок найшвидшого спуску збігається з бісектрисами від'ємних секторів, тобто утворює кут $\psi_1 = -\dfrac{\pi}{4}$ з додатним напрямом дійсної осі. Тоді за теоремою 2 головний член асимптотики має вигляд

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{-x(-i)}}e^{ix}\left(e^{-i\nu\frac{\pi}{2}} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}-\nu\frac{\pi}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

де враховано, що $\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Інтегральне подання функції Ганкеля другого роду теж саме

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_C e^{ix\sin z - i\nu z}dz,$$

але відрізняється контуром інтегрування C, який переходить з пів смуги $-\dfrac{3\pi}{2} < \operatorname{Re} z < -\dfrac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z < 0$ в пів смугу $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0$ через точку $z_0 = -\dfrac{\pi}{2}$. Так само $\varphi(z) = e^{-i\nu z}$, $p(z) = i\sin z$. У смузі $-\dfrac{3\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2}$ рівняння $p'(z) = i\cos z = 0$ має єдиний корінь $z_0 = -\dfrac{\pi}{2}$. Так як $p''(z_0) = -i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = i$, то $z_0 = -\dfrac{\pi}{2}$ є простою точкою перевалу. При цьому $p(z_0) = -i$, отже $\operatorname{Re} p(z_0) = 0$ і

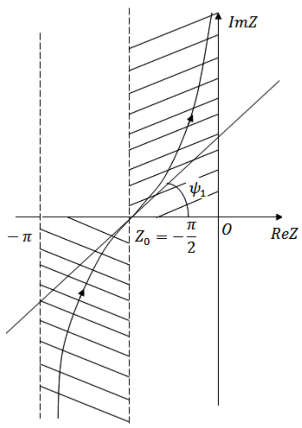

Рис. 10

$\operatorname{Re} p(z) - \operatorname{Re} p(z_0) = -\cos\tau\, sh\sigma < 0$ в пів смугах

$-\pi < \operatorname{Re} z < -\dfrac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z < 0$ та $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0$.

Вони є долинами і шлях інтегрування мусить проходити через них (на рис. 10 вони заштриховані). Напрямок найшвидшого спуску збігається з бісектрисами від'ємних секторів, тобто утворює кут $\psi_1 = \dfrac{\pi}{4}$ з додатним напрямом дійсної осі. Тоді за теоремою 2 головний член асимптотики має вигляд

$$H_\nu^{(2)}(x)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{-x\cdot i}}e^{-ix}\left(e^{i\nu\frac{\pi}{2}}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}-\nu\frac{\pi}{2}\right)}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

де враховано, що $\sqrt{-i}=\sqrt{e^{-i\frac{\pi}{2}}}=e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Якщо тепер врахувати зв'язок функцій Ганкеля з функціями Бесселя і Неймана

$$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iN_\nu(x)$$

$$H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iN_\nu(x),$$

то нескладно отримати головні члени асимптотичних розвинень функцій Бесселя та Неймана

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2}\left(H_\nu^{(1)}(x)+H_\nu^{(2)}(x)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{1}{2}\left(e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}-\nu\frac{\pi}{2}\right)}+e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}-\nu\frac{\pi}{2}\right)}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\nu\frac{\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$N_\nu(x)=\frac{1}{2i}\left(H_\nu^{(1)}(x)-H_\nu^{(2)}(x)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{1}{2i}\left(e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}-\nu\frac{\pi}{2}\right)}-e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}-\nu\frac{\pi}{2}\right)}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\nu\frac{\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \text{ коли } x\to+\infty.$$

Першу з цих формул ми вже отримали раніше у § 8 для випадку, коли індекс функції Бесселя є цілим числом.

2) Розглянемо інтегральне подання поліномів Лежандра

$$P_n(\cos\theta)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}dt}{\sqrt{\cos t-\cos\theta}},\quad 0<\theta<\pi$$

та отримуємо головний член асимптотичного розвинення для великих значень індексу n.

Як легко бачити, підінтегральна функція має інтегровану особливість, коли $t = \pm\theta$. Розглянемо аналітичне подовження підінтегральної функції на комплексну площину $z = x + iy$

$$W(z) = \frac{e^{i\lambda z}}{\sqrt{\cos z - \cos\theta}}, \text{ де } \lambda = n + \frac{1}{2}$$

Функція $W(z)$ є аналітичною у верхній півплощині $\operatorname{Im} z > 0$. Тому інтеграл від неї за будь-яким замкнутим контуром, що повністю знаходиться у верхній півплощині, дорівнює нулю.

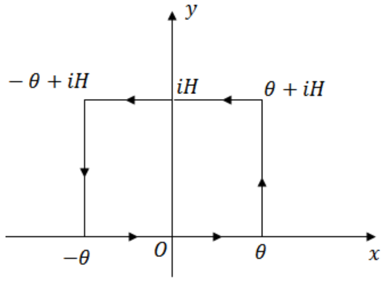

Рис. 11

Візьмемо замкнутий контур C, що складається з відрізка $-\theta < x < \theta, y = 0$ дійсної осі, двох вертикальних відрізків $x = \pm\theta, 0 < y < H$, які паралельні уявної осі та замикаючого горизонтального відрізка $-\theta < x < \theta, y = iH$ (рис. 11). Отримуємо рівність

$$\int_{-\theta}^{\theta} \frac{e^{i\lambda t} dt}{\sqrt{\cos t - \cos\theta}} + \int_{\theta}^{\theta+iH} \frac{e^{i\lambda t} dt}{\sqrt{\cos t - \cos\theta}} + \int_{\theta+iH}^{-\theta+iH} \frac{e^{i\lambda t} dt}{\sqrt{\cos t - \cos\theta}} + \int_{-\theta+iH}^{-\theta} \frac{e^{i\lambda t} dt}{\sqrt{\cos t - \cos\theta}} = 0$$

Звідки $\displaystyle\int_{-\theta}^{\theta} \frac{e^{i\lambda t} dt}{\sqrt{\cos t - \cos\theta}} = I_1 + I_2 + I_3$, де

$$I_1 = -\int_{\theta}^{\theta+iH} \frac{e^{i\lambda t} dt}{\sqrt{\cos t - \cos\theta}} = \begin{bmatrix} t = \theta + iy \\ dt = idy \end{bmatrix} = -i\int_{0}^{H} \frac{e^{i\lambda(\theta+iy)} dy}{\sqrt{\cos(\theta + iy) - \cos\theta}} =$$

$$= -ie^{i\lambda\theta}\int_{0}^{H} \frac{e^{-\lambda y} dy}{\sqrt{\cos(\theta + iy) - \cos\theta}},$$

$$I_2 = -\int_{\theta+iH}^{-\theta+iH} \frac{e^{i\lambda t} dt}{\sqrt{\cos t - \cos\theta}} = \begin{bmatrix} t = -x + iH \\ dt = -dx \end{bmatrix} = \int_{-\theta}^{\theta} \frac{e^{i\lambda(-x+iH)} dx}{\sqrt{\cos(-x + iH) - \cos\theta}} =$$

$$= e^{-\lambda H} \int\limits_{-\theta}^{\theta} \frac{e^{-i\lambda x}dx}{\sqrt{\cos(-x+iH)-\cos\theta}},$$

$$I_3 = -\int\limits_{-\theta+iH}^{-\theta} \frac{e^{i\lambda t}dt}{\sqrt{\cos t-\cos\theta}} = \begin{bmatrix} t=-\theta+iy \\ dt=idy \end{bmatrix} = -i\int\limits_{H}^{0} \frac{e^{i\lambda(-\theta+iy)}dy}{\sqrt{\cos(-\theta+iy)-\cos\theta}} =$$

$$= ie^{-i\lambda\theta} \int\limits_{0}^{H} \frac{e^{-\lambda y}dy}{\sqrt{\cos(-\theta+iy)-\cos\theta}}.$$

Перейдемо в цих інтегралах до границі коли $H \to \infty$ та отримуємо

$$I_1 = -ie^{i\lambda\theta} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda y}dy}{\sqrt{\cos(\theta+iy)-\cos\theta}}, \quad I_2 = 0, \; I_3 = ie^{-i\lambda\theta} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda y}dy}{\sqrt{\cos(-\theta+iy)-\cos\theta}}$$

Отже $\int\limits_{-\theta}^{\theta} \frac{e^{i\lambda t}dt}{\sqrt{\cos t-\cos\theta}} = I_1 + I_3$.

Застосуємо метод перевалу до інтеграла I_1. Покладемо в ньому $y = \tau^2$

$$I_1 = -2ie^{i\lambda\theta} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\tau}{\sqrt{\cos(\theta+i\tau^2)-\cos\theta}} e^{-\lambda\tau^2} d\tau.$$

В цьому випадку функція $p(\tau) = -\tau^2$ досягає максимуму в граничній точці $\tau = 0$. При цьому $p(0)=0, \; p'(0)=0, \; p''(0)=-2$. Розглянемо функцію

$$\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{\cos(\theta+i\tau^2)-\cos\theta}} = \frac{\tau}{\sqrt{\cos\theta\cos i\tau^2 - \sin\theta\sin i\tau^2 - \cos\theta}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos\theta\frac{ch\tau^2-1}{\tau^2} - i\sin\theta\frac{sh\tau^2}{\tau^2}}}.$$

Так як коли $\tau \to 0$ маємо що $\frac{ch\tau^2-1}{\tau^2} = \frac{1+\frac{\tau^4}{2}+\ldots-1}{\tau^2} = \frac{\tau^2}{2}+\ldots \to 0$, а $\dfrac{sh\tau^2}{\tau^2} \to 1$, то $\varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{-i\sin\theta}} = \dfrac{1}{\sqrt{e^{-i\frac{\pi}{2}}\sin\theta}} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin\theta}}$.

Тоді згідно з зауваженням до теореми 2 отримуємо

$$I_1 = -\frac{1}{2}\cdot 2ie^{i\lambda\theta}\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda(-2)}}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin\theta}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = -i\sqrt{\frac{\pi}{\lambda\sin\theta}}\left(e^{i\left(\lambda\theta+\frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$

Так саме для інтеграла

$$I_3 = 2ie^{-i\lambda\theta}\int_0^\infty \frac{\tau}{\sqrt{\cos\left(-\theta+i\tau^2\right)-\cos\theta}} e^{-\lambda\tau^2} d\tau$$

маємо ту ж саму функцію $p(\tau) = -\tau^2$ і граничну точку перевалу $\tau = 0$.

$$\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{\cos\left(-\theta+i\tau^2\right)-\cos\theta}} = \frac{\tau}{\sqrt{\cos\theta\cos i\tau^2 + \sin\theta\sin i\tau^2 - \cos\theta}} =$$

$= \dfrac{1}{\sqrt{\cos\theta\dfrac{ch\tau^2-1}{\tau^2} + i\sin\theta\dfrac{sh\tau^2}{\tau^2}}}$, звідки $\varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{i\sin\theta}} = \dfrac{1}{\sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}\sin\theta}} = \dfrac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin\theta}}$.

Тоді $I_3 = \dfrac{1}{2}\cdot 2ie^{-i\lambda\theta}\sqrt{-\dfrac{2\pi}{\lambda(-2)}}\left(\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin\theta}} + O\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)\right) = i\sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda\sin\theta}}\left(e^{-i\left(\lambda\theta+\frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)\right)$

Отже

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\left(I_1 + I_3\right) = \frac{-i}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda\sin\theta}}\left(e^{i\left(\lambda\theta+\frac{\pi}{4}\right)} - e^{-i\left(\lambda\theta+\frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda\sin\theta}}\left(\sin\left(\lambda\theta+\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi(2n+1)\sin\theta}}\left(\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

3) Знайдемо головний член асимптотичного розвинення функції

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^2+1}e^{-\lambda\left(z^2-2iz\right)}dz \text{ коли } \lambda\to+\infty.$$

Візьмемо $\varphi(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ та $p(z)=-z^2+2iz$.

Обчислимо $p'(z)=-2z+2i,\ p''(z)=-2$. Тоді $p'(z)=0$, коли $z=z_0=i$. При цьому $p(i)=1-2=-1,\ p''(i)=-2$, але для функції $\varphi(z)$ точка перевалу $z_0=i$ є полюсом першого порядку, тобто в ній функція необмежена.

У зв'язку з цим виділимо в інтегралі $F(\lambda)$ сингулярну частину. Для цього введемо функцію $f(z)=(z-i)\varphi(z)=\dfrac{z-i}{z^2+1}=\dfrac{z-i}{(z+i)(z-i)}=\dfrac{1}{z+i}$, для якої

$f(i)=\dfrac{1}{2i}$. Перетворимо

$$\varphi(z)=\frac{(z-i)\varphi(z)}{z-i}=\frac{f(z)}{z-i}=\frac{f(i)+f(z)-f(i)}{z-i}=\frac{f(i)}{z-i}+\frac{f(z)-f(i)}{z-i}$$

та запишемо нашу функцію у вигляді $F(\lambda)=F_1(\lambda)+F_2(\lambda)$, де

$$F_1(\lambda)=f(i)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-i}e^{\lambda p(z)}dz \text{ та } F_2(z)=\int_{-\infty}^{\infty}g(z)e^{\lambda p(z)}dz, \text{ тут } g(z)=\frac{f(z)-f(i)}{z-i}.$$

В першому інтегралі $F_1(\lambda)$ зсунемо шлях інтегрування на пряму $\operatorname{Re}z=1$, замкнемо контур інтегрування в лівій півплощині та застосуємо теорему о лишках

$$F_1(\lambda)=f(i)\cdot2\pi i\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{e^{\lambda p(z)}}{z-i}=f(i)\cdot2\pi i\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{\lambda p(z)}}{z-i}=$$

$$=f(i)\cdot2\pi i\cdot e^{\lambda p(i)}=\frac{1}{2i}\cdot2\pi i\cdot e^{\lambda(-1)}=\pi e^{-\lambda}.$$

Другий інтеграл вже не має особливості і ми можемо застосувати до нього метод перевалу. Так як $\alpha = \arg p''(i) = \arg(-2) = \pi$, то через точку перевалу

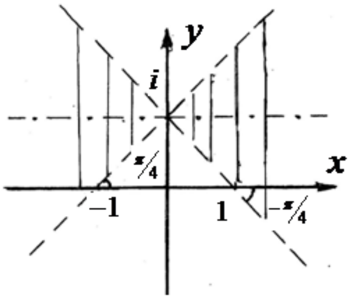

Рис. 12

$z_0 = i$ проходять дві лінії рівня, які утворюють кути $\tilde{\psi}_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} = -\frac{\pi}{4}$ та $\tilde{\psi}_2 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$ с додатнім напрямком дійсної осі координат, та дві лінії якнайшвидшого спуску і якнайшвидшого підйому, які утворюють кути $\psi_1 = \frac{\pi - \alpha}{2} = 0$ та $\psi_2 = \frac{3\pi - \alpha}{2} = \pi$, тобто паралельні осям координат (рис. 12).

Щоб визначати, які сектори є додатними, а які є від'ємними, покладемо $z = x + iy$ та розглянемо вираз

$$\mathrm{Re}\big(p(z) - p(i)\big) = \mathrm{Re}\left(-z^2 + 2iz + 1\right) = \mathrm{Re}\left(-(x+iy)^2 + 2i(x+iy) + 1\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(-x^2 - 2ixy + y^2 + 2ix - 2y + 1\right) = -x^2 + y^2 - 2y + 1.$$

Якщо, наприклад, візьмемо точку $(0;0)$ то в ній цей вираз дорівнює 1, тобто вона належить додатному сектору. Якщо ж візьмемо точку $(1;1)$, то отримуємо значення -1, тобто ми визначили від'ємний сектор (на рисунку він заштрихований).

В інтегралі $F_2(\lambda)$ продеформуємо контур інтегрування так, щоб в околі точки перевалу $z_0 = i$ він проходив через від'ємний сектор вздовж лінії якнайшвидшого спуску $y = 1$. Тоді у відповідності з теоремою 2 маємо

$$F_2(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda p''(i)}} e^{\lambda p(i)} \left(g(i) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right).$$

Обчислимо за допомогою правила Лопіталя

$$g(i)=\lim_{z\to i}\frac{f(z)-f(i)}{z-i}=\lim_{z\to i}\frac{f'(z)}{1}=f'(i)=\left(\frac{1}{z+i}\right)'\Bigg|_{z=i}=$$

$$=\left(-\frac{1}{(z+i)^2}\right)\Bigg|_{z=i}=-\frac{1}{(2i)^2}=\frac{1}{4}.$$ Отже

$$F_2(\lambda)=\sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda(-2)}}e^{\lambda(-1)}\left(\frac{1}{4}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{4}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right).$$

Остаточно отримуємо

$$F(\lambda)=\pi e^{-\lambda}+\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{4}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)=e^{-\lambda}\left[\pi+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}+O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}}\right)\right]$$ коли $\lambda\to+\infty$.

Завдання

1) Довести, що

$$F(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{\lambda\left(z+iz-z^3\right)}dz\sim 2^{-\frac{1}{3}}3^{-\frac{1}{4}}\pi^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{16}}\lambda^{-\frac{1}{2}}\exp\left(2^{\frac{7}{4}}3^{-\frac{3}{2}}e^{i\frac{3\pi}{8}}\lambda\right),$$ коли $\lambda\to+\infty$.

Порада: маємо дві точки перевалу $z_{1,2}=\pm 2^{\frac{1}{4}}3^{-\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$, беремо вклад від точки z_1.

2) Довести, що

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda z}\left(1+z^2\right)^{-\lambda}dz\sim\sqrt{\frac{\pi(1-c)}{\lambda}}e^{-\lambda c}(2c)^{-\lambda},\ c=\sqrt{2}-1,$$ коли $\lambda\to+\infty$.

Порада: маємо дві точки перевалу $z_{1,2}=i\left(-1\pm\sqrt{2}\right)$, беремо вклад від точки z_1.

3) Довести, що

$$F(\lambda)=\int_{-1}^{\infty}e^{iz}\left(z^3+3z-2i\right)^{-n}dz\sim 2e\left(\frac{i}{4}\right)^n\sqrt{\frac{\pi}{3n}},\ n>0,$$ ціле, коли $n\to\infty$.

Порада: маємо дві точки перевалу $z_{1,2}=\pm i$, беремо вклад від точки z_2.

4) Довести, що

$$F(\lambda)=\int_{-i\infty}^{i\infty} z^{z^2} e^{-\lambda z^2} dz \sim i\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2\lambda-1}\right) \text{ коли } \lambda \to +\infty.$$

Порада: маємо дві точки перевалу $z_1 = 0$ та $z_2 = e^{\lambda-\frac{1}{2}}$, беремо вклад від точки z_2.

Питання для підсумкового контролю.

1. Відношення еквівалентності та їх властивості.
2. Асимптотичні послідовності та їх властивості.
3. Асимптотичні розвинення у сенсі Пуанкаре.
4. Степеневі асимптотичні розвинення та їх властивості.
5. Отримання асимптотичних розвинень з використанням розвинень за формулою Маклорена.
6. Інтегрування за частинами як метод отримання асимптотичних розвинень інтегралів.
7. Отримання асимптотичних розвинень для інтегралів зі змінною верхньою або нижньою межею.
8. Отримання асимптотичних розвинень для інтегралів Лапласа.
9. Метод Лапласа: теорема про вклад в асимптотичне розвинення від внутрішньої точки максимуму.
10. Метод Лапласа: теорема про вклад в асимптотичне розвинення від граничної точки максимуму.
11. Узагальнення методу Лапласа.
12. Метод стаціонарної фази. Випадок, коли фазова функція не має стаціонарної точки.
13. Метод стаціонарної фази. Випадок, коли фазова функція має стаціонарну точку.
14. Застосування методу стаціонарної фази для отримання асимптотичних розвинень функцій Бесселя.
15. Знаходження асимптотичних розвинень коренів деяких рівнянь з функціями Бесселя.
16. Метод перевалу для контурних інтегралів Лапласа. Точки перевалу та лінії спуску.
17. Теореми про знаходження асимптотичних розвинень методом перевалу.
18. Приклади застосування методу перевалу знаходження асимптотичних розвинень.

Відповіді до завдань

§ 4. 2) $si(x)=\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, коли $x\to 0$.

$ci(x)=\int\limits_0^x \frac{\cos t-1}{t}dt=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!}$, коли $x\to 0$.

Обидва ряду збігаються абсолютно.

3) а) $f(x)=\int\limits_0^x \frac{\ln(1+2t)}{t}dt=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2x)^k}{k^2}$, коли $x\to 0$.

Ряд збігається абсолютно, коли $|x|<\frac{1}{2}$.

б) $g(x)=\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)2^k k!}$, коли $x\to 0$.

Ряд збігається абсолютно.

§ 5. 1) $Si(x)=\int\limits_x^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt\sim\frac{\cos x}{x}\left(1-\frac{2!}{x^2}+\frac{4!}{x^4}-...\right)+\frac{sinx}{x}\left(\frac{1!}{x}-\frac{3!}{x^3}+\frac{5!}{x^5}-...\right)$

$Ci(x)=\int\limits_x^{\infty}\frac{\cos t}{t}dt\sim-\frac{\sin x}{x}\left(1-\frac{2!}{x^2}+\frac{4!}{x^4}-...\right)+\frac{\cos x}{x}\left(\frac{1!}{x}-\frac{3!}{x^3}+\frac{5!}{x^5}-...\right)$,

коли $x\to\infty$.

Обидва ряду є розбіжними.

2) $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\sim\frac{1}{2}-\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1\cdot 3}{x^4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^6}+...\right)$

коли $x\to+\infty$.

5) $\int\limits_x^{\infty}t^{-\alpha}e^{it}dt\sim\frac{ie^{ix}}{x^{\alpha}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(ix)^k}$, коли $x\to\infty$.

6) а) $\int\limits_0^x t^{\alpha}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\sim\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left[2^{\frac{\alpha-1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\alpha+1}e^{-\frac{x^2}{2}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}-k\right)x^{2k}}\right]$,

коли $x\to+\infty$.

б) $\int\limits_x^{\infty} t^{\alpha} e^{-t^{\beta}} dt \sim \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) x^{\alpha+1} e^{-x^{\beta}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{-\beta k}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}-k+1\right)}$, коли $x \to +\infty$.

7) $\int\limits_0^x t^{\alpha} e^{-\frac{1}{t}} dt \sim \frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} e^{-\frac{1}{x}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \Gamma(\alpha+k+1) x^k$, коли $x \to +0$.

§ 6. 1) $F(x) = \int\limits_0^{\infty} \ln\left(1+t^2\right) e^{-xt} dt \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{k\, x^{2k+1}}$, коли $x \to +\infty$.

Ряд є розбіжним.

2) $F(x) = \int\limits_0^{\infty} \sqrt{1+t^2} e^{-x\sqrt{t}} dt \sim \frac{2}{x^2}\left(1 + \frac{5!}{1!\cdot\left(2x^4\right)} - \frac{1\cdot 9!}{2!\cdot\left(2x^4\right)^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 13!}{3!\cdot\left(2x^4\right)^3} - \right.$

$\left. - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 17!}{4!\cdot\left(2x^4\right)^4} + \ldots \right)$,коли $x \to +\infty$. Ряд є розбіжним.

3) $F(x) = \int\limits_0^{\pi/2} e^{-x\,tg\,t} dt \sim \frac{1}{x} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{x^{2k}}$, коли $x \to +\infty$

Ряд є розбіжним.

4) $F(x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x\,ch t} dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\left[(2k-1)!!\right]^2}{k!(8x)^k}\right]$, коли $x \to +\infty$.

Ряд є розбіжним.

§ 7. 1) $F(\lambda) = \int\limits_0^{\pi} \sin^2 t \cdot e^{-\lambda\left(e^t - 2t\right)} dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sin^2 \ln 2 \cdot 4^{\lambda} e^{-2\lambda}$, коли $\lambda \to +\infty$.

2) $F(n) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, коли $n \to +\infty$.

3) $F(n) = \int\limits_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^n dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$, коли $n \to +\infty$.

4) $F(n) = \int\limits_0^{1} e^t t^n \left(1+t^2\right)^{-n} dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{e}{2^n}$, коли $n \to +\infty$.

5) $F(x)=\int\limits_0^1 \exp\left(-\frac{1}{t}-xt\right)dt \sim \sqrt{\pi}x^{-\frac{3}{4}}e^{-2\sqrt{x}}$, коли $x\to+\infty$.

§ 8. 1) $F(\lambda)=\int\limits_0^1 e^{i\lambda t^3}dt=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}\lambda^{-\frac{1}{3}}+O\left(\lambda^{-\frac{2}{3}}\right)$ коли $\lambda\to+\infty$.

2) $F(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin\lambda(t-\sin t)dt=\frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)6^{-\frac{2}{3}}\nu^{-\frac{1}{3}}+O\left(\nu^{-\frac{2}{3}}\right)$,коли $\lambda\to+\infty$.

3) $F(\lambda)=\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}e^{i\lambda cht}dt=\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$,коли $\lambda\to+\infty$.

4) $F_\nu(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}e^{i(\nu t-x\sin t)}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i\left(\nu\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-x\right)}+O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$, коли $x\to+\infty$.

Література

Основна

1. Bleistein N., Handelsman R.A. Asymptotic Expansions of Integrals. Dover Publication, New York, 1986.
2. Copson E.T. Asymptotic expansions. Cambridge university press, 2004.
3. De Bruijn N.G. Asymptotic Methods in Analysis. Dover Publications, New York, 1981.
4. Murray J.D. Asymptotic analysis. Springer Science & Business Media, 2012.
5. Olver F.W.J. Asymptotics and special functions. CRC Press, 1997.

Додаткова

1. Барабаш О.В. Вступ до асимптотичних методів: інтеграли та ряди: конспект лекцій. К.: Київський університет. 2010, 111 с.
2. Erdelyi A. Asymptotic Expansions. Dover Publications, 1956.
3. Fedoryuk M. V. "Asymptotic methods in analysis." *Analysis I: integral representations and asymptotic methods*. Springer Berlin Heidelberg, 1989. 83-191.
4. Jeffreys H. Asymptotic Approximations. Clarendom Press, Cambrige, 1965.
5. Miller P.D. Applied asymptotic analysis. American Mathematical Soc., 2006.
6. Sirovich L. Techniques of Asymptotic Analysis. Springer-Verlag, New York, 1971.
7. Temme N.M. Asymptotic methods for integrals. World Scientific, 2014.

Навчальне видання

Процеров Юрій Сергійович

АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ В АНАЛІЗІ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти
спеціальності 113 «Прикладна математика»

Електронне видання мережевого використовування

В авторській редакції

Затвердж. авт. 08.10.2024. Шрифт Times New Roman.
Системні вимоги: операційна система сумісна з програмним забезпеченням
для читання файлів формату PDF.
Обсяг 1,8 МБ. Зам. № 2878.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
65082, м. Одеса, вул. Університетська, 12, Україна
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua