

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

На тему: «Побудова та дослідження математичних моделей
економіки з хаосом і біфуркацією»

«Building and research of mathematical models of the economy with chaos and bifurcation»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»
Шатов Олександр Віталійович

Керівник
к.ф. - м.н., доцент, Шарай Н. В.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент
д.ф. - м.н., професор Євтухов В. М.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від _____ р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК №_____
протокол № ____ від _____ р.
Оцінка _____ / _____ / _____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)
Голова ЕК

(підпис) (прізвище, ім'я)

(підпис) (прізвище, ім'я)

ЗМІСТ

Вступ	4
Розділ 1. Допоміжні факти з теорії диференціальних рівнянь.....	6
§1.1. Відомості з теорії стійкості за Ляпуновим.....	6
§1.2. Відомості з теорії динамічних систем: положення рівноваги, періодичні розв'язки, цикли, хаос.....	12
§1.3. Економічні приклади.....	16
§1.4. Відомості з теорії диференціальних систем	21
Розділ 2. Основні види біфуркації для випадку одного рівняння.....	24
§2.1. Основні означення теорії біфуркацій. Гіперболічне і негіперболічне положення рівноваги	24
§2.2. Типи біфуркацій на площині	26
§2.3. Біфуркації для диференціальних рівнянь з більш складною правою частиною.....	31
Розділ 3. Біфуркації динамічних систем на площині	35
§3.1. Види біфуркацій, типи яких схожі до типів на площині.....	35
§3.2. Види більш складних біфуркацій.....	37
§3.3. Основні теореми про наявність чи відсутність біфуркацій в системах	42
Розділ 4. Біфуркації у економічних моделях	45
§4.1. Односекторна модель зростання.....	45
§4.2. ОМЗ з виробничою функцією Кобба-Дугласа.....	55

§4.3. Односекторна модель зростання з функцією загальної корисності.....	59
§4.4. Ендогенний час у двосекторній моделі зростання.....	67
§4.5. IS-LM моделі	77
§4.6. Ріст в умовах міжнародної торгівлі та міського структуроутворення...	81
Розділ 5. Економічний хаос.....	87
Висновок	96
Список літератури	97

ВСТУП

Диференціальні рівняння в теперешній час дуже часто використовують для моделювання руху в багатьох областях наук, в тому числі в моделюванні різних процесів економіки. Теорія диференціальних рівнянь є важливим інструментом економічного і інших видів аналізу, особливо після того, як комп'ютер став загальнодоступним. Для того, щоб розуміти багато процесів, які виникають в макроекономічних моделях, особливо важливо знати основи якісної теорії, і такі сучасні поняття, як біфуркації і хаос.

Вважають, що якісна теорія і пов'язана з нею теорія біфуркацій виникла десь на початку XIX століття. Анрі Пуанкаре, як вважають засновник цієї теорії запропонував, як можливо подати всі якісні особливості поведінки розв'язків диференціальних рівнянь, не розв'язуючи його. З виходом докторської дисертації А.М. Ляпунова теорія стійкості, якісний аналіз та теорія біфуркацій одержали важливий імпульс для розвитку.

В даній роботі розглядаються основні аспекти теорії біфуркацій в рівняннях та системах, причому особливу увагу приділяють тим змінам, які відбуваються в структурі розв'язків диференціальних рівнянь при різних значеннях параметрів. В роботі наведені основні аспекти теорії біфуркацій і теорії хаосу динамічних систем, вивчаються картини якісного розбиття фазового простору залежно від зміни параметра або декількох параметрів, також застосування цього апарату у вивченні економічних моделей. Дослідження можливості прогнозування при розгляді моделей в такому ключі.

Теоретичною і методологічною основою роботи були дослідження різних зарубіжних та вітчизняних вчених, таких як: А.М. Ляпунов, А.А. Андронов, В.И. Арнольд, В.Б. Занг, А.В. Воронин, Дж. М. Кейнс, Р. Солоу, Н. Кальдор і багато інших.

Дана робота складається з п'яти розділів.

Перший розділ присвячений основним поняттям і теоремам теорії стійкості за Ляпуновим, та теорії динамічних систем. В данному розділі вивчаються динамічні системи та точки рівноваги, доведено теорему, що дозволяє описати поведінку системи поблизу положень рівноваги.

У другому розділі цієї роботи розглядаються поняття біфуркації і її основні види. На прикладі конкретних диференціальних рівнянь розглядаються різні підходи визначення типу біфуркацій.

Третій розділ присвячений біфуркаціям в диференціальних системах, причому вивчаються різні типи біфуркацій, як седлоузловая, біфуркація типу вил, біфуркація Пуанкаре-Андропова-Хопфа, вертикальні біфуркації, седлопетлевая або гомоклиническая біфуркація, наведені дві біфуркаційні теореми.

Четвертий розділ присвячений побудові економічних моделей і дослідженню їх на наявність. Проаналізуємо різні економічні моделі. Спочатку розглянемо одnoseкторну модель зростання, її економічну структуру в деталях. Також застосуємо теорему Ляпунова, щоб забезпечити глобальну асимптотичну стійкість рівноваги. В наступному розділі 4.2 зображемо один сектор моделі зростання, запропонований у розділі 4.1, використовуючи моделювання. В розділі 4.3 розглянемо одnoseкторну модель зростання загальної функції корисності, а в розділі 4.4 – ендегенний час у двосекторній моделі зростання. IS-LM моделі в 4.5 та ріст в умовах міжнародної торгівлі та міського структуроутворення в розділі 4.6.

П'ятий розділ містить основні поняття хаотичної динаміки, приведені теореми Ли і Йорка, Шарковського.

$$\begin{aligned}
&3, 5, 7, 9, \dots \\
&2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 9, \dots \\
&2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 7, 2^2 \cdot 9, \dots \\
&2^3 \cdot 3, 2^3 \cdot 5, 2^3 \cdot 7, 2^3 \cdot 9, \dots \\
&\vdots \\
&\dots, 2^n, \dots, 2^2, 2^1, 1.
\end{aligned}$$

Визначення 5.5. Область B називається *поглинаючою*, якщо $f^t \overline{B} \subset B, t > 0$. Максимальним аттрактором в поглинаючій області B називається множина $A = \bigcap_{t \rightarrow \infty} f^t B$.

Множина називається *аттрактором*, якщо існує поглинаюча область.

Визначення 5.6. Аттрактор називається *дивним*, якщо він відмінний від кінцевого об'єднання гладких підрізноманіть фазового простору.

Простими аттракторами є: стійке положення рівноваги, стійкий граничний цикл, що притягує двомірний тор.

Дивний аттрактор - це об'єкт, який характеризується неперервною нерегулярністю поведінки в динамічній системі. Ми можемо показати, що ці явища можуть бути виявлені у дуже простих тривимірних системах. Система Лоренца - це приклад диференціальних рівнянь, які добре документувані у ілюстрації хаотичних явищ.

Висновок

У цій роботі розглянуто застосування диференціальних рівнянь у теорії біфуркації динамічних систем та якісній теорії диференціальних рівнянь. Це дослідження актуальне, тому що диференціальні рівняння взагалі не можуть бути проінтегровані, тому потрібно вивчити їхні властивості без потреби в знаходженні рішень.

Була створена понятійна база, щоб ілюструвати ключові ідеї теорії біфуркацій. Було оглянуто декілька прикладів, таких як седловий біфуркатор, транскритичні біфуркації, вилоподібні біфуркації і біфуркація Андронова-Хопфа. Кожен з цих прикладів показує різні якісні характеристики диференціального рівняння і системи, а також різні підходи до обґрунтування і визначення типу біфуркацій.

Були побудовані економічні моделі, в яких системи біфуркують, це такі моделі як: Динаміка економіки «високої інфляції»; Інфляція в перехідній економіці; Неокласичний економічний ріст Модель Солоу; Односекторная модель зростання (ОМР); Динаміка ринку праці; Кейсіанская модель економічних циклів, IS-LM модель.

Біфуркаційна послідовність може призвести систему з рівноважного стану до хаотичного. Наступним кроком у розвитку біфуркацій було вивчення економічного хаосу та його застосування у економічних моделях, наприклад, динаміки міського продукту за допомогою системи Лоренца і хаосу в міжнародній економіці.

Ця робота охоплює усі основні концепції та ключові пункти теорії біфуркацій та хаосу, що дозволяє ознайомитися з цими поняттями з математичного погляду у економіці, а також показує можливість використання теорії диференціальних рівнянь, зокрема її якісної частини.

Список літератури

1.Chang, W.W. and Smyth D. J., 1971, The Existence and Persistence of Cycles in a Nonlinear Model: Kaldor's 1940 model Re-examined, Review of Economic Studies, V. 38, P. 37 – 44. 41.

2. Gondolfo, G., 1996, Economic Dynamics, Berlin and New-York, Springer-Verlag.
3. P.K. Asea, and P. Zak, Time-to-build and cycles, Journal of Economic Dynamics and Control, 23 (1999), 1155-1175.
4. Wei-Bin Zhang DIFFERENTIAL EQUATIONS, BIFURCATIONS, AND CHAOS IN ECONOMICS, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences — Vol. 68 // World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (2005)
5. J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York, 1960.
6. M. Ferrara, and L. Guerrini, An AK Solow model with delay in production, Far East Journal of Mathematical Sciences, 67 (2012), 181-185.
7. Арнольд В.И. Дополнительные разделы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И. Арнольд. М: Наука, 1978.
8. L. Guerrini, The Solow-Swan model with Kaldor-Pasinetti saving and time delay, Applied Mathematical Sciences, 6, (2012), 3569-3573.
9. L. Guerrini, Constant population growth rate and time to build: the Solow model case, Economics Bulletin, 32 4 (2012), 3260-3265

10. L. Guerrini, Bifurcation analysis of an economic model, *International Journal of Mathematical Analysis*, 6 (2012), 2779-2787.
11. Великий Ю. М. Нестійкість динаміки ціни в макроекономічному рівнянні Фішера // *Бізнес Інформ*. - 2005. - № 7-8. - С. 61 - 65.
12. L. Guerrini, Stability and Hopf bifurcation for a delayed model with classical saving, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 78 (2012), 993-998.
13. W.A. Lewis, Economic Development with Unlimited Supplies of Labor, *Manchester School of Economic and Social Studies*, 22 (1954), 139-191.
14. Гайко В. А. Глобальні біфуркації циклів і шістнадцята проблема Гільберта. - Мн.: Університетське, 2000. - 167 с. 16.
15. M. Szydlowski, Time-to-build in dynamics of economic models I: Kalecki's model, *Chaos, Solutions & Fractals*, 14 (2002), 697-703.
16. M. Szydlowski, Time to build in dynamics of economic models II: models of economic growth, *Chaos, Solutions & Fractals*, 18 (2002), 355-364.
17. Державна регіональна політика України: особливості та стратегічні пріоритети: моногр. / наук. ред. З.С. Варналія. – К.: НІСД, 2007. – 768 с.
18. Євтухов В.М. Стійкість за Ляпуновим лінійних диференціальних рівнянь. О. : «Асторпрінт» 2001. - 117 с.

19. Занг В. Б. Синергетична економіка: Переклад з англ. - М.: Світ, 1999. - 336 с. 20.
20. Йосс, Ж. Елементарна теорія стійкості та біфуркацій / Ж. Йосс, Д. Джозеф. - М.: Світ, 1983.
21. Кейнс Дж. М. Вибрані твори. - М.: Економіка, 1993. 21. Кізім Н. А.,
22. Ляпунов А. М. Загальне завдання щодо стійкості руху. – Харків. - 1892.
23. Марсден, Дж. Біфуркація народження циклу та її застосування / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. - М.: Світ, 1980.
24. Постон Т. Теорія катастроф та її застосування / Т. Постон, І. Стюарт. - М.: Світ, 1980, - 608 с.
25. Хакен Г. Синергетика / Г. Хакен. - М.: Світ, 1980. - 400 с. 3. Арнольд В. І. Теорія катастроф / В. І. Арнольд - 3-тє вид., Дод. - М.: Наука. Гол. ред. фіз. -Мат. літ., 1990. - 128 с.
26. Шноль, Е.Е. Про стійкість нерухомих точок двовимірних відображень / Е.Е. Шноль // Диференційні рівняння. - 1994. - Т. 30, № 7. - С. 1156 - 1167.