Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

Дипломна робота

бакалавра

на тему: **«Властивості коливності та неколивності розв'язків диференціальних рівнянь вищих порядків»**

«Properties of Oscillatory and non-oscillatory solutions of higher-order differential equations»

Виконала: студентка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Рябоконь Поліна Сергіївна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент
Шарай Наталія Вікторівна
Рецензент: доктор фіз.-мат наук, проф.
Євтухов В'ячеслав Михайлович

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від «_____» ________ р.
Завідувач кафедри
____________ __________________

Захищено на засіданні ЕК № _______
Протокол № _____ від «_____» _____ р.
Оцінка ________ / ________ / ________
Голова ЕК
____________ ____________________

Одеса — 2021 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Диференціальні рівняння беруть свій початок від Ньютона (1642—1727). Ньютон вважав цей свій винахід настільки важливим, що зашифрував його у вигляді анаграми,сенс якої в сучасних термінах можна вільно передати так: «закони природи виражаються диференціальними рівняннями».Зазвичай вважають, що Ньютон відкрив за допомогою свого аналізу закон всесвітнього тяжіння. Насправді Ньютону (1680) належить лише доказ еліптичності орбіт в полі тяжіння за законом зворотних квадратів: сам цей закон був вказаний Ньютону Гуком.

З величезного числа робіт XVIII століття виділяють роботи Ейлера(1707-1783) і Лагранжа(1736-1813). У цих роботах була передусім розвинена теорія малих коливань, а отже - теорія лінійних систем диференціальних рівнянь; попутно виникли основні поняття лінійної алгебри.

Вперше вивченням коливаннь розв'язків диференціальних рівнянь зайнявся Шарль Франсуа Штурм(1803-1855). Його робота розпочалася з класичного дослідження, в якому він зазначив, що велика кількість задач теорії теплоти приводить до рівнянь другого порядку, для яких важко обчислити значення розв'язків в даній точці або з'ясувати для цих розв'язків поведінку нулів, навіть в разі, коли розв'язок отримано в остаточному вигляді або у вигляді ряду.

За допомогою безпосереднього вивчення Штурм отримав, що розв'язки мають велику схожість з тригонометричними і показовими функціями, встановив ряд надзвичайно важливих властивостей нулів розв'язків, вказав спосіб наближеного обчислення розв'язків з достатньою точністю.

Вагомий внесок у вивчення коливності диференціальних рівнянь привнесли такі вчені, як M.Rab[35], Єльшин[6], C.O. Oakley [28], W.T. Reid [36],E. Hille, Кондратьєв В.Л.[19], а також велика кількість вчених.

В **першому розділі** дипломної роботи розглянемо допоміжні результати та теореми, за допомогою яких у **другому розділі** доведені основні теореми.

Також у **другому розділі** розглянуті достатні умови коливання розв'язків, що виходять з основної теореми при виконанні додатніх умов та критерій порівняння для диференціального рівняння (1), який випливає з основної теореми.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$[p(x)y']' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

Будемо вважати, що коефіцієнти $p'(x)$ і $q(x)$ неперервні на інтервалі $I =< x_0, +\infty >$ і $p(x) > 0$.

Розв'язок рівняння (1) називають коливним, якщо воно має на інтервалі I нескінчену множину нулів. Розв'язок $y(x) \equiv 0$ задовольняє цій умові. Якщо всі розв'язки рівняння (1) коливаються в I, то кажуть, що рівняння (1) є коливним.

Для встановлення умов коливань розв'язку рівняння (1) використовуються наступні методи:

a) розкладання диференціального рівняння (1) на систему і її перетворення до помірних координат;

b) перетворення рівняння (1) в рівняння Ріккаті (цей метод найчастіше використовується);

c) метод власних значень.

Можна також отримати ряд загальних результатів шляхом комбінації методів a і b з використанням перетворення $y = f(x)z$. При цьому передбачається,що $f(x)$ двічі неперервна диференціальна функція, $f(x) > 0$ при $x \in I$. Зауважимо, що результати рівняння, отримані в цій роботі, дозволяють досліджувати рівняння

$$y" + r(x)y' + S(x)y = 0 \tag{2}$$

де $r(x)$ і $S(x)$ неперервні в I. Рівняння (2) можна представити у вигляді

$$\left[\exp\left\{\int_{x_0}^{x} r(t)dt\right\} y'\right]' + \exp\left\{\int_{x_0}^{x} r(t)dt\right\} S(x)y = 0$$

або шляхом перетворення

$$y = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} r(t)dt\right\}$$

звести до рівняння

$$u'' + S(x)u = 0 \tag{3}$$

в якому $S(x) = S(x) - \frac{1}{4}r^2(x) - \frac{1}{2}r'(x)$
Особлива увага в літературі приділяється рівнянню (3), тобто рівнянню (1) у випадку $p(x) \equiv 1$

РОЗДІЛ 1

ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1.1 Основні положення

Розглянемо питання коливності і неколивності розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Розглянемо рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$y'' + Q(x)y = 0 \tag{1.1}$$

де $Q(x)$ - функція, неперервна на $[x_0; +\infty)$

Означення 1.1

Розв'язок рівняння (1.1) називаетъся ***коливним*** *на* $[x_0; +\infty)$ *якщо воно має нескінченне число нулів на* $[x_0; +\infty)$ *і* ***неколивним*** *в іншому випадку.*

Теорема 1.1

Якщо на інтервалі (a, b) *маємо всюди* $Q(x) \leq 0$, *то всі розв'язки рівняння* $y'' + Q(x)y = 0$ *на* (a, b), *неколивні.*

Доведення.

Припустимо, що деякі розв'язки $y_1(x)$ рівняння (1.1) має ,принаймні,два нулі; нехай нулі будуть x_0, x_1, $x_0 < x_1$, і нехай в інтервалі (x_0, x_1) функція $y_1(x)$ не має інших нулів.

Всі нулі будь-якого розв'язку $y(x)$,яке не дорівнює тотожньо нулю диференціального рівняння (1.1) на інтервалі, де коефіцієнти p_0,p_1,p_2 неперервні і p_0 не дорівнює нулю, є ізольованими, тобто існує окіл $({}_0 - \delta, {}_0 + \delta)$ кожного нуля x_0, який не містить інших нулів. В іншому випадку точка x_0 була б граничної точкою для нулів ${}_1()$, тобто існує послідовність нулів таких, що $\{x_1, x_2,..., x_n, ...\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тоді маємо:

$$\frac{y_1(x_n) - y_1(x_0)}{x_n - x_0} = 0$$

Так як функція y_1 є диференційованою, то

$$\lim_{n\leftarrow\infty} \frac{y_1(x_n) - y_1(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{h\leftarrow\infty} \frac{y_1(x_0 + h) - y_1(x_0)}{h} = y_1'(x_0) = 0$$

Отже, в точці $x = x_0$ отримаємо : $y_1(x_0) = 0, \quad y_1'(x_0) = 0$, тобто по теоремі Коші $y_1 \equiv 0$, що суперечить припущенню. З доведеного випливає, що функція $y_1(x)$ має скінчене число нулів у всякому відрізку $[\alpha,\beta]$, внутрішній до (α,β). Тоді $y_1(x)$, як неперервна функція, зберігає сталий знак на інтервалі (x_0,x_1) ; завжди можна допустити, що в цьому інтервалі $y_1(x) > 0$ (в іншому випадку можливо взяти - $y_1(x)$). Тоді $y_1'(x) > 0$ б так як $y_1(x)$ зростає вправо від $_0$; при цьому $y_1'(x_0) \neq 0$, інакше отримаємо $y_1 \equiv 0$).

Якщо $Q(x) \leq 0$, тоді з рівняння (1.1) випливає, що $y_1''(x) \geq 0$ на всьому інтервалі (x_0, x_1).Отже, $y_1'(x)$ не спадає на інтервалі (x_0, x_1), тобто $y_1'(x) \geq y_1'(x_0)$ для $x_0 < x \leq x_1$; звідси, в силу теореми Лагранжа, маємо:

$$y_1(x_1) \geq y_1(x_0) + y_1'(x_0)(x_1 - x_0) = y_1'(x_0)(x_1 - x_0) > 0,$$

що суперечить умові $y_1(x_1) = 0$. Теорему доведено.

Зауваження 1.1

Якщо $Q(x) > 0$ в інтервалах (a,b), то існуюсь коливні розв'язки в цих інтервалах.

Теорема Штурма.

Якщо x_0 і x_1 два послідовних нуля розв'язки $y_1(x)$ диференціального рівняння (1.1) другого порядку, то будь-який інший лінійно незалежний $y_2(x)$ того ж рівняння має точно один нуль між x_0 і x_1.

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dy}\right) + qy = 0 \tag{1.2}$$

<u>**Доведення.**</u>

Розглянемо рівняння виду (1.1), причому, припускаємо, що в інтервалі (a,b) і на його кінцях $p_0(x) \neq 0$.
Складемо визначник Вронського:

$$y_1'(x)y_2(x) - y_{21}'(x)y_1(x) = W(x) \tag{1.3}$$

Припустимо, що на всьому інтервалі x_0,x_1 розв'язок $y_2(x) \neq 0$. В силу лінійної незалежності розв'язків y_1,y_2, останнє не обертається до нуля також при $x = x_0$ і $x = x_1$. Дійсно, якби,$y_2\left(x_0\right) = 0$, то $W\left(x_0\right) = 0$, що суперечить властивості визначнику Вронського. Так як $W(x) \neq 0$, то він зберігає сталий знак;
Нехай $W(x) > 0$. Розділимо обидві рівності (1.2) на $(y_2(x))^2$, отримаємо:

$$\frac{y_1'(x)y_2(x) - y_2'(x)y_1(x)}{\left[y_2(x)\right]^2} = \frac{W(x)}{\left[y_2(x)\right]^2}, \quad \text{або} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right) = \frac{W(x)}{\left[y_2(x)\right]^2}$$

Припустимо, що $y_2(x_0) \neq 0$, тоді в правій частині одержимо неперервну функцію від x; яку будемо інтегрувати межах від x_0 до x_1.

Одержимо:

$$\left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right]_{x=x_0}^{x=x_1} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{W(x)}{\left[y_2(x)\right]^2} dx$$

Так як $y_1\left(x_0\right) = y_1\left(x_1\right) = 0$, тоді ліва частина дорівнює нулю. Права частина містить інтеграл від додатньої функції, яка за властивістю інтегралів буде додатньою.

Ми одержали, що між двома послідовними нулями $y_1(x)$ існує принаймні, один нуль $y_2(x)$. В протилежному варіанті, якщо нулів було б 2 ,$y_2\left(\bar{x}_0\right) = y_2\left(x_1\right) = 0, x_0 < \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < x_1$, то, змінивши y_1 і y_2 місцями ми довели б існування нуля функції $y_1(x)$ між $\bar{x}_0$ і $\bar{x}$ отже, - між x_0 і x_1, що суперечить умові, що $y_1(x)$ не має нулів між x_0 і x_1.
Теорема доведена.

Наслідок 1.1

Нулі двох лінійно незалежних розв'язків $y_1(x)$ *взаємно розділяють один одного.*

Наслідок 1.2

Якщо в інтервалі (a,b) *один розв'язок лінійного рівняння* (1.1) *має більше двох нулів, то всі розв'язки коливаються.*

Зауваження 1.2

Теорема Штурма встановлює, що всі розв'язки одного і того ж рівняння, взагалі кажучи, мають однаковий характер коливання.

1.2 Апроксимативне визначення значення функції

Нехай $Ev(x)$ - множина дійсних чисел x, яка має властивість $v(x)$, а $m(M)$ - міру множини M. Введемо поняття апроксимативного значення для функції $f(x)$, яке було введено в роботах Olech C. , Z.Opial і T.Wazewski [1].

Означення 1.2

Будемо казати, що функція $f(x)$ *має апроксимативну нижню границю* l *при* $x \longrightarrow +\infty$ *(будемо писати* $\lim\limits_{x\to+\infty} aprinf\ f(x) = l$*),*

якщо

1) $m\left(E\left\{f(x) \leqslant l_1\right\}\right) < +\infty$ *для кожного* $l_1 < l$

2) $m\left(E\left\{f(x) \leqslant l_2\right\}\right) = +\infty$ *для кожного* $l_2 > l$

Означення 1.3

Будемо казати, що функція $f(x)$ *має* ***апроксимативну верхню границю*** L *при* $x \longrightarrow +\infty$ *(будемо писати* $\lim\limits_{x\to+\infty} aprsup\ f(x) = L$*), якщо*

1) $m\left(E\left\{f(x) \geqslant L_1\right\}\right) < +\infty$ для кожного $L_1 < L$

2) $m\left(E\left\{f(x) \geqslant L_2\right\}\right) = +\infty$ для кожного $L_2 > L$.

Кожна функція $f(x)$, очевидно, має тільки апроксимативну верхню та апроксимативну нижню границю. Якщо $l = L = \lambda$, то пишуть

$$\lim apr f(x) = \lambda$$

Будемо далі позначати:

$$\lim_{x \to \infty} \inf f(x) = l^*$$

$$\lim_{x \to \infty} \sup f(x) = L^*$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lambda^*$$

Тоді маємо $l^* \leq l \leq L \leq L^*$.

Теорема 1.2

Рівності $l^* = l$ і $L^* = L$ справедливі, якщо для кожної функції $f(x)$ виконано одну з наступних 4 умов:

a) *для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що для всіх $x^* \geq \delta + x_0$ і для всіх x, які лежать в $< x^* - \delta, x^* >$ або в $< x^*, x^* + \delta >$ дотримуютьcя нерівності $f(x) \leq f(x^*) + \varepsilon$, $f(x) \leq f(x^*) - \varepsilon$*

b) *$f(x)$ рівномірно неперервна I*

c) *$f'(x) \leq k < +\infty$ при $x \in I$*

d) *$f'(x) \geq k > -\infty$ при $x \in I$*

Доведення.

Умова **a)** охоплює кожне з умов **b)**, **c)**, **d)**. Будемо припускати, що умова **a)** справедлива, коли $l^* < l$. Тоді виберемо $\varepsilon > 0$ таке, що виконується умова $l^* < l^* + 2 < l$. При цьому існує послідовність така що x_n, $x_n \longrightarrow +\infty$ така, що $f(x_n) < l^* + \varepsilon$. В одному з інтервалів $< x_n - \delta, x_n >$, $< x_n, x_n + \delta >$, який ми будемо позначати як θ_n, виконується нерівність

$$f(x) \leqslant f(x_n) + \varepsilon < l^* + 2\varepsilon < l$$

Покладемо $\theta = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$, тоді одержуємо, що $m(\theta) = \infty$ і $f(x) < l$ при $x \in \theta$, що суперечить означенню числа l. Отже, $l^* = l$. Аналогічно доводиться, що $L^* = L$.

Теорема 1.3

a) *Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ - два довільних лінійно незалежних розв'язків рівняння* (1), *то функція*

$$\rho(x) = \sqrt{y_1^2(x) + y_2^2(x)}$$

задовольняє рівнянню

$$[p(x)\rho']' + q(x)\rho = \frac{M^2}{p(x)\rho^3} \tag{1.4}$$

де $M = p(x)W(x)$ і $W(x)$ - визначник Вронського від розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$.

b)*Якщо функція $f(x)$ задовольняє рівнянню*

$$[p(x)f']' + q(x)f = \frac{c^2}{p(x)f^3},$$

$$c = const \neq 0$$

тоді

$$y = c_1\,\mathrm{f(t)sin}\left\{\int_{x_0}^{x} \frac{cdt}{p(t)f^2(t)} + c_2\right\} \tag{1.5}$$

є загальним розв'язком диффеpенціального рівняння (1).
Звідси випливає, що загальний розв'язок диференціального рівняння (1) може бути поданний у формі (1.5), коли $f(x) = \rho(x)$. Якщо вибирати розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ можна отримати $c = 1$.

c)*Нехай функція $f(x)$ двічі неперервно диференційована на I. Диференціальне рівняння (1) переходить в рівняння,якщо замінити*

$$y = f(x)z$$

$$[p(x)z']' + Q(x)z = 0, \tag{1.6}$$

де

$$P(x) = p(x)f^2(x);$$

$$Q(x) = f(x)\left[p(x)f'(x)\right] + q(x)f^2(x) \tag{1.7}$$

Диференціальне рівняння (1) і (1.6) одночасно коливні і неколивні. Ця обставина дозволяє вивести безпосередньо з достатніх умов коливності розв'язків диференціального рівняння (1.6) достатні умови кколивності розв'язків (1), що не залежить від будь-якої функції $f(x)$.

Звідси зокрема слідкуе:

1)Подібну формулу застосовував вже V.Bohl[2] для дослідження розв'язків лінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку.

2)Перетворення використовував W.Leightou[24] і пізніше R.Hoore[26].

1.3 Визначення коливних і неколивних диференціальних рівнянь

Теорема 1.4

Диференціальне рівняння (1) є коливним на I тоді і тільки тоді, коли

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dt}{p(t)\rho^2(t)} = \int_{x_0}^{\infty} \frac{dt}{p(t)\left[y_1^2(t) + y_2^2(t)\right]} = \infty \tag{1.8}$$

при цьому $\rho(x)$ задовольняє рівнянню (1.4).
З (1.4) і (1.8) безпосередньо слідкує

Лемма 1.1

Якщо диференціальне рівняння (1) коливне, то знайдеться функція $\rho(x) \in C^2$, $\rho(x) > 0$ при $x \in I$, така що:

$$\int_{x_0}^{\infty} \left\{ \rho(x) \left[p(x)\rho'(x) \right]' + q(x)\rho^2(x) \right\} dx = \infty.$$

Інший прямий висновок встановлює взаємозв'язок між диференціальними рівняннями (1) та (1.6).

Теорема 1.5

Диференціальне рівняння (3) коливається тоді і лише тоді, коли існує функція $f(x) \in C^2$, $f(x) > 0$ при $x \in I$, для якої виконано умови

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dt}{f^2(x)} = \infty$$

і

$$S(x) = \frac{1}{f''(x)} - \frac{f''(x)}{f(x)}.$$

Цю теорему довів O.Borwka[5], який розглядав функцію $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x'(x)}}$$

Leightou в роботі [20] запропонував логарифмічну шкалу порівняння, при цьому, обрав спеціальним чином функцію $X(x)$, користуючись теоремою порівняння. Розглянемо цю теорему нижче.

Якщо диференціальне рівняння (1) приймає вигляд

$$\left[\frac{1}{\omega(x)} y' \right]' + \omega(x) y = 0,$$

тобто

$$y'' - \frac{\omega'}{\omega} y' + \omega^2 y = 0$$

то воно має розв'язок

$$y = c_1 \sin \left\{ \int_{x_0}^{x} \omega(t) dt + c_2 \right\}$$

і коефіцієнт $S(x)$ в диференціальному рівнянні(3) приймає вигляд

$$S(x) = \omega^2(x) - \frac{3}{4}\left[\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}\right]^2 + \frac{1}{2}\frac{\omega''(x)}{\omega(x)}$$

Якщо взяти

$$\omega(x) = k \exp\left\{-2 \iint \varphi(x)dxdx\right\}$$

причому k - додатня стала і $\varphi(x) \in C^\circ$ в I і є довільною функцією, то якщо застосувати теорему порівняння, отримаємо наступне твердження:

Теорема 1.6

Якщо існує неперервна функція, яка задовольняє умові

$$\int_{x_0}^{\infty} \exp\left[-2 \iint \varphi(x)dxdx\right] dx = \infty$$

$$S(x) \geqslant k^2 \exp\left\{-4 \iint \varphi(x)dxdx\right] - \left\{\int \varphi(x)dx\right]^2 - \varphi(x)$$

тоді диференціальне рівняння (3) коливне.

Зауваження 1.3

Ця теорема доведена M.Jelhin. Зокрема, якщо взяти $\varphi(x) = -\frac{1}{2}x^2$, *то звідси отримуємо критерій А.Кнезера.*

Зауваження 1.4

З формули (1.5) загального розв'язку диффеpенціального рівняння (1) можна отримати:
Якщо один розв'язок диференціального рівняння (1) коливаєтьcя в I, *то всі його розв'язки коливні. Якщо позначити через* $y_1(x)$ *і* $y_2(x)$ *два довільних незалежних розв'язки (1),то між кожними двома послідовними нулями* $y_1(x)$ *лежить один нуль розв'язка* $y_2(x)$.

РОЗДІЛ 2

КРИТЕРІЇ ТА ТЕОРЕМИ КОЛИВНОСТІ РІВНЯНЬ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ (1)

У цьому розділі ми розглянемо достатні і необхідні умови коливності розв'язків рівняння

$$[p(x)y']' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

Для того, щоб вивчити проблему коливності і не коливності, ми розглянемо диференціальне рівняння Ріккаті, пов'язане з рівнянням вигляду (1).

2.1 Основні теореми коливності

Теорема 2.1(Основна теорема)

Диференціальне рівняння (1) є коливним тоді і лише тоді, коли є функція $g(x) \in C^1$, $g(x) > 0$ в I,що задовольняє умові

$$\lim_{x\to\infty} H(x) = \lim_{x\to\infty} \int_{x_0}^{x} \frac{1}{p_1(x)} \exp\left\{2\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{1}{p(x)g^2(S)}\int_{x_0}^{s}\left[q(t)g^2(t) - p(t)g'^2(t)\right]dt\right.\right.$$

$$\left.\left. -a\right]ds\,\right\}dx_1 = \infty$$

для будь-якої сталої a.

Доведення.

а) Нехай рівняння (1) не є коливними. Нехай $y(x)$ розв'язок рівняння (1), який на I не має нулів, що очевидно не обмежує загальність. Зробимо замінув рівнянні (1) $u = \frac{p(x)y'}{y}$ одержуємо рівняння Ріккаті

$$u' = -\frac{u^2}{p(x)} - q(x)$$

Домножимо рівняння на $g(x)$ і проінтергруемо

Отримаемо:

$$\int_{x_0}^{x} g^2(t)u'(t)dt = -\int_{x_0}^{x} \frac{u^2(t)g^2(t)}{p(t)}dt - \int_{x_0}^{x} q(t)g^2(t)dt$$

Після інтегрування по частинах в лівій частині будемо мати

$$g^2(x)u(x) = a + 2\int_{x_0}^{x} g(t)g'(t)u(t)dt - \int_{x_0}^{x} \frac{u^2(t)g^2(t)}{p(x)}dt -$$

$$-\int_{x_0}^{x} q(t)g^2(t)dt = a - \int_{x_0}^{x} \left[\frac{g(t)u(t)}{\sqrt{p(t)}} - \sqrt{p(t)}g'(t)\right]^2 dt +$$

$$+\int_{x_0}^{x} \left[p(t)g'^2(t) - q(t)g^2(t)\right] dt \tag{2.1}$$

де $a = g^2\left(x_0\right) u\left(x_0\right)$ Звідси знаходимо

$$\frac{p(x)y'(x)}{y(x)} = u(x) \leq \frac{1}{g^2(x)}\left\{a + \int_{x_0}^{x} \left[p(t)g'^2(t) - q(t)g^2(t)\right] dt\right\}$$

і після інтегрування від x_0 до x

$$\ln\left|\frac{y(x)}{y\left(x_0\right)}\right| \leq \int_{x_0}^{x} \frac{1}{p(S)g^2(S)}\left\{a + \int_{x_0}^{s} \left[p(t)g'^2(t) - q(t)g^2(t)\right] dt\right\} dS,$$

$$|y(x)| \leq C\exp\left\{\int_{x_0}^{x} \frac{1}{p(S)g^2(S)}\left[a + \int_{x_0}^{s} \left[p(t)g'^2(t) - q(t)g^2(t)\right] dt\right] dS\right\}$$

Якщо позначити через $y_1(x)$ та $y_2(x)$ два будь-яких незалежних розв'язки диференціального рівняння (1), які не мають нульових точок, то з наведеної вище нерівності легко можна отримати

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{p(t)\left[y_1^2(t) + y_2^2(t)\right]} \geq kH(x)$$

де k – відповідна додатня компонента. Права частина цієї нерівності розходиться до $+\infty$ при $x \to +\infty$, так що

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dt}{p(t)\left[y_1^2(t) + y_2^2(t)\right]} = \infty$$

Це суперечить положенню, що (1) в I не коливне.

b) Нехай диференціальне рівняння (1) є коливним. Тоді за лемою 1.1 існує функція $g(x) \in C^1, g(x) > 0$, яка задовольняє умові

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{M^2}{p(x)g^2(x)} dx = \int_{x_0}^{\infty} \left[g(x)g^2(x) + g(x) \left\{ p(x)g'(x) \right\}' dx \right] = \infty$$

Покажемо, що ця функція задовольняє $H(\infty) = \infty$.

Користуючись співідношенням

$$\int g(x) \left\{ p(x)g'(x) \right\}' dx = p(x)g(x)g'(x) - \int p(x)g^{'2}(x)dx + \text{ const}$$

одержуємо, що $H(x)$ можна привести до вигляду

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{p(x)} \exp \left\{ 2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{p(S)g^2(S)} \left\langle \int_{x_0}^{s} \left[g(t)g^2(t) + g(t) \left\{ p(t)g'(t) \right\} \right]' dt - \right.\right.$$

$$\left.\left. - -g(S)g'(S)p(S) + \text{ const } \right\rangle dS \right\} dx_1 =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{1}{p(x)} \exp \left\{ 2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{p(S)g^2(S)} \left\langle \int_{x_0}^{s} \left[g(t)g^2(t) + g(t) \left\{ p(t)g'(t) \right\}' \right] dt + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \text{const} \right\rangle dS - 2 \ln |g(x_1)| \right\} dx_1 =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{1}{p(x_1) g^2(x_1)} \exp \left\{ 2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{p(S)g^2(S)} \left\langle \int_{x_0}^{s} \left[g(t)g^2(t) \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. +g(t) \left\{ p(t)g'(t) \right\}' \right] dt + \text{ const } \right\rangle dS \right\} dx_1$$

Звідки $H(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

Теорема доведена.

Теорема 2.2

Нехай $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{p(x)} = \infty$. *Нехай, крім того, існує функція* $g(x) > 0, g(x) \in C^1$, *така, що виконується умова*

$$\int_{x_0}^{\infty} \left[q(x)g^2(x) - p(x)g'^2(x) \right] dx = \infty \tag{2.2}$$

Тоді диференціальне рівняння (1) є коливним.

Доведення.

Доведення теореми безпосередньо слідує з основної теореми 2.1 .

Наслідок 2.1

При $p(x) \equiv 1$ теорема 2.2 була встановлена В. А. Кондратьєвим [19], де $r(x) = g^2(x)$

У [19] є також теорема, яка доведено у випадку $q(x) = r(x)\sqrt{x}$

Наслідок 2.2

Теорема 2.2 узагальнює результат M. Zlamal [42], де замість умова 2.2 замінена на наступні :

$$\int_{x_0}^{\infty} q(x)g^2(x)dx = \infty$$

та

$$\int_{x_0}^{\infty} p(x)g'^2(x)dx < \infty$$

При цьому M. Zlamal подає цю гіпотезу в іншій формі:

для збереження умови необхідньо покласти $g(x) = \sqrt{\omega(x)})$.

Зокрема, якщо $p(x) \equiv 1$, тоді можна послідовно вибирати $g(x)$ у вигляді

$g(x) = x^{\frac{1}{2}\sigma}, \sigma < 1; x^{\frac{1}{2}} \ln^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}} x, x^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1}{2}} x \ln\ln^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}} x, \ldots, \alpha > 0 \ldots$

Очевидно, що $\int_{x_0}^{\infty} g'^2(x)dx < \infty$ так що кожна з наступних умов гарантує коливність розв'язків рівняння

$$y'' + q(x)y = 0 :$$

$\displaystyle\int_{x_0}^{\infty} x^{\sigma} q(x)dx = \infty, \sigma < 1$ (M. Zlamal [42], I.G. Mikusinski [25] при $q(x) \geq 0$)

$$\int_{x_0}^{\infty} x \ln^{-1-\alpha} x q(x)dx = \infty, \alpha > 0$$

$$\int_{x_0}^{\infty} x \ln x \ln\ln^{-1-\alpha} x q(x)dx = \infty, \alpha > 0$$

І т.д. Ці умови були отримані вже H. Hille в гіпотезі $q(x) \geqslant 0$ [14, S. 242].

Теорема 2.3

Диференціальне рівняння (1) є коливним тоді і лише тоді, коли існує функція $f(x) > 0, f(x) \in C^2$ *при* $x \in I$ *така, що*

$$\lim_{x\to\infty} k(x) = \lim_{x\to\infty} \int_{x_0}^{x} \frac{1}{p(x_1) f^2(x_1)} \exp\left\{2\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{p(S)f^2(S)} \left[\int_{x_0}^{s} f(t)\left\{p(t)f'(t)\right\}' + \right.\right.$$

$$\left.\left.+q(t)f^2(t)\right] dt - a\right] dS\right\} dx_1 = \infty$$

для кожної сталої a

Доведення. Якщо $H(x)$ веде до вигляду (2.1), то з теореми 2.1 слідує достатнє тверджeня. Необхідність випливає з леми 1.1.

Теорема 2.4 (R. Moore [26])

Диференціальне рівняння (1) є коливними тоді і лише тоді, коли є функція $f(x) > 0, f(x) \in C^2$ *при* $x \in I$ *така, що*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{p(x)f^2(x)} = \infty$$

та

$$\int_{x_0}^{\infty} \left[f(x)\left\{p(x)f'(x)\right\}' + q(x)f^2(x)\right] dx = \infty \tag{2.3}$$

Доведення.

Достатність випливає з теореми 2.3 . Необхідність слідує із леми 1.1.

У випадку $p(x) \equiv 1$ ця теорема доведено E. Gragliardo [8], причому умова (2.3) є достатньою для коливності диффеpенціального рівняння (1).

Наслідок 2.3

Якщо покласти $f(x) \equiv 1$ *,то можна записати достатню умову у вигляді*

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{p(x)} = \infty, \int_{x_0}^{\infty} q(x)dx = \infty \tag{2.4}$$

$$\Rightarrow (1) - \text{коливне}$$

Звідки за теоремою 2.4 диффеpенціальне рівняння (1) є коливним. Ця теорема доведена Fite [17] за умови $q(x) > 0$.

Наслідок 2.4

Winter [39] показав що умова $q(x) > 0$ може бути опущена.

Зауваження 2.1

Теорему 2.4 для диференціального рівняння (1) вперше за умовою $q(x) > 0$ опублікував W. Leighton у роботах [23] та [24] та потім у формі (2.4) в [21] и [22].

Інша необхідна та достатня умова коливності розв'язків рівняння (3) приведена М. І. Єльшиним у [6]:

Лема

Диференціальне рівняння (3) є коливним тоді і лише тоді, коли є $\theta(x) \in C^1$ для $x \in I$ і виконуються наступні умови

1. $\theta'(x) + \theta^2(x) + S(x) \geq 0$;
2. $\int_{x_0}^{\infty} \exp\left\{-2\int_{x_0}^{x} \theta(t)dt\right\} \left[\theta'(x) + \theta^2(x) + S(x)\right] dx = \infty$
3. $\int_{x_0}^{\infty} \exp\left\{-2\int_{x_0}^{x} \theta(t)dt\right\} dx = \infty$

Якщо вибрати $\theta(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, умови 1-3 можливо переписати у більш простому вигляді:

1' $f'(x) + f(x)S(x) \geq 0$

2' $\int_{x_0}^{\infty} \left[f(x)f''(x) + f^2(x)S(x)\right] dx = \infty$

3' $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{f^2(x)} = \infty$

Отже, зв'язок між теоремою (3) та теоремою Ельшина легко простежити.

Виберемо у теоремі

$$g(x) = f(x)h(x), f(x) \in C^2, h(x) \in C^1, f(x) > 0, h(x) > 0$$

і зважаючи на зв'язок

$$\int h^2(x)f(x)\left[p(x)f'(x)\right]' dx = h^2(x)f(x)p(x)f'(x)-$$

$$-\int p(x)f'(x)\left[2h(x)h'(x)f(x)+h^2(x)f'(x)\right]dx$$

отримуємо

$$\int \left[q(x)g^2(x)-p(x)g'^2(x)\right]dx=\int \left[g(x)f^2(x)h^2(x)-\right.$$

$$\left.-p(x)\left\{f'^2(x)h^2(x)+2f(x)f'(x)h(x)h'(x)+f^2(x)h'^2(x)\right\}\right]dx=$$

$$=\int \left[g(x)f^2(x)h^2(x)+h^2(x)f(x)\left\{p(x)f'(x)\right\}'-p(x)f^2(x)h'^2(x)\right]dx-$$

$$-h^2(x)f(x)f'(x)p(x)$$

так, що

$$H(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{1}{p\left(x_1\right)}\exp\left\{2\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{p(S)h^2(S)}\left\langle\int_{x_0}^{s}\left[Q(t)h^2(t)-p(t)h'^2(t)\right]dt-a\right\rangle dS\right\}dx_1$$

Отже, маємо:

Теорема 2.5 *Диференціальне рівняння (1) є коливним тоді і лише тоді, коли є функція* $f(x)$*і* $g(x)$,$f(x)\in C^2, g(x)\in C^1, f(x)>0$ *при* $x\in I$ *, що задовольняють умові*

$$\int_{x_0}^{\infty}\frac{1}{p(x)}\exp\left\{2\int_{x_0}^{x}\frac{1}{p(S)g^2(S)}\left\langle\int_{x_0}^{s}\left[Q(t)g^2(t)-p(t)g'^2(t)\right]dt-a\right\rangle dS\right\}dx=\infty$$

для кожної сталої a*, де функції* p *та* Q *визначені формулами (1.7).*

Зауваження 2.2

Цей результат можна отримати, якщо застосувати основну теорему 2.1 до рівняння (1.6), яке слідкує з основної теореми 2.1.

Зауваження 2.3

З доведення основної теореми 2.1 за умови $g(x)C^2$*, при* $H(x)=k(x)$*, основна теорема 2.1 всюди еквівалентна теоремі 2.3.*

Теорему 2.3 можна довести таким чином:

аналогічно як в основній теоремі можна довести, що рівняння (1.6) коливне, якщо виконується умова

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \lim_{x\to\infty} \int_{x_0}^{x} \frac{1}{p(x_1)} \exp\left\{ 2\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{p(t)} \left\langle \int_{x_0}^{t} Q(S)dS - a \right\rangle dt \right\} dx_1 = \infty$$

(вважаючи $g(x) \equiv 1$).

Звідси теорему 2.3 легко довести,якщо повторно застосувати теорему 2.3 до диференціального рівняння (1.6).

2.2 Критерії порівняння

Розглянемо критерії порівняння, початок яких був запропонований у роботі С.Штурма [38]. Важливу роль тут відіграють теореми порівняння, які були доведені для диференціального рівняння (1) та для систем рівнянь першого порядку такими авторами як H. Bocher [3], [4], Ельшин [6],G.Landolino [9], E. Kamke [16], [17], C.O. Oakley [28], W.T. Reid [36].

Для диференціального рівняння (1) теорему порівняння можливо одержати з основної теореми 2.1:

Нехай диференціальне рівняння (1) є коливним. Нехай

$$p_1(x) \leq p(x), q_1(x) \geq q(x), p_1', q_1 \text{ - неперервні в I} \tag{2.5}$$

Тоді диференціальне рівняння

$$[p_1(x)y']' + q_1(x)y = 0 \tag{2.6}$$

також є коливним.

Насправді, оскільки (1) коливне, то на підставі основної теореми 2.1 існує така функція $g(x) \in C^1, g(x) > 0$,що $\lim\limits_{x\to\infty} H(x) = \infty$.

Із (2.5) маємо

$$q(t)g^2(t) - p(t)g'^2(t) \leq q_1(t)g^2(t) - p_1(t)g'^2(t)$$

так що знову маємо

$$\lim_{x\to\infty} H(x) = \infty$$

якщо замінити функції p та q на p_1 та q_1 . Отже, диференціальне рівняння (2.6) є коливним.

Виникає проблема, чи існує функція $r(x)$ така, що диференціальне рівняння (1) при $p(x) \leq r(x)$, $q(x) \geq S(x)$ в I є коливним, а при $p(x) > r(x)$ та $q(x) < S(x)$ не коливним. Відповідь на це питання негативна. Справедлива наступна теорема.

Теорема 2.6

Нехай розв'язок диференціального рівняння (1) коливаєтьса в I. Тоді існує функція $S(x) \in C^0$, що $S(x) < q(x)$ при $x \in I$ та диференціальне рівняння

$$[p(x)y']' + S(x)y = 0 \tag{2.7}$$

є коливним.

Доведення.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (1) має вигляд

$$y = C^1 \rho(x) \sin\left[\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{p(t)\rho^2(t)} + C_2\right]$$

Оскільки диференціальне рівняння (1) коливне, то

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dt}{p(x)\rho^2(x)} = \infty \tag{2.8}$$

Функція $\rho(x)$ задовольняє диференціальному рівнянню (1.4) ($M = 1$). Таким чином $q(x)$ може бути записано у вигляді

$$q(x) = \frac{1}{p(x)\rho^4(x)} - \frac{[p(x)\rho'(x)]'}{\rho(x)}$$

Виберемо константу C, $0 < C < 1$ та позначимо

$$S(x) = \frac{C^2}{p(x)\rho^4(x)} - \frac{[p(x)\rho'(x)]'}{\rho(x)}$$

Будемо мати $S(x) < q(x)$ в інтервалі I і диференціальне рівняння (2.7) має загальний розв'язок

$$y = C_1\rho(x)\sin\left[C\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{p(t)\rho^2(t)} + C_2\right]$$

який у відповідності з (2.8) є коливним.

Зауваження 2.4 *В. А. Кондратьев [19] та A. Winter [41] запропонували наступний критерій порівняння:*

Нехай функції $r(x)$ *та* $q(x)$ *неперервні в* I *та виконується умова*

$$0 \le \int_x^\infty r(t)dt \le \int_x^\infty q(t)dt < \infty$$

Якщо диференціальне рівняння $y'' + r(x)y = 0$ *є коливним, тоді рівняння* $y'' + q(x)y = 0$ *також є коливним.*

Зауваження 2.5

E. Hille [41, S. 145] довів цю теорему користуючись умовою $r(x)0$.

Критерій коливності, заснований на логарифмічній шкалі, є спеціальним випадком попередньої теореми. Зубов [43] вказав на зручну форму критерію порівняння, що забезпечує достатні умови коливності розв'язку рівняння (1)

Покладемо

$$u(x) = \int^x \frac{dt}{p(t)}; \ln_{-1} u = 1, \ln_0 u = u, \ldots, \ln_\mathrm{k} u = \ln\ln_{\mathrm{k}-1} u;$$

$$L_n(u) = \prod_{k=0}^{n} \ln_\mathrm{k} u, S_{-1}(u) = 0, S_n(u) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{L_k^2(u)}$$

Теорема 2.7

Нехай виконано
$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{p(x)} = \infty \tag{2.9}$$
Якщо для деякого $\varepsilon > 0$ *виконується*

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{L_{n+1}(u)}{\ln_{n+2}^{1+\varepsilon} u} \left[q(x) - \frac{1}{4p(x)} S_n(x)\right] dx = \infty \tag{2.10}$$

то диференціальне рівняння (1) є коливним.

Доведення. Покладемо

$$f(x) = \sqrt{L_n(x)}, g(x) = \ln_{n+1}^{\frac{1}{2}} u \ln_{n+2}^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} u$$

Тоді отримаємо

$$\frac{d}{dx} L_n(u) = [\ln u \ln_2 u \ldots \ln_{\mathrm{n}} u + \ln_2 u \ln_3 u \ldots \ln_{\mathrm{n}} u + \cdots + \ln_{\mathrm{n}} u + 1] \frac{1}{p(x)} =$$

$$= \left[\frac{L_n(u)}{u} + \frac{L_n(u)}{u \ln u} + \cdots + \frac{L_n(u)}{L_n(u)}\right] \frac{1}{p(x)} = L_n(u) =$$

$$= \left[\frac{1}{L_0(u)} + \frac{1}{L_1(u)} + \cdots + \frac{1}{L_n(u)}\right] \frac{1}{p(x)}$$

Звідси випливає, що

$$f'(x) = \left\{\sqrt{L_n(u)}\right\}' = \frac{L_n'(u)}{2\sqrt{L_n(u)}} \frac{1}{p(x)} = \frac{\sqrt{L_n(u)}}{2p(x)} \left[\frac{1}{L_0(u)} + \cdots + \frac{1}{L_n(u)}\right] [p(x) f'(x)]'$$

$$= \left[\frac{L_n'(u)}{4\sqrt{L_n(u)}} \left\{\frac{1}{L_0(u)} + \cdots + \frac{1}{L_n(u)}\right\} + \frac{\sqrt{L_n(u)}}{2} \left\{-\frac{L_0'(u)}{L_0^2(u)} - \cdots - \frac{L_n'(u)}{L_n^2(u)}\right\}\right] \frac{1}{p(x)} =$$

$$= \frac{\sqrt{L_n(u)}}{4} \left\{\frac{1}{L_0(u)} + \cdots + \frac{1}{L_n(u)}\right\}^2 \frac{1}{p(x)} -$$

$$-\frac{\sqrt{L_n(u)}}{2} \left\{\frac{1}{L_0(u)} \frac{1}{L_0(u)} + \frac{1}{L_1(u)} \left[\frac{1}{L_0(u)} + \frac{1}{L_1(u)}\right] + \cdots +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{L_n(u)} \left[\frac{1}{L_0(u)} + \cdots + \frac{1}{L_n(u)}\right]\right\} \frac{1}{p(x)} = \frac{\sqrt{L_n(u)}}{4p(x)} \left\{\frac{1}{L_0^2(u)} + \cdots + \frac{1}{L_n^2(u)}\right\} =$$

$$= -\frac{\sqrt{L_n(u)}}{4p(x)} S_n(u).$$

Нарешті, отримуємо

$$\theta(x) = f(x)\left[p(x)f'(x)\right]' + q(x)f^2(x) = -\frac{\sqrt{L_n(u)}}{4p(x)} S_n(u) + q(x)L_n(u)$$

і далі

$$g'(x) = \left[\frac{1}{2}\ln_{n+1}^{-\frac{1}{2}} uL_n^{-1}(u)\ln_{n+2}^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} u - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon\right)\ln_{n+1}^{\frac{1}{2}} ux\ln_{n+2}^{-\frac{3}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} uL_{n+1}^{-1}(u)\right]\frac{1}{p(x)} =$$

$$= \ln_{n+1}^{-\frac{1}{2}} uL_n^{-1}(u)\left[\frac{1}{2}\ln_{n+2}^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} u - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon\right)\ln_{n+2}^{-\frac{3}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} u\right]\frac{1}{p(x)}$$

$$g'^2(x) = \ln_{n+1}^{-1} uL_n^{-2}(u)[\%]^2\frac{1}{p(x)} \le C\ln_{n+1}^{-1} uL_n^{-2}(u)\ln_{n+2}^{-1-\varepsilon} u\frac{1}{p^2(x)}$$

для досить великих x , де C – деяка стала.

Отже,

$$\int^{\infty} p(x)g'^2(x)dx = \int^{\infty} p(x)f^2(x)g'^2(x)dx \le \int^{\infty}\frac{Cdx}{\mathrm{L_{n+1}(u)}\ln_{n+2}^{1+\varepsilon} up(x)} =$$

$$= C\int^{\infty}\frac{du}{\mathrm{L_{n+1}(u)}\ln_{n+2}^{1+\varepsilon} u} = \left[\ln_{n+2}^{-\varepsilon} u\right]^{\infty} < \infty$$

$$\int^{\infty} Q(x)g^2(x)dx = \int^{\infty}\frac{\mathrm{L_{n+1}(u)}}{\ln_{n+2}^{1+\varepsilon} u}\left[q(x) - \frac{1}{4p(x)}S_n(u)\right]dx = \infty$$

у силу (2.10), так що диференціальне рівняння (1) за теоремою 2.5 є коливним.

З теореми 2.7 можливо зробити ряд висновків.Зауважимо, що умова (2.10) при $n = -1{,}0$ мають вигляд

$$n = -1 : \int^{\infty}\frac{\mathrm{u}}{\ln^{1+\varepsilon} u} q(x)dx = \infty,$$

$$n = 0 : \int_0^{\infty}\frac{u\ln u}{\ln\ln^{1+\varepsilon} u}\left[q(x) - \frac{1}{4p(x)}\frac{1}{u^2}\right]dx = \infty$$

Якщо покласти $g(x) = \ln_{n+1}^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}} u$ або $g(x) \equiv 1$, замість (2.10), одержуємо

$$\int^{\infty} L_n(u) \ln_{n+1}^{1-\delta} u \left[q(x) - \frac{1}{4p(x)} S_n(u) \right] dx = \infty, \delta > 0 \tag{2.11}$$

чи

$$\int^{\infty} L_n(u) \left[q(x) - \frac{1}{4p(x)} S_n(u) \right] dx = \infty \tag{2.12}$$

Можливо легко показати, що умова (2.11) та (2.12), як і (2.10) мають місце, якщо $q(x) - \frac{1}{4p(x)} S_n(u) \geq 0$, оскільки $\frac{\ln_{n+1}^{\delta} u}{\ln_{n+2}^{1+\varepsilon} u} \to \infty$ для кожного $\delta > 0$ та $\varepsilon > 0$. При $n = -1$ маємо із (2.11).

$$\int^{\infty} u^{1-\delta} q(x) dx = \infty$$

це разом з (2.9) дає достатню умову R. Moore , встановлену в [26].

R. Moore, який розглядав випадок, коли

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{p(x)} < \infty$$

і для деякого $m < 1$

$$\int_{x_0}^{\infty} q(x) h^m(x) dx = \infty,$$

де

$$h(x) = \int_{x_0}^{\infty} \frac{dt}{p(t)},$$

тоді диференціальне рівняння (1) коливне.
Твердження випливає із теореми 2.4, якщо покласти $f(x) = h^{\frac{m}{2}}(x)$.

Умова (2.12) при $n = -1{,}0$ має вигляд

$$n = -1 : \int^{\infty} q(x) dx = \infty$$

$$n = 0 : \int^{\infty} u \left[q(x) - \frac{1}{4p(x)} \frac{1}{u^2} \right] dx = \infty$$

Умови (2.10), (2.11) та (2.12) також виконуються, якщо підінтегральний вираз більше або дорівнює $\frac{\varepsilon}{L_n(u)p(x)}$, оскільки

$$\int^{\infty} \frac{dx}{L_n(u)p(x)} = [\ln_{\mathrm{n+1}} u]^{\infty} = \infty$$

Таким чином, одержані умови (2.11) та (2.12) більш слабі, ніж умова, отримана із (2.10):

$$\frac{L_{n+1}(u)}{\ln_{n+2}^{1+\varepsilon} u}\left[q(x) - \frac{1}{4p(x)}S_n(u)\right] \geq \frac{\varepsilon}{L_n(u)p(x)}$$

або

$$L_n^2(u)\left[p(x)q(x) - \frac{1}{4}S_n(u)\right]\frac{\ln_{n+1} u}{\ln_{n+2}^{1+\varepsilon} u} \geq \varepsilon \tag{2.13}$$

Ця умова виконується, якщо

$$L_n^2(u)\left[p(x)q(x) - \frac{1}{4}S_n(u)\right] \geq \varepsilon \tag{2.14}$$

Звідси одержуємо наступні випадки

$$\left.\begin{array}{c} n = -1 : p(x)q(x) \geq \varepsilon \\ n = 0 : p(x)q(x) \geq \frac{1+\varepsilon}{4u^2} \\ n = 1 : p(x)q(x) \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1+\varepsilon}{u^2 \ln^2 u}\right) \end{array}\right\} \tag{2.15}$$

Умову (2.14) можливо записати у вигляді

$$\lim_{x\to\infty} \inf L_n^2(u)\left[p(x)q(x) - \frac{1}{4}S_n(u)\right] > 0$$

або

$$\lim_{x\to\infty} \inf L_n^2(u)\left[p(x)q(x) - \frac{1}{4}S_{n-1}(u)\right] > \frac{1}{4}$$

При $n = 0$ маємо

$$\lim_{x\to\infty} \inf p(x)q(x)u^2 > \frac{1}{4}$$

З вищевказаними умовами тісно пов'язані умови R. L. Potter [31]:

Якщо виконується

$$\int_{[i}^{\infty} \frac{dx}{p(x)} = \infty, \lim p(x)\frac{d}{dx}\{p(x)q(x)\}^{-\frac{1}{2}} = l' < 2 \qquad (2.16)$$

тоді диференціальне рівняння(1) є коливним.

З другої умови випливає, що

$$[p(x)q(x)]^{-\frac{1}{2}} < \int^{x} \frac{l}{p(x)}dx + C = \ln(x), l' < l < 2$$

Для досить великих x справедливо

$$p(x)q(x) > \frac{1}{l^2}\frac{1}{u^2} = \frac{1+\varepsilon}{4ur}$$

звідки можливо зробити висновок, що умова R. L. Potter слабша, ніж (2.15) R. Moore у [26] довів наступну теорему

Теорема

Якщо виконуються умови

$$\int_{x_0}^{\infty} q(t)dt < \infty, \frac{1}{4} < C \leq u(x)\int_{x_0}^{\infty} q(t)dt \leq d < \infty \qquad (2.17)$$

Тоді диференціальне рівняння (1) є коливним.
Якщо $g(x)0$, то d може бути рівне $+\infty$.

Ця теорема випливає із теореми 2.4 якщо покласти

$$f(x) = \sqrt{u(x)}$$

Насправді з нерівності (2.17) випливає, що $u(x) \to \infty$,що означає

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{p(x)} = \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{p(x)u(x)} = [\ln|u(x)|]_{x_0}^{\infty} = \infty$$

Далі

$$\int_{x_0}^{x} Q(t)dt = \int_{x_0}^{x} q(t)u(t)dt - \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{4p(t)u(t)}$$

Якщо застосувати метод інтегрування частинами, знайдемо

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} Q(t)dt &= u(x)\int_{x_0}^{x} q(t)dt - \int_{x_0}^{x} \frac{\int_{x_0}^{t} q(S)dS}{p(t)}dt - \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{4p(t)u(t)} = \\ &= \left[\int_{x_0}^{\infty} q(t)dt - \int_{x_0}^{\infty} q(t)dt\right] u(x) - \\ &- \int_{x_0}^{x} \frac{\int_{x_0}^{\infty} q(S)dS - \int_{t}^{\infty} q(S)dS}{p(t)}dt - \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{4p(t)u(t)} = \\ &= -\int_{x_0}^{\infty} q(t)dtu(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\int_{t}^{\infty} q(S)dSu(t)}{p(t)u(t)}dt - \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{4p(t)u(t)} + k \geq \\ &\geq -u(x)\int_{x_0}^{\infty} q(t)dt + \left(C - \frac{1}{4}\right)\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{p(t)u(t)} + k \to \infty\end{aligned}$$

де k – деяка стала.

Остання частина твердження (для $g(x) \geqslant 0$) випливає від простої модифікації доказу E. Hille [14, S. 245], що стосується диференціального рівняння у випадку $p(x) \equiv 1$.

Теорема 2.7 та всі висновки доведені у випадку $p(x) \equiv 1$. Умова $\int_{x}^{\infty} \frac{dx}{p(x)} = \infty$ виконана, так що кожне наступне приведене затвердження 1-X осциляції розв'язків рівняння

$$y'' + q(x)y = 0 \tag{2.18}$$

є достатнім

I. $\int_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{L}_{n+1}(\mathrm{x})}{\ln_{n+2}^{1+\varepsilon} x} \left[q(x) - \frac{1}{4}S_n(x)\right] dx = \infty$ для деякого $\varepsilon > 0$(m.Rab[34]).

II. $\int_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{x}}{\ln^{1+\varepsilon} x} q(x)dx = \infty$,

III. $\int_{x_0}^{\infty} \frac{x \ln x}{\ln \ln^{1+\varepsilon} x} \left[q(x) - \frac{1}{4x^2}\right] dx = \infty$

IV. $\int_{x_o}^{\infty} L_n(x) \ln_{n+2}^{-1-\varepsilon} x \left[q(x) - \frac{1}{4}S_n(x)\right] dx = \infty$

V. $\int_{x_0}^{\infty} x^{1-\varepsilon} q(x)dx = \infty$, M. Zlamal [42]

VI. $\int_{x_0}^{\infty} L_n(x) \left[q(x) - \frac{1}{4}S_n(x)\right] dx = \infty$, M. Zlamal [42]

VII.$L_n^2(x) \left[q(x) - \frac{1}{4}S_n(x)\right] \geq \varepsilon$ або $\lim_{x\to\infty} \inf L_n^2(x)[q(x)) - \frac{1}{4}S_{n-1}(x)\big] > \frac{1}{4}$, P. Hartman [12], E. Hille [14]

VIII. $\lim_{x\to\infty} \inf x^2 q(x) > \frac{1}{4}$, A. Kneser [18]

IX. $\lim_{x\to\infty}\inf q(x) > 0, \lim_{x\to\infty} q(x) > 0, q(x) \geq \varepsilon$, A. Kneser [18]

X. a) $\lim_{x\to\infty}\inf x\int_x^\infty q(x)dx > \frac{1}{4}, \lim_{x\to\infty}\sup\int_x^\infty q(x)dx < \infty$

(випливає с (2.17))

b) $q(x) \geq 0, \lim\inf x\int_x^\infty q(t)dx > \frac{1}{a}$, Hille [14,5.245]

Слід було б ще згадати, той факт, що диференціальне рівняння (1) при $z = p(x)y^{'}$ переходить в рівняння

$$\left(\frac{1}{q(x)}z'\right)' + \frac{1}{p(x)}z = 0 \tag{2.19}$$

якщо тільки $p(x) > 0$ та $q(x) > 0$ в I.

Очевидно, що це рівняння коливне або не коливне одночасно з рівнянням (1).
Якщо застосувати до цього рівняння наведені вище теореми, можна отримати нові достатні умови коливності розв'язків рівняння (1).

Наприклад:

Теорема 2.8

Нехай $p(x) > 0$,$q(x) > 0$ *при* $x \in I$.

Нехай, крім того, слідує неперервна функція $g(x) \in C^1$,$g(x) > 0$, *така, що*

$$\int_{x_0}^\infty q(x)dx = \infty, \int_{x_0}^\infty \left[\frac{g^2(x)}{p(x)} - \frac{g'^2(x)}{q(x)}\right]dx = \infty.$$

Тоді диференціальне рівняння (1) є коливним.

Це твердження безпосередньо випливає з теореми 2.2, застосованої до рівняння (2.19).

Розгляд умов коливності розв'язків рівняння (1) на підставі рівняння (2.19) займаються ще (2.23). Справедлива наступна теорема

<u>**Теорема**</u>

Нехай виконується умови

$$\begin{cases} p(x) > 0, q(x) > 0 \text{ \textit{при} } x \in I \\ \int_{x_0}^{\infty} q(x)dx = \infty \\ \lim p(x)\frac{d}{dx}[p(x)q(x)]^{-1} > -2 \end{cases}$$

Тоді диференціальне рівняння (2.20) є коливним.
Твердження безпосередньо випливає із теореми 2.1 для рівняння (2.19).

Приведемо також результати Potter [31], що відносяться до рівняння

$$y'' + \frac{1}{h^2(x)}y = 0 \tag{2.20}$$

які випливають із вищезгаданих теорем.

Якщо узяти в теоремі 2.4 $f(x) = h^{\frac{1}{2}}(x)$, то отримаємо

$$\begin{cases} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{h(x)} = \infty \\ \int_{x_0}^{\infty} \left[\frac{1}{h(x)} - \frac{h^2(x)}{4h(x)} + \frac{h''(x)}{2}\right] dx = \infty \end{cases} \tag{2.21}$$

Умови (2.21) виконуються, якщо справедлива нерівність $h'^2(x) \leq k^2(x) < 4$.

Інша достатня умова для коливності розв'язків (2.20) – $\lim_{x\to\infty} h'(x) < 2$ випливає безпосередньо із (2.21).

2.3 Узагальнення достатніх умов коливання з основної теореми

Достатні умови коливання розв'язків, що наводилися досі,ґрунтуються на основній теоремі, тобто виконується умова (2.13). Цю ситуацію можна узагальнити.

Якщо в основній теоремі покласти $g(x) = [p(x)]^{\frac{1}{2}}$, то можна одержати наступне твердження:

Нехай

$$\lim_{x\to\infty} k(x) = \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{p(x)} \exp\left\{2\int_{x_0}^{x}\left[\int_{x_0}^{t}\left\langle\frac{q(x)}{p(S)} - \frac{1}{4}\frac{p'^2(S)}{p^2(S)}\right\rangle dS - a\right]dt\right\}dx = \infty$$

для кожної константи a . Тоді рівняння (1) є коливним.

Покладемо

$$F(x) = \int_{x_0}^{x}\left[\frac{q(t)}{p(t)} - \frac{1}{4}\frac{p'^2(t)}{4p^2(t)}\right]dt, G(x) = \frac{1}{x}\int_{x_0}^{x} F(t)dt \mid$$

$$M\left[C_n, X_n\right] = E\left\{x : x \geq X_n, G(x) \geq C_n\right\}$$

Тоді

$$K(\infty) = \int_{x_0}^{\infty}\frac{1}{p(x)}\exp\left\{2x\left[G(x) - a + a\frac{x_0}{x}\right]\right\}dx =$$

$$= \exp\left\{2ax_0\right\}\int_{x_0}^{\infty}\frac{1}{p(x)}\exp\{2x[G(x) - a]\}dx \geq$$

$$\geq \exp\left\{2ax_0\right\}\int_{x_n}^{\infty}\frac{1}{p(x)}\exp\{2x[G(x) - a]\}dx$$

Якщо $\inf\frac{1}{p(x)} \geq \varepsilon > 0$ при $x \in I$, то

$$K(\infty) \geq \exp\left\{2ax_0\right\}\varepsilon\int_{x_n}^{\infty}\exp\{2x[G(x) - a]\}dx \geq$$

$$\geq \varepsilon\exp\left\{2ax_0\right\}\exp\left\{NX_n\right\}m\left(M\left[N, X_n\right]\right)$$

при $N > 2a$.

Звідси випливає

Теорема 2.9 *Нехай* $p(x) \in C^1$, $\lim_{x\to\infty} \inf \frac{1}{p(x)} > 0$.

Якщо існують дві послідовності дійсних чисел $X_n \to \infty$,$C_n \to \infty$ *такі, що*

$$\exp\{C_n X_n\} m\left(M\left[C_n, X_n\right]\right) \to +\infty \tag{2.22}$$

тоді диференціальне рівняння (1) є коливним.
Цю теорему встановив C. R. Putnam [34] для випадку $p(x) \equiv 1$ *в наступному вигляді:*

Якщо $\lim_{x\to\infty} \sup G(x) = \infty$ та $\int_{x_0}^{x} q(t)dt > -\exp\{Cx\}$ для деякої сталої C, то диференціальне рівняння $y'' + q(x)y = 0$ є коливними.

Слід зауважити, що умова (2.22), якщо $m\left(M\left[C_n X_0\right]\right) = \infty$ для будь-якого C_n , особливо, коли

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{apr} G(x) = \infty \text{ або } \lim_{x\to\infty} G(x) = \infty$$

Звідси для випадку $p(x)$ випливає наступне твердження: Якщо

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{apr} \frac{1}{x} \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{t} q(S)dSdt = \infty$$

то диференціальне рівняння (2.18) є коливним.

Випадок, коли границя $\lim \int_{x_0}^{x} q(t)dt$ не існує, розглядався також P. Hartman.
Цікава достатня умова коливності розв'язків рівняння (2.18) випливає, наприклад, з теореми (11). A.Wintner доводив цю теорему за умови

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{t} q(S)dSdt = \infty[39]$$

E. Gagliardo розглядав загальний випадок та встановив наступний результат:

Якщо існує функція $f(x) > 0, f(x) \in C^2$, така що $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{f^2(x)} = \infty$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{t} Q(S)dSdt = \infty \tag{$*$}$$

то диференціальне рівняння (2.18) є коливним. Його доведення було невірним, оскільки (*) повинно бути замінено наступною умовою

Необхідною умовою неколивності розв'язків рівняння (2.18) є наступна умова

$$\lim_{T\to\infty} \inf T^{-1} \int_0^T \left\{ \int_0^t q(S)dS \right\} dt = -\infty,$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^T \left\{ \int_0^t q(S)dS \right\} dt = M < \infty$$

або виникає питання, чи, не є умова

$$\lim_{x\to\infty} \sup \frac{1}{x} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^t q(S)dSdt = \infty$$

або

$$\lim_{x\to\infty} \sup \int_{x_0}^x q(t)dt = \infty$$

достатньою коливності розв'язків рівняння (2.18).

Можна легко показати, що це не так. Приклад, що суперечить, вказав P. Hartman [11].

Нехай задано диференціальне рівняння Ріккаті

$$x' + x^2 + q(t) = 0$$

і $q(t)$ – неперервна в $\langle t_0, +\infty\rangle$. Після подвійного інтегрування від t_0 до t отримуємо

$$\frac{1}{t}\int_{x_0}^t X(S)dS + \frac{1}{t}\int_{t_0}^t \int_{t_0}^S x^2(u)dudS = \frac{1}{t}x\left(t_0\right)\left(t - t_0\right) - \frac{1}{t}\int_{t_0}^t \int_{t_0}^S q(u)dudS \tag{2.23}$$

Для того, щоб підібрати контрприклад, треба довести існування такої функції з неперервною похідною, що

$$\lim_{x\to\infty} \inf X(t) = -\infty$$

де $X(t)$ – є ліва частина рівності (2.23).

Тоді із (2.23)

$$\lim_{x\to\infty} sup\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} q(u)dudS=\infty$$

і диференціальне рівняння (2.18), в якому

$$q(t)=-x'(t)-x^2(t)$$

має коливні розв'язки

$$y(t)=\exp\left\{\int_{t_0}^{t} X(S)dS\right\}$$

Нехай $\{\varepsilon_n\}$ нескінченно мала послідовність додатних чисел,$\alpha=\frac{1}{l}>\varepsilon_n>0.$

Нехай функція $x(t)$ визначена на інтервалі $t_0=1-\alpha\le t<\infty$ таким чином

$$x(t)=\frac{1}{(n-t)\ln(n-t)} \text{ при } n-\alpha\le t\le n-\varepsilon_n$$

$$x(t)=0 \text{ при } n-\varepsilon_n\le t\le n+1-\alpha$$

$$n=1{,}2,\ldots$$

Тоді при $n-\varepsilon_n\le T\le n+1-\alpha$

$$T^{-1}\int_{t_0}^{t} x(t)dt=T^{-1}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-\alpha}^{k-\varepsilon_n}\frac{dt}{(k-t)\ln(k-t)}=-T^{-1}\sum_{k=1}^{n}\ln|\lg(k-t)|_{k-\alpha}^{k-\varepsilon_n}=$$

$$=-T^{-1}\sum_{k=1}^{n}\ln\ln\frac{1}{\varepsilon_k}$$

Із співвідношення $\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{t} x(S)dSdt=\int_{t_0}^{T}(T-\varepsilon)x^2(S)dS$

Маємо

$$I(T)=T^{-1}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{t} x^2(S)dSdt=\int_{t_0}^{T} x^2(S)dS-T^{-1}\int_{t_0}^{T} Sx^2(S)dS=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{k-\alpha}^{k-\varepsilon_n}\frac{dt}{(k-t)^2\ln^2(k-t)}-T^{-1}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-\alpha}^{k-\varepsilon_n}\frac{tdt}{(k-t)^2\ln^2(k-t)}$$

Якщо покласти $k-t=S$, отримаємо наступне

$$\mathcal{J}(t)=\sum_{k=1}^{n}\int_{\varepsilon_n}^{\alpha}\frac{dS}{S^2\ln^2 S}-T^{-1}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\ln S}\right]_{\varepsilon_k}^{\alpha}=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{T}\right)\int_{\varepsilon_k}^{\alpha}\frac{dS}{S^2\ln^2 S}+T^{-1}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\ln^{-1}\varepsilon_k\right)$$

Нехай тепер $T=n$.

На завершення $x(t)$

$$\left(X(n)=\frac{1}{n}\int_{t_0}^{n-\alpha}+\int_{n-\alpha}^{n-\varepsilon_n}+\int_{n-\varepsilon_n}^{n}\right)$$

доданок, що відповідає інтервалам $n-\alpha\le t\le n-\varepsilon_n$ дорівнює

$$\frac{1}{n}\left(1+\ln^{-1}\varepsilon_n-\ln\ln\frac{1}{\varepsilon_n}\right)$$

Для фіксованого n можна легко вибрати ε_n таке, щоб це значення було менше будь-якого наперед заданого числа. Доданок в $x(t)$ залежний від інтервалу $t_0\le t\le n-\alpha$ залежать тільки від ε_1,ε_2,$\ldots$,$\varepsilon_(n-1)$ та мають значення

$$-n^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\ln\frac{1}{\varepsilon_k}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\int_{\varepsilon_k}^{a}\frac{dS}{S^2\ln^2 S}+n^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\ln^{-1}\varepsilon_k\right)$$

Останній вираз проте більший, ніж

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\int_{\varepsilon_k}^{k}\frac{dS}{S^2\ln^2 S}-\ln\ln\frac{1}{\varepsilon_k}\right\}$$

так що він прямує $k\to+\infty$, оскільки

$$\int_{\varepsilon_k}^{\alpha}\frac{dS}{S^2\ln^2 S}\sim\frac{1}{\varepsilon_k\ln^2\varepsilon_k}\text{Та}\frac{1}{\varepsilon_k\ln^2\varepsilon_k}-\ln\ln\frac{1}{\varepsilon_n}\to\infty$$

при $\varepsilon_n\to\infty$.

Для кожної послідовності дійсних чисел C_n існує нескінченно мала послідовність ε_n,$\varepsilon_n \to 0$ така, що $X_n(t)$ C_n при $T = n$. Якщо покласти $C_n = -n$, то знайдеться нескінченно мала послідовність ε_n, така що $\lim_{t\to\infty} \inf X(t) = -\infty$

Зауваження 2.2 *Хоча функція $x(t)$ має зліченне число розривів,ясно як їх уникнути, щоб скоротити виконання умови*

$$\lim_{t\to\infty} \inf X(t) = \infty$$

Результати, які викладені, в попередніх абзацах, були виведені з умов (2.2) або (2.3). Це природна вимога, щоб будь-яка константа a $a \lim_{x\to\infty} H(x)$ або $\lim_{x\to\infty} K(x)$ становила ∞ . Це очевидно, що, знаючи константу, умова (2.2) або (2.3) може бути виражена у звичайній формі. Особливо простим випадком є $a = 0$.

ВИСНОВОК

В даній роботі були розглянуті основні положення теорії про коливність диференціального рівняння виду (1)

$$[p(x)y'] + q(x)y = 0 \tag{1}$$

Зібрані всі відомі нам теореми і властивості коливання диференціальних рівнянь вищих порядків.

В **першому розділі** дипломної роботи ми розглянули означення коливності, теорему Штурма - класична теорема, яка дає критерій коливності розв'язків деяких лінійних диференціальних рівнянь.

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dy}\right) + qy = 0 \tag{1.2}$$

допоміжні результати та теореми, за допомогою яких у **другому розділі** доведели одну з основних теорем про коливність диференціального рівняння (1), з якої випливають інші теореми та критерії.

Розглянули достатні умови коливання розв'язків, що виходять з основної теореми при виконанні додатніх умов та критерій порівняння для диференціального рівняння (1).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Barrett L.H. : Behavior of solutions of second order selfadjoint differential equations, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 247-251.
2. Bohl P. : Uber eine Differentialgleichung der Storungstheorie, I. Reine Angew. Math. 131 (1906), 268-321.
3. Bocher M. : Application of a method of d'alembert to the proof of Sturm's theorem of comprasion, Irans. Amer. Math. Soc. 1 (1900), 414-420.
4. Bocher M. : An elementary proof of a theorem of Sturm, Irans. Amer. Math. Soc. 2 (1901), 150-151..
5. Borivka O. : Theorie analytique et constructive des transformations differentielles liniaires du second ordre, Bull. Math. Soc Roum. Sci. 1 (49), No 2 (1957), 125-130.
6. Єльшин М.І. Метод фаз і класичний метод порівняння, Док. Акад. Наук СССР 68 (1949), 813-816.
7. Fite W.B. : Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations, irans. Amer. Math. Soc. 19 (1918), 341-352.
8. Gagliardo E. : Sui criteri di oszillatione per gli integrali di un equazione differenziale lineare del secondo ordine, Boll. Un. Mat. Ital. Ser lll, lX, (1954), 177-189.
9. Lanololino G. : Sul teorema di confront di sturn, Boll. Un. Mat. Ser lll, 2 (1947), 16-19.
10. Hartman P. : On linear second order differential equations with small conficients, Amer. I, Math. LXXlll (1951), 955-962.
11. Hartman P. : On non oscillatory linear differential equations of second order, Amer. I. Math. LXXlV (1952), 389-400.
12. Hartman P. : On the linear logarithmico-exponential differential equation of the second order. Amer. I. Math. LXX (1948), 764-779.
13. Hartman P. – Wintner A. : On non conservative linear oscillators of low frequency. Amer. I. Math. LXX (1948), 529-539.
14. Hille E. : Non-oscillation theorems, Irans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 234-252.

15. Ielcin M. : Sur le problem d'oscillation pour l'equation differentielle liniare du deunieme ordre, CR. (Doklady) Acad. Sci. URSS 18 (1938), 141-145.
16. Kamke E. : Uber sturms verglichsatze fur homogeme lineare differentialgleichungen zuciter ordnung und systeme von zwei differentialgleichungen erster ordnung. Math. Z. (1940), 788-795
17. Kamke E. : A new proof of sturm's comparison theorems, Amer. Math. Monthly 46 (1939), 417-421.
18. Kneser A. : Untersuchungen uber die wellen Nullstellen der integrale linearer differentialgleichungen Math. Am. 42 (1893), 409-435.
19. Кондратьєв В.Л. Достатні умови не коливних і коливних розвязків рівняння $y'' + p(x)y = 0$. Док. Акад. Наук СССР 113 (1957), 742-745.
20. Loutoch M. : Sur une theorie des criteres comparatifs sur l'oscillation des integrals de l'equation differentielle $u''^{=p(x)u}$, Spisy Prir. Fok. MU Brno, 365 (1955), 255-267.
21. Leighton W. : On self-adjoint differential equations od second order, I. London. Math. Soc. 27 (1952), 37-47.
22. Leighton W. : On self-adjoint differential equations od second order, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 35 (1949), 656-657.
23. Leighton W. : Principal quadratic functionals and self-adjoint second order differential equations, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 35 (1949), 192-193.
24. Leighton W. : The detection of the oscillation of solutions of a second order linear differential equation, Duke Math. I. 17 (1950), 57-62.
25. Mikusinski J.G. : On Fite's oscillation theorems, colloq. Math. ll (1949), 34-39.
26. Moore R. : The behavior of solutions of a linear differential equation of second order, Pacific I. Math. V (1955), 125-145.
27. Nehari Z. : Oscillation criteria for second order linear differential equations, Irans, Amer. Math. Soc. 85 (1957), 428-445.
28. Oakley C.O. : A note on the metods of sturm, Anm of Math. Ser lll, 31 (1930), 660-662.
29. Olech C. : Opial Z, Wazewski T. Sutr le problemme d'oscilattion des integrals de lequation $y'' + g(t)y = 0$ Bull. Acad. Polon. Sci. cl lll, V (1957), 621-626.

30. . Петропавловськая Р.В. Про коливання розв'язків рівняння $u'' + p(x)y = 0$ кл. Акад. Наук СССР 105 (1955), 29-31.
31. Potter R.L. : On self-adjoint differential equations of seconf order, Pacific I. Math. 3 (1953),467-491.
32. Prufer H. : Neue herleitung der sturm-liourilleshen reihenentuicklung stetiger Funktionen, Math. Am. 95 (1926), 499-518.
33. Putnam C.R. : Note on some oscillation criteria, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 950-952.
34. Putman C.R. : An oscillation criteria involving a minimum principle, duke. Math. I 16 (1949), 633-636
35. Rab M. : Poznamka k otazce o oscilacninch clastnostech reseni diferencialme revnice $y'' + A(x)y = 0$ sopis pro pest. Mat. 82 (1957), 342-348.
36. Reid W.T. : A comparison theorem for self-adjoint differential equations of second order, Am of Math. 65 (1957), 197-202
37. Собол И.М. Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку за допомогою помірне координат, Мат. Сб. 28 (70), (1951), 707-714.