

УДК 511.33

Г. С. Белозеров, П. Д. Варбанец

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМОЙ

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару
“Аналітична теорія чисел” ОНУ 13.09.2002 р.

Доведено, що остатній член $R(a, b, k; N)$ асимптотичної формули для кількості розв'язків $A(a, b, k; N)$ диофантового рівняння $a(x_1^2 + x_2^2) - b(x_3^2 + x_4^2) = k$ при умові, що $x_1^2 + x_2^2 \leq N$, $N \rightarrow \infty$, задовольняє нерівності $\frac{1}{X} \int_0^X R^2(a, b, k; x) dx << X^{(4/3)+\varepsilon} ab^{-5/3}$.

Доказано, что остаточный член $R(a, b, k; N)$ асимптотической формулы для числа решений $A(a, b, k; N)$ диофантова уравнения $a(x_1^2 + x_2^2) - b(x_3^2 + x_4^2) = k$ при условии, что $x_1^2 + x_2^2 \leq N$, $N \rightarrow \infty$, удовлетворяет неравенству $\frac{1}{X} \int_0^X R^2(a, b, k; x) dx << X^{(4/3)+\varepsilon} ab^{-5/3}$.

It is shown that the error term $R(a, b, k; N)$ of the asymptotic formula for the number of solutions $A(a, b, k; N)$ of the diophantine equation $a(x_1^2 + x_2^2) - b(x_3^2 + x_4^2) = k$ for the condition $x_1^2 + x_2^2 \leq N$, $N \rightarrow \infty$ satisfy on the inequality $\frac{1}{X} \int_0^X R^2(a, b, k; x) dx << X^{(4/3)+\varepsilon} ab^{-5/3}$.

Введение. Задачи о представлении натуральных чисел квадратичной формой $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{Z}[x_1, \dots, x_n]$ еще в XVIII в. рассматривали Эйлер, Лагранж, Лежандр, а позднее и Гаусс. Но только с привлечением аналитических средств удалось построить асимптотические формулы для количества таких представлений. В работах Ingham [1], Estermann [2], Исмоилова [3], Heath-Brown [4], Deshouillers-Iwaniec [5] рассматривалось диофантово уравнение

$$xy - uv = 1 \quad (1)$$

под условием $xy \leq N$.

Эта задача эквивалентна задаче об оценке суммы

$$\sum_{n \leq N} \tau(n) \tau(n+1), \quad (2)$$

где $\tau(n)$ – число натуральных делителей n .

Motohashi [6] доказал асимптотическую формулу

$$\sum_{n \leq X} \tau(n) \tau(n+h) = X \sum_{i=0}^2 (\log x)^i \sum_{j=0}^2 c_{ij} \sum_{d|h} (\log d)^i / d + O(x^{(2/3)+\varepsilon}), \quad (3)$$

равномерную для $1 \leq h \leq x^{26/27}$ (здесь c_{ij} – вычислимые константы, а $\varepsilon > 0$ – произвольно малое; постоянная в символе "O" зависит только от ε).

В 1981 г. Chalk [7] изучал распределение решений диофантова уравнения

$$a(x^2 + y^2) - b(u^2 + v^2) = k, \quad x^2 + y^2 \leq N; \quad a, b \in \mathbf{N}. \quad (4)$$

Число решений $A(a, b, k; N)$ уравнения (4) определяется следующей суммой

$$A(a, b, k; N) = \sum_{k/a < n \leq N, an \equiv k \pmod{b}} r(n) r((an - k)/b), \quad \text{где } r(n) = \sum_{n=n_1^2 + n_2^2} 1.$$

В 1991 г. Белозеров [8] показал, что при условиях

$$(a, k) = (b, k) = (a, k) = (2, b) = (2, k) = 1 \quad \text{и} \quad a > b, \quad k = o(aN), \quad (ab)^{3+\varepsilon} \ll N$$

справедлива асимптотическая формула при $N \rightarrow \infty$

$$A(a, b, k; N) = E(a, b, k) \cdot (N - k/a) + R(a, b, k; N), \quad (5)$$

где $R(a, b, k; N) = O(N^{(5/6)+\varepsilon} (a/b)^{1/2})$.

Заметим, что Bantle [9] в специальном случае

$$\sum_{n \leq N} r(n) r(n+1)$$

получил остаточный член $O(N^{(2/3)+\varepsilon})$.

К сожалению, методы спектральной теории автоморфных форм, которые использовались в работах [5], [6], [9], на общий случай (задача (4)) нам перенести не удалось.

Целью настоящей статьи является изучение среднего квадрата остаточного члена в асимптотической формуле (5):

$$\int_{k/a}^X [A(a, b, k; x) - E(a, b, k) \cdot (x - k/a)]^2 dx. \quad (6)$$

Полученный ниже результат позволяет утверждать, что для почти всех $N \leq X$ остаточный член в (5) есть

$$O(N^{(2/3)+\varepsilon} (a^{1/2} / b^{5/6})^{1+\varepsilon}).$$

1. Вспомогательные утверждения. Пусть $\rho(a, l, q)$ обозначает число решений сравнения $a(x^2 + y^2) \equiv l \pmod{q}$.

Лемма 1. Пусть $(a, q) = 1$. Тогда

$$\rho(a, l, q) = E_1(l, q) \cdot q \prod_{p^\alpha \parallel q} (1 - \chi_4(p^{\gamma+1})/p) \cdot (1 - \chi_4(p^{\alpha-\gamma}) + (1 - 1/p) \sum_{\beta=\alpha-\gamma}^{\alpha-1} \chi_4(p^{\alpha-\beta})),$$

где χ_4 — неглавный характер $\pmod{4}$,

$$E_1(l, q) = \begin{cases} 1, & \text{если } (q, 2) = 1, \\ 1, & \text{если } q \equiv 2 \pmod{4}, \\ 1, & \text{если } q \equiv 0 \pmod{4}, \gamma_0 > \alpha - 2, \\ 2, & \text{если } q \equiv 0 \pmod{4}, \gamma_0 \leq \alpha - 2, l \cdot 2^{-\gamma_0} \equiv a \pmod{4}, \\ 0, & \text{если } q \equiv 0 \pmod{4}, \gamma_0 \leq \alpha - 2, l \cdot 2^{-\gamma_0} \equiv a + 2 \pmod{4}, \end{cases}$$

и $p^\gamma = (l, p^\alpha)$ (p — простое нечетное), $2^{\gamma_0} = (l, 2^\alpha)$, $2^\alpha \parallel q$.

Следствие. Если $(l, q) = 1$, то

$$\rho(a, l, q) = E_1(l, q) \cdot q \prod_{p^\alpha \parallel q} (1 - \chi_4(p) / p).$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из мультипликативности $\rho(a, l, q)$ по q и из представления

$$\rho(a, l, p^\alpha) = \sum_{x, y=0}^{p^\alpha-1} (1/p^\alpha) \sum_{t=0}^{p^\alpha-1} \exp(2\pi i(a(x^2 + y^2) - l)t / p^\alpha),$$

с последующим вычислением возникающих сумм Гаусса (подробнее см. [8]).

Лемма 2. Равномерно по $q \ll x^{1-\varepsilon}$

$$B(a, l, q; x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ an \equiv 1(q)}} r(n) = \pi x q^{-2} \rho(a, l, q) + x^{1/2} q^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega(n, l, q) \cdot n^{-1/2} J_1(2\pi q^{-1}(nx)^{1/2}) + \\ + O(x^\varepsilon). \quad (7)$$

$$\text{Здесь } \Omega(n, l, q) = \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ n_1^2 + n_2^2 = n \\ a(l_1^2 + l_2^2) \equiv l(q)}} \sum_{l_1, l_2(q)} \exp(2\pi i(n_1 l_1 + n_2 l_2) / q),$$

$J_1(z)$ – функция Бесселя первого рода индекса 1.

Кроме того, для $M \gg x / q^2$

$$B(a, l, q; x) = \pi x q^{-2} \rho(a, l, q) + x^{1/2} q^{-1} \sum_{n \leq M} \frac{\Omega(n, l, q)}{n^{1/2}} \cdot J_1(2\pi q^{-1}(nx)^{1/2}) + O(x^\varepsilon) + \\ + O(x^{(1/2)+\varepsilon} \cdot M^{-1/2}). \quad (8)$$

Доказательство. Это утверждение можно получить аналогично доказательству леммы 5 из [10].

Лемма 3. Пусть $a, b, k \in \mathbb{N}$, причем $b \equiv k \equiv 1 \pmod{2}$ и $(a, b) = (b, k) = (a, k) = 1$, $a > b$. Тогда для $M \geq N^{1/2}$

$$A(a, b, k; N) = E(a, b, k)(N - k / a) + S_1(N) - S_2(N) + S_3(N) + \\ + O((a/b)^{1/2} \tau(b) N^{1+\varepsilon} M^{-1/2}) + O(N^{1/2} (k/a)^\varepsilon) + O(ka^{-1} b^{-1} \log N_1),$$

где

$$S_1(N) = N^{1/2} b^{-1} \sum_{n \leq M} n^{-1/2} \sum_{\substack{d \leq N_1^{1/2} \\ (d, a)=1}} \frac{\Omega(n, k, bd)}{d} \chi_4(d) J_1(2\pi b^{-1} d^{-1} (nN)^{1/2}), \\ S_2(N) = N^{1/2} (4b)^{-1} \sum_{n \leq M} n^{-1/2} \sum_{\substack{t \leq N_1^{1/2} \\ (t, a)=1}} \frac{\Omega(n, k + bt, 4bt) - \Omega(n, k - bt, 4bt)}{t} J_1(2\pi (nN_2)^{1/2} (4bt)) \\ S_3(N) = N_1^{1/4} (4(ab)^{1/2})^{-1} \sum_{n \leq M} n^{-1/2} \sum_{\substack{t \leq N_1^{1/2} \\ (t, a)=1}} \frac{\Omega(n, k + bt, 4bt) - \Omega(n, k - bt, 4bt)}{t^{1/2}} \cdot \\ \cdot J_1(2\pi (nN_2)^{1/2} b^{-1} t^{-1/2}),$$

$N_1 = (aN - k)b^{-1}$, $N_2 = ba^{-1}N_1^{1/2}$, $E(a, b, k) = 4\pi b^{-1}L(1, \chi_4)L(2, \chi_{04})^{-1}E(\chi_4)$,
 где χ_{04} – главный характер $\bmod 4$,
 $E(\chi_4)$ – вычисляемая константа,
 $L(s, \chi)$ – L -функция Дирихле характера χ .

Доказательство. Воспользуемся соотношением $r(n) = 4 \sum_{d|n} \chi_4(d)$. Тогда

$$\begin{aligned} A(a, b, k; N) &= \sum_{\substack{k/a \leq n \leq N \\ an \equiv k(b)}} r(n) r((an - k)b^{-1}) = 4 \sum_{\substack{k/a \leq n \leq N \\ an \equiv k(b)}} r(n) \sum_{d|(an-k)b^{-1}} \chi_4(d) = \\ &= 4 \sum_{\substack{k/a \leq n \leq N \\ an \equiv k(b)}} r(n) \left(\sum_{\substack{d|(an-k)b^{-1} \\ d \leq N_1^{1/2}}} \chi_4(d) + \sum_{\substack{d|(an-k)b^{-1} \\ d > N_1^{1/2}}} \chi_4(d) \right) = 4 \sum_1 + 4 \sum_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее,

$$\sum_1 = \sum_{d \leq N_1^{1/2}} \chi_4(d) \left(\sum_{\substack{an \equiv k(bd) \\ n \leq N}} r(n) - \sum_{\substack{an \equiv k(bd) \\ n \leq k/a}} r(n) \right). \quad (10)$$

Теперь, применяя леммы 2 и 1, получаем

$$4 \sum_1 = 4\pi(N - k/a)b^{-2} \sum_{\substack{d \leq N_1^{1/2} \\ (d, a)=1}} \chi_4(d) \rho(a, k, bd) d^{-2} + S_1(N) + O((a/b)^{1/2} N^{1+\varepsilon} M^{-1/2}). \quad (11)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \sum_2 &= \sum_{\substack{an \equiv k(b) \\ k/a \leq n \leq N}} r(n) \sum_{\substack{dt = (an-k)b^{-1} \\ d > N_1^{1/2}}} \chi_4(d) = \sum_{t \leq N_1^{1/2}} \sum_{\substack{an \equiv k(bt) \\ N_2 t + k/a < n \leq N}} r(n) \chi_4((an - k)b^{-1} t^{-1}) = \\ &= \sum_{t \leq N_1^{1/2}} \left\{ \sum_{\substack{an \equiv k(bt) \\ (an-k)b^{-1} t^{-1} \equiv 1(4) \\ N_2 t + k/a < n \leq N}} r(n) - \sum_{\substack{an \equiv k(bt) \\ (an-k)b^{-1} t^{-1} \equiv -1(4) \\ N_2 t + k/a < n \leq N}} r(n) \right\} = \\ &= \sum_{\substack{t \leq N_1^{1/2} \\ (t, a)=1}} \left\{ \left(\sum_{n \leq N} r(n) - \sum_{an \equiv k - bt(4bt)} r(n) \right) - \left(\sum_{n \leq N_2 t + k/a} r(n) - \sum_{an \equiv k - bt(4bt)} r(n) \right) \right\} = \\ &\sum_{\substack{t \leq N_1^{1/2} \\ (t, a)=1}} \{ (B(a, k + bt, 4bt, N) - B(a, k - bt, 4bt, N)) - (B(a, k + bt, 4bt, N_2 t) - B(a, k - bt, 4bt, N_2 t)) \} + \\ &\quad + O(N_1^{1/2} (k/a)^\varepsilon) + O(ka^{-1} b^{-1} \log N_1). \end{aligned}$$

Здесь воспользовались обозначениями леммы 2 и тривиально оценили суммы

$$\sum_{\substack{an=k \pm bt(4bt) \\ N_2 t < n \leq N_2 t + k/a}} r(n) .$$

Применяя лемму 2 и формулу Перрона для оценки сумм

$$\sum_{\substack{d \leq N_1^{1/2} \\ (d,a)=1}} \chi_4(d) \rho(a, k, bd) d^{-2}, \quad \sum_{\substack{t \leq N_1^{1/2} \\ (t,a)=1}} (\rho(a, k + bt, 4bt) - \rho(a, k - bt, 4bt)) t^{-2},$$

получаем доказательство леммы (подробнее см. [8]).

Лемма 4. Пусть $b_1, \dots, b_M; c_1, \dots, c_M$ – различные вещественные числа. Тогда для любых $a_1, \dots, a_M \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{a_r a_s \exp(i(b_r - c_s))}{(rs)^{1/4} (\sqrt{r} - \sqrt{s})} \right| < \sum_{r=1}^M a_r^2 .$$

Эта лемма есть следствие общего результата Montgomery – Vaughan [11].

2. Основной результат. Теорема. Пусть

$$(a, b) = (a, k) = (b, k) = 1, \quad b \equiv 1 \pmod{2}, \quad a > b .$$

Тогда справедлива асимптотическая оценка при $X \rightarrow \infty$.

$$\frac{1}{X} \int_1^X \left(A(a, b, k; x) - E(a, b, k) \cdot \left(x - \frac{k}{a} \right) \right)^2 dx < \frac{a}{b^{5/3}} X^{(4/3)+\varepsilon} + \left(\frac{k}{ab} \right)^2 \log^2 X .$$

Доказательство. Из леммы 3, в силу неравенства Коши, получаем

$$\begin{aligned} \int_{k/a}^X \left(A(a, b, k; x) - E(a, b, k) \cdot \left(x - \frac{k}{a} \right) \right)^2 dx &< \sum_{i=1}^3 \int_{k/a}^X |S_i(x)|^2 dx + O\left(\frac{a}{b} \tau^2(b) \frac{X^{3+2\varepsilon}}{M} \right) + \\ &+ O\left(X^2 \left(\frac{k}{a} \right)^{2\varepsilon} \right) + O\left(\left(\frac{k}{ab} \right)^2 X \log^2 X \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Интегралы $\int_{k/a}^X |S_i(x)|^2 dx$, $(i = 1, 2, 3)$ рассматриваются по одинаковой схеме. Поэтому

найдем оценку только первого интеграла:

$$\begin{aligned} \int_{k/a}^X |S_1(x)|^2 dx &= \frac{1}{b^2} \sum_{n_1, n_2 \leq M} \frac{1}{(n_1 n_2)^{1/2}} \int_{k/a}^X x \sum_{\substack{d_1, d_2 \leq \sqrt{\frac{ax-k}{b}}}} \frac{\Omega(n_1, k, bd_1) \Omega(n_2, k, bd_2)}{d_1 d_2} \chi_4(d_1 d_2) \cdot \\ &\cdot J_1\left(\frac{2\pi\sqrt{n_1 x}}{bd_1} \right) J_1\left(\frac{2\pi\sqrt{n_2 x}}{bd_2} \right) dx \end{aligned} \quad (13)$$

Учтем, что

$$J_1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot z^{-1/2} \cdot \cos\left(z - \frac{3\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right).$$

Поэтому на основании леммы 4 заключаем, что основной вклад в оценку

$$\int_{k/a}^X |S_1(x)|^2 dx$$

дает интеграл

$$I = \frac{1}{b} \sum_{n_1, n_2 \leq M} \frac{1}{(n_1 n_2)^{3/4}} \int_{k/a}^X \sqrt{x} \sum_{\substack{d_1, d_2 \leq \sqrt{\frac{ax-k}{b}} \\ n_1 d_2^2 = n_2 d_1^2 \\ (d_1 d_2, a) = 1}} \frac{|\Omega(n_1, k, d_1) \Omega(n_2, k, d_2)|}{(d_1 d_2)^{1/2}} dx.$$

В работе [10] показано, что $|\Omega(n, k, d)| = O(d^{1/2}(n, d)^{1/2} \tau(d))$. Поэтому имеем

$$I \ll \frac{1}{b} \sum_{n_1, n_2 \leq M} \frac{1}{(n_1 n_2)^{3/4}} \int_{k/a}^X \sqrt{x} \sum_{\substack{d_1, d_2 \leq \sqrt{\frac{ax-k}{b}} \\ n_1 d_2^2 = n_2 d_1^2}} (n_1, d_1)^{1/2} (n_2, d_2)^{1/2} \tau(d_1) \tau(d_2) dx.$$

Заметим, что фиксируя n_1, n_2, d_1 , имеем не более одного значения d_2 , удовлетворяющего равенству $n_1 d_2^2 = n_2 d_1^2$. И тогда получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1, n_2 \leq M} \frac{1}{(n_1 n_2)^{3/4}} \sum_{\substack{d_1, d_2 \leq \sqrt{\frac{ax-k}{b}} \\ n_1 d_2^2 = n_2 d_1^2}} (n_1, d_1)^{1/2} (n_2, d_2)^{1/2} \tau(d_1) \tau(d_2) \ll \\ & \ll \sum_{n_1, n_2 \leq M} \sum_{\substack{t_1 | n_1 \\ t_2 | n_2}} \frac{1}{(n_1 n_2)^{3/4}} \cdot \sum_{\substack{1 \leq d_i \leq \left(\frac{ax}{b}\right)^{1/2} \\ i=1,2}} \tau(d_1 t_1) \tau(d_2 t_2) (t_1, t_2)^{1/2} \ll \\ & \ll \left(\frac{ax}{b}\right)^{2\varepsilon} \sum_{n_1, n_2 \leq M} \frac{\tau(n_1) \tau(n_2)}{(n_1 n_2)^{3/4}} \cdot \left(\frac{ax}{b}\right)^{1/2} \ll M^{1/2} \left(\frac{ax}{b}\right)^{(1/2)+2\varepsilon} \log^2 M. \end{aligned}$$

Отсюда

$$I \ll \frac{1}{b} \left(\frac{a}{b}\right)^{1+2\varepsilon} M^{1/2} X^2 \log^2 M.$$

Поэтому

$$\frac{1}{X} \int_{k/a}^X |S_1(x)|^2 dx \ll \frac{a^{1+2\varepsilon}}{b^2} M^{1/2} X \log^2 M.$$

Такую же оценку получаем и для

$$\frac{1}{X} \int_{k/a}^X |S_i(x)|^2 dx, \quad (i = 2, 3).$$

Из (12)–(14) следует

$$\int_{k/a}^X \left(A(a, b, k; x) - E(a, b, k) \left(x - \frac{k}{a} \right) \right)^2 dx < \frac{a}{b} \tau^2(b) \frac{X^{3+2\varepsilon}}{M} + X^2 \left(\frac{k}{a} \right)^{2\varepsilon} + \left(\frac{k}{ab} \right)^2 X \log^2 X + \frac{a^{1+2\varepsilon}}{b^2} M^{1/2} X^2 \log^2 M.$$

Выбирая $M = (bX)^{2/3}$, получим утверждение теоремы.

Следствие. Пусть $k \ll N^{2/3} a^{3/2} b^{1/6}$. Тогда при $a^{3/2} b^{1/2} \ll N$ для почти всех $N \leq X$ и любого $\varepsilon > 0$ справедлива асимптотическая формула

$$A(a, b, k; N) = E(a, b, k) \cdot \left(N - \frac{k}{a} \right) + O \left(N^{(2/3)+\varepsilon} \left(a^{1/2} b^{-5/6} \right)^{1+\varepsilon} \right)$$

с постоянной в символе "O", зависящей только от ε .

В заключение заметим, что оценки среднего квадрата ошибки в асимптотических формулах позволяют высказывать гипотезы о поведении остаточных членов в индивидуальных аддитивных задачах. Так, учитывая Ω -результат Y. Motohashi [6] в задаче о числе решений уравнения

$$u_1 \cdot u_2 - v_1 \cdot v_2 = 1,$$

можно предположить, что в формуле (5) при $a = b = k = 1$ остаточный член $R(1,1,1; N)$ не может быть лучше $O(x^{1/2})$.

1. **Ingham A. E.** Some asymptotic formulae in the theory of numbers // J. Lond. Math. Soc. – 1927. – 2. – P. 202–208.
2. **Estermann T.** Über die Darstellungen einer Zahl als Differenz von zwei Producten // J. Reine Angew. Math. – 1931. – 164. – S. 173–182.
3. **Исмоилов Д.** Асимптотическая формула в теории чисел // ДАН Тадж.ССР. – 1982. – 25. – С. 320–324.
4. **Heath-Brown D. R.** The fourth power moment of the Riemann zeta-function // Proc. Lond. Math. Soc. – 1979. – (3) 38. – P. 385–422.
5. **Deshouillers J.-M., Iwaniec H.** An additive divisor problems // Proc. Lond. Math. Soc. – 1982. – 2 (26). – P. 1–14.
6. **Motohashi Y.** The binary additive divisor problem // Ann. Sci. Ecole Normale Supérieure. – 1994. – (4) 27. – P. 529–572.
7. **Chalk J. H. H.** An Asymptotic Formulae for the Number of Solutions of a Quadratic Diophantine Equation // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. – 1981. – VIII, № 27. – P. 215–220.
8. **Белозеров Г. С.** Асимптотические формулы для числа решений некоторых диофантовых уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. – Одесса, 1991. – 159 с.
9. **Bantle G.** An asymptotic formula for B-twins // Acta Arithm. – 1986. – XLII, № 4. – P. 297–312.
10. **Варбанец П. Д.** Проблема круга в арифметической прогрессии // Мат. заметки. – 1970. – Т. 8, № 6. – С. 787–798.
11. **Montgomery H., Vaughan R.** Hilbert's inequality // J. Lon. Math. Soc. – 1974. – (2) 8. – P. 95–113

Получено 20.09.2002 г.