

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»
«Динамічна задача для пружного циліндра»
«Dynamic problem for an elastic cylinder»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»

Радченко Тимур Богданович

Керівник _____
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент _____
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від _____ р.
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____
протокол № ____ від _____ р.
Оцінка _____ / ____ / ____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)
Голова ЕК

(підпис) _____
(прізвище, ім'я)

(підпис) _____
(прізвище, ім'я)

Одеса – 2023

ЗМІСТ

| | |
|---|----|
| ВСТУП | 3 |
| РОЗДІЛ 1 | 5 |
| Стаціонарна задача кручення для пружного товстостінного циліндру | 5 |
| 1.1 Постановка задачі. | 5 |
| 1.2 Зведення крайової задачі до одновимірної..... | 6 |
| 1.3 Розв’язок отриманої одновимірної задачі. | 7 |
| 1.4 Розв’язок вихідної задачі. Чисельні результати. | 8 |
| РОЗДІЛ 2 | 10 |
| Стаціонарна задача кручення для пружного шару з циліндричним отвором..... | 10 |
| 2.1 Постановка задачі. | 10 |
| 2.2 Зведення крайової задачі до одновимірної..... | 11 |
| 2.3 Розв’язок отриманої одновимірної задачі. | 12 |
| 2.4 Розв’язок вихідної задачі. Чисельні результати. | 12 |
| РОЗДІЛ 3 | 15 |
| Динамічна задача кручення для пружного шару з циліндричним отвором | 15 |
| 3.1 Постановка задачі. | 15 |
| 3.2 Зведення крайової задачі до двовимірної..... | 16 |
| 3.3 Зведення крайової задачі до одновимірної..... | 17 |
| 3.4 Розв’язок отриманої одновимірної задачі. | 18 |
| 3.5 Розв’язок вихідної задачі. Чисельні результати. | 19 |
| ВИСНОВКИ..... | 25 |
| СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ..... | 26 |
| Додаток А..... | 28 |
| Додаток Б | 30 |
| Додаток В..... | 32 |

ВСТУП

Широко застосовувані в інженерії різновиди задачі кручення для пружного циліндру або шару та аналогічні проблеми привертають значну увагу у наукових дослідженнях та створюють велику кількість праць, присвячених цій темі. Одним із прикладів інженерного застосування є процес вкручення жорсткого свердла у пружний об'єкт, такий як товста пластина або шар. Складність цих задач значною мірою визначається встановленими граничними умовами. Традиційно, для розв'язання використовується підхід, який полягає у зведенні їх до крайових задач, базованих на функціях напруження чи переміщення [16]. Однак, у цій роботі був обраний метод, запропонований Г. Я. Поповим [14], який передбачає застосування інтегрального перетворення безпосередньо до рівнянь Ламе, в нашому випадку, до рівняння, що описує кутове переміщення u_φ , та до відповідних крайових умов задачі. Такий метод дозволяє значно зменшити обсяг розрахунків і ефективно визначати переміщення та напруження. Варто відзначити, що інтегральне перетворення, зокрема, перетворення Вебера, часто використовується для числового розв'язку для різних типів навантажень у циліндричних включеннях пружного півпростору [17]. В деяких роботах, як наприклад у [6], враховується вплив власної ваги шару. У цьому дослідженні вивчаються як стаціонарні, так і динамічні задачі теорії пружності, при цьому, спираючись на літературу, велика кількість наукових робіт приділена динамічним аспектам [3], які відіграють важливу роль у практичних застосуваннях [13,15]. Зокрема, у [12] було розроблено точний розв'язок нестационарної задачі для пружного шару з циліндричним жорстким включенням, де на циліндричній поверхні задані умови гладкого контакту, а на одній із граней шару діє нормальне вісесиметричне нестационарне стискаюче навантаження, причому інша грань умовно зчіплена з абсолютно жорсткою основою або опирається на гладку основу без тертя.

Ця робота є продовженням моїх попередніх досліджень і включає в себе деякі аспекти з попередньої роботи, розширюючи їх за допомогою нових методів

та підходів. В цьому дослідженні особливий акцент робиться на розгляді динамічної задачі кручення, що являє собою новий напрямок у порівнянні зі стаціонарними задачами, розглянутими раніше.

Об'єктом дослідження першої та другої частин задачі є порожній товстостінний циліндр та нескінченний пружний шар з циліндричним отвором, де вивчаються особливості їх напружено-деформованого стану під впливом кручення. В результаті, вдалося розробити точний розв'язок для обох сценаріїв: з одного боку, для шару з циліндричним отвором, де дотичне стаціонарне навантаження, прикладене до бічної поверхні отвору, викликає кручення точок шару, а з іншого боку, для порожнього товстостінного циліндра, де аналізується виникаючі переміщення та напруження під час кручення. Слід зазначити, що перші дві частини цієї роботи складають попередні дослідження, а третя частина є їх фактичним продовженням.

У фокусі дослідження третьої частини знаходиться динамічна задача кручення пружного шару з циліндричним отвором. Основним об'єктом аналізу є шар, що піддається впливу дотичного нестаціонарного навантаження, прикладеного до бічної поверхні його отвору. Центральним предметом дослідження є вивчення характеристик напружено-деформованого стану цього шару в умовах динамічного навантаження. Для розв'язання цієї задачі використовується метод інтегральних перетворень, який дозволив побудувати переміщення та амплітуди коливань точок шару під час кручення. Такий підхід забезпечує точне визначення відповіді матеріалу на змінне у часі навантаження, розкриваючи нові перспективи для розуміння поведінки пружних матеріалів під дією динамічних сил.

РОЗДІЛ 1

Стаціонарна задача кручення для пружного товстостінного циліндру

1.1 Постановка задачі. Розглядається пружний циліндр, описаний в циліндричній системі координат за допомогою наступних співвідношень $a_0 \leq r \leq a_1$, $-\pi \leq \varphi < \pi$, $0 \leq z \leq h$. Нижня частина циліндра зафіксована, тоді як верхня залишається без напружень. Вісесиметричне стаціонарне дотичне навантаження прикладається до внутрішньої бічної поверхні циліндра, а його зовнішня бічна поверхня не піддається жодним навантаженням. **Об'єкт дослідження:** порожній пружний циліндр. **Предмет досліджень:** особливості його напружено-деформованого стану за дії кручення внутрішньої бічної поверхні. **Метод розв'язання:** скінчене синус інтегральне перетворення Фур'є.

В рамках даної постановки задачі, єдиним ненульовим переміщенням є $u_\varphi(r, z)$, що має відповідати рівнянню Ламе

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} u_\varphi + r \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} = 0, \quad a_0 < r < a_1, \quad 0 < z < h.$$

Граничні умови для цієї задачі представлені у вигляді:

$$u_\varphi(r, 0) = 0, \quad \tau_{z\varphi}(r, h) = 0, \quad \tau_{r\varphi}(a_0, z) = -p(z), \quad \tau_{r\varphi}(a_1, z) = 0,$$

де $p(z)$ – інтенсивність діючого стаціонарного навантаження.

Перейдемо до безрозмірних координат $\rho = r a_1^{-1}$, $\zeta = z h^{-1}$ та позначимо $u(\rho, \zeta) = u_\varphi(\rho a_1, \zeta h)$. Задача полягає в знаходженні розв'язку рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho} u + \alpha^2 \rho \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (1.1)$$

$$b < \rho < 1, \quad 0 < \zeta < 1, \quad \alpha = a_1 h^{-1}, \quad b = \frac{a_0}{a_1} < 1$$

що відповідає заданим граничним умовам:

$$u(\rho, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} = 0, \quad (1.2)$$

$$\left. \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - u \right) \right|_{\rho=1} = 0, \quad G \left. \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} u \right) \right|_{\rho=b} = a_1 P(\zeta), \quad (1.3)$$

де G – модуль зсуву, а $P(\zeta) = -p(h\zeta)$.

1.2 Зведення крайової задачі до одновимірної. Щоб звести вказану крайову задачу до одновимірної, використаємо скінченне синус інтегральне перетворення Фур'є по змінній ζ [7]

$$u_k(\rho) = \int_0^1 u(\rho, \zeta) \sin \beta_k \zeta d\zeta, \quad (1.4)$$

$$u(\rho, \zeta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\rho) \sin \beta_k \zeta, \quad \beta_k = \frac{\pi}{2} (2k - 1).$$

Застосовуючи це перетворення до рівняння (1.1) та умови (1.3), водночас автоматично задовольняючи граничні умови (1.2), отримуємо одновимірну крайову задачу

$$(\rho u'_k)' - \left(\frac{1}{\rho} + \alpha^2 \beta_k^2 \rho \right) u_k = 0, \quad b < \rho < 1, \quad (1.5)$$

$$[u'_k(1) - u_k(1)] = 0, \quad (1.6)$$

$$G \left[u'_k(\rho) - \frac{1}{\rho} u_k(\rho) \right] \Big|_{\rho=b} = a_1 P_k, \quad (1.7)$$

де $P_k = \int_0^1 P(\zeta) \sin \beta_k \zeta d\zeta$.

1.3 Розв'язок отриманої одновимірної задачі. Оскільки рівняння (1.5) діє в межах скінченного інтервалу $b < \rho < 1$, для визначення його загального розв'язку потрібно врахувати як спадаючі, так і зростаючі розв'язки. Таким чином, загальний розв'язок рівняння (1.5) може бути представлений наступним чином:

$$u_k(\rho) = C_{1k} I_1(\alpha \beta_k \rho) + C_{2k} K_1(\alpha \beta_k \rho),$$

де $I_1(x)$ та $K_1(x)$ модифіковані функції Бесселя 1-го та 2-го роду відповідно.

Знайдемо невідомі постійні C_{1k} та C_{2k} з граничних умов (1.6) та (1.7).

$$C_{1k} = \frac{b a_1 P_k (-2K_1(\alpha \beta_k) - \alpha K_0(\alpha \beta_k) \beta_k)}{G \Delta_k},$$

$$C_{2k} = \frac{b a_1 P_k (2I_1(\alpha \beta_k) - \alpha I_0(\alpha \beta_k) \beta_k)}{G \Delta_k},$$

де $\Delta_k = (2I_1(b\alpha\beta_k) - b\alpha I_0(b\alpha\beta_k)\beta_k)(2K_1(\alpha\beta_k) + \alpha K_0(\alpha\beta_k)\beta_k) + (-2I_1(\alpha\beta_k) + \alpha I_0(\alpha\beta_k)\beta_k)(2K_1(b\alpha\beta_k) + b\alpha K_0(b\alpha\beta_k)\beta_k)$.

В результаті, можемо констатувати, що розв'язок одновимірної задачі, заданої умовами (1.5 – 1.7), приймає таку форму:

$$u_k(\rho) = \frac{ba_1 P_k (-I_1(\alpha\beta_k \rho)(2K_1(\alpha\beta_k) + \alpha K_0(\alpha\beta_k)\beta_k) + K_1(\alpha\beta_k \rho)(2I_1(\alpha\beta_k) - \alpha I_0(\alpha\beta_k)\beta_k))}{G\Delta_k}.$$

1.4 Розв'язок вихідної задачі. Чисельні результати. Використовуючи формулу обернення (1.4), можна визначити переміщення:

$$u(\rho, \zeta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} [C_{1k} I_1(\alpha\beta_k \rho) + C_{2k} K_1(\alpha\beta_k \rho)] \sin \beta_k \zeta,$$

для зручності повернемося від безрозмірних координат до початкових:

$$u_\varphi(r, z) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} [C_{1k} I_1(\alpha\beta_k r a_1^{-1}) + C_{2k} K_1(\alpha\beta_k r a_1^{-1})] \sin \frac{z\beta_k}{h},$$

Припустимо, що зовнішнє дотичне навантаження задається як рівномірно розподілене навантаження інтенсивності P^* на ділянці $b^* < z < h$ бічної внутрішньої поверхні циліндра

$$p(z) = \begin{cases} P^*, & b^* < z < h, \\ 0, & 0 < z < b^*. \end{cases}$$

Для порожнього пружного товстостінного циліндра з параметрами: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $h = 4; 2$, $G = 20$ ГПа (дерево), $b^* = 1$, $P^* = 100$, маємо переміщення на Рис. 1.1.

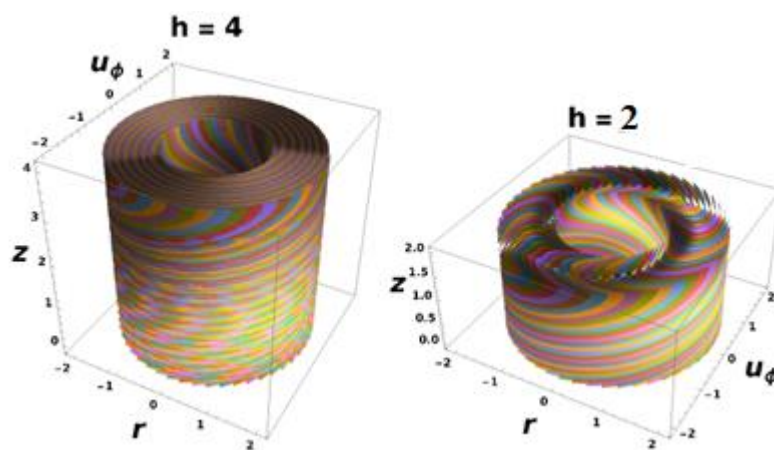


Рис. 1.1. Графіки переміщення $u_\varphi(r, z)$ при різних значеннях висоти

Код алгоритму для розв'язання задачі та генерації графіків можна знайти у
Додатку А.

РОЗДІЛ 2

Стаціонарна задача кручення для пружного шару з циліндричним отвором

2.1 Постановка задачі. В циліндричній системі координат, пружний нескінченний шар можна описати за допомогою наступних математичних співвідношень: $a \leq r < \infty$, $-\pi \leq \varphi < \pi$, $0 \leq z \leq h$. На бічній поверхні отвору шару, обмеженому параметрами: $0 \leq r \leq a$, $-\pi \leq \varphi < \pi$, $0 \leq z \leq h$, діє дотичне стаціонарне навантаження. Водночас, нижня основа шару закріплена нерухомо, тоді як верхня поверхня не піддається жодним навантаженням. **Об'єкт дослідження:** пружний шар з циліндричним отвором. **Предмет дослідження:** особливості стану шару під дією кручення. **Метод розв'язання:** метод інтегральних перетворень.

В рамках такої постановки задачі, єдиним переміщенням, яке не дорівнює нулю, є $u_\varphi(r, z)$, яке повинно задовольняти рівнянню Ламе

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} u_\varphi + r \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} = 0, \quad a < r < \infty, \quad 0 < z < h.$$

Граничні умови для цієї задачі визначаються наступним чином:

$$u_\varphi(r, 0) = 0, \quad \tau_{z\varphi}(r, h) = 0, \quad \tau_{r\varphi}(a, z) = -p(z),$$

де $p(z)$ – інтенсивність діючого стаціонарного навантаження.

Для переходу до безрозмірної системи координат використовуємо $\rho = ra^{-1}$, $\zeta = zh^{-1}$ та позначимо $u(\rho, \zeta) = u_\varphi(\rho a, \zeta h)$. Задача полягає у знаходженні розв'язку рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho} u + \alpha^2 \rho \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (2.1)$$

$$1 < \rho < \infty, \quad 0 < \zeta < 1, \quad \alpha = ah^{-1},$$

що відповідає заданим граничним умовам:

$$u(\rho, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} = 0, \quad (2.2)$$

$$G \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - u \right) \Big|_{\rho=1} = aP(\zeta), \quad P(\zeta) = p(h\zeta), \quad (2.3)$$

де G – модуль зсуву.

2.2 Зведення крайової задачі до одновимірної. Щоб звести дану крайову задачу до одновимірного випадку, буде використано скінченне синус інтегральне перетворення Фур'є по змінній ζ [7]:

$$u_k(\rho) = \int_0^1 u(\rho, \zeta) \sin \beta_k \zeta d\zeta, \quad (2.4)$$

$$u(\rho, \zeta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\rho) \sin \beta_k \zeta, \quad \beta_k = \frac{\pi}{2} (2k - 1).$$

Після застосування цього перетворення до рівняння (2.1) та умови (2.3), ми приходимо до формулювання одновимірної крайової задачі, в якій граничні умови (2.2) задовольняються автоматично.

$$(\rho u'_k)' - \left(\frac{1}{\rho} + \alpha^2 \beta_k^2 \rho \right) u_k = 0, \quad 1 < \rho < \infty, \quad (2.5)$$

$$G[u'_k(1) - u_k(1)] = aP_k, \quad (2.6)$$

де $P_k = \int_0^1 P(\zeta) \sin \beta_k \zeta d\zeta$.

2.3 Розв'язок отриманої одновимірної задачі. В силу того, що рівняння (2.5) застосовується на півнескінченному інтервалі $1 < \rho < \infty$, при побудові його загального розв'язку слід врахувати лише спадаючу частину, а зростаючий компонент відкинути. Отже,

$$u_k(\rho) = C_{2k} K_1(\alpha \beta_k \rho),$$

де $K_1(x)$ – модифікована функція Бесселя 2-го роду.

Знайдемо невідому постійну C_{2k} з крайової умови (1.6)

$$C_{2k} = - \frac{aP_k}{G(2K_1(\alpha \beta_k) + \alpha \beta_k K_0(\alpha \beta_k))}.$$

З урахуванням вищезазначеного, можемо визначити розв'язок одновимірної задачі (2.5)-(2.6) у наступному вигляді:

$$u_k(\rho) = - \frac{aP_k K_1(\alpha \beta_k \rho)}{G(2K_1(\alpha \beta_k) + \alpha \beta_k K_0(\alpha \beta_k))}.$$

2.4 Розв'язок вихідної задачі. Чисельні результати. Використовуючи формулу обернення (1.4), ми отримуємо переміщення.

$$u(\rho, \zeta) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a P_k K_1(\alpha \beta_k \rho)}{G(2K_1(\alpha \beta_k) + \alpha \beta_k K_0(\alpha \beta_k))} \sin \beta_k \zeta,$$

Для зручності перейдемо від безрозмірних координат до вихідних

$$u_\varphi(r, z) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a P_{kz} K_1\left(\frac{r \alpha \beta_k}{a}\right)}{G(2K_1(\alpha \beta_k) + \alpha \beta_k K_0(\alpha \beta_k))} \sin \frac{z \beta_k}{h},$$

Нехай, зовнішнє дотичне навантаження задано у вигляді рівномірно розподіленого навантаження інтенсивності $-P^*$ на ділянці $b < z < h$ бічної поверхні отвору

$$p(z) = \begin{cases} -P^*, & b < z < h, \\ 0, & 0 < z < b. \end{cases}$$

Для циліндра з співвідношенням радіусу до висоти $a : h = 1 : 4; 2$, $b = 1$, $P^* = 100$ та $G = 20$ ГПа (дерево) маємо переміщення точок шару на Рис. 2.1

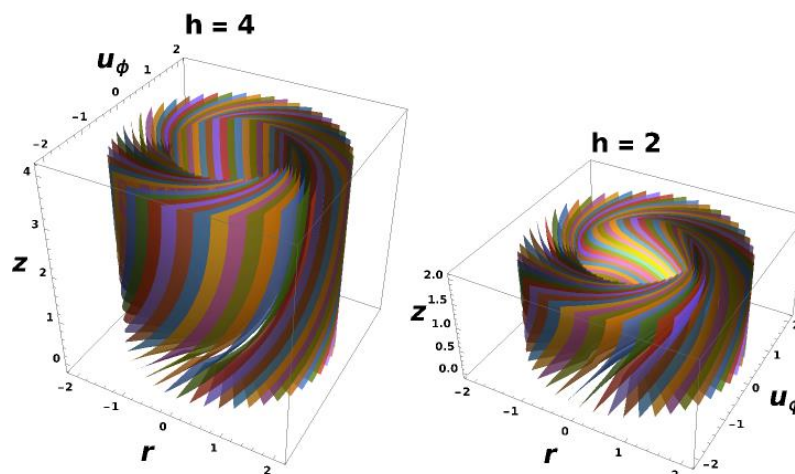


Рис. 2.1. Графіки переміщення $u_\varphi(r, z)$ при різних значеннях висоти

Можна відзначити, що в порівнянні з результатами для нескінченного пружного шару, переміщення точок у пружному товстостінному циліндрі

виявилося більшим за тих самих заданих параметрів. Більше переміщення точок може бути пояснене геометричними відмінностями цих структур, а саме обмеженістю форми та розмірами циліндра, що призводить до іншого розподілу напружень i , відповідно, до більшого переміщення точок під однаковим навантаженням.

Код алгоритму розв'язку задачі та побудови графіків представлений у **Додатку Б.**

РОЗДІЛ 3

Динамічна задача кручення для пружного шару з циліндричним отвором

3.1 Постановка задачі. Пружний нескінченний шар у циліндричній системі координат описується співвідношеннями $a \leq r < \infty$, $-\pi \leq \varphi < \pi$, $0 \leq z \leq h$. До бічної поверхні його отвору $0 \leq r \leq a$, $-\pi \leq \varphi < \pi$, $0 \leq z \leq h$ прикладене дотичне нестационарне навантаження. Нижня основа шару нерухомо закріплена, а верхня вільна від навантажень. **Об'єкт дослідження:** пружний шар з циліндричним отвором. **Предмет дослідження:** особливості стану шару під дією кручення. **Метод розв'язання:** метод інтегральних перетворень.

У такій постановці відмінним від нуля буде лише переміщення $u_\varphi(r, z, t)$, яке повинно задовольняти рівнянню Ламе

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} u_\varphi + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} = \frac{\tilde{\rho}}{G} \frac{\partial^2 u_\varphi(r, z, t)}{\partial t^2}, \quad a < r < \infty, \quad 0 < z < h,$$

де G – модуль зсуву, а $\tilde{\rho}$ – щільність. Зауважимо, що $c^2 = \frac{G}{\tilde{\rho}}$ – швидкість розповсюдження поперечної хвилі.

Крайові умови мають вигляд

$$u_\varphi(r, 0, t) = 0, \quad \tau_{z\varphi}(r, h, t) = 0, \quad \tau_{r\varphi}(a, z, t) = -p(z, t),$$

де $p(z, t)$ – інтенсивність діючого нестационарного навантаження. При цьому, в початковий момент часу $t = 0$, переміщення та його швидкість приймаються рівними нулю, що відповідає відсутності початкового збурення в системі.

Перейдемо до безрозмірної системи координат $\rho = ra^{-1}$, $\zeta = zh^{-1}$, $\tau = a^{-1}t$, та позначимо $u(\rho, \zeta, \tau) = u_\varphi(r, z, t)$. Необхідно знайти розв'язок рівняння

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} u + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad (3.1)$$

$$1 < \rho < \infty, \quad 0 < \zeta < 1, \quad \alpha = ah^{-1},$$

який задовольняє крайові умови

$$u(\rho, 0, \tau) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} = 0, \quad (3.2)$$

$$G \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - u \right) \Big|_{\rho=1} = aP(\zeta, \tau), \quad P(\zeta, \tau) = p(h\zeta, \tau a). \quad (3.3)$$

3.2 Зведення крайової задачі до двовимірної. Для зведення поставленої крайової задачі до двовимірної спочатку скористаємося інтегральним перетворенням Лапласа за змінною τ [9]

$$U_s(\rho, \zeta) = \int_0^{\infty} u(\rho, \zeta, \tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad (3.4)$$

$$u(\rho, \zeta, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} U_s(\rho, \zeta) e^{s\tau} ds.$$

Застосувавши його до рівняння (3.1) та до крайових умов (3.2) та (3.3), приходимо до двовимірної крайової задачі

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U_s}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} U_s + \alpha^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial \zeta^2} = \frac{s^2}{c^2} U_s, \quad (3.5)$$

$$1 < \rho < \infty, \quad 0 < \zeta < 1, \quad \alpha = ah^{-1},$$

яка задовольняє крайові умови

$$U_s(\rho, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial U_s}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} = 0, \quad (3.6)$$

$$G \left(\frac{\partial U_s}{\partial \rho} - U_s \right) \Big|_{\rho=1} = aP_s(\zeta), \quad P_s(\zeta) = \int_0^{\infty} P(\zeta, \tau) e^{-s\tau} d\tau. \quad (3.7)$$

3.3 Зведення крайової задачі до одновимірної. Для зведення поставленої крайової задачі до одновимірної скористаємося скінченним інтегральним перетворенням Фур'є за змінною ζ [7]

$$U_{sk}(\rho) = \int_0^1 U_s(\rho, \zeta) \sin \beta_k \zeta d\zeta, \quad (3.8)$$

$$U_s(\rho, \zeta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} U_{sk}(\rho) \sin \beta_k \zeta, \quad \beta_k = \frac{\pi(2k-1)}{2}.$$

Застосувавши його до рівняння (3.5) та до умови (3.7), приходимо до одновимірної крайової задачі, при цьому, крайові умови (3.6) виконуються автоматично.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U_{sk}}{\partial \rho} \right) - \left(\frac{1}{\rho^2} + \alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2} \right) U_{sk} = 0, \quad 1 < \rho < \infty, \quad (3.9)$$

$$G[U'_{sk}(1) - U_{sk}(1)] = aP_{sk}, \quad (3.10)$$

де $P_{sk} = \int_0^1 P_s(\zeta) \sin \beta_k \zeta d\zeta$.

3.4 Розв'язок отриманої одновимірної задачі. Зведемо отримане одновимірне рівняння до наступної форми

$$\rho^2 U''_{sk} + \rho U'_{sk} - \left(\left(\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2} \right) \rho^2 + 1 \right) U_{sk} = 0, \quad 1 < \rho < \infty. \quad (3.11)$$

Це рівняння є модифікованим диференціальним рівнянням Бесселя, розв'язок якого будується наступним чином

$$U_{sk}(\rho) = C_{1sk} I_1 \left(\rho \sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \right) + C_{2sk} K_1 \left(\rho \sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \right),$$

де $I_1(x)$, $K_1(x)$ – модифіковані функції Бесселя 1-го та 2-го роду відповідно, а C_{1sk} та C_{2sk} – постійні.

В силу того, що рівняння виконується на півнескінченному проміжку $1 < \rho < \infty$, для побудови його загального розв'язку треба врахувати тільки спадаючу частину, а зростаючий доданок потрібно відкинути. Таким чином

$$U_{sk}(\rho) = C_{2sk} K_1 \left(\rho \sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \right).$$

Знайдемо невідому постійну C_{2sk} з крайової умови (3.10)

$$C_{2sk} = - \frac{aP_{sk}}{G \left(2K_1 \left(\sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \right) + K_0 \left(\sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \right) \sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \right)}.$$

Тоді, остаточно отримаємо, що розв'язок одновимірної задачі (3.9)-(3.10) має вигляд

$$U_{sk}(\rho) = - \frac{aP_{sk} K_1 \left(\rho \sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \right)}{G \left(2K_1 \left(\sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \right) + K_0 \left(\sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \right) \sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \right)}.$$

3.5 Розв'язок вихідної задачі. Чисельні результати. Скориставшись формулою обернення (3.8), знаходимо переміщення

$$U_s(\rho, \zeta) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{aP_{sk} K_1 \left(\rho \sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \right)}{G \left(2K_1 \left(\sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \right) + K_0 \left(\sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \right) \sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \right)} \sin \beta_k \zeta.$$

Аналогічно, скориставшись формулою обернення (2.4) отримаємо розв'язок вихідної задачі

$$u(\rho, \zeta, \tau) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{aP_{sk} K_1 \left(\rho \sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \right)}{G \left(2K_1 \left(\sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \right) + K_0 \left(\sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \right) \sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 + \frac{s^2}{c^2}} \right)} \sin \beta_k \zeta e^{s\tau} ds$$

Для отримання чисельних результатів, перейдемо до усталених коливань та частотної області. У такому випадку, $s = i\omega$ та розв'язок приймає вигляд

$$u(\rho, \zeta; \omega) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a P_{sk} K_1 \left(\rho \sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 - \tilde{k}^2} \right)}{G \left(2K_1 \left(\sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 - \tilde{k}^2} \right) + K_0 \left(\sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 - \tilde{k}^2} \right) \sqrt{\alpha^2 \beta_k^2 - \tilde{k}^2} \right)} \sin \beta_k \zeta,$$

де $\tilde{k} = \frac{\omega}{c}$ – хвильове число.

Нехай, зовнішнє дотичне навантаження задано по всій ділянці бічної поверхні отвору у вигляді рівномірно розподіленого навантаження постійної інтенсивності $p(z) = 1000 \text{ Н/м}^2$. Для циліндра, з співвідношенням радіусу до висоти $a : h = 1 \text{ м} :: 2 \text{ м}$, алюмінієм, у якості матеріалу $G = 25.5 \text{ ГПа}$, $\tilde{\rho} = 2700 \text{ кг/м}^3$ та частотами $\omega = \{0.5 \text{ Гц}; 1 \text{ Гц}; 2 \text{ Гц}; 3 \text{ Гц}\}$, маємо амплітуду коливань точок шару на Рис. 3.1. На графіку при найнижчій частоті видно, що амплітуда коливань в цілому вища, ніж на наступних графіках. Це свідчить про те, що матеріал здатний на більш значущі зміщення при менших частотах. При подвоєній частоті амплітуда коливань зменшується, що може бути пов'язано зі збільшенням внутрішнього демпфування матеріалу або з більш швидким темпом зовнішнього впливу, при якому матеріал не встигає повністю реагувати. Зі збільшенням частоти до подвоєного значення від попереднього графіка амплітуда ще більше зменшується. Це підтверджує тенденцію, що при більш високих частотах амплітуда коливань зазвичай знижується через збільшення ефектів демпфування та інерції. В цілому, спостерігається тенденція до зменшення амплітуди зі збільшенням частоти, що відповідає очікуванням для більшості пружних матеріалів. Важливо відзначити, що на найвищих частотах може відбутися збільшення амплітуди, що припускає можливе резонансне посилення коливань.

Розглянемо графіки амплітуди коливань точок шару в залежності від висоти шару на Рис. 3.2. Амплітуда коливань для $h = 7$ порівняно низька, що може вказувати на більшу жорсткість або меншу реакцію матеріалу через більшу товщину. Це може бути пов'язано з тим, що більш товстий шар демпфує коливання краще, ніж більш тонкий. Для $h = 1$ амплітуда вища, що відповідає

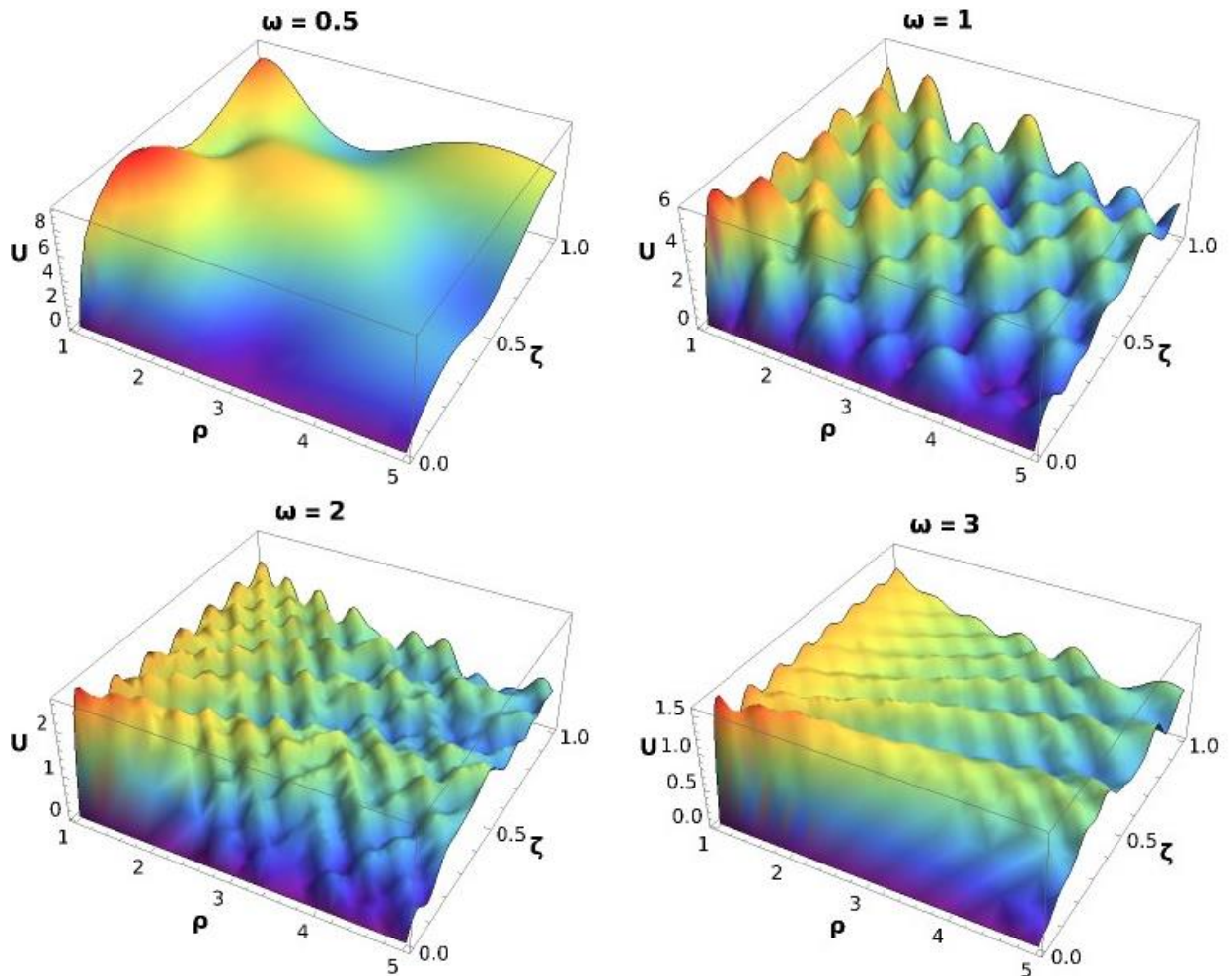


Рис. 3.1. Графіки амплітуди $u(\rho, \zeta; \omega)$ при різних значеннях частоти

очікуванням для більш тонкого шару, який легше вібрує через меншу інерцію та можливо менше демпфування. При помірній висоті шару $h = 2$ спостерігаються більш високі піки амплітуди порівняно з $h = 7$ та $h = 1$. Це може вказувати на середнє положення між високою жорсткістю та спроможністю до демпфування. Зі збільшенням висоти шару від $h = 2$ до $h = 5$ амплітуда коливань зменшується, що підтверджує загальну тенденцію зменшення амплітуди зі збільшенням висоти шару. Отже, більш тонкі шари (менше h) демонструють більш високі амплітуди коливань, що може бути пов'язано з їх меншою жорсткістю та більшою гнучкістю. Зі збільшенням товщини шару (більше h) амплітуда коливань зменшується, що вказує на зростання жорсткості та можливо покращене демпфування внутрішніх вібрацій.

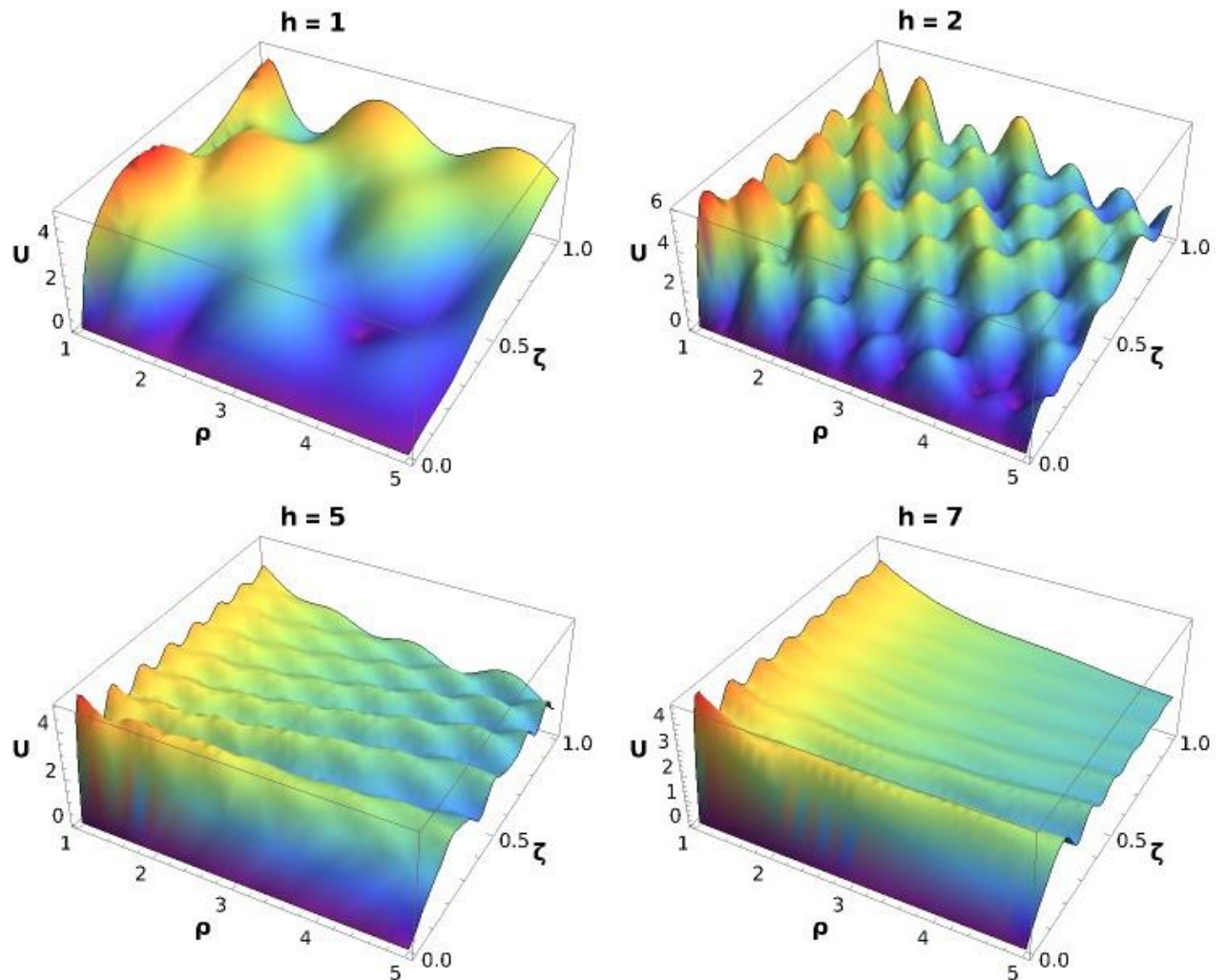


Рис. 3.2. Графіки амплітуди $u(\rho, \zeta; \omega)$ при різних значеннях висоти шару

Амплітуди коливань точок шару в залежності від матеріалу шару представлені на Рис. 3.3. Амплітуда коливань у алюмінію досить висока, що свідчить про гарну еластичність та здатність цього матеріалу передавати вібраційну енергію. Титан показує подібну до алюмінію структуру амплітуд, але з меншою величиною, що може вказувати на більшу щільність та жорсткість титану, а також на більш високе внутрішнє демпфування. Гума має дуже високі значення амплітуди, що очікувано для матеріалу з високою демпфуючою здатністю та низькою жорсткістю. Це говорить про те, що гума сильно пом'якшує та поглинає вібрації, що призводить до значних амплітуд при даній частоті. Дерево також показує відносно високі амплітуди коливань, але менше, ніж гума. Це відображає деяку еластичність та демпфування дерева, однак воно не так

ефективно в поглинанні вібрацій, як гума. Спираючись на ці результати можна зробити висновок, що різні матеріали мають різні характеристики амплітуди коливань за однакових умов зовнішнього навантаження. Ці характеристики визначаються такими властивостями матеріалів, як модуль еластичності, щільність, внутрішнє демпфування та структура. Матеріали з високим рівнем демпфування, такі як гума, показують великі амплітуди коливань, що робить їх ідеальними для пом'якшення вібрацій та шуму. Більш жорсткі та щільні матеріали, такі як титан, мають нижчі амплітуди коливань, що говорить про меншу еластичність та більшу здатність переносити навантаження без значних деформацій.

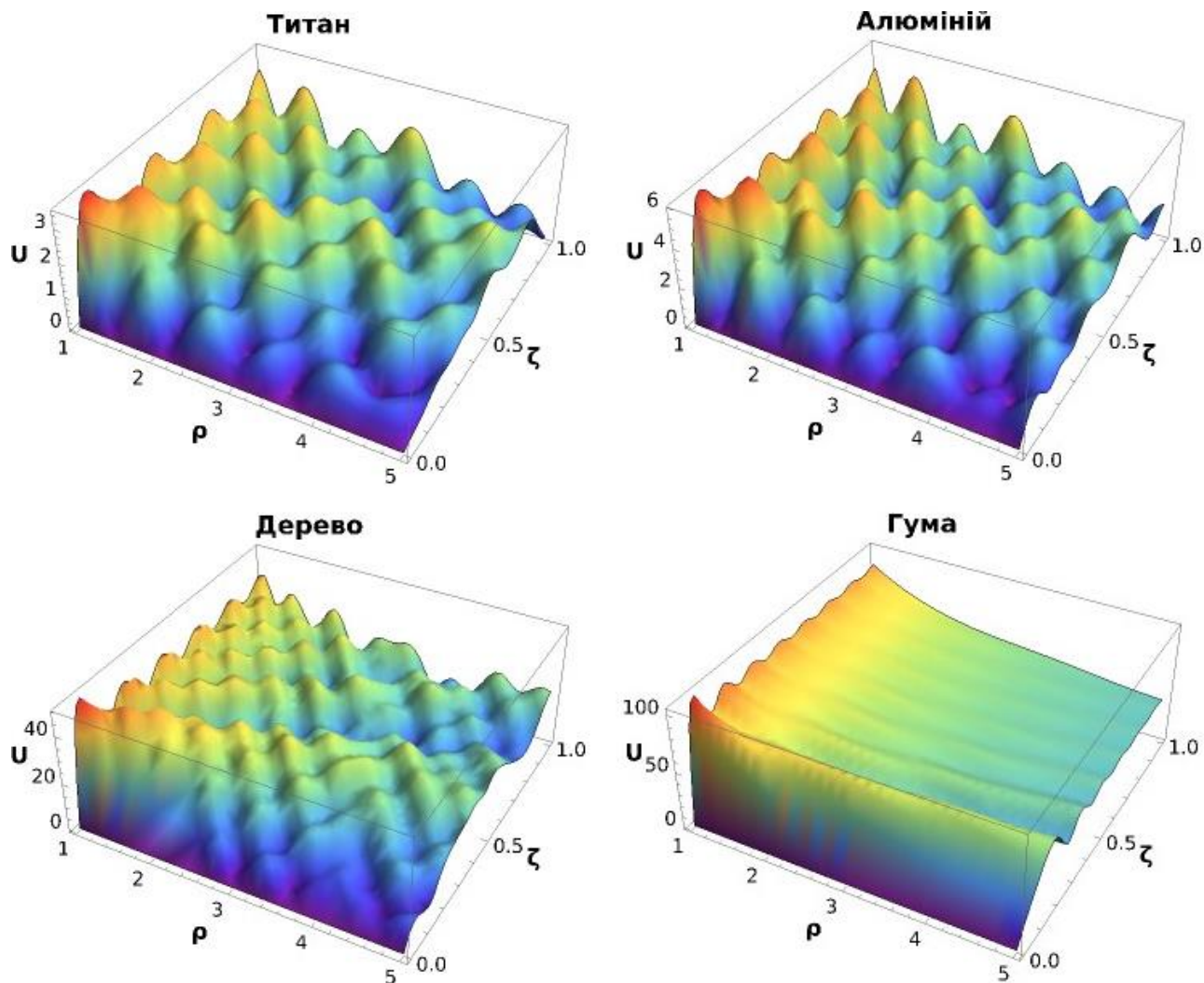


Рис. 3.3. Графіки амплітуди $u(\rho, \zeta; \omega)$ при різних матеріалах шару

Код алгоритму розв'язку задачі та побудови графіків представлений у
Додатку В.

ВИСНОВКИ

- Отримано точний розв'язок стаціонарних та динамічних задач кручення для нескінченного пружного шару та розв'язок стаціонарної задачі кручення для товстостінного порожнього пружного циліндра.
- Використано метод інтегральних перетворень зі зведенням вихідної задачі до одновимірної з подальшим її розв'язанням.
- Знайдено та проаналізовано амплітуди, переміщення та напруження точок у шарі та товстостінному циліндрі в залежності від механічних та геометричних параметрів.
- Розроблено алгоритм обчислення амплітуд та переміщень точок пружних шару та товстостінного циліндру під дією кручення у циліндричній системі координат.
- Побудовано тривимірну проекцію з чотиривимірного простору деформацій шару та товстостінного циліндру, а також графіки амплітуд коливань точок шару.
- Виявлено, що при однакових механічних та геометричних параметрах, у пружному товстостінному циліндрі переміщення точок є більшим, ніж у нескінченному пружному шарі.
- Виявлено залежність амплітуди коливань від частоти, висоти та матеріалу, демонструючи зменшення зі зростанням частоти та збільшенням жорсткості, а також варіативність відповіді при різних матеріалах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вайсфельд Н.Д., Фесенко Г.О. Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь: колективна монографія / за заг. ред. Р.М. Мартиняка // Львів: Видавець Вікторія Кундельська, 2022. – 392 с.
2. Вайсфельд Н.Д., Фесенко Г.О. Мішані задачі теорії пружності для півнескінченного шару: монографія. Одеса: Астропринт, 2019. 120 с.
3. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракція упругих волн. Київ: Наук. думка, 1978. – 308 с.
4. Корнілов О. А. Опір матеріалів: Підручник для технічних вишів. – К.: Логос, 2003. – 552 с.
5. Мартиненко А. О. Диференційне рівняння закрутових моментів у випадку скутого кручення тонкостінних стержнів відкритого профілю. // Вісник НУВГП: Зб. наукових праць. Вип. 3 (43). – Рівне: НУВГП, 2008. – С. 162-167
6. Попов Г. Я., Вайсфельд Н. Д. Осесимметричная задача теории упругости для бесконечной плиты с цилиндрическим включением при учете ее удельного веса // Прикл. механика. – 2014. – Т. 50, № 6. – С. 27-38.
7. Попов Г.Я., Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. Навчальний посібник з курсу «Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень»: для студ. техн. спец. вузів / Г. Я. Попов, В. В. Реут, Н. Д. Вайсфельд; відп. ред. В. Є. Круглов. — Одеса: Астропринт, 2005. — 183 с.
8. Процеров Ю. С. Осесимметричная задача кручения многослойного цилиндра конечной длины / Ю. С. Процеров // Вестник Одесского Национального университета. Математика и механика. - 2014. - Т. 19, Вип. 3. - С. 76-83.
9. Трач В.М. Опір матеріалів (спеціальний курс): теорія пружності та пластичності: навчальний посібник / В.М. Трач, А.В. Подворний. – К.: Каравела, 2018. – 434 с.
10. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний: Учебное пособие для вузов. – М.: «Высшая школа», 1975. – 248 с.

11. Anna Fesenko and Nataly Vaysfel'd. The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity. *Procedia Structural Integrity*. 33, 509-527 (2021).
12. Fesenko, A.A., Moyseenok, A.P. Exact Solution of a Nonstationary Problem for the Elastic Layer with Rigid Cylindrical Inclusion. *J Math Sci* 249, 478–495 (2020).
13. Minhua Lu, Shuai Huang, Xianglong Yang, Lei Yang, Rui Mao. Semianalytical Solution for the Deformation of an Elastic Layer under an Axisymmetrically Distributed Power-Form Load: Application to Fluid-Jet-Induced Indentation of Biological Soft Tissues. *Biomed Res Int*. 2017; 2017: 9842037. Published online 2017 Mar 8. doi: 10.1155/2017/9842037.
14. Popov G. Ya. The torsion of the conical layered elastic cone / Popov G. Ya., Vaysfeld N. D. // *Acta Mechanica*. – 2011. – Vol. 221, Iss. 3-4. – P. 261–270.
15. Selvadurai A. P. S., Rajapakses R. K. N. D. On the load transfer from a rigid cylindrical inclusion into an elastic half space // *Int. J. Solids Structures*. – 1985. – Vol. 21. № 12. – P. 1213-1229.
16. Tarn J. Q. Laminated composite tubes under extension, torsion, bending, shearing and pressuring: a state space approach / Tarn J. Q., Wang Y. M. // *International Journal of Solids and Structures*. – 2001. – Vol. 38, Iss. 50-51. – P. 9053–9075.
17. Zhou, Y., Zheng, R.-Y., Liu, G.-B. Dynamic response of elastic layer on transversely isotropic saturated soil to train load // *Yantu Lixue/Rock and Soil Mechanics*. 2011. – 32(2). P. 604-610.

Додаток А

Код алгоритму розв'язку стаціонарної задачі кручення для порожнього пружного товстостінного циліндра, написаний за допомогою пакету Wolfram Mathematica

```

ClearAll["Global`*"];

U[\[Rho]_] = C[1]*BesselI[1, \[Alpha]*\[Beta][k]*\[Rho]] + C[2]*BesselK[1,
\[Alpha]*\[Beta][k]*\[Rho]]; (* Визначення рішення з використанням інтеграційних констант
C1 та C2 *)
Con = Solve[{U'[1] - U[1] == 0, (G/a[1])*(U'[b] - (1/b)*U[b]) == P[k]}, {C[1], C[2]}] //
FullSimplify; (* Визначення інтеграційних констант C1 та C2 *)
C1 = Con[[1, 1, 2]] // FullSimplify; (* Визначення інтеграційної константи C1 *)
C2 = Con[[1, 2, 2]] // FullSimplify; (* Визначення інтеграційної константи C2 *)
U[\[Rho]_] = C1*BesselI[1, \[Alpha]*\[Beta][k]*\[Rho]] + C2*BesselK[1,
\[Alpha]*\[Beta][k]*\[Rho]] // FullSimplify; (* Формування рішення задачі *)

a[0] = 1; (* Внутрішній радіус циліндра *)
a[1] = 2; (* Зовнішній радіус циліндра *)
h = 4; (* Висота циліндра *)
G = 20; (* Модуль пружності при зсуві *)
\[Alpha] = a[1]/h; (* Введення безрозмірного параметра альфа *)
b = (a[0]/a[1]); (* Введення безрозмірного параметра b *)

P[\[Zeta]_] := If[\[Zeta] > (3.9/h), -10, 0]; (* Функція для визначення зовнішнього
навантаження *)
P[k_] = Integrate[P[\[Zeta]]*Sin[\[Beta][k]*\[Zeta]], {\[Zeta], 0, 1}]; (* Інтегрування для
отримання функції навантаження *)
\[Beta][k_] = (Pi/2)*(2*k - 1); (* Введення параметра бета *)
U[\[Rho]_, \[Zeta]_] = 2*Sum[U[\[Rho]]*Sin[\[Beta][k]*\[Zeta]], {k, 1, 2}] // FullSimplify; (*
Сумування для отримання загального рішення *)

U[\[Phi][r_, z_] = U[r/a[1], z/h]; (* Перетворення рішення до вихідних координат *)
\[Tau]1[r_, z_] = G*(D[U[\[Phi]][r, z], z]); (* Обчислення напруження *)

```

`ParametricPlot3D[Table[{r*Cos[\[Phi] + U\[Phi][r, z]], r*Sin[\[Phi] + U\[Phi][r, z]], z}, {\[Phi], -Pi, Pi}] // Evaluate, {r, a[0], a[1]}, {z, 0, h}, PlotStyle -> Opacity[.8], Mesh -> False, AxesLabel -> {x,y,z}, LabelStyle -> {x, y, z}, LabelStyle -> Directive[Bold, Black]] (* Візуалізація деформованого стану циліндра *)`

`Plot[[Tau]1[r, 0], {r, a[0], a[1]}, AxesLabel -> {r, [Tau]}] (* Візуалізація розподілу напружень по радіусу *)`

Додаток Б

Код алгоритму розв'язку стаціонарної задачі кручення для нескінченного пружного шару з циліндричним отвором, написаний за допомогою пакету

Wolfram Mathematica

```

ClearAll["Global`*"];

U[\[Rho_] = C2*BesselK[1, \[Alpha]*\[Beta][k]*\[Rho]]; (* Визначення рішення з
інтеграційною константою C2 *)
C2 = FullSimplify[Solve[(G*(D[U[\[Rho]], \[Rho]] - U[\[Rho]]) /. \[Rho] -> 1) == a*P[k],
C2]]][[1, 1, 2]]; (* Знаходження константи C2 *)
U[\[Rho_] = FullSimplify[C2*BesselK[1, \[Alpha]*\[Beta][k]*\[Rho]]; (* Остаточне рішення
для одновимірної задачі *)

a = 1; (* Внутрішній радіус циліндра *)
h = 4; (* Висота циліндра *)
G = 70; (* Модуль пружності при крученні *)
\[Alpha] = a/h; (* Безрозмірний коефіцієнт альфа *)

P[\[Zeta_] := If[\[Zeta] > (0.2/h), -100, 0]; (* Формула для задання зовнішньої сили *)
P[k_] = Integrate[P[\[Zeta]]*Sin[\[Beta][k]*\[Zeta]], {\[Zeta], 0, 1}]; (* Обчислення сили в
безрозмірних умовах для одновимірного випадку *)
\[Beta][k_] = (Pi/2)*(2*k - 1); (* Введення коефіцієнта бета *)
U[\[Rho_]_, \[Zeta_] = 2*Sum[U[\[Rho]]*Sin[\[Beta][k]*\[Zeta]], {k, 1, 6}] // FullSimplify; (*
Комплексне рішення в безрозмірних координатах *)

U[\[Phi][r_, z_] = U[r/a, z/h]; (* Перетворення до вихідних розмірів для рішення *)
\[Tau]1[r_, z_] = G*(D[U[\[Phi][r, z], z]); (* Розрахунок напружень *)

Plot3D[U[\[Phi][r, z], {r, a, 10}, {z, 0, h}] (* Тривимірний графік рішення *)
ParametricPlot3D[Table[{r*Cos[\[Phi] + U[\[Phi][r, z]], r*Sin[\[Phi] + U[\[Phi][r, z]], z}, {\[Phi], -Pi,
Pi}] // Evaluate, {r, a, 2*a}, {z, 0, h}, PlotStyle -> Opacity[.8], Mesh -> False, AxesLabel -> {x, y,
z}, LabelStyle -> Directive[Bold, Black]] (* Візуалізація деформації в тривимірному просторі
*)

```

`Plot[\[Tau]1[r, 0], {r, a, 20}, AxesLabel -> {r, \[Tau]}] (* Графік розподілу напружень по радіусу *)`

Додаток В

Код алгоритму розв'язку динамічної задачі кручення для нескінченного пружного шару з циліндричним отвором, написаний за допомогою пакету

Wolfram Mathematica

```

ClearAll["Global`*"]; (* Очищення всіх глобальних змінних та визначень *)

(* Встановлення диференціального рівняння *)
eq = \[Rho]^2 * U''[\[Rho]] + \[Rho] * U'[\[Rho]] - ((\[Alpha]^2 * \[Beta][k]^2 + ((s^2)/(c^2))) *
\[Rho]^2 + 1) * U[\[Rho]] == 0;
(* Визначення розв'язку рівняння з довільними константами C1 та C2 *)
sol[C1_, C2_] := FullSimplify[ReplaceAll[DSolve[eq, U[\[Rho]], \[Rho]], {C[1] -> C1, C[2] ->
C2}]][[1, 1, 2]];
(* Спеціалізація розв'язку для випадку C1 = 0 *)
sol[C2_] := sol[0, C2];
(* Визначення функції перетворення Бесселя для перекладу звичайної функції Бесселя в
модифіковану *)
besselTransform[n_, x_] := -((2 I^(-n))/Pi) BesselK[n, x];
(* Застосування перетворення до розв'язку та спрощення отриманого виразу *)
transformedSolution[C2_] := FullSimplify[sol[C2] /. BesselY[1, -I \[Rho] expr_] ->
besselTransform[1, \[Rho] expr]];
(* Присвоєння перетвореного розв'язку sol[C2] *)
sol[C2] = transformedSolution[C2];
(* Застосування Factor для групування констант в чисельнику *)
simplifiedExpr = Factor[Numerator[sol[C2]]] / Denominator[sol[C2]];
(* Заміна групи констант на нову константу C0 *)
sol[C2] = simplifiedExpr /. (coeff_ * BesselK[1, \[Rho] Sqrt[((s^2)/(c^2)) + \[Alpha]^2
\[Beta][k]^2]) -> C0 * BesselK[1, \[Rho] Sqrt[((s^2)/(c^2))+ \[Alpha]^2 \[Beta][k]^2]];
(* Визначення sol[C0] як альтернативне представлення sol[C2] *)
sol[C0_] := sol[C2];
(* Обчислення U_sk(1) *)
uSkAt1 = sol[C0] /. \[Rho] -> 1;
(* Обчислення похідної U_sk'(1) *)
uSkPrimeAt1 = D[sol[C0], \[Rho]] /. \[Rho] -> 1;

```

(* Застосування граничної умови та розв'язок відносно C0 *)

boundaryCondition = G (uSkPrimeAt1 - uSkAt1) == a *pk[k];

C0 = FullSimplify[Solve[boundaryCondition, C0]][[1,1,2]];

h= 2; (* Висота *)

a= 1; (* Радіус *)

pf1[z_,t_] = 1000; (* Функція інтенсивності кручення*)

[Alpha] = a/h; (Безрозмірний параметр альфа *)

G = 41.4; (* Модуль зсуву)

d = 4500; (Щільність матеріалу *)

p[[Zeta], [Tau]] = FullSimplify[pf1[[Zeta]*h, [Tau]a]]; (Функція зовнішнього навантаження *)

pk[k_] = FullSimplify[Integrate[p[[Zeta], [Tau]]Sin[[Beta][k][Zeta]], {[Zeta], 0, 1}]]; (* Інтеграція для отримання функції зовнішнього навантаження *)

[Beta][k_] = (Pi/2)(2k - 1); (* Визначення параметра бета *)

c = (G/d)^(1/2); (* Розрахунок швидкості хвиль у матеріалі *)

(* Розв'язання одновимірної задачі *)

U[[Rho]] = FullSimplify[sol[C0]];

[Omega] = 1; (* Частота коливань *)

s = I*[Omega]; (* Комплексна частота для гармонічних коливань *)

(* Розв'язання вихідної задачі)

U[[Rho], [Zeta]] = FullSimplify[2Sum[U[[Rho]]Sin[[Beta][k][Zeta]], {k, 1, 15}]]

(* Параметри для візуалізації)

[Rho]Range = {1, 5}; (Діапазон значень радіуса)

[Zeta]Range = {0, 1}; (Діапазон значень висоти *)

(* Візуалізація за допомогою Plot3D)

Plot3D[

Abs[U[[Rho], [Zeta]]],

{[Rho], [Rho]Range[[1]], [Rho]Range[[2]]},

{[Zeta], [Zeta]Range[[1]], [Zeta]Range[[2]]},

PlotRange -> All,

ColorFunction -> "Rainbow",

Mesh -> None,

```
AxesLabel -> {Style["[Rho]", Bold, 14, Black], Style["[Zeta]", Bold, 14, Black], Style["U", Bold,  
14, Black]},
```

```
LabelStyle -> {FontFamily -> "Helvetica", FontSize -> 12},
```

```
PlotLabel -> Style["Титан", Bold, 16, Black]
```

```
] ( Тривимірний графік розв'язку задачі з колірною шкалою "Веселка" *)
```