УДК 539.3

Н. Г. Моисеев*, О. П. Христиченко**

*Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова

**Одесская государственная академия строительства и архитектуры

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ НЕПРЕРЫВНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЫХОДЯЩЕЙ НА ГРАНИЦУ ТРЕЩИНОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ШТАМПОВ

Отримано ефективний наближений розв'зок вказаної в назві задачі. Безперервна неоднорідність визначається степеневою залежністю модуля зсуву від координати глибини півплощини. Штампи, розділені тріщиною, мають однакову ширину. Критичний випадок рівності ширини штампів глибині тріщини не є обмеженням для ефективності методу, що пропонується.

Получено эффективное приближенное решение указанной в названии задачи. Непрерывная неоднородность определяется степенной зависимостью модуля сдвига от координаты глубины полуплоскости. Штампы, разделенные трещиной, имеют одинаковую ширину. Критический случай равенства ширины штампов глубине трещины не является ограничением для эффективности предлагаемого метода.

The effective approximate solution of the problem, indicated in a title is obtained. The continuous inhomogeneity is determined by a degree dependence of the module of the elasticity by a coordinate of depth of a half-plane. The stamps divided by a crack have an identical width. The critical case of stamps' width's equality to depth of a crack is not restriction for effectiveness of an offered method.

Введение. Задача об упругом полупространстве, неоднородность которого определяется степенной формой модуля сдвига, впервые решена в [1]. Классические контактные задачи для линейно-деформируемого основания, представляющего собой указанное полупространство, решены в [2],[3]. Контактные задачи при наличии трещины, по-видимому, не рассматривались. В случае однородной полуплоскости решение задачи строится классическими методами [5].

В данной работе проблема сводится к решению векторной краевой задачи Римана, в которой факторизацию матричного коэффициента существенно усложняет неоднородность упругой среды. При решении векторной краевой задачи Римана методом нейтрализации полюсов [4] особым случаем является ситуация, когда $\beta = 1$, т.е. длина штампа равна глубине трещины. Ниже предлагается метод, позволяющий эффективно приближенно решить поставленную задачу. Критический случай $\beta = 1$ не является ограничением.

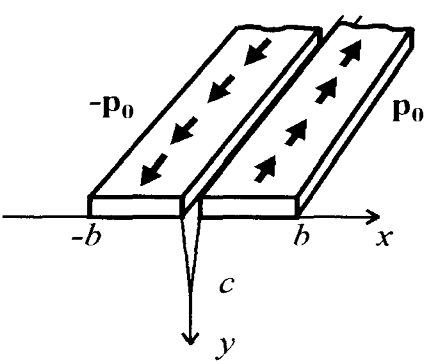

Рис. 1.

1.Постановка задачи и сведение ее к задаче Римана для двух пар функций.

Пусть в упругой неоднородной полуплоскости $\left(-\infty < x < +\infty,\quad y > 0\right)$, неоднородность которой определяется степенной формой модуля сдвига $G = G(y) = G_\nu y^\nu$, $y > 0, 0 \le \nu < 1$, имеется трещина $(x = 0, 0 < y < c)$, порожденная антиплоским сдвигом (в противоположных направлениях) двух одинаковых $(-b \le x \le 0,\ y = 0)$, $(0 \le x \le b,\ y = 0)$ полностью сцепленных с полуплоскостью штампов. Предполагается, что к каждому из штампов приложена нагрузка $\mathbf{p}_0$ (рис.1).

Относительно функции сдвига $W(x, y)$ задача математически формулируется следующим образом:

$$y^{\nu}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{\nu}\frac{\partial W}{\partial y}\right)=0,\ -\infty<x<+\infty,\ x\neq 0,\ y>0$$

$$W(x,0)=\delta\operatorname{sgn}x,\ |x|\le b;\quad \tau_{yz}(x,0)=0,\ |x|>b$$

$$\tau_{xz}(\pm 0,y)=0,\ 0<y<c\ .$$

Здесь δ – заранее неизвестная постоянная, определяющая сдвиг штампов. Она фиксируется условием равновесия $\int\limits_0^b \tau_{yz}(x,0)dx=-\mathbf{p_0}$.

Применение обобщенной схемы метода интегральных преобразований (Фурье по x) [5] позволило свести рассматриваемую задачу к следующей системе

$$\begin{cases} L_1\varphi_1 - L_{12}\varphi_2 = \delta_\nu^*\ ,\ \delta_\nu^* = \text{const} \\ L_{21}\varphi_1 + L_2\varphi_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$L_1\varphi=\int\limits_0^1 l_1\left(\frac{t}{\tau}\right)\varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau},\quad l_1(x)=\frac{1}{\nu}\left[\frac{1}{|x-1|^{\nu}}-\frac{1}{|x+1|^{\nu}}\right]$$

$$L_2\varphi=d_2\left(t\frac{d}{dt}\right)\int\limits_0^1 l_2\left(\frac{t}{\tau}\right)\varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau},\quad l_2(x)=\frac{x^{-1-\nu/2}}{4\pi\gamma_\nu^*}Q_{\nu/2-1}\left(\frac{x^2+1}{2x}\right),$$

где $d_2(x)=-(x+1)(x+\nu)$, $Q_\nu(z)$ – функция Лежандра второго рода [6]

$$L_{12}\varphi=\int\limits_0^1 l\left(\beta\frac{t}{\tau}\right)\varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau},\quad L_{21}\varphi=\int\limits_0^1 l\left(\beta^{-1}\frac{t}{\tau}\right)\varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau},$$

$$\beta=b/c,\quad l(x)=x\left(1+x^2\right)^{-\nu/2-1}.$$

При этом $\tau_{yz}(bt,0)bt^{1-\nu}=-\varphi_1(t)\mathbf{p_0}$, $W(-0,ct)-W(+0,ct)=\mathbf{p_0}G_\nu^{-1}b^{-\nu}\varphi_2(t),\ 0<t<1$.

Оператор системы интегральных уравнений (1) представим как матричный оператор свертки Меллина, символ которого имеет следующий вид

$$G(s)=\frac{1}{d_\nu}\begin{pmatrix}L_1^+ & 0\\ 0 & L_2^+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\beta^{-s}\dfrac{L_0}{L_1^+L_2^-}\\ \beta^{s}\dfrac{L_0}{L_2^+L_1^-} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_1^- & 0\\ 0 & L_2^-\end{pmatrix}$$

$$L_j^+(s)=\lambda_j\Gamma\left(\frac{1+\nu-s}{2}\right)\left(\Gamma\left(2-j-\frac{s}{2}+\frac{\nu(j-1)}{j}\right)\right)^{-1},\ \operatorname{Re}(s)<2-j+\nu$$

$$L_j^-(s)=\lambda_j\Gamma((s+1)/2)(\Gamma((s+(2-\nu)(2-j))/2))^{-1},\quad \operatorname{Re}(s)>j-2$$

$$\lambda_j=\pi^{1/4}(\Gamma((1+(2j-3)\nu)/2))^{1/2},\quad j=1,2$$

$$L_1=d_\nu^{-1}L_1^+L_1^-,\ L_2=d_\nu^{-1}L_2^+L_2^-,\ d_\nu=2\Gamma\left(\nu/2+1\right),$$

$$L_0=\Gamma\left(s/2+1/2\right)\Gamma\left(1/2+\nu/2-s/2\right).$$

Отметим, что $\dfrac{L_0}{L_1^+L_2^-}=\left(\cos\dfrac{\pi\nu}{2}\right)^{1/2}\operatorname{cosec}\dfrac{\pi s}{2}$, $\dfrac{L_0}{L_2^+L_1^-}=\left(\cos\dfrac{\pi\nu}{2}\right)^{1/2}\operatorname{cosec}\dfrac{\pi(\nu-s)}{2}$

Пусть $\Phi_j^-(s)=\int\limits_0^1 \varphi_j(\tau)\tau^{s-1}d\tau,\ j=1,2$.

После следующей замены трансформант искомых функций

$$x_j^+(s)=d_\nu\left(L_j^+(s)\right)^{-1}\Phi_j^+(s),\ x_j^-(s)=L_j^-(s)\Phi_j^-(s),\ j=1,2$$

задача сводится к решению системы уравнений $(0<\mathrm{Re}(s)<\nu)$

$$x_1^+(s)=x_1^-(s)-\frac{\lambda\beta^{-s}}{\sin\frac{\pi s}{2}}x_2^-(s)-\frac{f_\nu}{L_1^+(s)s}, \tag{2}$$

$$x_2^+(s)=\frac{\lambda\beta^s}{\sin\frac{\pi}{2}(\nu-s)}x_1^-(s)+x_2^-(s), \tag{3}$$

где $f_\nu=d_\nu\dfrac{2\delta\sqrt{\pi}G_\nu\Gamma\left(\frac12+\frac{\nu}{2}\right)}{\mathbf{p_0}\nu b^{-\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)},\ \lambda=\left(\cos\dfrac{\pi\nu}{2}\right)^{\frac12}$.

Используя методы работы [7], можно показать, что частные индексы однородной $(f_\nu=0)$ задачи Римана (2),(3) равны нулю $(\kappa_1=\kappa_2=0)$.

2.Построение решения задачи Римана. Решение системы (2),(3) возможно методом нейтрализации полюсов [4]. Но в случае $\beta=1$ этот метод не может быть реализован, а в окрестности точки $\beta=1$ скорость его сходимости существенно ухудшается.

Здесь предлагается основанный на специальной структуре коэффициентов задачи (2), (3) способ ее решения, для которого случай $\beta=1$ не является ограничением.

Рассмотрим случай $0<\beta\le 1$.

Для удобства в (2), (3) выполним замену $s=2\sigma$. Уравнение (2), умноженное на $\dfrac{\lambda\beta^{-2\sigma}}{\sin\pi\sigma}$, в сумме с уравнением (3) дает первое уравнение следующей системы, а во втором уравнении выполнена замена σ на $\mu-\sigma, 2\mu=\nu$.

$$\begin{cases} z_1^+(\sigma)+\dfrac{\lambda\beta^{-2\sigma}}{\sin\pi\sigma}z_2^+(\sigma)=\dfrac{\mathrm{ctg}\,\pi\sigma}{\mathrm{tg}\,\pi(\mu-\sigma)}z_1^-(\sigma)-\dfrac{f_\nu}{l_1^+(\sigma)\sigma}, & 0<\sigma<\mu<\dfrac12 \\ z_2^-(\mu-\sigma)+\dfrac{\lambda\beta^{2\mu-2\sigma}}{\sin\pi\sigma}z_1^-(\mu-\sigma)=z_2^+(\mu-\sigma), & 0<\mathrm{Re}(\sigma)<\mu \end{cases}$$

$s=2\sigma,\ \nu=2\mu,\ \ x_j^\pm(2\sigma)=z_j^\pm(\sigma),\ L_1^+(2\sigma)=2l_1^+(\sigma),$

$z_j^\pm(s)=O\left(s^{-1}\right),\ s\to\infty$.

В соответствии с факторизацией

$$\mathrm{ctg}(\pi\sigma)=\Delta^+(\sigma)\Delta^-(\sigma);\ \Delta^+(\sigma)=\frac{\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma\left(\frac12-\sigma\right)},\ \Delta^-(\sigma)=\frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma\left(\frac12+\sigma\right)}$$

и обозначениями

$$z_1^+(\sigma)=y_1^+(\sigma)\Delta^-(\mu-\sigma),\ z_2^+(\sigma)=y_2^+(\sigma)\Delta^-(\mu-\sigma)$$

$$\Delta^+(\sigma)z_1^-(\mu-\sigma)=y_1^-(\mu-\sigma),\ \Delta^+(\sigma)z_2^-(\mu-\sigma)=y_2^-(\mu-\sigma)$$

преобразуем уравнения системы следующим образом $(0<\mathrm{Re}(\sigma)<\mu)$

$$\begin{cases} y_1^+(\sigma)+\dfrac{\lambda\beta^{-2\sigma}}{\sin\pi\sigma}y_2^+(\sigma)=\operatorname{ctg}\pi\sigma\, y_1^-(\sigma)-\dfrac{f_\nu\sigma^{-1}}{\Delta^-(\mu-\sigma)l_1^+(\sigma)} \\ y_2^-(\mu-\sigma)+\dfrac{\lambda\beta^{2\mu-2\sigma}}{\sin\pi\sigma}y_1^-(\mu-\sigma)=\operatorname{ctg}\pi\sigma\, y_2^+(\mu-\sigma) \end{cases}$$

Замена $w_1^+(\sigma)=y_2^-(\mu-\sigma)+\beta^\mu y_1^+(\sigma)$, $w_1^-(\sigma)=y_2^+(\mu-\sigma)+\beta^\mu y_1^-(\sigma)$

$w_2^+(\sigma)=y_2^-(\mu-\sigma)-\beta^\mu y_1^+(\sigma)$, $w_2^-(\sigma)=y_2^+(\mu-\sigma)-\beta^\mu y_1^-(\sigma)$

позволяет записать систему так

$$\begin{cases} w_1^+(\sigma)+\dfrac{\lambda\beta^{\mu-2\sigma}}{\sin\pi\sigma}w_1^-(\mu-\sigma)=\operatorname{ctg}\pi\sigma\, w_1^-(\sigma)-\dfrac{\beta^\mu f_\nu\sigma^{-1}}{\Delta^-(\mu-\sigma)l_1^+(\sigma)} & (4) \\ w_2^+(\sigma)-\dfrac{\lambda\beta^{\mu-2\sigma}}{\sin\pi\sigma}w_2^-(\mu-\sigma)=\operatorname{ctg}\pi\sigma\, w_2^-(\sigma)+\dfrac{\beta^\mu f_\nu\sigma^{-1}}{\Delta^-(\mu-\sigma)l_1^+(\sigma)} & (5) \end{cases}$$

Обратное преобразование Меллина сводит раздельно решаемые функциональные уравнения (4) и (5) к интегральным уравнениям

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\tau^{1-\mu}g_j(\tau)}{\tau-t}d\tau+(-1)^j\beta^\mu\frac{\lambda}{\pi}\int_0^1\frac{g_j(\tau)d\tau}{1+\beta^2\tau t}=(-1)^{j+1}\frac{\beta^\mu f_\nu}{\Delta^-(\mu)l_1^+(0)},\quad j=1,2. \tag{6}$$

Для оператора

$$K_+\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\tau^{1-\mu}\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

и двойственного ему оператора

$$K_-\varphi=-\frac{t^{1-\mu}}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

сдвиг $\left(\tau^{1-\mu}\right)$ не позволяет применить классические спектральные соотношения [5]. Поэтому используются аналоги спектральных соотношений [8]

$$K_\mp x_n^\mp=\pi_n^\pm(t),\ 0<t<1,\ n=0,1,\ldots \tag{7}$$

$$x_n^-(t)=\frac{\gamma_n^-}{2\pi i}\int_{\gamma_--i\infty}^{\gamma_-+i\infty}\frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)}\frac{(1-s)_n t^{-s}}{(s-1+\mu)_{n+1}}ds,\quad \gamma_n^+\gamma_n^-=2n+\mu,$$

$$x_n^+(t)=\frac{\gamma_n^+}{2\pi i}\int_{\gamma_+-i\infty}^{\gamma_++i\infty}\frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}+\mu\right)}{\Gamma(s-1+\mu)}\frac{(1-s)_n t^{-s}}{(s-1+\mu)_{n+1}}ds,\ 0<1-\gamma_\pm<\mu.$$

Системы функций $x_n^\pm(t)$ и полиномов $\pi_n^\pm(t)$, $\deg_t\pi^\pm(t)=n$ [8] обладают также свойством биортогональности

$$\left(x_n^\pm,\pi_m^\pm\right)=\int_0^1 x_n^\pm(t)\pi_m^\pm(t)dt=\delta_{n,m}. \tag{8}$$

В соответствии с (7) решение интегральных уравнений (6) ищем в виде

$$g_j(t)=\sum_{m=0}^\infty g_{j,m}x_m^+(t).$$

Действуя по схеме [5],[4] с учетом разложения

$$\frac{1}{1+\beta^2\tau t}=\frac{1}{\left(1+\beta^2\right)-\beta^2(1-\tau t)}=\frac{1}{1+\beta^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right)^k(1-\tau t)^k \tag{9}$$

имеем

$$\begin{cases} g_{j,n}+\dfrac{\beta^{\mu}\lambda}{\pi(-1)^j}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} r(n,m)\,g_{j,m}=(-1)^{j+1}\sqrt{\pi}\,\delta_{n,0} \\ j=1,2;\ n=0,1,... \end{cases} \tag{10}$$

где $r(n,m)=\dfrac{1}{1+\beta^2}\displaystyle\sum_{k=\max(n,m)}^{\infty} r_k(n,m)\left(\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right)^k$

$$r_k(n,m)=(-1)^{n+m}\frac{\sqrt{\pi}\,(2n+\mu)(\mu)_p\left(\frac{1}{2}+\mu\right)_p\left(\frac{1}{2}\right)_p(-k)_p}{\mu(\mu+1)_{m+p}(\mu+1)_{n+p}\,q!\,\Gamma(\mu+1)}\times$$

$$\times\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+\mu\right){}_4F_3\left(\left.\begin{matrix}-k+p,\ \frac{1}{2}+\mu+p,\ \frac{1}{2}+p,\ \mu+p\\ \mu+1+m+p,\ \mu+1+n+p,\ q+1\end{matrix}\right|1\right),$$

$$p=\max(n,m),\quad q=|n-m|.$$

Коэффициенты $r_k(n,m)$ вычислены в соответствии с представлением

$$r_k(n,m)=\int_0^1\int_0^1 x_m^-(t)x_n^+(t)(1-t\tau)^k\,d\tau dt\,.$$

Последнее представление с учетом [8] позволило получить следующую оценку

$$|r(n,m)|\le C_1\left[\beta^2\left(1+\beta^2\right)^{-1}\right]^{\max(n,m)},\ C_1=\mathrm{const}\,. \tag{11}$$

Структура частных индексов однородной задачи (2),(3) $(\kappa_1=\kappa_2=0)$ позволяет доказать, что однородные бесконечные системы (10) имеют только тривиальные решения в l_2. Вполне непрерывность матричного оператора системы (10) определяется оценкой (11). Эта оценка даже в критической ситуации $\beta=1$ гарантирует скорость сходимости метода редукции бесконечной системы (10), как у геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$.

Для коэффициента интенсивности напряжений $k_0=\lim\limits_{y\to c+0}\sqrt{2\pi(y-c)}\,\tau_{xz}(0,y)$ получено следующее представление

$$k_0=\frac{2\mathbf{p}_0}{\sqrt{c}}\left[\frac{\beta^{-\mu}\Gamma(\mu+1)(\cos\pi\mu)^{-\frac{1}{2}}}{\left(g_{1,0}-g_{2,0}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(g_{1,m}+g_{2,m}\right)\right], \tag{12}$$

вычислительная эффективность которого следует из оценки

$$|g_{j,m}|\le C_2\left[\beta^2\left(1+\beta^2\right)^{-1}\right]^m,\ C_2=\mathrm{const}\,.$$

Для случая $\beta\ge 1$ получены аналогичные (12), (10) вычислительные формулы, в которых выражению $\beta^2\left(1+\beta^2\right)^{-1}$, $(\beta\le 1)$ соответствует выражение $\left(1+\beta^2\right)^{-1}$, $(\beta\ge 1)$, т.е. при всех значениях параметра $\beta=bc^{-1}$ сходимость метода не хуже, чем у геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$.

Заключение. Таким образом, построено эффективное приближенное решение рассматриваемой задачи.

1. **Ростовцев Н.А.** К теории упругости неоднородной среды // Прикладная математика и механика. – 1964. - Т.28, вып.4. - С.601-611.
2. **Попов Г.Я.** Плоская контактная задача для линейно-деформируемого основания при наличии сил сцепления // Прикладная математика и механика. - 1973. - Т.37, вып.2. - С.254-261.
3. **Попов Г.Я.** О связи между трехмерными и двумерными напряжеиными состояниями в статической и динамической упругости неоднородных тел // Докл. АН СССР. - 1976. - Т.228, №3. - С.566-569.
4. **Онищук О.В.** Об одном методе решения интегральных уравиений и его применении к задаче об изгибе пластинки с крестообразным включением // Прикладиая математика и механика. - 1988. - Т.52, вып.2. - С.269-283.
5. **Попов Г.Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. - М.:Наука, 1982. - 344 с.
6. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Иитегралы и ряды. Дополнительные главы. - М.:Наука, 1986. - 800 с.
7. **Шмульяи Ю. Л.** Задача Римана с положительно определенной матрицей // Успехи матем. наук. - 1953. - Т.8, вып.2. - С.143-145.
8. **Моисеев Н. Г.** Аналоги спектральных соотношений для оператора Винера-Хопфа со сверткой Меллииа // Докл. РАН. - 1999. - Т.365, № 1. - С.17-22.