Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

«Антиплоска задача теорії пружності для двошарового сектору кільця з міжфазним дефектом»

«Anti-plane problem of elasticity theory for a two-layer ring sector with an interfacial defect»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Сторожев Олег Ігорович

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук, доц. Процеров Ю. С ____
Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук, доц. Фесенко Г.О.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від ______________ 2024 р.

Завідувач кафедри

__________ ____________________

Захищено на засіданні ЕК № ____________

Протокол № ____ від ______________ 2024 р.

Оцінка __________ / __________ / __________

Голова ЕК

__________ _________________________

Одеса — 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

У даній кваліфікаційній роботі розглядається задача визначення напружено-деформованого стану тіла яке знаходиться в умовах антиплоської деформації. Тіло, яке досліджується, складається з двох шарів різних матеріалів, які мають різні модулі зсуву G_1 та G_2. Між шарами цього тіла виконуються умови ідеального механічного контакту - непреревніть переміщення та напружень, за винятком відрізка де знаходиться тріщина.

Ціль роботи полягає у визначенні напружено-деформованого стану розглядаємого тіла, а також знаходження коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі кінці тріщини.

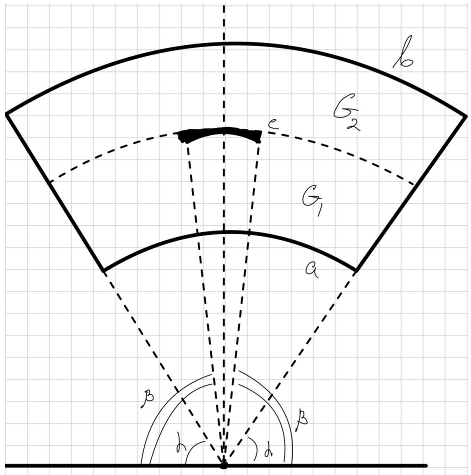
Актуальність теми полягає в широкому використанні складних багатошарових матеріалів у промисловості, будівництві та машинобудуванні. Такі матеріали мають високу ефективність завдяки комбінації властивостей різних компонентів, однак їх складна структура вимагає детального аналізу для оцінки надійності. Виявлення місць концентрації напружень та можливих дефектів є важливим етапом у проектуванні таких систем.

Дослідження задач напруженого стану для складних систем із неоднорідною структурою має важливе значення для підвищення безпеки і довговічності конструкцій, а також для розробки методів їх удосконалення. Завдання, що розглядається в цій роботі, може бути корисним для інженерних розрахунків та оптимізації конструкцій різних типів.

Це дослідження також має теоретичне значення, оскільки дозволяє розвинути методи розв'язку задач для складних циліндричних тіл із неоднорідними характеристиками, що може бути застосовано у подальших наукових дослідженнях.

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ



Розглянемо тіло в циліндричній системі координат (r, θ, z) яке займає область $a < r < b$, $\alpha < \theta < \pi - \alpha$, $-\infty < z < \infty$. Нехай краї тіла $\theta = \alpha$ і $\theta = \pi - \alpha$ нерухомо закріплені, край $r = a$ вільний від напружень, а до краю $r = b$ прикладено зсувне дотичне навантаження $p(\theta)$, величина якого не залежить від z. У цьому разі тіло буде знаходитися в умовах антиплоскої деформації, при якій напружено-деформований стан тіла не залежить від z.

Відмінними від нуля буде тільки переміщення $w(r,\theta)$ уздовж осі Oz і два дотичні напруження $\tau_{rz} = G\frac{dw}{dr}$ і $\tau_{\theta z} = G\frac{1}{r}\frac{dw}{dr\theta}$, де G модуль переміщення матеріалу тіла. Нехай далі розглянуте тіло складається з двох частин:

$$a < r < c, \alpha < \theta < \pi - \alpha.$$

і

$$c < r < b, \alpha < \theta < \pi - \alpha.$$

Кожна частина складається з різного матеріалу: перша має модуль зсуву G_1, а друга - G_2. Між цими шарами виконуються умови ідеальної механічної неперервності переміщення $w(r,\theta)$ і напруження $\tau_{rz}(r, \theta)$ при переході через поверхню $r = c$, $\alpha < \theta < \pi - \alpha$. Крім участка $r = c$, $\beta < \theta < \pi - \beta$, де знаходиться дефект у вигляді тріщини, береги якого вільні від напружень.

У даній постановці зміщення $w(r,\theta)$ зобов'язане задовольняти рівнянню Ламе:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)+\frac{1}{r}\frac{d^2w}{d\theta^2}=0, \quad a<r<b,\ r\neq c,\ \alpha<\theta<\pi-\alpha \tag{1}$$

З крайовими умовами:

$$w|_{\theta=a}=0, \quad w|_{\theta=\pi-\alpha}=0 \tag{2}$$

$$\tau_{rz}|_{r=a}=G_1\frac{dw}{dr}|_{r=a}=0; \quad \tau_{rz}|_{r=b}=G_2\frac{dw}{dr}|_{r=b}=p(\theta) \tag{3}$$

та умовами сполучення шарів тіла:

$$< w >= w|_{r=c-0}-w|_{r=c+0}=\chi(\theta)$$

де функція $\chi(\theta)\neq 0$ на проміжку $\beta<\theta<\pi-\beta$, та є зміщенням одного берегу тріщини відносно другого.

$$< \tau_{rz} >= \tau_{rz}|_{r=c-0}-\tau_{rz}|_{r=c+0}=G_1\frac{dw}{dr}|_{r=c-0}-G_2\frac{dw}{dr}|_{r=c+0}=0 \tag{4}$$

А також умов відсутності напружень на обох перегах тріщени

$$\tau_{rz}|_{r=c+-0}=0, \quad \beta<\theta<\pi-\beta \tag{5}$$

РОЗДІЛ 2

ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧІ ДО ОДНОВИМІРНОЇ РОЗРИВНОЇ

Для зведення задачі до одновимірної скористаємося кінцевим синус-перетворенням Фур'є за змінною θ:

$$W_n(r) = \int_{\pi-\alpha}^{\alpha} w(r,\theta) sin(\lambda_n(\theta-\alpha))d\theta$$

,

$$\lambda_n = \frac{\pi_n}{\pi-2\alpha}, n = 1,2,3...$$

з формулою обернення

$$w(r,\theta) = \frac{2}{\pi-2\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} W_n(r) sin(\lambda_n(\theta-\alpha))$$

Застосовуючи його до рівняння (1) (при цьому крайові умови (2) будуть задоволені), крайовим умовам (3) та умовам сполучення (4) прийдемо до одновимірної розривної задачі

$$(rWn'(r))' - \frac{1}{r}\lambda_n^2 Wn(r) = 0, a < r < b, r \neq c \tag{6}$$

$$W_n'(a) = 0, W_n'(b) = 0 \tag{7}$$

де $P_n = \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} P(\theta) sin(\lambda_n(\theta-\lambda))d\theta$

з умовами спряження

$$< W_n >= W_n(c-0) - W_n(c+0) = \chi_n$$

$$< \tau_{rz}, n >= G_1 W_n'(c-0) - G_2 W_n'(c+0) = 0$$

де $\chi_n = \int_{\beta}^{\pi-\beta} \psi(\chi) sin \lambda_n(\theta - \alpha) d\theta$

Розв'язок будемо шукати у вигляді суми:

1) Неперервного розв'язоку
2) Розривного розв'язоку

РОЗДІЛ 3

ПОБУДОВА НЕПЕРЕРВНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Неперервний розв'язок є розв'язком наступної крайової задачі

$$[rw_n'(r)]' - \frac{1}{r}\lambda_n^2 w_n(r) = 0, a < r < b$$

$$W_n'(a) = 0; W_n'(b) = 0$$

Для її розвязку треба побудувати фундаментальну базисну систему розвязків (ФБСР). Лінійно незалежними розвязками рівняння

$$(rW_n'(r))' - \frac{1}{r}\lambda_n^2 W_n(r) = 0$$

будуть $\Phi_0(r) = r^{\lambda_n}$ та $\Phi_1(r) = r^{-\lambda_n}$

будуємо ФБСР:

$$\Psi_0(r) = C_{01}\Phi_0(r) + C_{02}\Phi_1(r) = C_{01}r^{\lambda_n} + C_{02}r^{-\lambda_n}$$

$$\begin{cases} \Psi_0'(a) & = C_{01}\lambda_n a^{\lambda_n - 1} - C_{02}\lambda_n b^{-\lambda_n - 1} = 1 \\ \Psi_0'(b) & = C_{01}\lambda_n a^{\lambda_n - 1} - C_{02}\lambda_n b^{-\lambda_n - 1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{01}a^{\lambda_n} - C_{02}b^{-\lambda_n} & = \frac{a}{\lambda_n} \\ C_{01}b^{\lambda_n} - C_{02}b^{-\lambda_n} & = 0 \end{cases}$$

$$\det = \begin{vmatrix} a^{\lambda_n} & -a^{-\lambda_n} \\ b^{\lambda_n} & -b^{-\lambda_n} \end{vmatrix} = -\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda_n} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\lambda_n}$$

Позначимо $\Delta_n = \left(\frac{b}{a}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda_n}$.

Тоді

$$C_{01} = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} \frac{a}{\lambda_n} & -a^{-\lambda_n} \\ 0 & -b^{-\lambda_n} \end{vmatrix} = -\frac{ab^{-\lambda_n}}{\lambda_n \Delta_n}$$

$$C_{02} = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} a^{\lambda_n} & \frac{a}{\lambda_n} \\ b^{\lambda_n} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{ab^{-\lambda_n}}{\lambda_n \Delta_n}$$

$$\Psi_0(r) = -\frac{a}{\lambda_n \Delta_n} \left[\left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n} + \left(\frac{b}{r}\right)^{\lambda_n} \right]$$

$$\Psi_1(r) = C_{11}\Psi_0(r) + C_{12}\Psi_1(r) = C_{11}r^{\lambda_n} + C_{12}r^{-\lambda_n}$$

$$\begin{cases} \Psi_1'(a) = C_{11} \ln a \cdot a^{\lambda_n - 1} - C_{12} \ln a \cdot a^{-\lambda_n - 1} = 0, \\ \Psi_1'(b) = C_{11} \ln b \cdot b^{\lambda_n - 1} - C_{12} \ln b \cdot b^{-\lambda_n - 1} = \dfrac{b}{\lambda_n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{11}a^{\lambda_n} - C_{12}a^{-\lambda_n} = 0, \\ C_{11}b^{\lambda_n} - C_{12}b^{-\lambda_n} = \dfrac{b}{\lambda_n} \end{cases}$$

$\det = \Delta_n$

$$C_{11} = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} 0 & -a^{-\lambda_n} \\ \frac{b}{\lambda_n} & -b^{-\lambda_n} \end{vmatrix} = \frac{b \cdot a^{-\lambda_n}}{\lambda_n \Delta_n}$$

$$C_{12} = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} a^{\lambda_n} & 0 \\ b^{\lambda_n} & \frac{b}{\lambda_n} \end{vmatrix} = \frac{b \cdot a^{\lambda_n}}{\lambda_n \Delta_n}$$

$$\Psi_1(r) = \frac{b}{\lambda_n \Delta_n} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n} + \left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n} \right]$$

Тоді неперервним розв'язком буде функція:

$$W_n^*(r) = \frac{P_n}{G_2}\Psi_1(r) = \frac{bP_n}{G_2\lambda_n\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n} + \left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right]$$

РОЗДІЛ 4

ОТРИМАННЯ РОЗ'ЯЗКУ ПО ОДНОМІРНОЇ РАЗРИВНОЇ ЗАДАЧІ

4.1 Побудова функції Грину

Розривним розв'язком буде розв'язком наступної одновимірної крайової задачі

$$[rw_n'(r)]' - \frac{1}{r}\lambda_n^2 w_n(r) = 0, a < r < b, r \neq c[$$

$$W_n'(a) = 0; W_n'(b) = 0$$

$$< W_n(c) >= W_n(c-0) - W_n(c+0) = \chi_n$$

$$< \tau_{rz}, n(c) >= G_1 W_n'(c-0) - G_2 W_n'(c+0) = 0$$

де

$$\chi_n = \int_\beta^{\pi-\beta} \psi(\theta) sin \lambda_n(\theta - \alpha) d\theta, \lambda_n = \frac{\pi_n}{\pi - 2\alpha}, n = 1{,}2...$$

Отримаємо цей ров'язок з використанням властивостей функції Грину

Для початку побудуємо її

Для побудови функції Гріна використаємо фундаментальну функцію рівняння

$$r\left(rW_1'(r)\right)' - \lambda^2 z = 0,$$

яка має вигляд

$$\Phi_n(r, \rho) = -\frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda\left|\frac{r}{\rho}\right|}.$$

та побудовану ФБСР $\Psi_0(r)$ та $\Psi_1(r)$.

Спочатку знайдемо

$$U_0\left[\Phi(r,\rho)\right] = \left.\frac{\partial\Phi(r,\rho)}{\partial r}\right|_{r=a} = \frac{1}{2}\mathrm{sign}\left(\ln\frac{r}{\rho}\right)\cdot\left.\frac{1}{2}e^{-\lambda\left|\ln\frac{r}{\rho}\right|}\right|_{r=a} = -\frac{1}{2a}e^{-\lambda\ln\left|\frac{a}{\rho}\right|}$$

$$U_1\left[\Phi(r,\rho)\right] = \left.\frac{\partial\Phi(r,\rho)}{\partial r}\right|_{r=b} = \frac{1}{2b}e^{-\lambda\ln\left|\frac{b}{\rho}\right|}$$

Тоді функція Гріна буде мати вигляд

$$G_n(r,\rho) = \Phi(r,\rho) - \Psi_0(r)U_0\left[\Phi(r,\rho)\right] - \Psi_1(r)U_1\left[\Phi(r,\rho)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda\left|\ln\frac{r}{\rho}\right|}\frac{1}{2a}e^{-\lambda_n\left|\ln\frac{\rho}{a}\right|}\frac{a}{\lambda_n\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n} + \left(\frac{b}{r}\right)^{\lambda_n}\right] -$$

$$-\frac{1}{2b}e^{-\lambda_n\left|\ln\frac{b}{\rho}\right|}\frac{b}{\lambda_n\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n} + \left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right].$$

Побудована функція Гріна має наступні розривні властивості: При перетині лінії $\rho = c$ похідна $\frac{\partial G_n(r,\rho)}{\partial\rho}$ має стрибок

$$\left\langle\frac{\partial G_n(r,\rho)}{\partial\rho}\right\rangle_{\rho=c} = \left.\frac{\partial G_n(r,\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho=c,r=c-0} - \left.\frac{\partial G_n(r,\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho=c,r=c+0} = \frac{1}{c},$$

а $\left.\left(G_n(r,\rho)\right)\right|_{\rho=c}$ має стрибок похідної:

$$\left\langle\frac{\partial G_n(r,\rho)}{\partial r}\right\rangle_{\rho=c} = \left.\frac{\partial G_n(r,\rho)}{\partial r}\right|_{\rho=c,r=c+0} - \left.\frac{\partial G_n(r,\rho)}{\partial r}\right|_{\rho=c,r=c-0} = -\frac{1}{c}$$

4.2 Побудова розв'язку

Тому розривний розв'язок слід будувати у вигляді:

$$W_n^{**}(r) = c \cdot A_0 \cdot \left.\frac{\partial G_n(r,\rho)}{\partial \rho}\right|_{\rho=c} - c \cdot A_1 \cdot G_n(r,\rho)\Big|_{\rho=c}$$

де A_0 — стрибок переміщення на лінії $r = c$, а A_1 — стрибок похідної від переміщення на цій лінії.

З умови $\langle W_n(c)\rangle = W_n(c-0) - W_n(c+0) = \chi_n$ випливає, що $A_0 = \chi_n$, а з умови $\langle T_{rr,n}(c)\rangle = G_1 W_n'(c-0) - G_2 W_n'(c+0) = 0$, яку ми перетворюємо наступним чином:

$$G_1 W_n'(c-0) - G_1 W_n'(c+0) = G_2 W_n'(c+0) - G_2 W_n'(c-0),$$

$$G_1 \left[W_n'(c-0) - W_n'(c+0)\right] = (G_2 - G_1) W_n'(c+0),$$

тоді $\langle W_n'(c)\rangle = W_n'(c-0) - W_n'(c+0) = G_{12} W_n'(c+0)$, де $G_{12} = \frac{G_2 - G_1}{G_1}$.

Випливає, що $A_1 = G_{12} W_n'(c+0)$.

Отже, розривний розв'язок має вигляд:

$$W_n^{**}(r) = c \cdot \chi_n \cdot \left.\frac{\partial G_n(r,\rho)}{\partial \rho}\right|_{\rho=c} - c \cdot G_{12} W_n'(c+0) \cdot G_n(r,c)$$

РОЗДІЛ 5

ПОБУДОВА РОЗРИВНОЇ ЗАДАЧІ

Розв'язок задачі, що розглядається, буде складатися з суми неперервного та розривного розв'язків.

$$W_n(r) = W_n^*(r)+W_n^{**}(r) = \frac{bP_n}{G_2\lambda_n\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n}\right]+c\cdot\chi_n\cdot\left.\frac{\partial G_n(r,\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho=c}-$$

$$-c\cdot G_{12}W_n'(c+0)G_n(r,c).$$

Ця формула містить невідому величину $W_n'(c+0)$. Для її знаходження використовуємо наступний прийом — знайдемо похідну $W_n'(r)$ та покладемо у ній $r = c+0$:

$$W_n'(r) = \frac{bP_n}{G_2\Delta_n\cdot r}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right]+c\cdot\chi_n\cdot\left.\frac{\partial^2 G_n(r,\rho)}{\partial r\partial\rho}\right|_{\rho=c}-$$

$$-c\cdot G_{12}W_n'(c+0)\frac{\partial G_n(r,c)}{\partial r}$$

Обчислимо:

$$\left.\frac{\partial G_n}{\partial\rho}\right|_{\rho=c} = \frac{1}{2r}\mathrm{sign}(\ln\frac{r}{c})e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}-\frac{1}{2r}e^{-\lambda_n|\ln\frac{a}{c}|}\frac{1}{\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{r}\right)^{\lambda_n}\right]-$$

$$-\frac{1}{2r}e^{-\lambda_n|\ln\frac{b}{c}|}\frac{1}{\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right]$$

Тепер обчислимо

$$\frac{\partial G_n(r,\rho)}{\partial\rho} = -\frac{1}{2\rho}\mathrm{sign}\left(\ln\frac{r}{\rho}\right)e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{\rho}|}-\frac{1}{2\rho}\mathrm{sign}\left(\ln\frac{a}{\rho}\right)\cdot\frac{1}{\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{b}{r}\right)^{\lambda_n}\right]-$$

$$-\frac{1}{2\rho}\mathrm{sign}\left(\ln\frac{b}{\rho}\right)\cdot\frac{1}{\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right]$$

Тоді
$$\left.\frac{\partial G_n(r,\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho=c} = -\frac{1}{2c}\mathrm{sign}\left(\ln\frac{r}{c}\right)e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}$$
$$+\frac{1}{2c}\cdot\frac{1}{\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{b}{r}\right)^{\lambda_n}\right]-\frac{1}{2c}\cdot\frac{1}{\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right]$$

Знайдемо тепер
$$\left.\frac{\partial^2 G_n(r,\rho)}{\partial r\partial\rho}\right|_{\rho=c}.$$

Спочатку обчислимо похідну від першого доданку: коли $r > c$ маємо
$$\left(-\frac{1}{2c}e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}\right)' = \frac{\lambda_n}{2c} - \frac{1}{r}e^{-\lambda_n\ln\frac{r}{c}}.$$

Коли $r < c$ маємо
$$\left(\frac{1}{2c}e^{\lambda_n\ln\frac{r}{c}}\right)' = \frac{\lambda_n}{2c}\cdot\frac{1}{r}e^{\lambda_n\ln\frac{r}{c}},$$

тобто
$$\left(-\frac{1}{2c}\mathrm{sign}(\ln\frac{r}{c})e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}\right)' = \frac{\lambda_n}{2cr}e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}.$$

Тоді
$$\left.\frac{\partial^2 G_n(r,\rho)}{\partial r\partial\rho}\right|_{\rho=c} = \frac{\lambda_n}{2cr}e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}+\frac{\lambda_n}{2cr\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{r}\right)^{\lambda_n}\right]-$$
$$-\frac{\lambda_n}{2cr\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right]$$

Таким чином:
$$W_n'(r) = \frac{bP_n}{G_2 r\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right]+\chi_n\left\{\frac{\lambda_n}{2r}e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}+\frac{\lambda_n}{2\rho\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{r}\right)^{\lambda_n}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{\lambda_n}{2r\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right]\right\} - cG_{12}W_n'(c+0)\left\{\frac{1}{2r}\mathrm{sign}\left(\ln\frac{r}{c}\right)e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}-\right.$$

$$-\frac{1}{2r}e^{-\lambda_n|\ln\frac{a}{c}|}\cdot\frac{1}{\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{r}\right)^{\lambda_n}\right]-\frac{1}{2r}e^{-\lambda_n|\ln\frac{b}{c}|}\cdot\frac{1}{\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right]\Bigg\}.$$

Якщо покладемо тут $r=c+0$, то отримаємо лінійне алгебраїчне рівняння відносно $W'_n(c+0)$:

$$W'_n(c+0)=\frac{bP_n}{G_2c\Delta_n}\left[\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]+$$

$$+\chi_n\left\{\frac{\lambda_n}{2c}+\frac{\lambda_n}{2\Delta_n c}\left[\left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n}\right]-\frac{\lambda_n}{2\Delta_n c}\left[\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]\right\}-$$

$$-G_{12}W'_n(c+0)\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\lambda_n|\ln\frac{a}{c}|}\cdot\frac{1}{\Delta_n}\left[\left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n}\right]-$$

$$-\frac{1}{2c}e^{-\lambda_n|\ln\frac{b}{c}|}\cdot\frac{1}{\Delta_n}\left[\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]\}.$$

Помножим на $2\Delta_n$:

$$W'_n(c+0)=\frac{2bP_n}{cG_2}\left[\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n}\right]+$$

$$+\chi_n\frac{\lambda_n}{c}\left\{\Delta_n+\left[\left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n}\right]-\left[\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]\right\}.$$

Позначимо:

$$\Delta_n^*=(2+G_{12})\,\Delta_n-G_{12}\{e^{-\lambda_n|\ln\frac{a}{c}|}\left[\left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n}\right]+$$

$$+e^{-\lambda_n|\ln\frac{b}{c}|}\left[\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]\}.$$

Тоді

$$W'_n(c+0)=\frac{2bP_n}{cG_2\Delta_n^*}\left[\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]+$$

$$+\chi_n\frac{\lambda_n}{c\Delta_n^*}\left[\Delta_n+\left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]$$

Таким чином, знайдена трансформанка переміщення:

$$W_n(r) = \frac{bP_n}{G_2\lambda_n\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n} + \left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\chi_n\left[\operatorname{sign}(\ln\frac{r}{c})e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|} - \frac{1}{\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n} + \left(\frac{b}{r}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right]\right]$$

$$-\frac{2bP_n}{G_2\Delta_n^*}G_{12}\left[\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]G_n(r,c) -$$

$$-\chi_n\frac{\lambda_n}{\Delta_n^*}G_{12}\left[\Delta_n + \left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n} + \left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n} + \left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]G_n(r,c)$$

Одник вона містить невідому величину χ_n. Для її знаходження отримаємо інтегральне рівняння.

РОЗДІЛ 6

ОТРИМАННЯ ТА АНАЛІЗ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Застосуємо тепер формулу обернення перетворення Фур'є:

$$W(r,\theta) = \frac{2}{\pi-2\alpha}\frac{b}{G_2}\sum_{n=1}^{\infty} P_n\left\{\frac{1}{\lambda_n\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\Delta_n^*}G_{12}\left[\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]G_n(r,c)\right\}\sin\lambda_n(\theta-\alpha)-$$

$$-\frac{1}{\pi-2\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\chi_n\left\{\operatorname{sign}(\ln\frac{r}{c})e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}-\frac{1}{\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{b}{r}\right)^{\lambda_n}-\right.\right.$$

$$\left.-\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n}\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}]-\frac{2\lambda_n}{\Delta_n^*}G_{12}\left[\Delta_n+\left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]\cdot$$

$$\cdot G_n(r,c)\}\sin\lambda_n\left(\theta-\alpha\right)$$

В перший ряд підставимо значення $G_n\left(r,c\right)$ та отримаємо:

$$\frac{2b}{(\pi-2\alpha)G_2}\sum_{n=1}^{\infty}P_n\left\{\frac{1}{\lambda_n\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right]+\frac{G_{12}}{\lambda_n\Delta_n^*}\left[\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}+\frac{1}{\Delta_n}e^{-\lambda_n|\ln\frac{a}{c}|}\left[\left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{b}{r}\right)^{\lambda_n}\right]+\frac{1}{\Delta_n}e^{-\lambda_n|\ln\frac{b}{c}|}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right]\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\sin\lambda_n\left(\theta-\alpha\right)$$

Так як $\Delta_n \sim \left(\frac{b}{a}\right)^{\lambda_n}$; $\Delta_n^* \sim \left(\frac{b}{a}\right)^{\lambda_n}$ коли $\lambda_n \to \infty$, то цей ряд збігається рівномірно для усіх $r \in [a;b]$. Позначимо його суму через $F(r,\theta)$.

В другий ряд підставимо:

$$\chi_n = \int_{\beta}^{\pi-\beta}\chi(\eta)\sin\lambda_n(\eta-\alpha)d\eta.$$

Та вважаємо, що $r \neq c$ змінюємо порядк сумування та інтегрування, що можна зробити, так як у данному випадку він збігається рівномірно. Таким чином отримуємо

$$K(r,\theta,\eta) = \frac{1}{(\pi-2\alpha)}\int_{\beta}^{\pi-\beta}\chi(\eta)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\operatorname{sign}(\ln\frac{r}{c})e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}\right.\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Delta_n}\left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{b}{r}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right]+$$

$$+\frac{G_{12}}{\Delta_n^*}\left[\Delta_n+\left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}+\frac{e^{-\lambda_n|\ln\frac{a}{c}|}}{\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{b}{r}\right)^{\lambda_n}\right]+\frac{e^{-\lambda_n|\ln\frac{b}{c}|}}{\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right]\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\sin\lambda_n(\theta-\alpha)\sin\lambda_n(\eta-\alpha)d\eta.$$

Для знаходження невідомої функції $\chi(\eta)$ — стрибка переміщення при перетині тріщини, використаємо умову відсутності напружень на берегах тріщини:

$$\tau_{rz}(r,\theta)\big|_{r=c\pm0}=0 \qquad \beta<\theta<\pi-\beta,$$

тобто

$$\frac{\partial W}{\partial r}\big|_{r=c+0}=0 \qquad \beta<\theta<\pi-\beta.$$

Для цього потрібно взяти похідну по r та покласти $r=c+0$. У функції $F(r,\theta)$ ряд збігається рівномірно, разом із рядом похідних від нього членів тому ми можемо проференціювати під знаком суми:

$$\frac{\partial F(r,\theta)}{\partial r}\big|_{r=c+0}=\frac{2b}{(\pi-2\alpha)cG_2}\sum_{n=1}^{\infty}P_n\left\{\frac{1}{\lambda_n\Delta_n}\left[\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]+\right.$$

$$+\frac{G_{12}}{\Delta_n^*}\left[\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]\cdot\left[-1+\frac{1}{\Delta_n}e^{-\lambda_n|ln\frac{a}{c}|}\left[\left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{c}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\Delta_n}e^{-\lambda_n|ln\frac{b}{c}|}\cdot\left[\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]\right]\right\}\cdot\sin\lambda_n(\theta-\lambda)$$

Отриманий результат позначимо через $H(\theta)$.

Якщо ми зробимо теж саме з рядом який міститься у $r \neq c$ то отримаємо розбіжний ряд. Тоді ми можемо диференціювати ряд за членами, а потім виділити слабозбіжну частину та просумувати її:

$$\frac{\partial K(r,\theta,\eta)}{\partial r}\Big|_{r=c} = \frac{1}{r(\pi-2\alpha)}\int_{\beta}^{\pi-\beta}\chi(\eta)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|} - \frac{\lambda_n}{\Delta_n}\left[\left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{b}{r}\right)^{\lambda_n} - \right.\right.$$

$$- \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n} + \left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\Bigg] + \frac{G_{12}}{\Delta_n^*}\left[\Delta_n + \left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n} + \left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\operatorname{sign}\left(\ln\frac{r}{c}\right)e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|} + \frac{1}{\Delta_n}e^{-\lambda_n|\ln\frac{c}{a}|}\left[\left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{b}{r}\right)^{\lambda_n}\right] + \right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\Delta_n}e^{-\lambda_n|ln\frac{a}{c}|}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right]\right]\right\}\sin\lambda_n(\theta-\alpha)\sin\lambda_n(\eta-\alpha)d\eta$$

Розглянемо ту частину ряда яка має особливість:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\lambda_n e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|} - \frac{\lambda_n}{\Delta_n^*}G_{12}\Delta_n\operatorname{sign}(\ln\frac{r}{c})e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}\right\}\cdot\sin\lambda_n(\theta-\alpha)\sin\lambda_n(\eta-\alpha).$$

Розглянемо $G_{12}\frac{\Delta_n}{\Delta_n^*}$, де $\Delta_n^* = (2+G_{12})\Delta_n - G_{12}\gamma_n$:

$$\gamma_n = \frac{G_{12}}{2+G_{12}} + \frac{G_{12}^2\gamma_n}{\Delta_n^*}$$

Отже:

$$\frac{\partial K(r,\theta,\eta)}{\partial r}\Big|_{r\neq c} = \frac{1}{2(\pi-\alpha)}\int_{\beta}^{\pi-\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\lambda_n\left(1+\frac{G_{12}}{2+G_{12}}\operatorname{sign}(\ln\frac{r}{c})\right)e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}\cdot\right.$$

$$\cdot\sin\lambda_n(\theta-\alpha)\sin\lambda_n(\eta-\alpha)\chi(\eta)d\eta +$$

$$+\frac{1}{2(\pi-2\alpha)}\int_{\beta}^{\pi-\beta}\chi(\eta)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{\lambda_n}{\Delta_n}G_{12}^2\operatorname{sign}(\ln\frac{r}{c})e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}\cdot\right.$$

$$\cdot\left[e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}\left(\left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n}\right)+e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}\left(\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right)\right]-$$

$$-\frac{\lambda_n}{\Delta_n}\left(\left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{r}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right)+$$

$$+\frac{\lambda_n}{\Delta_n^*}G_{12}\left(\left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right)\cdot\frac{1}{\Delta_n}\cdot$$

$$\cdot\left[e^{-\lambda_n|\ln\frac{a}{c}|}\left(\left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{r}\right)^{\lambda_n}\right)+e^{-\lambda_n|ln\frac{b}{c}|}\left(\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda}_n-\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_n}\right)\right]-$$

$$-\frac{\lambda_n}{\Delta_n}G_{12}\cdot sign(ln\frac{a}{c})e^{-\lambda_n|ln\frac{r}{c}|}\left[\left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]\Bigg\}\cdot$$

$$\cdot\sin\lambda_n(\theta-\alpha)\sin\lambda_n(\eta-\alpha)d\eta.$$

Тут в другому інтегралі ряд вже буде збігатись рівномірно. Тому ми можемо в ньому перейти до границі коли $r\to c$ та отримуємо:

$$\frac{1}{c(\pi-2\alpha)}\int_{\beta}^{\pi-\beta}\chi(\eta)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{\lambda_n}{\Delta_n}G_{12}\left[e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}\left(\left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n}\right)\right]\right.\right.$$

$$+e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}\left(\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right)$$

$$-\frac{\lambda_n}{\Delta_n}\left(\left(\frac{r}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{r}\right)^{\lambda_n}\right)\Bigg]+\frac{\lambda_n}{\Delta_n\Delta_n^*}G_{12}\left[\left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n}\right]$$

$$+e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}\left(\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right)$$

$$\left.-\frac{\lambda_n}{\Delta_n}G_{12}\mathrm{sign}(\ln\frac{r}{c})e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}\left[\left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n}\right]\Bigg]\sin\lambda_n(\theta-\alpha)\sin\lambda_n(\eta-\alpha)d\eta.\right\}.$$

Позначимо через $R(\theta,\eta)$:

$$R(\theta,\eta)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\lambda_n}{\Delta_n^*}G_{12}^2\left[-\lambda_n|\ln\frac{a}{c}|\left(\left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n}\right)\right]\right.$$

$$\left.+e^{-\lambda_n|\ln\frac{c}{a}|}\left[\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]+\lambda_n\left[\left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}+\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right]\right\}.$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\Delta_n}+\frac{G_{12}}{\Delta_n\Delta_n^*}\left[e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}\left(\left(\frac{c}{b}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_n}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}\left(\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_n}-\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_n}\right)\right]\right]\sin\lambda_n(\theta-\alpha)\sin\lambda_n(\eta-\alpha)d\eta.$$

$$\left.+\frac{G_{12}}{\Delta_n\Delta_n^*}\right\}\sin\lambda_n(\theta-\alpha)\sin\lambda_n(\eta-\alpha)d\eta.$$

Тоді цей інтеграл запишеться у вигляді:

$$\frac{1}{c(\pi-2\alpha)}\int_{\beta}^{\pi-\beta}\chi(\eta)R(\theta,\eta)d\eta.$$

Що стосується першого інтегралу, то беря до уваги що він є збіжним коли $r\neq c$, використаємо тотожність:

$$\sin\lambda_n(\theta-\alpha)=-\frac{1}{\lambda_n}\frac{d^2}{d\theta^2}\sin\lambda_n(\theta-\alpha)$$

Та запишемо його у вигляді:

$$\frac{1}{\pi(\pi-2\alpha)}\left[1+\frac{G_{12}}{2+G_{12}}\text{sign}(\ln\frac{r}{c})\right]\frac{d}{d\theta}\int_{\beta}^{\pi-\beta}\chi(\eta)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n(\theta-\alpha)\sin\lambda_n(\eta-\alpha)}{\lambda_n}\right]$$

$$\cdot e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}d\eta.$$

Та просумуємо ряд, який стоїть під знаком інтегралу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n(\theta-\alpha)\sin\lambda_n(\eta-\alpha)}{\lambda_n}e^{-\lambda_n|\ln\frac{r}{c}|}=$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\lambda_n(\theta-\eta) - \cos\lambda_n(\theta+\eta-2\alpha)}{\lambda_n} e^{-\lambda_n |\ln\frac{r}{c}|}.$$

Розглянемо спрощену форму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n}{\pi-2\alpha}(\theta-\eta)}{\lambda_n} e^{-\lambda_n |\ln\frac{r}{c}|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n(\theta-\eta)}{\lambda_n(\pi-2\alpha)}}{n} e^{-\lambda_n |\ln\frac{r}{c}|}.$$

Використовуємо формулу 5.14.12.6 (А.П. Прудніков та ін. "Інтеграли та ряди").

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} e^{-na} = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\ln\left[2(\cosh a - \cos x)\right]$$

де у нашому випадку:

$$x = \frac{\pi(\theta-\eta)}{\pi-2\alpha}, \quad a = \frac{\pi}{\pi-2\alpha}\left|\ln\frac{r}{c}\right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\lambda_n(\theta-\eta)}{\lambda_n} e^{-\lambda_n |\ln\frac{r}{c}|} =$$

$$= \frac{1}{2}|\ln\frac{r}{c}| - \frac{\pi-2\alpha}{2\pi}\ln\left[2\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{\pi-2\theta}|\ln\frac{r}{c}| - \cos\frac{\pi(\theta-\eta)}{\pi-2\alpha}\right)\right]$$

Так само просумуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n(\theta+\alpha-2\alpha))e^{-\lambda_n |\ln\frac{r}{c}|}}{\lambda_n} = \frac{1}{2}|\ln\frac{r}{c}|$$

$$-\frac{\pi-2\alpha}{2\pi}\ln\left[2\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{\pi-2\alpha}|\ln\frac{r}{c}| - \cos\frac{\pi(\theta+\eta-2\alpha)}{\pi-2\alpha}\right)\right]$$

Отже, отримуємо:

$$\frac{1}{2r(\pi-2\alpha)}\left[1+\frac{G_{12}}{2+G_{12}}\cdot\mathrm{sign}\left(\ln\frac{r}{c}\right)\right]\frac{d^2}{d\theta^2}\int_{\beta}^{\pi-\beta}\chi(\eta)\left[-\frac{1}{2}|\ln\frac{r}{c}|-\right.$$

$$-\frac{\pi-2\alpha}{2\pi}\ln\left[2\left(\mathrm{ch}\frac{\pi}{\pi-2\alpha}\ln\frac{r}{c}-\cos\frac{\pi(\theta-\eta)}{\pi-2\alpha}\right)\right]$$

$$\left.+\frac{\pi-2\alpha}{2\pi}\ln\left[2\left(\mathrm{ch}\frac{\pi}{\pi-2\alpha}\ln\frac{r}{c}-\cos\frac{\pi(\theta+\eta-2\alpha)}{\pi-2\alpha}\right)\right]\right]d\eta$$

Тепер ми вже можемо перейти до границі коли $r\to c+0$, та отримати:

$$\frac{1}{2c(\pi-2\alpha)}\left[1+\frac{G_{12}}{2+G_{12}}\right]\frac{d^2}{d\theta^2}\int_{\beta}^{\pi-\beta}\chi(\eta)\left[\frac{1}{2}\ln\left|2(1-\cos\frac{\pi(\theta-\eta)}{\pi-2\alpha})\right|\right]d\eta.$$

Таким чином для знаходження невідомої функції $\chi(\eta)$ ми отримали інтегро-диференціальне рівняння:

$$-\frac{1}{\pi c}\frac{1+G_{12}}{2+G_{12}}\frac{d^2}{d\eta^2}\left[\chi(\eta)\ln 2\sin\left(\frac{\pi(\theta-\eta)}{2(\pi-2\alpha)}\right)\right]d\eta+$$

$$+\frac{1}{c(\pi-2\alpha)}\int_{\beta}^{\pi-\beta}\chi(\eta)R(\theta,\eta)d\eta=-H(\theta),\quad \beta<\theta<\pi-\beta.$$

перетворемо це рівняння так, щоб для його розв'язку можно було застосувати метод ортогональних многочленів. Спочатку зробимо зміну змінних щоб перевести проміжок інтегрування $(\pi,\pi-\beta)$ на проміжок $(-1,1)$:

$$\theta=\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\varphi+\frac{\pi}{2};\quad \eta=\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)t+\frac{\pi}{2}.$$

Тоді: $\theta-f\eta=\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)(\varphi-t);\quad \theta+\eta=\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)(\varphi+t).$

Позначимо:

$$\chi^*(t) = \chi\left(\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)t+\frac{\pi}{2}\right); \quad H^*(\varphi) = H\left(\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$R^*(\varphi,t) = R\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)(\varphi+t), \quad d\varphi = \left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)d\varphi, \quad d\eta = \left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)dt.$$

Так як $d\theta = \left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)d\varphi$, а $d\eta = \left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)dt$, та $\frac{1+G_{12}}{2+G_{12}} = \frac{G_2}{G_1+G_2}$, тоді:

$$-\frac{1}{\pi c}\cdot\frac{G_{12}}{G_1+G_2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}\cdot\frac{d^2}{d\varphi^2}\int_{-1}^{1}\chi^*(t)\left[\ln 2\cdot\frac{\pi(\frac{\pi}{2}-\beta)(\varphi+t)}{2(\pi-2\alpha)}-\right.$$

$$\left.-\ln 2\sin\frac{\pi\left[\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)(\varphi+t)+\pi-2\alpha\right]}{2\left(\pi-2\alpha\right)}\right]+$$

$$+\frac{1}{c(\pi-2\alpha)}\int_{-1}^{1}\chi^*(t)R^*(\varphi,t)\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)dt = -H^*(\varphi), \quad -1<\varphi<1$$

Умножим на $\frac{\pi c(G_1+G_2)}{G_2}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$:

$$-\frac{d^2}{d\varphi^2}\int_{-1}^{1}\chi^*(t)\left[\ln 2\sin\cdot\frac{\pi(\frac{\pi}{2}-\beta)(\varphi+t)}{2(\pi-2\alpha)}-\ln 2\sin\frac{\pi\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)(\varphi+t)+\pi-2\alpha\right]}{2\left(\pi-2\alpha\right)}\right]dt$$

$$+\frac{\pi c(G_1+G_2)}{G_2}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)^2\int_{-1}^{1}\chi^*(t)R^*(\varphi,t)dt = \frac{\pi c(G_1+G_2)}{G_2}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)H^*(\varphi),$$
$$-1<\varphi<1$$

Тепер трансформуємо сингулярну частину ядра:

$$\ln 2\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)(\varphi+t)}{2(\pi-2\alpha)} = \ln 2\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)(\varphi+t)}{2(\pi-2\alpha)}$$

$$+\ln\frac{1}{\varphi+t}-\ln\frac{1}{|\varphi-t|}=-\ln\frac{1}{\varphi+t}+\ln 2\frac{\sin\frac{\pi(\frac{\pi}{2}-\beta)|\varphi-t|}{2(\pi-2\alpha)}(\varphi+t)}{(\varphi-t)}$$

При цьому вираз $\ln 2\sin\left(\frac{\pi(\eta-\beta)|\eta+1|}{2(\pi-2\alpha)}\right)\to\frac{\pi(\eta-\beta)}{\pi-2\alpha}$ коли $|\eta+1|\to 0$,

тобто не має особливостей.

Тоді інтегральне рівняння набуває вигляду:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\int_{-1}^{1}\chi^*(t)\ln\frac{1}{|\varphi-t|}dt+\int_{-1}^{1}M\left(\varphi,t\right)\chi^*(t)dt=N(\varphi),-1<\varphi<1$$

де

$$M\left(\varphi,t\right)=\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left[-\ln 2\frac{sin\frac{\pi\left(\frac{\pi}{2}=\beta\right)|\varphi-t|}{2(\pi-2\alpha)}}{|\varphi-t|}+ln2sin\frac{\pi\left[\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\left(\varphi+t\right)+\pi-2\alpha\right]}{2\left(\pi-2\alpha\right)}\right]+$$

$$+\frac{\pi\left(G_1+G_2\right)}{G_2\left(\pi-2\alpha\right)}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)^2R^*(\varphi,t)$$

і

$$N(\varphi)=\frac{\pi c(G_1+G_2)}{G_2}(\frac{\pi}{2}-\beta)H^*(\varphi)$$

РОЗДІЛ 7

РОЗВ'ЯЗОК ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

Для знаходження невідомої функції $\chi^*(t)$ було отримано інтегральне рівняння

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\int_{-1}^{1}\chi^*(t)ln\frac{1}{|\varphi-t|}dt+\int_{-1}^{1}M(\varphi,t)\chi^*(t)dt=N(\varphi)$$

Для розв'язання цього рівняння використовую метод ортогональних многочленів.

Наявність спектрального співвідношення

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\int_{-1}^{1}ln\frac{1}{|\varphi-t|}\sqrt{1-t^2}U_n(t)dt=-\pi(n+1)U_n(\varphi)$$

де $U_n(\varphi)$ многочлен Чебишева 2-го роду дозволяє нам побудувати розв'язок цього рівняння у вигляді розвинення за многочленами Чебишева

$$x^*(t)=\sqrt{(1-t^2)}\sum_{n=0}^{\infty}x_n^*U_n(t)$$

Підставимо його в рівняння та змінемо порядок інтегрування та підсумування

$$\sum_{n=0}^{\infty}x_n^*\frac{d^2}{d\varphi^2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}ln\frac{1}{|\varphi-t|}U_n(t)+\sum_{n=0}^{\infty}x_n^*\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}M(\varphi,t)U_n(t)dt=N(\varphi)$$

Використовуючи спектральне співвідношення отримуємо

$$-\pi\sum_{n=0}^{\infty}x_n^*(n+1)U_n(\varphi)+\sum_{n=0}^{\infty}x_n^*\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}M(\varphi,t)U_n(t)dt=N(\varphi)$$

Помножимо цю рівність на $\sqrt{1-\varphi^2}U_m(\varphi)$ та проінтегруємо за змінною φ на проміжку (-1;1)

Маємо

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\varphi^2}N(\varphi)U_m(\varphi)d\varphi$$

Далі використовиэмо ортогональність многочленів Чебишева 2-го роду

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\varphi^2}U_n(\varphi)U_m(\varphi)d\varphi = \frac{\pi}{2}\delta_{nm}$$

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Тоді отримуємо

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\varphi^2}N(\varphi)U_m(\varphi)d\varphi$$

Помножимо цей вираз на $-\frac{2}{\pi^2\sqrt{m+1}}$ та запишемо його у вигляді

$$-\frac{2}{\pi^2\sqrt{m+1}}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\varphi^2}N(\varphi)U_m(\varphi)\,d\varphi$$

позначимо

$$\psi_m = x^*\sqrt{m+1}$$

$$H_{mn} = -\frac{2}{\pi^2\sqrt{(m+1)(n+1)}}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\varphi^2}U_m(\varphi)d\varphi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}M(\varphi,t)U_n(t)dt$$

$$B_m = -\frac{2}{\pi^2\sqrt{(m+1)}}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\varphi^2}N(\varphi)U_n(\varphi)d\varphi$$

Отже отримали нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\psi_m + \sum_{n=0}^{x} A_{mn}\psi_n = B_m, m = 0{,}1{,}2...$$

Яку буддемо розв’язувати методом редукції Для обчислення інтервалів які міститься у виразах для A_{mn} та B_m, зручно використати наступну квадратурну формулу Чебишева

$$\int_{-1}^{1} F(x)\sqrt{1-x^2}dx = \sum_{i=1}^{N} W_i f(x_i)$$

де $w_i = \frac{\pi}{N+1}\sin^2\frac{\pi i}{N+1}; x_i = \cos\frac{\pi i}{N+1}$

Враховуючи, що $U_k(x_i) = \frac{\sin[(k+1)\arccos x]}{\sin\arccos x}$

Отримаємо

$$U_k(x_i) = \frac{\sin\left[(k+1)\frac{\pi i}{N+1}\right]}{\sin\frac{\pi i}{N+1}}$$

Тоді маємо наступну квадратурну формулу

$$\frac{\pi}{N+1}\sum_{i=1}^{N}\sin\frac{\pi}{N+1}\sin\left[(k+1)\frac{\pi}{N+1}\right]F(\cos\frac{\pi}{N+1})$$

Звідки

$$B_m = -\frac{2}{\pi\sqrt{m+1}}\cdot\frac{1}{N+1}\sum_{i=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi i}{N+1}\right)\sin\left((m+1)\frac{\pi i}{N+1}\right)N\left(\cos\frac{\pi i}{N+1}\right)$$

$$A_{mn} = -\frac{2}{\sqrt{(m+1)(n+1)}(N+1)^2}\cdot\sum_{i=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi i}{N+1}\right)\sin\left((m+1)\frac{\pi i}{N+1}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{N} \sin\left(\frac{\pi j}{N+1}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\pi j}{N+1}\right) M\left(\cos\left(\frac{\pi i}{N+1}\right), \cos\left(\frac{\pi j}{N+1}\right)\right)$$

РОЗДІЛ 8

ЗНАХОДЖЕННЯ ФОРМУЛ ДЛЯ КОЕФІЦІЕНТІВ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ

Знаходження коефіцієнтів інтенсівності напружень (КІН)

При розв'язанні задач з дефектами у вигляді тріщин з чисельних результатів найбільший інтерес представляє коефіцієнт інтенсивності напружень в околі вершин тріщини. Це пов'язано з тим, що від його значень залежить подальше розвинення тріщини – буде вона зростати чи ні.

На цьому коефіцієнті будуються деякі закони у механіці руйнування.

У данному випадку КІН визначається як

$$K_{III}^{-} = \lim_{\theta \to \beta - 0} \sqrt{2\pi(\beta - \theta)} \tau_{rz}|_{r=c+0}$$

$$K_{III}^{+} = \lim_{\pi - \theta \to \beta - 0} \sqrt{2\pi(\theta - \pi + \beta)} \tau_{rz}|_{r=c+0}$$

Так як $\tau_{rz}|_{r=c+0} = G_2 \frac{\delta W}{\delta r}|_{r=c+0}$, то в отриманому раніше виразу для похідної $\frac{\delta w}{\delta r}|_{r=c+0}$ відкинемо доданки, які мають скінчену границю коли $\theta \to \pi - \beta + 0$ або $\theta = \beta - 0$, так як вони обернути до нуля за рахунок кореня який сходтться у приведених формулах для КІН

Тобто візмемо з урахуванням зроблених змін

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{4(1+G_{12})}{C(\pi - 2\alpha)(\pi - 2\beta)(2 + G_{12})} \frac{d^2}{d\varphi^2} \int_{-1}^{1} \chi^*(t) \frac{1}{\ln|\varphi - t|} \, dt + \ldots$$

Тому наприклад

$$K_{III}^{+} = \frac{4(1+G_{12})G_2}{c(\pi - 2\beta)(\pi - 2\alpha)(2\alpha + G_{12})} \lim_{\varphi \to 1+0} \sqrt{2\pi\beta(\varphi - 1)} \frac{d^2}{d\varphi^2} \int_{-1}^{1} \chi^*(t) \ln|\varphi - t| \, dt$$

Підставимо сюди рівняння

$$\chi^*(t) = \sqrt{1-t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\chi_n^* U_n(t),$$

Тоді

$$K_{III}^+ = \frac{4(1+G_{12})G_2\sqrt{2\pi\beta}}{c(\pi-2\alpha)(\pi-2\beta)(2\alpha+G_{12})}\cdot$$

$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\chi_n^* \lim_{\varphi\to 1+0}\sqrt{\varphi-1}\frac{d^2}{d\varphi^2}\int_{-1}^{1}U_n(t)\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1}{|\varphi-t|}\,dt$$

Якщо враховувати асимптотику останього інтегралу

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\int_{-1}^{1}U_n(t)\sqrt{1-t^2}\ln|\varphi-t|\,dt \sim \frac{\pi|\varphi|}{\sqrt{\varphi^2-1}}U_n(\varphi) \quad \text{коли}\, \varphi\to 1+0,$$

$$K_{III}^+ = \frac{4\pi(1+G_{12})G_2\sqrt{2\pi\beta}}{c(\pi-2\beta)(\pi-2\alpha)(2+G_{12})}\sum_{n=0}^{\infty}\chi_n^* U_n(1)$$

Враховуючи, що $U_n(1) = n+1$, а $\chi_n^* = \dfrac{\Psi_n}{\sqrt{n+1}}$,

$$K_{III}^+ = \frac{4\pi\sqrt{\pi\beta}(1+G_{12})G_2}{c(\pi-2\beta)(\pi-2\alpha)(2+G_{12})}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}\Psi_n$$

Так само знаходимо

$$K_{III}^- = \frac{4(1+G_{12})\sqrt{\pi}G_2}{c(\pi-2\alpha)\sqrt{\pi-2\beta}(2cG_{12})}\cdot$$

$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\chi_n^* \lim_{\varphi\to -1-0}\sqrt{-\varphi-1}\frac{\pi|\varphi|}{\sqrt{(-1-\varphi)(-\varphi+1)}}U_n(\varphi) =$$

$$= \frac{4(1+G_{12})\sqrt{\pi}G_2}{c(\pi-2\alpha)\sqrt{\pi-2\beta}(2+G_{12})}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\chi_n^*\frac{\pi}{\sqrt{2}}U_n(-1)$$

Враховуючи, що $U_n(-1) = (-1)^n U_n(1) = (-1)^n(n+1)$

$$K_{III}^{-} = \frac{4(1+G_{12})}{c(\pi-2\alpha)\sqrt{\pi-2\beta}(2+G_{12})} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n+1}\psi_n$$

РОЗДІЛ 9

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ЕКСПЕРЕМЕНТІВ

У цьому розділі представлені результати розрахунку коефіцієнта інтенсивності напружень для різних значень параметрів α, β і c. Значення α, β і c залишаються постійними в рамках кожної серії розрахунків. При цьому коефіцієнт інтенсивності напружень розраховується для фіксованих значень:

- α — кут нахилу, що характеризує внутрішню геометрію кільцевого сектора;
- β — кут, що визначає положення тріщини відносно центру кільцевого сектора;
- c — радіус, який визначає відстань до міжфазної межі в двошаровій системі.

Для розрахунку будуть постійні $a = 1$, $b = 2$, $G_1 = 1$, $G_2 = 2$, $G_{12} = \frac{G_1}{G_2}$

Навантаження буде $p(\theta) = cos(\theta)$

Значення параметрів α, β, і c обрані відповідно до умов задачі, а результати розрахунків наведені в таблиці нижче.

α	β	c	K_{III}^{+}	K_{III}^{-}
0.10π	0.17π	1.25	2.0694	2.0694
0.10π	0.17π	1.5	1.7245	1.7245
0.10π	0.17π	1.75	1.4781	1.4781
0.10π	0.20π	1.25	1.5296	1.5296
0.10π	0.20π	1.5	1.2746	1.2746
0.10π	0.20π	1.75	1.0926	1.0926
0.10π	0.25π	1.25	0.8524	0.8524
0.10π	0.25π	1.5	0.7103	0.7103
0.10π	0.25π	1.75	0.6088	0.6088
0.14π	0.17π	1.25	2.3706	2.3706
0.14π	0.17π	1.5	1.9755	1.9755
0.14π	0.17π	1.75	1.6933	1.6933
0.14π	0.20π	1.25	2.0263	2.0263
0.14π	0.20π	1.5	1.6886	1.6886
0.14π	0.20π	1.75	1.4473	1.4473
0.14π	0.25π	1.25	0.9537	0.9537
0.14π	0.25π	1.5	0.7947	0.7947
0.14π	0.25π	1.75	0.6812	0.6812
0.20π	0.25π	1.25	2.6993	2.6993
0.20π	0.25π	1.5	2.2494	2.2494
0.20π	0.25π	1.75	1.9281	1.9281

Табл. 9.1. Результати обчислень K_{III}^{+} та K_{III}^{-} для різних значень α, β, и c

ВИСНОВКИ

У даній роботі було досліджено антильську задачу пружності для двошарового сектору кільця з міжшаровим дефектом. Основною метою було розрахувати коефіцієнти інтенсивності напружень (K_{III}^{+} і K_{III}^{-}) для різних значень кутів розтвору α і β та радіальної відстані c. Розрахунки було виконано за допомогою аналітичного підходу.

Аналіз показав, що коефіцієнти інтенсивності напружень значно залежать від параметрів α, β і c. Збільшення кутів розтвору призводить до зменшення інтенсивності напружень, що відповідає зниженню концентрації напружень поблизу дефекту. Крім того, розрахунки продемонстрували, що за певних умов значення K_{III}^{+} і K_{III}^{-} можуть збігатися, що свідчить про симетричність розподілу напружень в моделі. Це важливо для інженерних застосувань, оскільки дозволяє проектувати більш стійкі до пошкоджень багатошарові конструкції.

Отримані результати можуть бути застосовані для моделювання та аналізу напружень в реальних інженерних структурах, таких як трубопроводи, резервуари високого тиску та багатошарові композитні матеріали, що використовуються в авіаційній і космічній промисловості. Подальші дослідження можуть включати експериментальну перевірку результатів, розширення моделі на інші види дефектів та матеріалів, а також використання інших функцій навантаження для $p(\theta)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Методичні вказівки до курсу «Математичне моделювання деяких задач механіки та техніки» для студентів 3 курсу спеціальности 6.04030101 «Прикладна математика» (укладачі Процеров Ю.С., Мойсеенок О.П.). Одеса, 2015, 61 с. (Розміщена на сайті Наукової бібліотеки Одеського національного університету ім. І.І. Мечнікова).
2. Попов Г.Я., Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. Навчальний посібник з курсу «Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень». Одеса: Астропринт, 2005, 184 с.
3. Божедарник В.В., Сулім Г.Т. Елементи теорії пружності. Львів: Світ, 1994, 560 с.
4. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості. К: Вища школа, 2002, 312 с.
5. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів : навч. посіб. для студ. вузів, які навч. за напрямами підготовки “Прикладна математика”, “Механіка” / Г. Я. Попов [та ін.]. – Одеса : Астропринт, 2010 . – 115 с.

ДОДАТКИ

```
import numpy as np
import pandas as pd

from scipy.integrate import quad

# Define function p(theta) = cos(theta)
def p(theta):
    return np.cos(theta)

def integrand(theta, n, alpha):
    lambda_n = (np.pi * n) / (np.pi - 2 * alpha)
    return p(theta) * np.sin(lambda_n * (theta - alpha))

# Calculate Psi_n (now referred to as psi_n)
def compute_psi_n(n, alpha, beta):
    result, _ = quad(integrand, beta, np.pi - beta, args=(n, alpha))
    return result

# Calculate K_III^+
def compute_KIII_plus(alpha, beta, c):
    if np.isclose(np.pi - 2 * alpha, 0):
        raise ValueError("Invalid alpha value leading to division by zero")

    sum_result = 0
    for n in range(1, 101):
        psi_n = compute_psi_n(n, alpha, beta)
        sum_result += np.sqrt(n + 1) * psi_n

    KIII_plus = (4 * np.pi * np.sqrt(np.pi * beta * (1 + G12) * G2)) / (
                c * (np.pi - 2 * beta) * (np.pi - 2 * alpha) * (2 + G12)) *
                    sum_result
    return KIII_plus

# Calculate K_III^-
def compute_KIII_minus(alpha, beta, c):
    denominator = np.pi - 2 * beta
    if denominator <= 0 or np.isclose(np.pi - 2 * alpha, 0):
        raise ValueError("Invalid parameters leading to a negative value
            under the square root or division by zero")
```

```

    sum_result = 0
    for n in range(101):
        psi_n = compute_psi_n(n, alpha, beta)
        term = ((-1)**n) * np.sqrt(n + 1) * psi_n
        sum_result += term

    KIII_minus = (4 * (1 + G12)) / (c * (np.pi - 2 * alpha) * np.sqrt(denominator) * (2 + G12)) * sum_result
    return KIII_minus


if __name__ == '__main__':
    a = 1.0 # inner boundary radius
    b = 2.0 # outer boundary radius
    G1 = 1.0 # shear modulus of the first material
    G2 = 2.0 # shear modulus of the second material
    G12 = G1 / G2 # ratio of shear moduli

    # Iterate over values of alpha, beta, and c
    alpha_values = [np.pi / 10, np.pi / 7, np.pi / 5]
    beta_values = [np.pi / 6, np.pi / 5, np.pi / 4]
    c_values = [1.25, 1.5, 1.75]

    # Collect data in a table
    results = []
    for alpha in alpha_values:
        for beta in beta_values:
            if beta > alpha: # condition that beta is greater than alpha
                for c in c_values:
                    try:
                        KIII_plus = compute_KIII_plus(alpha, beta, c)
                        KIII_minus = compute_KIII_minus(alpha, beta, c)
                        results.append((f"{alpha / np.pi:.2f}", f"{beta / np.pi:.2f}", c, KIII_plus, KIII_minus))
                    except ValueError as e:
                        print(f"Error calculating for alpha={alpha}, beta={beta}, c={c}: {e}")

    # Create a table
    df_results = pd.DataFrame(results, columns=["alpha", "beta", "c",
```

```
    "K_III^+", "K_III^-"])
df_results.to_csv("results.csv", index=False)
```