

В. М. Воробель, В.В. Реут

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

БЕСКОНЕЧНО ДЛИННАЯ КОРОБЧАТАЯ ОБОЛОЧКА, ПОДКРЕПЛЕННАЯ ДВУМЯ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Розглянута коробчата оболочка, що підкріплена двома прямолінійними абсолютно жорсткими включеннями, які розташовані на протилежних гранях оболочки: одне – паралельно, інше – перпендикулярно ребрам оболочки. Використовується асимптотичний підхід, який враховує тільки згин пластин, що складають оболочку. За допомогою інтегрального перетворення Фур'є задача зведена до системи двох інтегральних рівнянь з неперервними ядрами, розв'язок якої шукається в класі функцій з неінтегровними особливостями.

Рассмотрим бесконечно длинную, однородную и изотропную коробчатую оболочку прямоугольного профиля размером $2a \times 2b$ (рис. 1), толщина h которой мала по сравнению с наименьшим характерным размером оболочки. Верхняя и нижняя грани оболочки подкреплены прямолинейными абсолютно жесткими включениями: одно из которых расположено по центру параллельно, второе – по центру перпендикулярно ребрам оболочки, причем линия, проходящая через середины включений, перпендикулярна срединной поверхности оболочки и находится на одинаковом расстоянии от ее ребер. Оболочка обжимается двумя одинаковыми по величине силами, приложенными к серединам включений.

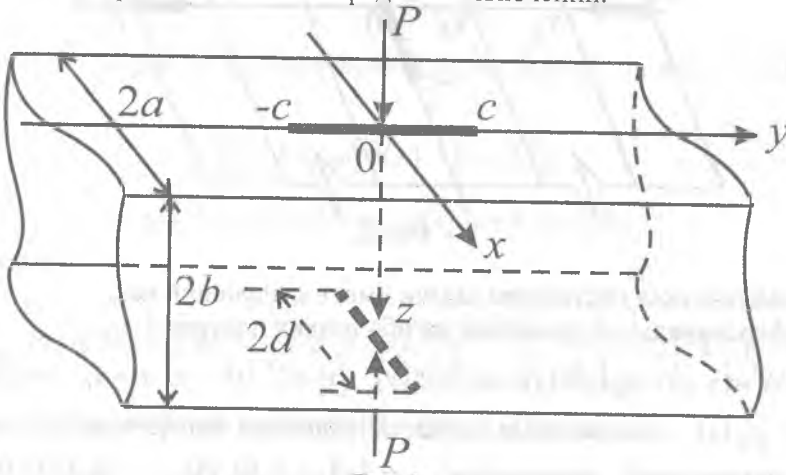


Рис.1.

Напряженно-деформированное состояние (НДС) пластинчатых конструкций рассматривалось в относительно небольшом числе работ, в частности, в [6; 7] для расчета пластинчатых конструкций применялся метод однородных решений. В [11; 3] был предложен подход основанный на сведении задачи НДС коробчатой оболочки к исследованию плоско-изгибного состояния фиктивной пластинки с дефектами роль которых играют ребра оболочки. В [4] этим методом решалась задача с двумя параллельными ребрам оболочки включениями одинаковой длины. Однако решение совместной задачи изгиба и плоского напряженного состояния (ПНС) является громоздким и в [3; 12] был предложен асимптотический подход суть которого состоит

в том, что решается либо задача изгиба пластинки (если внешняя нагрузка перпендикулярна к плоскости пластин) либо задача о ПНС (если внешняя нагрузка лежит в плоскости пластин). Причем эти задачи являются первыми членами в разложении решения по параметру равному отношению толщины пластин к характерному геометрическому размеру. В [1; 2] на основе асимптотического подхода решены задачи для коробчатой оболочки подкрепленной одним включением параллельным ее ребрам и двумя включениями, перпендикулярными к ее ребрам.

Следуя асимптотическому подходу при нагружении коробчатой оболочки силами перпендикулярными к ее срединной поверхности, будем учитывать только изгиб пластин, составляющих оболочку, в следствие того, что изгибные напряжения и смещения на порядок выше плоских. Тогда переходя от пространственной коробки к ее плоской развертке с помощью приема, описанного в [3; 11], получим бесконечную пластинку, шарнирно опертую вдоль линий, соответствующих ребрам коробки (рис.2). Отметим, что из замкнутости коробчатой оболочки следует, что задача изгиба, получившейся полосовидной пластины, обладает периодом $2L$ по переменной x .

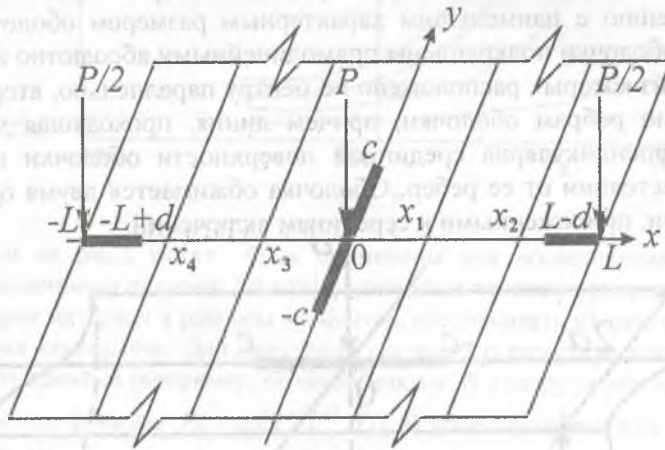


Рис.2.

Математическая постановка задачи имеет следующий вид.

Дифференциальное уравнение изгиба тонких пластин:

$$D\Delta^2 w(x, y) = \varphi_c(y)\delta(x) + \varphi_d(x)\delta(y) \quad (|x| < L, |y| < \infty, x \neq x_i, i = \overline{1,4}), \quad (1)$$

где $\varphi_c(y)$, $\varphi_d(x)$ – неизвестные скачки обобщенных поперечных сил на продольном и поперечном включениях; $\varphi_c(y) = \langle V_x(0, y) \rangle_x$; $\varphi_c(y) = 0, |y| > c$; $\varphi_d(x) = \langle V_y(x, 0) \rangle_y$; $\varphi_d(x) = 0, |x| < L - d$; $\delta(t)$ – дельта функция Дирака; $x_1 = a$; $x_2 = L - a$; $x_3 = -x_1$; $x_4 = -x_2$; $L = 2(a + b)$; $\langle f(\xi, y) \rangle_x = f(\xi - 0, y) - f(\xi + 0, y)$; $\langle f(x, \eta) \rangle_y = f(x, \eta - 0) - f(x, \eta + 0)$; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластин; $V_n(x, y)$, $M_n(x, y)$ – обобщенная поперечная сила и изгибающий момент по сечению с нормалью n .

Условия замкнутости коробчатой оболочки:

$$\begin{aligned} w(L, y) &= w(-L, y), & w'_x(L, y) &= w'_x(-L, y) \quad (|y| < \infty), \\ M_x(L, y) &= M_x(-L, y), & V_x(L, y) &= V_x(-L, y) \quad (|y| < \infty), \\ w(x \pm 2L, y) &= w(x, y) & \forall (x, y) &\in [-L, L] \times [-\infty, +\infty] \end{aligned} \quad (2)$$

Условия шарнирного опирания:

$$\langle w'_x(x_i, y) \rangle_x = \langle M_x(x_i, y) \rangle_x = w(x_i, y) = 0 \quad (|y| < \infty, \quad i = \overline{1, 4}). \quad (3)$$

Условия на включениях (которые записаны с учетом свойства периодичности из (2)):

$$w(0, y) = \delta_c \quad (|y| < c), \quad w(x, 0) = \delta_d \quad (x \in [L-d, L+d]), \quad (4)$$

$$\int_{-c}^c \varphi_c(y) dy = P, \quad \int_{L-d}^{L+d} \varphi_d(x) dx = P, \quad (5)$$

где δ_c, δ_d – неизвестные осадки включений.

Применим к (1) – (3) полное преобразование Фурье по переменной y

$$f_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{i\lambda y} dy, \quad f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(x) e^{-i\lambda y} d\lambda.$$

Получим следующую одномерную разрывную краевую задачу:

$$D \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^2 w_\lambda(x) = \varphi_{c\lambda} \delta(x) + \varphi_d(x) = q_\lambda(x) \quad (|x| < L, \quad x \neq x_i, \quad i = \overline{1, 4}), \quad (6)$$

$$w_\lambda^{(k)}(-L) = w_\lambda^{(k)}(L) \quad (k = \overline{0, 3}), \quad (7)$$

$$w_\lambda(x_i) = \langle w'_\lambda(x_i) \rangle = \langle w''_\lambda(x_i) \rangle = 0 \quad (i = \overline{1, 4}) \quad (8)$$

решение которой

$$w_\lambda(x) = \frac{1}{D} \int_{-L}^L q_\lambda(\xi) \tilde{G}_\lambda(x, \xi) d\xi = \frac{1}{D} \left(\varphi_{c\lambda} \tilde{G}_\lambda(x, 0) + \left(\int_{-L}^{-L+d} + \int_{L-d}^L \right) \varphi_d(\xi) \tilde{G}_\lambda(x, \xi) d\xi \right),$$

найдено при помощи методики изложенной в [10, с.327], где

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\lambda(x, \xi) &= \det \| G_\lambda(x_i - \xi_j) \|_{i, j = \overline{0, 4}} / \det \| G_\lambda(x_i - x_j) \|_{i, j = \overline{1, 4}} \\ (x_0 &= x, \quad \xi_0 = \xi, \quad \xi_j = x_j, \quad j = \overline{1, 4}) \end{aligned}$$

функция Грина задачи (6)-(8), а $G_\lambda(x - \xi)$ функция Грина задачи (6), (7).

Функция $G_\lambda(t)$ может быть представлена двумя способами:

$$G_\lambda(t) = \frac{1}{2\lambda^4 L} + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \beta t}{(\lambda^2 + \beta^2)^2} \quad (\beta = \frac{\pi k}{L}), \quad (9)$$

$$G_\lambda(t) = e_\lambda(t) + \frac{\exp(-|\lambda|L)}{2\lambda^3 \operatorname{sh} \lambda L} \left(\operatorname{ch} \lambda t \left(1 + \lambda L \frac{\exp(|\lambda|L)}{\operatorname{sh} \lambda L} \right) - \lambda t \operatorname{sh} \lambda t \right), \quad e_\lambda(t) = \frac{1+|\lambda|t}{4|\lambda|^3} e^{-|\lambda|t}. \quad (10)$$

Формула (9) получена разложением в ряд Фурье. Формула (10) получена с помощью стандартной процедуры представления функции Грина через фундаментальную функцию и базисную систему функций [10, с.314]. Отметим, что если в представлении (9) $G_\lambda(t)$ имеет период $2L$ то в (10) условие периодичности $G_\lambda(t+2L) = G_\lambda(t)$ выполняется, только если $t \in [-2L, 0]$.

Выполняя обратное преобразование Фурье и удовлетворяя условиям (4) на включениях (с учетом свойства периодичности из (2)), получим систему двух интегральных уравнений (ИУ) первого рода с непрерывными ядрами:

$$\begin{aligned} \int_{-c}^c \varphi_c(\eta) G(0, y, 0, \eta) d\eta + \int_{L-d}^{L+d} \varphi_d(\xi) G(0, y, \xi, 0) d\xi &= D \delta_c(|y| < c), \\ \int_{-c}^c \varphi_c(\eta) G(x, 0, 0, \eta) d\eta + \int_{L-d}^{L+d} \varphi_d(\xi) G(x, 0, \xi, 0) d\xi &= D \delta_d(x \in (L-d, L+d)), \end{aligned} \quad (11)$$

где $G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda(y-\eta) \tilde{G}_\lambda(x, \xi) d\lambda$ является функцией Грина краевой задачи (1) – (3), которая, как известно, допускает представление

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{8\pi} \left(r^2 \ln r + K(x, y, \xi, \eta) \right) \left(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right), \quad (12)$$

где $K(x, y, \xi, \eta)$ – бесконечно дифференцируемая функция.

Решение системы ИУ (11) будем искать с помощью метода ортогональных многочленов (МОМ) [10]. Для этого выделим из ядер $G(0, y, 0, \eta)$, $G(x, 0, \xi, 0)$ их нерегулярные части, соответствующие первому слагаемому в (12) и перейдем в обоих ИУ к промежутку $(-1, 1)$.

Учитывая асимптотику

$$\tilde{G}_\lambda(x, \xi) = O(1) \quad (\lambda \rightarrow 0), \quad \tilde{G}_\lambda(0, 0) \sim (4\lambda^3)^{-1} \quad (\lambda \rightarrow \infty), \quad \tilde{G}_\lambda(x, \xi) \sim e_\lambda(x-\xi) \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

воспользуемся следующими интегралами:

$$\int_0^\infty \left(\cos \lambda t - 1 + \frac{\lambda^2 t^2}{2} e^{-\lambda} \right) \lambda^{-3} d\lambda = \frac{t^2}{2} \ln|t| - \frac{3t^2}{4};$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1+\lambda t}{\lambda^3} e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda^3} + \frac{t^2}{2\lambda} e^{-\lambda} \right) d\lambda = \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{3t^2}{4} \quad (t > 0),$$

которые получены путем двукратного интегрирования по t от 0 до t соотношений

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda} - \cos \lambda t}{\lambda} d\lambda = \ln|t|, \quad \int_0^\infty \frac{te^{-\lambda} - te^{-\lambda t}}{\lambda} d\lambda = t \cdot \ln t \quad (t > 0),$$

вытекающих из формул 861.03, 861.05, 860.22 [5].

Произведем в (11) замену переменных: $y = c\bar{y}$, $\eta = c\bar{\eta}$, $x = \bar{x}d + L$, $\xi = \bar{\xi}d + L$ и введем новые функции $c\varphi_c(c\bar{\eta}) = \bar{\varphi}_c(\bar{\eta})$, $d\varphi_d(\bar{\xi}d + L) = \bar{\varphi}_d(\bar{\xi})$ (в дальнейшем черту опускаем). В результате система (11) примет вид

$$\int_{-1}^1 \varphi_c(\eta) (c^2(y-\eta)^2 \ln|y-\eta| + R_c(y,\eta)) d\eta + \int_{-1}^1 \varphi_d(\xi) R(\xi,y) d\xi = 8\pi D \delta_c \quad (|y| < 1),$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_c(\eta) R(x,\eta) d\eta + \int_{-1}^1 \varphi_d(\xi) (d^2(x-\xi)^2 \ln|x-\xi| + R_d(x,\xi)) d\xi = 8\pi D \delta_d \quad (|x| < 1),$$
(13)

где

$$R_c(y,\eta) = c^2(y-\eta)^2 (\ln c - 1.5) +$$

$$+ 2 \int_0^\infty \left(4\tilde{G}_\lambda(0,0) - \lambda^{-3} \right) \cos \lambda c(y-\eta) + \lambda^{-3} - \frac{c^2}{2\lambda} (y-\eta)^2 e^{-\lambda} d\lambda,$$

$$R(\xi,y) = 8 \int_0^\infty \cos \lambda c y \tilde{G}_\lambda(0,\xi d + L) d\lambda,$$

$$R_d(x,\xi) = d^2(x-\xi)^2 (\ln d - 0.5) +$$

$$+ 2 \int_0^\infty \left(4(\tilde{G}_\lambda(xd + L, \xi d + L) - e_\lambda(d(x-\xi))) \right) + \lambda^{-3} - \frac{d^2}{2\lambda} (x-\xi)^2 e^{-\lambda} d\lambda,$$

причем R_c , R , R_d – бесконечно дифференцируемые функции.

Как показано в [8–10] такие ИУ не имеют интегрируемых на $(-1,1)$ решений. Решения следует искать в классе функций с неинтегрируемыми особенностями вида $(1-t^2)^{-3/2}$, привлекая при этом аппарат регуляризации расходящихся интегралов.

Согласно МОМ решение системы (13) с учетом четности решений будем искать в следующем виде [8–10]

$$\varphi_c(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^c \pi_{2j}(\eta), \quad \varphi_d(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^d \pi_{2j}(\xi),$$
(14)

где $\pi_0(t) = (1-t^2)^{-1/2}$; $\pi_{2n}(t) = \frac{2\sqrt{\pi}(2n)! P_{2n}^{-3/2,-3/2}(t)}{\Gamma(2n-1/2)(1-t^2)^{3/2}}$ ($n \geq 1$); $P_k^{-3/2,-3/2}(t)$ – многочлены Якоби.

Подставим (14) в (13) и используем следующее спектральное соотношение (4.3) из [8], являющееся частным случаем соотношений (6.2), (6.7) из [9]:

$$\int_{-1}^1 (t-\tau)^2 \ln|t-\tau| \pi_{2n}(\tau) d\tau = 2\pi P_{2n}(t) \quad (|t| \leq 1),$$

$$P_{2n}(t) = 2\sqrt{\pi}(2n-3)! \Gamma^{-1}(2n-1/2) P_{2n}^{-1.5,-1.5}(t) \quad (n \geq 2),$$

$$P_0(t) = p_{00} + p_{01}t^2, \quad P_2(t) = p_{10} + p_{11}t^2,$$

$$p_{00} = -\frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{8}, \quad p_{01} = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{3}{4}, \quad p_{10} = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}, \quad p_{11} = \frac{1}{2};$$
(15)

затем умножим каждое из ИУ (13) соответственно на $\pi_{2i}(y)$, $\pi_{2i}(x)$ и проинтегрируем первое по y , второе – по x от -1 до 1 . В результате приходим к двум бесконечным системам линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(c^2 A_{ij} + B_{ij}^c \right) \varphi_j^c + B_{ij}^{dc} \varphi_j^d = 8\pi^2 D \delta_c \delta_{i0} \quad (i = \overline{0, \infty}),$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(B_{ij}^{cd} \varphi_j^c + (d^2 A_{ij} + B_{ij}^d) \varphi_j^d \right) = 8\pi^2 D \delta_d \delta_{i0} \quad (i = \overline{0, \infty}).$$

где

$$A_{ij} = \begin{cases} \pi^2 \delta_{ij} / (2i-1), & i \geq 2 \text{ либо } j \geq 2 \\ 2\pi (\psi_{0i} p_{j0} + \psi_{1i} p_{j1}), & i \leq 1, u \quad j \leq 1 \end{cases}; \quad \psi_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ \pi, & i = j = 0 \text{ либо } i = j = 1; \\ \pi/2, & i = 1, j = 0 \end{cases}$$

$$p_{00} = -\frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{8}, \quad p_{01} = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{3}{4}, \quad p_{10} = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}, \quad p_{11} = \frac{1}{2};$$

$$B_{ij}^c = c^2 \Omega_{ij} (\ln c - 1.5) + 2 \int_0^{\infty} \left(4 \bar{H}_{\lambda}(0,0) J_{2i}^c(\lambda c) J_{2j}^c(\lambda c) + \psi_{0i} \psi_{0j} \lambda^{-3} - \frac{c^2}{2\lambda} \Omega_{ij} e^{-\lambda} \right) d\lambda;$$

$$B_{ij}^d = d^2 \Omega_{ij} (\ln d - 0.5) + 2 \int_0^{\infty} \left(4 \bar{h}_{2i,2j}(\lambda) + \psi_{0i} \psi_{0j} \lambda^{-3} - \frac{d^2}{2\lambda} \Omega_{ij} e^{-\lambda} \right) d\lambda;$$

$$B_{ij}^{dc} = 8 \int_0^{\infty} J_{2i}^c(\lambda c) \bar{g}_{2j}(\lambda) d\lambda = B_{ji}^{cd}; \quad \Omega_{ij} = \psi_{1i} \psi_{0j} + \psi_{0i} \psi_{1j};$$

$$\bar{h}_{2i,2j}(\lambda) = \frac{1}{2} \frac{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \pi_{2i}(x) \pi_{2j}(\xi) \bar{H}_{\lambda}(xd, \xi d) dx d \xi}{\det \| G_{\lambda}^+(x_k, x_m) \|_1^2};$$

$$\bar{g}_{2j}(\lambda) = \frac{1}{2} \frac{\int_{-1}^1 \pi_{2j}(\xi) \bar{G}_{\lambda}(L, \xi d) d\xi}{\det \| G_{\lambda}^+(x_k, x_m) \|_1^2};$$

$$h_{2i,2j}^{\lambda} = \frac{\exp(-\lambda L)}{2\lambda^3 \operatorname{sh} \lambda L} \left\{ I_{2i}^c(\lambda d) I_{2j}^c(\lambda d) \left(1 + \lambda L \frac{\exp(\lambda L)}{\operatorname{sh} \lambda L} \right) - \lambda d I_{2i}^s(\lambda d) I_{2j}^s(\lambda d) - \lambda d I_{2j}^s(\lambda d) I_{2i}^c(\lambda d) \right\};$$

$$g_{2k}^{\lambda}(\tau) = \frac{\exp(-\lambda \tau)}{2\lambda^3} \left((1 + \lambda \tau) I_{2k}^c(\lambda d) - \lambda d I_{2k}^s(\lambda d) \right) +$$

$$+ \frac{\exp(-\lambda L)}{2\lambda^3 \operatorname{sh} \lambda L} \left\{ I_{2k}^c(\lambda d) \operatorname{ch} \lambda \tau \left(1 + \lambda L \frac{\exp(\lambda L)}{\operatorname{sh} \lambda L} \right) - \lambda d I_{2k}^s(\lambda d) \operatorname{ch} \lambda \tau - \lambda \tau \operatorname{sh} \lambda \tau I_{2k}^c(\lambda d) \right\};$$

$$G_{\lambda}^+(x, \xi) = G_{\lambda}(x - \xi) + G_{\lambda}(x + \xi);$$

$$J_{2k}^c(\lambda) = \int_{-1}^1 \pi_{2k}(x) \cos \lambda x dx = \begin{cases} \pi J_0(\lambda), & k=0 \\ (-1)^k \lambda \pi J_{2k-1}(\lambda), & k>0 \end{cases}$$

$$I_{2k}^c(\lambda) = J_{2k}^c(i\lambda) = \int_{-1}^1 \pi_{2k}(x) \operatorname{ch} \lambda x dx = \begin{cases} \pi I_0(\lambda), & k=0 \\ \lambda \pi I_{2k-1}(\lambda), & k>0 \end{cases}$$

$$I_{2k}^s(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} I_{2k}^c(\lambda) = \int_{-1}^1 \pi_{2k}(x) x \operatorname{sh} \lambda x dx = \begin{cases} \pi I_1(\lambda), & k=0 \\ \pi(2k I_{2k-1}(\lambda) + \lambda I_{2k}(\lambda)), & k>0 \end{cases}$$

($J_k(\lambda)$ – функция Бесселя, $I_k(\lambda)$ – модифицированная функция Бесселя).

Отметим, что матрица A_{ij} является диагональной при $i>1, j>1$, а элементы $B_{ij}^c, B_{ij}^{cd}, B_{ij}^{dc}, B_{ij}^d$ экспоненциально убывают с ростом индексов.

Следовательно полученные системы являются квазирегулярными и нормальными по Пуанкаре-Кошу, что позволяет эффективно решать их методом редукции.

Для вычисления осадок включений учтем структуру правых частей систем (16) и запишем решения этих систем в виде

$$\varphi_j^c = \delta_c \varphi_j^{cc} + \delta_d \varphi_j^{cd}, \quad \varphi_j^d = \delta_c \varphi_j^{dc} + \delta_d \varphi_j^{dd},$$

в результате чего две системы (16) можно разбить на четыре системы в которых отсутствуют неизвестные осадки δ_c, δ_d . Подставляя (14) в условия равновесия (5) получим

$$\delta_c = \frac{P}{\pi} \frac{\varphi_0^{dd} - \varphi_0^{cd}}{\varphi_0^{cc} \varphi_0^{dd} - \varphi_0^{cd} \varphi_0^{dc}}, \quad \delta_d = \frac{P}{\pi} \frac{\varphi_0^{cc} - \varphi_0^{dc}}{\varphi_0^{cc} \varphi_0^{dd} - \varphi_0^{cd} \varphi_0^{dc}}.$$

В таблице 1 приведены значения безразмерных величин $\delta_c = 10^{-3} \delta_c E h P$, $\delta_d = 10^{-3} \delta_d E h / P$ для $\nu = 0.4, h/a = 0.01$, характеризующих жесткость системы оболочка – включение, при различных соотношениях геометрических размеров оболочки.

Таблица 1

δ_c	b/a												
	0.1				1				10				
δ_d	d/a												
	0	0.1	0.5	0.9	0	0.1	0.5	0.9	0	0.1	0.5	0.9	
c	0	3.412	3.409	3.364	3.271	4.879	4.867	4.712	4.474	5.238	5.236	5.217	5.194
		3.412	3.043	1.097	0.077	4.879	4.437	1.739	0.103	5.238	4.761	1.758	0.078
	0.1	3.161	3.158	3.113	3.021	4.606	4.594	4.440	4.204	4.965	4.963	4.944	4.920
		3.410	3.041	1.095	0.076	4.877	4.435	1.738	0.103	5.238	4.761	1.758	0.078
a	1	1.555	1.552	1.516	1.458	2.618	2.607	2.474	2.282	2.964	2.962	2.943	2.920
		3.361	2.992	1.055	0.065	4.814	4.374	1.697	0.097	5.238	4.761	1.758	0.078
	10	0.250	0.248	0.242	0.233	0.479	0.477	0.448	0.411	0.668	0.667	0.652	0.636
		3.270	2.904	0.997	0.055	4.524	4.087	1.531	0.077	5.225	4.749	1.751	0.077

Анализируя полученные данные и сравнивая их с результатами работ [1; 2; 4] можно сделать следующие выводы:

- 1) при нулевых длинах включений их осадки совпадают с прогибами под сосредоточенными силами [4];
- 2) при увеличении длин включений (для продольного – до бесконечности, для поперечного – до $2a$) их осадки стремятся к нулю;
- 3) поперечное включение усиливает конструкцию по сравнению с продольным включением той же длины;
- 4) при достаточно малых d/a значения осадки включения δ_c совпадают с вычисленными в [1];
- 5) при фиксированных b/a , c/a (d/a) значения осадки δ_c (δ_d) практически не зависят от d/a (c/a).

Библиографические ссылки

1. Воробель В. М., Реут В. В. Бесконечно длинная коробчатая оболочка, подкреплённая тонким абсолютно жестким включением, параллельным ее ребрам // Вісник Одеськ. держ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. 2000. Т. 5, вип. 3. С. 123–129.
2. Воробель В. М., Реут В. В. Бесконечно длинная коробчатая оболочка, подкреплённая двумя абсолютно жесткими включениями, перпендикулярными к ее ребрам // Теорет. и прикладна механіка. 2001. Вип. 34. С. 109–115.
3. Гришин В. А., Попов Г. Я., Реут В. В. Расчёт коробчатых оболочек прямоугольного сечения // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54, вып. 4. С. 605–612.
4. Гришин В. А., Реут В. В. Напряжённое состояние коробчатой оболочки, подкреплённой парой симметричных включений, параллельных ребру оболочки // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 5. С. 849–852.
5. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М., 1977. 224 с.
6. Моссаковский В.И., Куликов Д.В. Метод однородных решений для коробчатых оболочек при динамическом нагружении // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987, №1 С. 24–27.
7. Мусияка В.Г., Пошивалова Е.В. Применение однородных решений к исследованию напряжённого состояния пластинчатых конструкций // Докл. АН УССР. Сер.А. 1980, №8. С. 50–53.
8. Онищук О. В., Попов Г. Я. О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями // Изв. АН СССР. Мех. твёрдого тела. 1980. № 4. С. 141–150.
9. Онищук О. В., Попов Г. Я., Фаршайт П. Г. Об особенностях контактных усилий при изгибе пластин с тонкими включениями // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, вып. 2. С. 293–302.
10. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М., 1982. 344 с.
11. Попов Г. Я., Реут В. В. Расчёт коробчатых оболочек // Тр. XIV Всес. конф. по пластинкам и оболочкам. Тбилиси, 1987. Т. 2. С. 327–332.
12. Попов Г. Я., Реут В. В. Асимптотический подход к задачам о напряжённом состоянии коробчатых упругих тел // VII Всес. съезд по теор. и прикл. механике: Аннот. докл. М., 1991. С. 291 – 292.

Надійшла до редколегії 03.10.2002