МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Р. В. Шанін

Невизначений інтеграл та методи його обчислення

Методичні вказівки

для студентів 1 курсу спеціальності 111 «Математика»

ОДЕСА
ОНУ
2022

УДК 517.31(076.3)
Ш20

Рекомендовано вченою радою ФМФІТ
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 1 від 9 вересня 2021 року.

Рецензенти:

Кореновський А. О. — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Страхов Є. М. — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри оптимального керування і економічної кібернетики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Шанін Р. В.

Ш20 Невизначений інтеграл та методи його обчислення. Методичні вказівки для студентів 1 курсу спеціальності 111 «Математика» / Р. В. Шанін. — Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2022. — 47 с.

Методичні вказівки написано з метою допомоги студентам спеціальності 111 «Математика» у формуванні навичок розв'язання практичних задач з курсу «Математичний аналіз I». Вони містять необхідний теоретичний матеріал, набір типових прикладів з розв'язками та приклади для самостійного розв'язання.

Для підготовки студентів спеціальності 111 «Математика».

УДК 517.31(076.3)

© Шанін Р. В., 2022
© Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2022

Зміст

Вступ

Методичні вказівки написано з метою допомоги студентам спеціальності 111 Математика у формуванні навичок розв'язання практичних задач з курсу «Математичний аналіз I». Вони містять необхідний теоретичний матеріал, набір типових прикладів з розв'язками та приклади для самостійного розв'язання. Матеріал посібник розділено на параграфи. Задачі для методичних вказівок взято із збірників [1, 3].

Предметом вивчення навчальної дисципліни «Математичний аналіз I» є властивості множин дійсних чисел та векторів, числові послідовності та послідовність векторів, їх збіжність, функції дійсної змінної, їх збіжність та неперервність, диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних та інтегральне числення функцій однієї змінної.

Місце навчальної дисципліни в структурі освітнього процесу. Математичний аналіз — головна математична дисципліна в професійній освіті математика, без якої неможливе вивчення інших математичних та фізичних курсів, які і становлять, власне, освіту майбутнього спеціаліста. Цей курс є базовим для подальшого вивчення таких дисциплін, як функціональний аналіз, диференціальні рівняння, рівняння математичної фізики, теорія оптимального керування, тощо.

Програма навчальної дисципліни складається з таких змістових модулів:

1. Дійсні числа та числові послідовності.
2. Границі і неперервність числових функцій.
3. Диференціальне числення функцій однієї змінної.
4. Інтегральне числення функцій однієї змінної.

5. Простір $\mathbb{R}^n$. Збіжність та неперервність.
6. Диференційовність функцій багатьох змінних.

На вивчення навчальної дисципліни відводиться 420 годин, що становить 14 кредитів ЄКТС, з них 140 годин на лекції та 140 годин на практичні заняття.

Мета. Ознайомити студентів з основними розділами диференціального числення функцій однієї та багатьох змінних, інтегрального числення функцій однієї змінної, з теорією границь числових та векторних послідовностей, методами розв'язання типових задач. Сформувати у студентів загальну та фахову компетентність.

Завдання.

1. Вивчити класичні методи диференціального та інтегрального числення, як необхідної бази для сприйняття навчального матеріалу інших природничих та спеціальних дисциплін.
2. Надати навички застосування математичного апарату обробки даних теоретичного та експериментального дослідження при вирішенні професійних завдань.
3. Сформувати цілісний математичний апарат сучасного спеціаліста–математика.

Зміст навчальної дисципліни

I семестр

Змістовий модуль 1. Дійсні числа та числові послідовності.

Тема 1. Дійсні числа. Числові множини.

Тема 2. Границі послідовностей.

Змістовий модуль 2. Границі і неперервність числових функцій.

Тема 3. Числові функції та їх границі.

Тема 4. Неперервні функції та їх властивості.

Тема 5. Елементарні функції та їх неперервність.

Змістовий модуль 3. Диференціальне числення функцій однієї змінної.

Тема 6. Похідна та диференціал.

Тема 7. Теореми про середнє та правила Лопіталя. Формула Тейлора.

Тема 8. Дослідження поведінки функцій та побудова графіків.

II семестр

Змістовий модуль 4. Інтегральне числення функцій однієї змінної.

Тема 9. Невизначений інтеграл та методи його обчислення.

Тема 10. Інтеграл Рімана.

Тема 11. Застосування інтеграла Рімана.

Змістовий модуль 5. Простір $\mathbb{R}^n$. Збіжність та неперервність.

Тема 12. Простір $\mathbb{R}^n$ та топологія.

Тема 13. Границі послідовностей і функцій багатьох змінних.

Тема 14. Неперервні функції багатьох змінних.

Змістовий модуль 6. Диференційовність функцій багатьох змінних.

Тема 15. Диференційовні дійсні функції.

Тема 16. Диференційовні відображення.

Тема 17. Функції на многовидах.

Рекомендована література

Основна

1. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. / Б. П. Демидович. — М.: Наука, 1972. — 544 с.
2. Коляда В. И. Курс лекций по математическому анализу: в 2 ч. Ч. 1 / В. И. Коляда, А. А. Кореновский. — Одесса: Астропринт, 2010. — XXVI, 374 с.
3. Кудрявцев Л. Д. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: Учеб. пособие / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин; под ред. Л. Д. Кудрявцева; 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 496 с.
4. Кудрявцев Л. Д. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды: Учеб. пособие / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин; под ред. Л. Д. Кудрявцева; 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 504 с.
5. Кудрявцев Л. Д. Сборник задач по математическому анализу. Том 3. Функции нескольких переменных: Учеб. пособие / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин; под ред. Л. Д. Кудрявцева; 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 472 с.

Додаткова

1. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа (в двух томах): Учебник для университетов и втузов / Л. Д. Кудрявцев — М.: Высш. шк., 1981, т. I. — 687 с.
2. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа (в двух томах): Учебник для университетов и втузов / Л. Д. Кудрявцев — М.: Высш. шк., 1981, т. II. — 584 с.
3. Лисенко З. М. Методичні вказівки до розв'язування задач з математичного аналізу на тему: «Невизначений інтеграл» / З. М. Лисенко, Л. В. Матвіюк — Одеса, 2006. — 26 с.
4. Лисенко З. М. Методичні вказівки до розв'язування задач з математичного аналізу на тему: «Визначений інтеграл Рімана» / З. М. Лисенко, Л. В. Матвіюк — Одеса, 2006. — 47 с.
5. Лисенко З. М. Методичні вказівки до розв'язування задач з математичного аналізу на тему: «Застосування визначеного інтеграла» / З. М. Лисенко, Л. В. Матвіюк — Одеса, 2006. — 46 с.
6. Никольский С. М. Курс математического анализа: В 2 т. / С. М. Никольский; Изд. 3, переработанное и дополненное — М.: Наука., 1983, Т. 1 — 464 с.
7. Никольский С. М. Курс математического анализа: В 2 т. / С. М. Никольский; Изд. 3, переработанное и дополненное — М.: Наука., 1983, Т. 2 — 448 с.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Т. I: В 3 т. / Г. М. Фихтенгольц; Изд. 5, стереотипное — М.: Физматлит, 1962. — 607 с.

9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Т. II: В 3 т. / Г. М. Фихтенгольц; Изд. 7, стереотипное — М.: Наука, 1969. — 800 с.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Т. III: В 3 т. / Г. М. Фихтенгольц; Изд. 5, стереотипное — М.: Наука, 1970. — 656 с.

Електронні інформаційні ресурси

1. Коляда В. И. Курс лекций по математическому анализу: в 2 ч. Ч. 1 / В. И. Коляда, А. А. Кореновский. — Одесса: Астропринт, 2010. — XXVI, 374 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/9709/48/korenovsky_1.pdf

1 Означення і властивості невизначеного інтеграла

1.1 Теоретичний матеріал та приклади з розв'язками

Означення 1.1. Функція $F(x)$ називається *первісною* функції $f(x)$ на інтервалі I, якщо $F'(x) = f(x)$ для всіх $x \in I$.

Приклад. Функція $F(x) = \ln x$ є первісною для функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на інтервалах $(-\infty, 0)$ і $(0, \infty)$ так як

$$F'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} = f(x)$$

для всіх $x \in (-\infty, 0)$ або для всіх $x \in (0, \infty)$. На всій числовій прямій $(-\infty, \infty)$ функція $F(x) = \ln x$ вже не являється первісною функції $f(x) = \frac{1}{x}$ так як рівність $F'(x) = f(x)$ не виконується в точці $x = 0$.

Теорема 1.1 ([2, с. 157]). *Якщо функція $f(x)$ має первісну на інтервалі I, то різниця двох будь-яких її первісних тотожно постійна на цьому інтервалі. Іншими словами, множину всіх первісних функції $f(x)$ на інтервалі I можна описати як*

$$\{F(x) + C \colon C \in \mathbb{R}\},$$

де $F(x)$ одна із первісних функції $f(x)$ на інтервалі I, а C пробігає множину дійсних чисел.

Означення 1.2. Якщо функція $f(x)$ має первісну на інтервалі I, то множина первісних функції $f(x)$ на цьому інтервалі називається *невизначеним інтегралом* функції $f(x)$ і позначається $\int f(x)\,dx$. Таким чином

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C \colon C \in \mathbb{R}\}, \tag{1}$$

де $F(x)$ — одна із первісних функції $f(x)$, а C пробігає множину дійсних чисел. Символ $\int$ називається знаком інтеграла, $f(x)$ —

підінтегральною функцією, $f(x)\,dx$ — підінтегральним виразом, x — змінною інтегрування. Рівність (1) прийнято записувати без фігурних дужок, тому в подальшому будемо писати

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Властивості невизначеного інтеграла.

1. Якщо функція $f(x)$ має первісну на інтервалі (a, b), то

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.$$

2. Якщо функція $f(x)$ диференційована на інтервалі (a, b), то

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C, \quad \int df(x) = f(x) + C.$$

3. Якщо функція $f(x)$ має первісну і $a \in \mathbb{R}$, то функція $af(x)$ також має первісну, причому, якщо $a \neq 0$, справедлива рівність

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$$

4. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ мають первісні на деякому інтервалі (a, b), то функція $f(x) + g(x)$ також має первісну на цьому інтервалі і справедлива рівність

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Таблиця основних інтегралів.

Наступні формули мають місце на будь-якому інтервалі, що міститься в області визначення підінтегральної функції.

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1. \tag{2}$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C. \tag{3}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1. \tag{4}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \tag{5}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C. \tag{6}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \tag{7}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C. \tag{8}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C. \tag{9}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0. \tag{10}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C, \quad |x| < a, \quad a \neq 0. \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C, \quad a \neq 0. \tag{12}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C, \quad a \neq 0, \quad |x| > |a|. \tag{13}$$

Приклади з розв'язками.

Приклад. Знайти:

1.1. $\displaystyle\int (x - 2e^x)\,dx$; 1.2. $\displaystyle\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$;

1.3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$; 1.4. $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx$;

1.5. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$;

1.6. $\int \frac{dx}{x^4+4x^2}$.

Розв'язання. (1.1) Використовуючи властивості 3 і 4, а також формули (2) і (4), отримаємо

$$\int (x-2e^x)\, dx = \int x\, dx - 2\int e^x\, dx = \frac{x^2}{2} + e^x + C,\ x \in \mathbb{R}.$$

(1.2) Використовуючи властивості 3 і 4, а також формулу (2), отримаємо

$$\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\, dx = \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{x^{4/3}}\, dx =$$
$$= \int x^{-4/3}\, dx - 3\int x^{-1/3}\, dx + 3\int x^{2/3}\, dx - \int x^{5/3}\, dx =$$
$$= -3x^{-1/3} - \frac{9}{2}x^{2/3} + \frac{9}{5}x^{5/3} - \frac{3}{8}x^{8/3} + C,\ x > 0.$$

(1.3) Використовуючи властивості 3 і 4, а також формули (11) і (12), отримаємо

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$
$$= \arcsin x + \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C,\ |x| < 1.$$

(1.4) Використовуючи формулу $\sin^2 \frac{x}{2} = (1-\cos x)/2$, властивості 3, 4 і формулу (6), отримаємо

$$\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos x)\, dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C,$$

де x — будь-яке дійсне число.

(1.5) Використовуючи властивості 3 і 4, а також формулу (8), отримаємо

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C,$$

де $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

(1.6) Використовуючи властивості 3 і 4, а також формули (2) і (9), отримаємо

$$\int \frac{dx}{x^4+4x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{x^2+4-x^2}{x^2(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+4} =$$
$$= -\frac{1}{4x} - \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C,\ x \neq 0. \quad \square$$

1.2 Задачі для розв'язання в аудиторії

Використовуючи властивості та таблицю невизначених інтегралів, знайти наступні інтеграли.

1.7. $\int (5-2x^2)^3\,dx$;

1.8. $\int (1-2x)(2-x)(1-x)\,dx$;

1.9. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[5]{x^2} + 1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$;

1.10. $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\,dx$;

1.11. $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx$;

1.12. $\int 3^{2x}e^x\,dx$;

1.13. $\int (2^x+5^x)^2\,dx$;

1.14. $\int (1+2\sin x - 3\cos x)\,dx$.

1.3 Задачі для домашньої роботи

Використовуючи властивості та таблицю невизначених інтегралів, знайти наступні інтеграли.

1.15. $\int x^3(3-2x)^4\,dx$;

1.16. $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{b^2}{x^2} + \frac{c^3}{x^3}\right)dx$;

1.17. $\int \left(2 - \frac{3}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$;

1.18. $\int \frac{2x^2\,dx}{1+x^2}$;

1.19. $\int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$;

1.20. $\int \frac{2^x + 3\cdot 5^x}{10^x}\,dx$;

1.21. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx$;

1.22. $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$.

2 Заміна змінної

2.1 Теоретичний матеріал та приклади з розв'язками

Теорема 2.1 ([2, с. 163]). *Нехай $F(t)$ первісна функції $f(t)$ на інтервалі I і функція $\varphi(x)$ диференційована на інтервалі Δ, причому $\varphi(\Delta) \subset I$. Тоді*

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt\Big|_{t=\varphi(x)} = F\big(\varphi(x)\big) + C. \tag{14}$$

Формулу (14) називають *формулою інтегрування підстановкою.* Розглянемо конкретні приклади її використання.

Приклад. Знайти інтеграл, використовуючи формулу інтегрування підстановкою:

2.1. $\displaystyle\int (2x+4)^8 dx$;

2.2. $\displaystyle\int x^2\sqrt[4]{5x^3+2}\,dx$;

2.3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

2.4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

2.5. $\displaystyle\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$;

2.6. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos^2 x},\ |x| < \frac{\pi}{2}$;

2.7. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$;

2.8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Розв'язання.

$$(2.1)\ \int (2x+4)^8 dx = \left[\begin{array}{c} t = 2x+4, \\ dt = 2\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int t^8\,dt = \frac{t^9}{18} + C = \frac{(2x+4)^9}{18} + C;$$

$$(2.2)\ \int x^2\sqrt[4]{5x^3+2}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 5x^3+2, \\ dt = 15x^2\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{15}\int t^{1/4}\,dt = \frac{4t^{5/4}}{75} + C = \frac{4(5x^3+2)^{5/4}}{75} + C;$$

$$(2.3)\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{c} t = 1-x^2, \\ -\frac{1}{2}dt = x\,dx \end{array} \right] = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t}+C = -\sqrt{1-x^2}+C;$$

$$(2.4)\ \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \left[\begin{array}{c} t = \sqrt{x}; \\ 2dt = \frac{dx}{\sqrt{x}} \end{array} \right] =$$

$$= 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\,\mathrm{arctg}\,t + C = 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x} + C.$$

$$(2.5)\ \int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2} = \left[\begin{array}{c} t = 1/x, \\ -dt = dx/x^2 \end{array} \right] = -\int \sin t\,dt = \cos t + C = \cos\frac{1}{x}+C.$$

$$(2.6)\ \int \frac{dx}{2+\cos^2 x} = \int \frac{dx}{3\cos^2 x + 2\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x(3+2\,\mathrm{tg}^2\,x)} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = \mathrm{tg}\,x, \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{3+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{3}}+C = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{3}}+C;$$

$$(2.7)\ \int \mathrm{tg}\,x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \left[\begin{array}{c} t = \cos x, \\ dt = -\sin x\,dx \end{array} \right] = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t|+C =$$

$$= -\ln|\cos x| + C;$$

$$(2.8)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{sign}\,x \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-1/x^2}} = \left[\begin{array}{c} t = 1/x, \\ dt = -dx/x^2 \end{array} \right] =$$

$$= -\,\mathrm{sign}\,x\cdot\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\,\mathrm{sign}\,x\cdot\arcsin t + C = -\,\mathrm{sign}\,x\cdot\arcsin\frac{1}{x}+C.$$

□

Нехай функція $t = \varphi(x)$ взаємно однозначно відображає інтервал Δ на інтервал I і $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in \Delta$. Тоді для φ існує обернена функція $x = \psi(t)$ диференційована на I. Для функції $g(x)$ заданої на інтервалі Δ позначимо $f(t) = g\big(\psi(t)\big)\psi'(t)$, $t \in I$. З цієї рівності слідує, що $g(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$. Якщо $F(t)$ — первісна функції $f(t)$ на інтервалі I, то рівність (14) набуде такого вигляду

$$\int g(x)\,dx = \int g\big(\psi(t)\big)\psi'(t)\,dt\Big|_{t=\psi^{-1}(x)} = F\big(\psi^{-1}(x)\big) + C. \qquad (15)$$

Таким чином, якщо для функції $g(x)$ можна знайти таку функцію $x = \psi(t)$, що взаємно однозначно відображає інтервал I на інтервал Δ, диференційована на I, $\psi'(t) \neq 0$ при $t \in I$, функція $g\big(\psi(t)\big)\psi'(t)$ має первісну $F(t)$ на I, то функція $g(x)$ має первісну на Δ, яку можна знайти за формулою (15). При цьому формула (15) називається *формулою інтегрування заміною змінної.*

Приклад. Знайти інтеграл, використовуючи формулу інтегрування заміною змінної:

2.9. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\sqrt{x}}$;

2.10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$, $x > 0$;

2.11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$;

2.12. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Розв'язання.

$$(2.9)\ \int \frac{dx}{3+\sqrt{x}} = \left[\begin{array}{c} x = t^2, \\ dx = 2tdt \end{array}\right] = 2\int \frac{t\,dt}{3+t} = 2\int \frac{(3+t-3)\,dt}{3+t} =$$
$$= 2t - 6\ln|3+t| + C = 2\sqrt{x} - 6\ln|3+\sqrt{x}| + C;$$

$$(2.10)\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \left[\begin{array}{c} x = 1/t, \\ dx = -dt/t^2 \end{array}\right] = -\int \frac{t^2dt}{t^2\sqrt{1+1/t^2}} = -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}}$$
$$= \left[\begin{array}{c} u = \sqrt{t^2+1}, \\ du = \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}} \end{array}\right] = -\int du = u + C = -\sqrt{t^2+1} + C = -\sqrt{1/x^2+1} + C;$$

$$(2.11)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \left[\begin{array}{c} t^2 = e^x+1, \\ 2t\,dt = e^x\,dx \end{array}\right] = 2\int \frac{t\,dt}{t(t^2-1)} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C;$$

$$(2.12)\quad \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{cc} x = \sin t, & |x|<1, \\ dx = \cos t\,dt, & |t| < \frac{\pi}{2} \end{array}\right] = \int \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 2t + 1)\,dt = \frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2} + C = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin x}{2} + C.$$

$\square$

2.2 Задачі для розв'язання в аудиторії

Використовуючи формули інтегрування підстановкою та інтегрування заміною змінної, знайти наступні інтеграли.

2.13. $\displaystyle\int (2x+3)^{10}\,dx;$

2.14. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+3x^2};$

2.15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}};$

2.16. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x};$

2.17. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-2x^2}};$

2.18. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{3-2x^2};$

2.19. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{16+x^4};$

2.20. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}};$

2.21. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}};$

2.22. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}};$

2.23. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(8x^3+27)^{2/3}};$

2.24. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}};$

2.25. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}};$

2.26. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}};$

2.27. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx;$

2.28. $\displaystyle\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}\,dx;$

2.29. $\int \sin^5 x \cos x \, dx$;

2.30. $\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x \, dx \, dx$;

2.31. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} \, dx$;

2.32. $\int \frac{dx}{\sin x}$;

2.33. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} \, dx$;

2.34. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \cdot \sqrt{1 - x^2}}$;

2.3 Задачі для домашньої роботи

2.35. $\int \sqrt[3]{1 - 3x} \, dx$;

2.36. $\int \frac{dx}{2 - 3x^2}$;

2.37. $\int \frac{dx}{\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$;

2.38. $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$;

2.39. $\int x^2 \sqrt[3]{1 + x^3} \, dx$;

2.40. $\int \frac{x \, dx}{(1 + x^2)^3}$;

2.41. $\int \frac{x^3 \, dx}{x^6 - 2}$;

2.42. $\int \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}$;

2.43. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4}}$;

2.44. $\int \frac{x \, dx}{(x^2 - 1)^{3/2}}$;

2.45. $\int \frac{e^x \, dx}{2 + e^x}$;

2.46. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$;

2.47. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$;

2.48. $\int \frac{\ln x \, dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$;

2.49. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} \, dx$;

2.50. $\int \operatorname{ctg} x \, dx$;

2.51. $\int \frac{\sin x \cos x \, dx}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}$;

2.52. $\int \frac{dx}{\cos x}$;

3 Інтегрування частинами

3.1 Теоретичний матеріал та приклади з розв'язками

Теорема 3.1 ([2, с. 159]). *Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовані на інтервалі I. Якщо одна із функцій $u(x)v'(x)$ або $u'(x)v(x)$ має первісну на інтервалі I, то на цьому інтервалі має первісну і друга функція, причому справедлива рівність*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx. \tag{16}$$

Коротко правило інтегрування частинами можна записати наступним чином

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

В цьому записі використовується формула для знаходження диференціалу функції $du(x) = u'(x)\,dx$.

Приклад. Знайти інтеграл, використовуючи формулу інтегрування частинами:

3.1. $\int \ln x\,dx$;

3.2. $\int x\sin x\,dx$;

3.3. $\int x^2 e^x\,dx$;

3.4. $\int \arcsin x\,dx$.

Розв'язання.

(3.1) $$\int \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x, & dv = dx, \\ du = dx/x, & v = x \end{bmatrix} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

(3.2) $$\int x\sin x\,dx = \begin{bmatrix} u = x, & dv = \sin x\,dx, \\ du = dx, & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x\cos x + \int \cos x\,dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

$$(3.3)\quad \int x^2 e^x\,dx = \left[\begin{array}{cc} u = x^2, & dv = e^x\,dx, \\ du = 2x\,dx, & v = e^x \end{array}\right] = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{cc} u = x, & dv = e^x\,dx, \\ du = dx, & v = e^x \end{array}\right] = x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x\,dx =$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

$$(3.4)\quad \int \arcsin x\,dx = \left[\begin{array}{cc} u = \arcsin x, & dv = dx, \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & v = x \end{array}\right] = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = 1 - x^2, \\ dt = -2x\,dx \end{array}\right] = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,dt = x\arcsin x + t^{1/2} + C =$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$\square$

Наступний приклад знадобиться нам у подальшому.

Приклад. Знайти інтеграл:

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Розв'язання. Скористаємося формулою (16)

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \left[\begin{array}{cc} u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, & dv = dx, \\ du = \frac{-2nx\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}, & v = x \end{array}\right]$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} - 2n\int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}.$$

Звідси отримуємо

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2J_{n+1}.$$

Таким чином

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n\right). \tag{17}$$

Так як

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$$

то, користуючись (17), інтеграл J_n можна знайти для будь-якого n. $\square$

3.2 Задачі для розв'язання в аудиторії

Використовуючи формулу інтегрування частинами, знайти наступні інтеграли.

3.5. $\displaystyle\int x^n \ln x\,dx,\ x \neq 1;$

3.6. $\displaystyle\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx;$

3.7. $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx;$

3.8. $\displaystyle\int (x^2-6x+2)e^{3x}\,dx;$

3.9. $\displaystyle\int x^2\sin 2x\,dx;$

3.10. $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,dx;$

3.11. $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} x\,dx;$

3.12. $\displaystyle\int x^3\operatorname{arctg} x\,dx;$

3.13. $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx;$

3.14. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx;$

3.15. $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx,\ a^2+b^2\neq 0;$

3.16. $\displaystyle\int \left(\frac{\cos x}{e^x}\right)^2 dx;$

3.17. $\displaystyle\int \cos\ln x\,dx;$

3.18. $\displaystyle\int \sin\ln x\,dx;$

3.19. $\displaystyle\int x^2\sin\ln x\,dx;$

3.20. $\displaystyle\int e^{\arccos x}\,dx.$

3.3 Задачі для домашньої роботи

3.21. $\int \ln^2 x\,dx$;

3.22. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2\sqrt{x}}\,dx$;

3.23. $\int \ln(x+\sqrt{4+x^2})\,dx$;

3.24. $\int x^2 2^x\,dx$;

3.25. $\int (x^2+1)^2\cos x\,dx$;

3.26. $\int \arccos x\,dx$;

3.27. $\int x^2\arccos x\,dx$;

3.28. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$;

3.29. $\int \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

3.30. $\int \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{2-x}}\,dx$;

3.31. $\int e^{ax}\sin bx\,dx,\ a^2+b^2\neq 0$;

3.32. $\int x^2 e^x\cos x\,dx$.

4 Інтегрування раціональних функцій

4.1 Теоретичний матеріал та приклади з розв'язками

Означення 4.1. *Раціональною функцією* будемо називати функцію виду
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$
де $P(x)$, $Q(x)$ — многочлени степені $m \geq 0$ і $n \geq 0$ відповідно. Раціональна функція називається правильною, якщо степінь чисельника менша ніж степінь знаменника тобто, якщо $m < n$.

Нехай многочлен $Q(x)$ допускає розвинення
$$Q(x) = A\prod_{i=1}^{r}(x-a_i)^{k_i}\prod_{j=1}^{s}(x^2+p_jx+q_j)^{m_j}, \tag{18}$$
де $p_j^2 - 4q_j < 0$, $m_j \geq 1$ для $j = 1, \ldots, s$, $k_i \geq 1$ для $i = 1, \ldots, r$ і
$$n = \sum_{i=1}^{r} k_i + 2\sum_{j=1}^{s} m_j.$$

Теорема 4.1 ([2, с. 168])**.** *Нехай* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильний дріб, знаменник якого допускає розвинення* (18)*. Тоді цей дріб єдиним чином, з точністю до порядку доданків, можна представити у вигляді*
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{M_{ij}x+N_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}.$$

Теорема 4.1 дає можливість звести знаходження інтегралу від раціональної функції загального виду до знаходження інтегралу від функцій виду
$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В подальшому будемо називати такі функції *елементарними дробами*. Покажемо, як знаходити інтеграли від цих дробів.

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^k} = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C, \quad k>1.$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} = \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x+p/2)^2+q-p^2/4}$$
$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N-Mp/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + C.$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^k} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{((x+p/2)^2+q-p^2/4)^k}$$
$$= -\frac{M}{2(k-1)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{((x+p/2)^2+q-p^2/4)^k}.$$

Останній інтеграл заміною $t = x + p/2$ зводиться до інтегралу J_k, для знаходження якого було встановлено рекурентну формулу (17).

М. В. Остроградським було запропоновано метод знаходження інтеграла від правильного раціонального дробу, що значно спрощує розв'язання задач. Цей метод дозволяє алгебраїчним шляхом виділити раціональну частину інтеграла. Нехай маємо правильний нескоротний дріб $P(x)/Q(x)$ і $Q(x)$ допускає розвинення (18). Тоді

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx, \tag{19}$$

де

$$Q_1(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-a_i)^{k_i-1}\prod_{j=1}^{s}(x^2+p_jx+q_j)^{m_j-1},$$

$$Q_2(x) = \frac{Q_n(x)}{Q_{n_1}(x)} = \prod_{i=1}^{r}(x-a_i)\prod_{j=1}^{s}(x^2+p_jx+q_j),$$

Позначивши степені многочленів $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ відповідно n_1 і n_2 отримаємо, що $n_1 = n-r-2s$, $n_2 = r+2s$ і $m_1 < n_1$, $m_2 < n_2$, де через m_1, m_2 позначено степені многочленів $P_1(x)$ і $P_2(x)$. Формула (19) називається *формулою Остроградського*. Продиференціювавши, цю формулу можна представити в рівносильній формі

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Для знаходження многочленів $P_1(x)$ і $P_2(x)$ використовують метод невизначених коефіцієнтів.

Приклад. Знайти

4.1. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)(x-2)(x-3)}$;

4.2. $\displaystyle\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\,dx$;

4.3. $\displaystyle\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$.

Розв'язання. (4.1) Знаменник дробу має прості корені $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. За теоремою 4.1

$$\frac{x^2}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x-3}.$$

З цієї рівності раціональних функцій слідує рівність многочленів

$$x^2 = A_1(x-2)(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + A_3(x+1)(x-2).$$

Підставляючи в дану рівність послідовно $x = -1$, $x = 2$, $x = 3$ отримаємо

$$1 = 12A_1, \quad 4 = -3A_2, \quad 9 = 4A_3,$$

тобто

$$A_1 = \frac{1}{12}, \quad A_2 = -\frac{4}{3}, \quad A_3 = \frac{9}{4}.$$

Таким чином
$$\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{12}\ln|x+1| - \frac{4}{3}\ln|x-2| + \frac{9}{4}\ln|x-3| + C.$$

(4.2) Підінтегральна функція — неправильний раціональний дріб. Розділимо чисельним на знаменник

$$\begin{array}{r|l}
2x^4+5x^2-2 & 2x^3-x-1 \\ \cline{2-2}
2x^4-x^2-x & x \\ \cline{1-1}
6x^2+x-2 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
2x^3-x-1 & x-1 \\ \cline{2-2}
2x^3-2x^2 & 2x^2+2x+1 \\ \cline{1-1}
2x^2-x-1 & \\
2x^2-2x & \\ \cline{1-1}
x-1 & \\
x-1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Таким чином
$$2x^4+5x^2-2 = x(2x^3-x-1)+6x^2+x-2.$$

Многочлен $Q(x) = 2x^3-x-1$ має дійсний корінь $x=1$. Розділивши $Q(x)$ на $x-1$, отримаємо
$$Q(x) = 2x^3-x-1 = (x-1)(2x^2+2x+1).$$

Многочлен $2x^2+2x+1$ не має дійсних коренів, тому розвинення отриманого правильного дробу матиме наступний вигляд
$$\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{2x^2+2x+1}.$$

З цієї рівності отримуємо
$$6x^2+x-2 = A(2x^2+2x+1)+(Mx+N)(x-1).$$

Поклавши $x=1$, отримаємо $5 = A5$ і, отже, $A=1$. Звідси
$$4x^2-x-3 = Mx^2+(N-M)x-N.$$

Таким чином $M = 4$, $N = 3$,

$$\frac{2x^4 + 5x^2 - 2}{2x^3 - x - 1} = x + \frac{1}{x-1} + \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}$$

і

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^4 + 5x^2 - 2}{2x^3 - x - 1}\,dx &= \int x\,dx + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2+1/4} \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \ln(2x^2+2x+1) + \operatorname{arctg}(2x+1) + C.\end{aligned}$$

(4.3) Розвинення підінтегральної функції на елементарні дроби матиме наступний вигляд

$$\frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}.$$

Звідси отримуємо, що

$$\begin{aligned}4x^2 - 8x &= A(x-1)(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 \\ &\quad + (Cx+D)(x-1)^2(x^2+1) + (Ex+F)(x-1)^2. \qquad (20)\end{aligned}$$

Поклавши в отриманій рівності $x = 1$, отримаємо $-4 = 4B$, $B = -1$. Покладемо $x = i$. Тоді $-4-8i = (Ei+F)(i-1)^2$ і $-4-8i = 2E-2iF$. Прирівнюючи дійсну і уявну частини, отримаємо $E = -2$, $F = 4$. Продиференціюємо рівність (20). Отримаємо

$$\begin{aligned}8x-8 &= A(x^2+1)^2 + 4Ax(x-1)(x^2+1) + 4Bx(x^2+1) + C(x-1)^2(x^2+1) \\ &+ 2(Cx+D)(x-1)(x^2+1) + 2x(Cx+D)(x-1)^2 + E(x-1)^2 + 2(Ex+F)(x-1).\end{aligned}$$

Покладемо $x = 1$. Тоді $0 = 4A + 8B$, $4A = 8$, $A = 2$. Покладемо $x = i$. Отримаємо

$$8i - 8 = 2i(Ci+D)(i-1)^2 + E(i-1)^2 + 2(Ei+F)(i-1),$$

Прирівнюючи дійсну і уявну частини, отримаємо систему

$$\begin{cases} C + D = -3 \\ -C + D = 1. \end{cases}$$

Звідси $C = -2$, $D = -1$. Таким чином

$$\int \frac{(4x^2 - 8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$$
$$= \int \frac{2\,dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{2x-4}{(x^2+1)^2}\,dx$$
$$= 2\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x^2+1} + 4\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Останній інтеграл знайдемо за рекурентною формулою (17)

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x\right) + C.$$

Таким чином

$$\int \frac{(4x^2 - 8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{x-1} + \operatorname{arctg} x + \frac{2x+1}{x^2+1} + C.$$

□

Приклад. Знайти методом Остроградського інтеграл (4.3).

Розв'язання. Маємо

$$Q(x) = (x-1)^2(x^2+1)^2, \quad Q_1(x) = (x-1)(x^2+1), \quad Q_2(x) = (x-1)(x^2+1).$$

Позначимо

$$P_1(x) = Ax^2 + Bx + C, \quad P_2(x) = ax^2 + bx + c.$$

За формулою Остроградського (19) маємо

$$\int \frac{(4x^2 - 8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-1)(x^2+1)} + \int \frac{(ax^2 + bx + c)\,dx}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Раціональний дріб

$$\frac{ax^2 + bx + c}{(x-1)(x^2+1)}$$

зручно зразу представити у вигляді суми елементарних дробів і переписати формулу Остроградського наступним чином

$$\int \frac{(4x^2 - 8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-1)(x^2+1)} + \int \left(\frac{D}{x-1} + \frac{Ex+F}{x^2+1} \right) dx.$$

Диференціюючи обидві частини цієї рівності, отримаємо

$$\begin{aligned} &\frac{(4x^2 - 8x)}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{(2Ax+B)(x-1)(x^2+1) - (Ax^2+Bx+C)(3x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)^2} + \\ &\qquad\qquad + \frac{D}{x-1} + \frac{Ex+F}{x^2+1}, \end{aligned}$$

звідки слідує рівність многочленів

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x = -Ax^4 - 2Bx^3 + (A + B - 3C)x^2 + 2(C - A)x - \\ - B - C + D(x-1)(x^2+1)^2 + (Ex+F)(x-1)^2(x^2+1). \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему

$$\begin{array}{r|l} x^5 & 0 = D + E, \\ x^4 & 0 = -A - D + F - 2E, \\ x^3 & 0 = -2B + 2D + 2E - 2F, \\ x^2 & 4 = A + B - 3C - 2D - 2E + 2F, \\ x^1 & -8 = -2A + 2C + D + E - 2F, \\ x^0 & 0 = -B - C - D + F. \end{array}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо

$$A = 3,\ B = -1,\ C = 0,\ D = 2,\ E = -2,\ F = 1.$$

Таким чином

$$\int \frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} + 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{-2x+1}{x^2+1}\,dx =$$
$$= \frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} + 2\ln|x-1| - \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C. \quad \square$$

4.2 Задачі для розв'язання в аудиторії

Знайти наступні інтеграли від раціональних функцій.

4.4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$;

4.5. $\displaystyle\int \frac{2x+11}{x^2+6x+13}\,dx$;

4.6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$;

4.7. $\displaystyle\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\,dx$;

4.8. $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-1)(x^2-4)}$;

4.9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-13x^2+36}$.

Використовуючи метод Остроградського, знайти наступні інтеграли.

4.10. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^3}\,dx$;

4.11. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$;

4.12. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$;

4.13. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4+1)^3}$.

4.3 Задачі для домашньої роботи

Знайти наступні інтеграли від раціональних функцій.

4.14. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{2x^2-3x-2}$;

4.15. $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$;

4.16. $\displaystyle\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$;

4.17. $\displaystyle\int \frac{(5x-3)\,dx}{(x-2)(3x^2+2x-1)}$;

Використовуючи метод Остроградського, знайти наступні інтеграли.

4.18. $\int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx;$

4.19. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2};$

5 Інтегрування ірраціональних функцій

5.1 Теоретичний матеріал та приклади з розв'язками

Деякі інтеграли від ірраціональних функцій можна вдало підібраною підстановкою звести до інтегралу від раціональної функції. Даний параграф присвячений розгляду таких інтегралів та підстановок, що зводять їх до інтегралів від раціональної функції.

Означення 5.1. Функція $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *раціональною*, якщо

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

де P, Q — многочлени багатьох змінних.

1. Інтеграли виду

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_n}\right) dx, \qquad (21)$$

де $n \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Q}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad-bc \neq 0$, підстановкою

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,$$

де m — спільний знаменник чисел $k_1, \ldots, k_n$, зводиться до інтегралу від раціональної функції.

2. Інтеграли виду

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \quad a \neq 0,\ b^2 - 4ac \neq 0, \qquad (22)$$

можуть бути приведені до інтегралів від раціональної функції *підстановками Ейлера*

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t, \text{ якщо } a > 0,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}, \text{ якщо } c > 0,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x - x_1)t,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x - x_2)t,$$

де x_1, x_2 — різні дійсні корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ (знаки в правих частинах можна брати в будь-яких комбінаціях).

3. Інтеграли виду

$$\int x^m(ax^n + b)^p\, dx, \tag{23}$$

де a, b — дійсні числа, m, n, p — раціональні числа, причому $a \neq 0$, $b \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$, називають інтегралами від *диференціального бінома.* Ці інтеграли зводяться до інтегралів від раціональних функцій в трьох випадках.

(а) $p \in \mathbb{Z}$. В цьому випадку використовується підстановка $x = t^N$, де N — спільний знаменник дробів m і n.

(б) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$. В цьому випадку використовується підстановка $ax^n + b = t^s$, де s — знаменник p.

(в) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$. В цьому випадку використовується підстановка $a + b^{-n} = t^s$, де s — знаменник p.

Якщо жодна із перерахованих умов не виконується, то інтеграл (23) не може бути виражений через елементарні функції (теорема Чебишова).

Приклад. Знайти

5.1. $\displaystyle\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})}\, dx.$

Розв'язання. Даний інтеграл має вид (21), тому скористаємося підстановкою $x = t^6$. Отримаємо

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})}\, dx = 6\int \frac{t^6 + t^4 + t}{t^6(1 + t^2)} \cdot t^5\, dt =$$

$$= 6\int \frac{t^5 + t^3 + 1}{1 + t^2}\, dt = 6\int t^3\, dt + 6\int \frac{dt}{1 + t^2} =$$

$$= \frac{3t^4}{2} + 6\operatorname{arctg} t + C = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C. \quad \square$$

Приклад. Знайти

5.2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}$.

Розв'язання. За допомогою елементарних перетворень інтеграл приводиться до виду (21)

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{dx}{(2-x)^2}.$$

Підінтегральна функція є раціональною відносно змінних

$$x_1 = x, \quad x_2 = \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{1/3}.$$

Скористаємося підстановкою $\frac{2-x}{2+x} = t^3$, звідки знайдемо

$$x = 2\frac{1-t^3}{1+t^3}, \quad dx = -12\frac{t^2\,dt}{(1+t^3)^2}, \quad \frac{1}{2-x} = \frac{1+t^3}{4t^3}.$$

Таким чином

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{dx}{(2-x)^2} = -12\int \frac{(t^3+1)^2 t^3\,dt}{16t^6(t^3+1)^2} = -\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^3} = \frac{3}{8}\frac{1}{t^2} + C =$$
$$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C. \quad \square$$

Приклад. Знайти

5.3. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}$.

Розв'язання. Даний інтеграл має вид (22), тому скористаємося підстановками Ейлера. Покладемо

$$\sqrt{1+x+x^2} = tx + 1.$$

Тоді $1+x+x^2=t^2x^2+2tx+1$, звідки

$$x=\frac{2t-1}{1-t^2},\quad dx=2\frac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2}\,dt.$$

Далі, знаходимо

$$\sqrt{1+x+x^2}=\frac{1-t+t^2}{1-t^2},\quad t=\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}.$$

Таким чином

$$\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}=2\int\frac{-t(2t-1)}{1-t^2}\frac{1-t^2}{2t-1}\frac{1-t^2}{1-t+t^2}\frac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2}\,dt=$$

$$=-2\int\frac{t\,dt}{1-t^2}=\ln|1-t^2|+C=\ln\left|1-\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\right|+C.\quad\square$$

Приклад. Знайти

5.4. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Розв'язання. Даний інтеграл має вид (23), при цьому $a=b=1$, $m=0$, $n=4$, $p=-1/4$. Так як

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0,$$

то, використовуючи підстановку $1+x^{-4}=t^4$, отримаємо

$$t=(1+x^{-4})^{1/4},\quad x=(t^4-1)^{-1/4},$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\frac{(t^4-1)^{1/4}}{t},\quad dx=-\frac{t^3}{(t^4-1)^{5/4}}\,dt.$$

Звідси

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{(t^4-1)^{1/4}}{t}\cdot\frac{t^3}{(t^4-1)^{5/4}}\,dt=-\int\frac{t^2\,dt}{t^4-1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t^2-1}+\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C.\quad\square$$

5.2 Задачі для розв'язання в аудиторії

Знайти наступні інтеграли від ірраціональних функцій.

5.5. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

5.6. $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx$;

5.7. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}$;

5.8. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$;

5.9. $\displaystyle\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\frac{dx}{x^3}$;

5.10. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$;

5.11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,dx$;

5.12. $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{(x+1)^2}\,dx$;

5.13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$;

5.14. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

5.3 Задачі для домашньої роботи

5.15. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;

5.16. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$;

5.17. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$;

5.18. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(4-x)}}$;

5.19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}$;

5.20. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$;

5.21. $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$;

5.22. $\displaystyle\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$;

6 Інтегрування трансцендентних функцій

6.1 Теоретичний матеріал та приклади з розв'язками

1. Інтеграли виду

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx, \tag{24}$$

де $R(u, v)$ — раціональна функція, завжди можна звести до інтегралів від раціональної функції за допомогою підстановки (*універсальна тригонометрична підстановка*)

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi). \tag{25}$$

Дійсно, тоді

$$\sin x = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)} = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos x = \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$dx = d(2\operatorname{arctg} t) = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Таким чином, інтеграл (24) набуває виду

$$2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}. \tag{26}$$

Підстановка (25) часто приводить до громіздких обчислень, тому використовувати її потрібно лише тоді, коли не видно інших методів розв'язання. Розглянемо випадки, коли можна спростити обчислення.

(a) Якщо

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то для обчислення інтегралу зручно користуватися підстановкою

$$t = \cos x, \quad x \in (0, \pi).$$

(б) Якщо

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то для обчислення інтегралу зручно користуватися підстановкою

$$t = \sin x, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

(в) Якщо

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то для обчислення інтегралу зручно користуватися підстановкою

$$t = \operatorname{tg} x, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

2. Інтеграли виду

$$\int \sin^p x \cos^q x \, dx$$

підстановками $t = \sin x$ або $t = \cos x$ завжди можна звести до інтегралів від диференціального бінома.

3. Інтеграли виду

$$\int P_n(x) f(x) \, dx,$$

де $P_n(x)$ — многочлен степені n, а $f(x)$ — одна з функцій: $e^{\alpha x}$, $\sin \alpha x$, $\cos \alpha x$, $\ln x$, $\arcsin \alpha x$, $\arccos \alpha x$, $\operatorname{arctg} \alpha x$, $\operatorname{arcctg} \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, обчислюються за допомогою, взагалі кажучи, багаторазового інтегрування частинами. Методами інтегрування частинами і заміною змінної інтегруються і деякі інші трансцендентні функції.

Розглянемо конкретні приклади.

Приклад. Знайти

6.1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$;

6.2. $\displaystyle\int \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x - 5}$.

Розв'язання. Використовуючи підстановку (25), отримаємо

$$(6.1)\ \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{1+t^2}{1+t^2+2t+1-t^2}\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1+t} = \\ = \ln|1+t| + C = \ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$(6.2)\ \int \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x - 5} = \int \frac{1+t^2}{4(1-t^2)-6t-5(1+t^2)}\frac{2\,dt}{1+t^2} =$$

$$= -2\int \frac{dt}{9t^2+6t+1} = -2\int \frac{dt}{(3t+1)^2} = \frac{2}{3(3t+1)} + C = \frac{2}{9\operatorname{tg}(x/2)+3} + C.$$

□

Приклад. Знайти

6.3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$;

6.4. $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x+\cos^3 x}{\sin^4 x+\sin^2 x}\,dx$;

6.5. $\displaystyle\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$.

Розв'язання. (6.3) Підінтегральна функція має властивість

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

тому буде використовувати підстановку $t = \cos x$, $x \in (0, \pi)$. Маємо

$$x = \arccos t, \quad dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}.$$

Звідси

$$\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)} = -\int \frac{dt}{(1+t)(1-t^2)} = \int \frac{dt}{(1+t)^2(t-1)}.$$

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, отримаємо

$$\frac{1}{(1+t)^2(t-1)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{t-1}.$$

Звідси

$$1 = A(t+1)(t-1) + B(t-1) + C(t+1)^2.$$

Підставляючи послідовно $t = 1$, $t = -1$ отримаємо, що $C = 1/4$, $B = -1/2$. Продиференціюємо попередню рівність.

$$A(t-1) + A(t+1) + B + 2C(t+1) = 0.$$

Поклавши в отриманій рівності $t = -1$ отримаємо, що $A = -1/4$. Таким чином

$$\int \frac{dt}{(1+t)^2(t-1)} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(1+t)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t-1} =$$
$$= -\frac{1}{4}\ln|1+t| + \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{4}\ln|t-1| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{2(1+t)} + C.$$

Звідси

$$\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{1}{4}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{1}{2(1+\cos x)} + C.$$

(6.4) Підінтегральна функція має властивість

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

тому буде використовувати підстановку $t = \sin x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Отримаємо

$$x = \arcsin t, \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}.$$

$$\int \frac{\cos^5 x + \cos^3 x}{\sin^4 x + \sin^2 x}\,dx = \int \frac{(1-t^2)(2-t^2)}{t^2(1+t^2)}\,dt = \int dt - 2\int \frac{2t^2-1}{t^2(1+t^2)}.$$

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, отримаємо

$$\frac{2t^2-1}{t^2(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2}.$$

Звідси
$$2t^2 - 1 = At(1+t^2) + B(1+t^2) + (Ct+D)t^2.$$
Розкриваючи дужки та прирівнюючи коефіцієнти при степенях t отримаємо, що $A = 0$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 3$. Таким чином
$$\int \frac{2t^2-1}{t^2(1+t^2)} = -\int \frac{dt}{t^2} + 3\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{t} + 3\operatorname{arctg} t + C.$$
Звідси
$$\int \frac{\cos^5 x + \cos^3 x}{\sin^4 x + \sin^2 x}\, dx = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6\operatorname{arctg}\sin x + C.$$
(6.5) Підінтегральна функція має властивість
$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$
тому будемо використовувати підстановку $t = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Маємо
$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$
$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$
$$\cos x \sin x = \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t}{1+t^2}.$$
Таким чином
$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x + \sin x)^2}\, dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x + \sin x)^2}\, dx =$$
$$= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 + 2\cos x \sin x}\, dx = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\frac{1+t^2}{1+2t+t^2}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(1-t)\, dt}{(1+t^2)(1+t)}.$$
Знайдемо розвинення отриманого дробу на елементарні дроби
$$\frac{1-t}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2},$$

$$1 - t = A(1 + t^2) + (Ct + D)(1 + t).$$

Розкриваючи дужки та прирівнюючи коефіцієнти при степенях t отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + D = 1 \\ C + D = -1. \end{cases}$$

Розв'язавши її, отримаємо $A = 1$, $C = -1$, $D = 0$. Звідси

$$\int \frac{(1-t)\,dt}{(1+t^2)(1+t)} = \int \frac{dt}{1+t} - \int \frac{t\,dt}{1+t^2} = \ln|1+t| - \frac{1}{2}\ln|1+t^2| + C =$$
$$= \ln\left|\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}\right| + C.$$

Таким чином

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,dx = \ln\left|\frac{1+\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\right| + C = \ln|\cos x + \sin x| + C.$$

$\square$

6.2 Задачі для розв'язання в аудиторії

6.6. $\displaystyle\int \sin x \sin 3x\,dx$;

6.7. $\displaystyle\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$;

6.8. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{(3\cos x - 1)^3}$;

6.9. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}$;

6.10. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\operatorname{tg} x - 3}$;

6.11. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin x\cos x + \sin^2 x}$;

6.12. $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx$;

6.13. $\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 5}$;

6.14. $\displaystyle\int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x}\,dx$;

6.15. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x + \sin x + \sqrt{2}}$;

6.16. $\displaystyle\int \frac{(\cos x + \sin x)\,dx}{5\cos^2 x - 2\sin 2x + 2\sin^2 x}$; 6.17. $\displaystyle\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 2\sin 2x}\,dx.$

6.3 Задачі для домашньої роботи

6.18. $\displaystyle\int \sin 2x \cos 4x \, dx;$

6.19. $\displaystyle\int \cos x \cos 3x \cos 5x \, dx$

6.20. $\displaystyle\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x}\,dx$

6.21. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\,dx}{3 + 4\sin^2 x};$

6.22. $\displaystyle\int \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}}\,dx;$

6.23. $\displaystyle\int \frac{dx}{4\cos^2 x - 2\sin 2x + \sin^2 x};$

6.24. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x + \cos^3 x};$

6.25. $\displaystyle\int \frac{dx}{7\cos x - 4\sin x + 8};$

Список використаної літератури

[1] Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. — 13-е изд., исправленое. — М.: Изд-во Моск. ун-та, Черо, 1997. — 624 с.

[2] Коляда В. И., Кореновский А. А. Курс лекций по математическому анализу. В двух частях. Часть I. — Одесса: Астропринт, 2010. — 374 с.

[3] Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды: Учеб. пособие / Под ред. Л. Д. Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 504 с.

Навчальне видання

Шанін Руслан Васильович

Невизначений інтеграл та методи його обчислення

Методичні вказівки

В авторській редакції

Підписано до друку 14.02.2022. Формат 60x84/16.
Ум.-друк. арк. 2,62. Тираж 11 пр.
Зам. № 2426.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел.: (048) 723 28 39. E-mail: druk@onu.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.