

УДК 517.5

**В. А. Андриенко\*, Л. Г. Коваленко\*\***

\*Южноукраинский педагогический университет им. К. Д. Ушинского

\*\*Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

## АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СРЕДНИХ ЧЕЗАРО ДВОЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Рекомендовано до друку науковим семінаром  
з теорії функцій ОНУ 18.05.2000

Наведено точну за порядком оцінку швидкості збіжності майже всюди середніх Чезаро  $(C, \alpha > 0)$  подвійних ортогональних рядів із  $L^2$  за деяких умов на коефіцієнти.

Приведена точная по порядку оценка скорости суммируемости почти всюду средних Чезаро  $(C, \alpha > 0)$  двойных ортогональных рядов из  $L^2$  при некоторых условиях на коэффициенты.

Exact order estimate of the rate of a.e. summability of double orthogonal expansions from  $L^2$  by the Cesàro methods  $(C, \alpha > 0)$  is found under some coefficient conditions.

**Введение.** Пусть  $Z_+^2 = \{n = (n_1, n_2)\}$  – множество точек из  $R^2$  с целыми неотрицательными координатами,  $\varphi = \{\varphi_n(x) : n \in Z_+^2\}$  – двойная ортонормированная система (ОНС) на множестве  $X = [0, 1]^2$  и  $\Phi$  – множество всех таких систем.

Множество  $Z_+^2$  частично упорядочено соглашением, что неравенство  $k \leq n$  для  $k, n \in Z_+^2$  означает  $k_i \leq n_i, i = 1, 2$ . Условимся также, что  $k \pm n = (k_1 \pm n_1, k_2 \pm n_2)$ ;  $n^* = \max(n_1, n_2)$ ;  $n_* = \min(n_1, n_2)$ ;  $N = (N, N) \in Z_+^2$  для  $N = 0, 1, \dots$ ;  $\|x\| = x_1 \cdot x_2$  для  $x = (x_1, x_2) \in R_+^2$ , и если  $f(t)$  – функция одной переменной  $t$ , то мы полагаем  $f(x) = (f(x_1), f(x_2))$ .

Пусть  $\{a_n : n \in Z_+^2\}$  – двойная последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n \geq 0} a_n^2 \equiv \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} a_{n_1 n_2} < \infty. \quad (1)$$

Рассмотрим двойной ортогональный ряд

$$\sum_{n \geq 0} a_n \varphi_n \equiv \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} a_{n_1 n_2} \varphi_{n_1 n_2}(x), \quad x \in X \quad (2)$$

Обозначим через  $S_n(x)$  его прямоугольные суммы  $(n \in Z_+^2)$ ,  $\sigma_n^\alpha(x)$  – средние Чезаро  $(n \in Z_+^2, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) > 0)$  и  $f(x)$  –  $L^2$ -сумму ряда (2). По определению,

$$S_n(x) \equiv S_{n_1 n_2}(x) \equiv \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} a_{k_1 k_2} \varphi_{k_1 k_2}(x), \quad x \in X; \quad (3)$$

$$\sigma_n^\alpha(x) \equiv \sigma_{n_1 n_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(x) = \frac{1}{\|A_n^\alpha\|} \sum_{i \leq n} \|A_{n-i}^\alpha\| a_i \varphi_i(x), \quad i \in Z_+^2, x \in X, \quad (4)$$

где  $A_{n_i}^{\alpha_i}$  – биномиальные коэффициенты ( $i = 1, 2; n_i = 0, 1, 2, \dots; \alpha_i > 0$ ).

По теореме Рисса-Фишера функция  $f(x)$  определяется однозначно: ряд (2) является ее рядом Фурье и последовательность  $\{S_n(x), n \in Z_+^2\}$  сходится к  $f(x)$  в  $L^2$ -метрике. Однако условие (1), вообще говоря, не обеспечивает сходимости почти всюду (п.в.) последовательности (3) к  $f(x)$  на множестве  $X$ , как и не гарантирует сходимости п.в. к  $f(x)$  последовательности (4) ни при каком  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) > 0$ . Достаточным условием сходимости п.в. на  $X$  последовательности (4) к  $f(x)$  при любом  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) > 0$  по любой ОНС  $\varphi \in \Phi$ , как показал Ф.Мориц [1, с.82], является условие  $\sum a_n^2 \|\ln \ln(n+2)\|^2 < \infty$ .

В настоящей работе исследуется вопрос о скорости сходимости п.в. к функции  $f(x)$  средних Чезаро  $\sigma_n^\alpha(x)$  при любом  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) > 0$ .

Пусть  $\lambda(n) = \lambda(n_1, n_2) > 0$  – неубывающая по каждой переменной последовательность, стремящаяся к бесконечности при  $n^* \rightarrow \infty$ . Полагая  $\lambda_1(n_1) = \lambda(n_1, 0)$  и  $\lambda_2(n_2) = \lambda(0, n_2)$ , приведем основной результат этой статьи.

**Теорема 1.** Пусть последовательность  $\{\lambda(n) = \lambda(n_1, n_2) > 0\}$  такова, что  $\lambda(n) / \|\ln \ln n\| \uparrow (n \geq 2)$  и  $\lambda(n) / \|(n+3) \ln \ln(n+3)\| \downarrow 0$  по каждой переменной. Тогда:

1) для любых  $\alpha > 0$  и  $\varphi \in \Phi$  при условии

$$\sum_{n \geq 0} a_n^2 \lambda^2(n) < \infty \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f(x) - \sigma_n^\alpha(x) &= \overline{o}_x \{ \ln \ln n_1 / \lambda_1(n_1) + \ln \ln n_2 / \lambda_2(n_2) \} = \\ &= \overline{o}_x \left\{ \max_{i=1,2} \ln \ln n_i / \lambda_i(n_i) \right\}, \quad n_* \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (6)$$

2) если хотя бы для одного  $i = 1, 2$  выполнено одно из условий :

$$(\alpha) \quad \lambda_i(n_i) \exp(-\ln^\gamma n_i) \downarrow \text{ для некоторого } \gamma \in (0, 1);$$

$$(\beta) \quad \mu_i(n_i) = n_i / \lambda_i(n_i) \uparrow \infty, \text{ но } \mu_i(n_i) \exp(-\ln^\gamma n_i) \text{ убывает для некоторого } \gamma \in (0, 1);$$

$$(\gamma) \quad n_i / \lambda_i(n_i) \downarrow;$$

то оценка (6) окончательна на классе всех ортогональных систем.

Соотношение  $g_n(x) = \overline{o}_x(\gamma(n))$ , где  $g_n(x) \in L^2(x)$ , означает, что п.в. на  $X$   $\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} g_n(x) \gamma^{-1}(n) = 0$  и  $|g_n(x)| \gamma^{-1}(n) \leq F(x) \in L^2(X), \forall x \in X, n \geq 0$ .

Под окончательностью оценки (6) подразумевается тот факт, что для любой последовательности  $v(n) = v(n_1, n_2) \rightarrow \infty$  при  $n_1, n_2 \rightarrow \infty$  найдется ортогональный ряд (2) такой, что выполнено условие (5), но для всех  $x \in X$  имеем:

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} v(n) \gamma^{-1}(n) |f(x) - \sigma_n^\alpha(x)| = +\infty.$$

Теорема 1 является аналогом теоремы 12 В.И.Коляды [2, с.52–53] ( $\alpha = 1$ ) и теоремы 1 В. А. Андриенко [3, с.264–265] ( $\alpha$  – любое положительное) для одномерных рядов. Из нее следует частный результат Ф. Морица [4, с.111, теорема 4].

**1. Вспомогательные утверждения.** В качестве простого следствия из теоремы 3 [5, с.1309] получается следующее утверждение:

**Лемма 1.** Пусть  $\{\lambda(n) > 0: n \in Z_+^2\}$  – неубывающая по каждой переменной последовательность, стремящаяся к бесконечности при  $n^* \rightarrow \infty$  и  $\{m_n = (m_{n_1}, m_{n_2}): n \in Z_+^2\}$  – решетка в  $Z_+^2$  такова, что  $\lambda(m_n)/\|\ln n\| \uparrow \infty$  по каждой переменной. Если последовательность  $\{a_n: n \in Z_+^2\}$  удовлетворяет условию (5), то для ортогонального ряда (2) по любой ОНС  $\Phi \in \Phi$  п.в. на  $X$  верна оценка

$$f(x) - S_{m_n}(x) = \overline{o}_x \left\{ \ln n_1 / \lambda_1(m_{n_1+1}) + \ln n_2 / \lambda_2(m_{n_2+1}) \right\} \text{ при } n_* \rightarrow \infty, \quad (7)$$

где  $f(x) - L^2$  – сумма ряда (2), а  $S_{m_n}(x)$  – его частные суммы.

**Замечание 1.** В условиях леммы 1 последовательность  $\{\ln k\}$  можно заменить любой последовательностью  $\{\alpha(k)\}$ , имеющей тот же порядок роста.

Исходным пунктом рассуждений данной работы является следующая лемма.

**Лемма 2.** Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) > 0$  и  $\lambda(n) = \lambda(n_1, n_2) > 0$  – возрастающая к бесконечности по каждой переменной двойная последовательность со следами  $\lambda_1(n_1)$  и  $\lambda_2(n_2)$  такими, что для некоторого  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in (0, 1)$

$$\lambda_i(n_i) n_i^{-1-\gamma_i} \downarrow (i = 1, 2) \quad (8)$$

При условии (5) для  $2^k < n \leq 2^{k+1}$  и  $x \in X$  имеем

$$\sigma_n^\alpha(x) = S_{2^k}(x) + \frac{\alpha_1}{n_1 + 1} S_{2^k}^{(1)}(x) + \frac{\alpha_2}{n_2 + 1} S_{2^k}^{(2)}(x) - \left\| \frac{\alpha}{n+1} \right\| S_{2^k}^{(1,2)}(x) + r_n(x), \quad (9)$$

где  $S_{2^k}^{(1)}(x) = \sum_{i \leq 2^k} i_1 a_i \varphi_i(x)$ ;  $S_{2^k}^{(2)}(x) = \sum_{i \leq 2^k} i_2 a_i \varphi_i(x)$ ;  $S_{2^k}^{(1,2)} = \sum_{i \leq 2^k} \|i\| a_i \varphi_i(x)$ ;  $i, k, n \in Z_+^2$ ;

$r_n(x) = \overline{o}_x \{1/\lambda_1(n_1) + 1/\lambda_2(n_2)\}$  при  $n_* \rightarrow \infty$  п.в. на  $X$ .

**Доказательство.** По определению, для  $2^k < n \leq 2^{k+1}$

$$\sigma_n^\alpha(x) = S_{2^k}(x) + \left\| \alpha(n+1)^{-1} \right\| S_{2^k}^{(1,2)}(x) - \alpha_1(n_1+1)^{-1} S_{2^k}^{(1)}(x) - \alpha_2(n_2+1)^{-1} S_{2^k}^{(2)}(x) + r_n(x)$$

где

$$\begin{aligned} r_n(x) = & \sum_{i \leq 2^k} \left( \left\| A_{n-i}^\alpha / A_n^\alpha \right\| - 1 - \left\| \alpha i / (n+1) \right\| + \alpha_1 i_1 / (n_1+1) + \alpha_2 i_2 / (n_2+1) \right) a_i \varphi_i(x) + \\ & + \sum_{j=1}^3 \sum_{i \in P_j} \left\| A_{n-i}^\alpha / A_n^\alpha \right\| a_i \varphi_i(x) \equiv \rho_n(x) + \sum_{j=1}^3 r_n^{(j)}(x), \end{aligned} \quad (10)$$

а множества  $P_j \subset Z_+^2$  определяются неравенствами:

$$P_1 = \left\{ i = (i_1, i_2) \in Z_+^2 : 2^{k_1} + 1 \leq i_1 \leq n_1, 1 \leq i_2 \leq 2^{k_2} \right\}; \quad (11)$$

$$P_2 = \left\{ i = (i_1, i_2) \in Z_+^2 : 1 \leq i_1 \leq 2^{k_1}, 2^{k_2} + 1 \leq i_2 \leq n_2 \right\}; \quad (12)$$

$$P_3 = \left\{ i = (i_1, i_2) \in Z_+^2 : 2^{k_1} + 1 \leq i_1 \leq n_1, 2^{k_2} + 1 \leq i_2 \leq n_2 \right\}. \quad (13)$$

Для оценки  $\rho_n(x)$  преобразуем, сохраняя обозначения леммы 3 [3, с.270-275], числа  $Q_i(n, \alpha)$ :

$$\begin{aligned} Q_i(n, \alpha) &= \left\| A_{n-i}^\alpha / A_n^\alpha \right\| - 1 - \|\alpha i / (n+1)\| + \alpha_1 i_1 / (n_1 + 1) + \alpha_2 i_2 / (n_2 + 1) = \\ &= \|\alpha i / (n+1)\| \times \left[ \left\| 1 - A_{n-i}^\alpha / A_n^\alpha \right\| \|(n+1) / (\alpha i)\| - 1 \right] - \\ &\quad - \alpha_1 i_1^2 / (n_1 + 1)^2 \times q_{i_1}(n_1, \alpha_1) - \alpha_2 i_2^2 / (n_2 + 1)^2 \times q_{i_2}(n_2, \alpha_2), \end{aligned}$$

где

$$q_i(n, \alpha) = \frac{n+1}{i} \left[ \frac{n+1}{\alpha i} \left( 1 - \frac{A_{n-i}^\alpha}{A_n^\alpha} \right) - 1 \right], \quad n \in N, 1 \leq i \leq n \quad (14)$$

и

$$\begin{aligned} \left\| 1 - A_{n-i}^\alpha / A_n^\alpha \right\| \|(n+1) / \alpha\| - 1 = \\ = \|i / (n+1)\| \|q_i(n, \alpha)\| + i_1 / (n_1 + 1) \times q_{i_1}(n_1, \alpha_1) + i_2 / (n_2 + 1) \times q_{i_2}(n_2, \alpha_2). \end{aligned} \quad (15)$$

В силу (10), (14), (15),

$$\begin{aligned} \rho_n(x) &= \left\| \alpha(n+1)^{-2} \left\| \sum_{i \leq 2^k} \|i q_i(n, \alpha)\| a_i \varphi_i(x) - \right. \right. \\ &\quad - \alpha_1(n_1 + 1)^{-2} \sum_{i \leq 2^k} i_1^2 (1 - \alpha_2 i_2 / (n_2 + 1)) q_{i_1}(n_1, \alpha_1) a_i \varphi_i(x) - \\ &\quad \left. - \alpha_2(n_2 + 1)^{-2} \sum_{i \leq 2^k} i_2^2 (1 - \alpha_1 i_1 / (n_1 + 1)) q_{i_2}(n_2, \alpha_2) a_i \varphi_i(x) \right\| = \\ &\equiv \rho_n^{(1)}(x) + \rho_n^{(2)}(x) + \rho_n^{(3)}(x). \end{aligned}$$

Последовательно применяя преобразование Абеля для двойных сумм, неравенство Коши-Буняковского и лемму 3 [3, с.270-273], нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \left\{ \rho_n^{(1)}(x) \right\}^2 &\leq 4 \left\| \alpha^2 (n+1)^{-4} \left\{ C_1(\alpha) \sum_{i \leq 2^k - 1} \left\| \Delta q_i(n, \alpha) \right\| \left| \sum_{t \leq i} t^2 \|a_t \varphi_t(x)\|^2 + \right. \right. \right. \\ &\quad + C_2(\alpha) \sum_{i_2=1}^{2^{k_2}-1} \left\| \Delta q_{i_2}(n_2, \alpha_2) \right\| \left| \sum_{i_1=1}^{2^{k_1}} \sum_{t_2=1}^{i_2} a_{i_1 t_2} i_1^2 t_2^2 \varphi_{i_1 t_2}(x) \right|^2 + C_3(\alpha) \sum_{i_1=1}^{2^{k_1}-1} \left\| \Delta q_{i_1}(n_1, \alpha_1) \right\| \times \\ &\quad \left. \left. \times \left| \sum_{i_2=1}^{2^{k_2}} \sum_{t_1=1}^{i_1} a_{i_1 t_2} t_1^2 i_2^2 \varphi_{i_1 t_2}(x) \right|^2 + C_4(\alpha) \left| \sum_{i \leq 2^k} a_i \|i^2 \varphi_i(x)\|^2 \right\} \right\}, \end{aligned}$$

где  $|\Delta q_i(n, \alpha)| = |q_i(n) - q_{i+1}(n)|$ ,  $n \in N$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Далее, т.к. а) последовательность  $1/\lambda_1(n_1) + 1/\lambda_2(n_2)$  не возрастает по каждой переменной и, значит, обратная величина  $\lambda_1(n_1)\lambda_2(n_2)/[\lambda_1(n_1) + \lambda_2(n_2)] \equiv \Lambda(n)$  не убывает; б) последовательности  $\{2^{k_i}\}_{k_i=1}^\infty$ ,  $i = 1, 2$ , лакунарны, а  $\lambda_i(n_i)$ ,  $i = 1, 2$  удовлетворяют условию (8), получаем, согласно утверждению (б) леммы 3 [3]:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \left| \Lambda(2^k) \right|^2 \int_X \sup_{2^k < n \leq 2^{k+1}} \left[ \rho_n^{(1)}(x) \right]^2 dx &\leq C_5(\alpha) \sum_{k \geq 0} \left| \Lambda(2^k) \right|^2 \frac{1}{\|2^{4k}\|} \sum_{i \leq k} \|i^4\| a_i^2 \leq \\ &\leq C_5(\alpha) \sum_{i \leq 0} \|i^4\| a_i^2 \sum_{2^k \geq i} \left| \Lambda(2^k) \right|^2 / 2^{4(k_1+k_2)} \leq C_6(\alpha) \sum_{i \geq 0} a_i^2 \left| \Lambda(i) \right|^2 \leq C_7(\alpha) \sum_{i \geq 0} a_i^2 \lambda^2(i) < \infty, \end{aligned}$$

поскольку  $[1/\lambda_1(i_1) + 1/\lambda_2(i_2)]^{-1} \leq 1/2 \lambda(i)$ . Отсюда по теореме Леви

$$\rho_n^{(1)}(x) = \overline{\overline{o_x}} \{1/\lambda_1(n_1) + 1/\lambda_2(n_2)\}. \quad (16)$$

Аналогично, оценивая  $\rho_n^{(2)}(x)$  и полагая

$$\psi_{2^k}^2(x) = \sup \left\{ \left[ \rho_n^{(2)}(x) \right]^2 : 2^{k_1} < n_1 \leq 2^{k_1+1}, n_2 > 2^{k_2} \right\},$$

нетрудно показать, что  $\sum_{k_1 \geq 0} \lambda_1^2(2^{k_1}) \int_X \psi_{2^k}^2(x) dx < \infty$ . Т.к. последовательность

$F_{k_2}(x) = \sum_{k_1 \geq 0} \lambda_1^2(2^{k_1}) \psi_{2^k}^2(x)$  не возрастает, в силу определения  $\psi_{2^k}^2(x)$ , то

$$\rho_n^{(2)}(x) = \overline{\overline{o_x}} \{1/\lambda_1(n_1)\} \text{ при } n_1 \rightarrow \infty \text{ равномерно по } n_2.$$

Аналогично

$$\rho_n^{(3)}(x) = \overline{\overline{o_x}} \{1/\lambda_2(n_2)\} \text{ при } n_2 \rightarrow \infty \text{ равномерно по } n_1.$$

Поэтому

$$\rho_n(x) = \overline{\overline{o_x}} \{1/\lambda_1(n_1) + 1/\lambda_2(n_2)\} \text{ при } n_* \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Для оценки  $r_n^{(j)}(x)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) положим  $\delta = (\alpha - 1)/2$ . Тогда (см.(13))

$$r_n^{(3)}(x) = \|A_n^\alpha\|^{-1} \sum_{i \in P_3} \|A_{n-i}^\alpha\| a_i \varphi_i(x) = \|A_n^\alpha\|^{-1} \sum_{2^k < v \leq n} \|A_{n-v}^{\alpha-\delta-1} A_v^\delta\| \tilde{\sigma}_v^\delta(x),$$

$$\text{где } \tilde{\sigma}_v^\delta(x) = \|A_v^\delta\|^{-1} \sum_{2^k < i \leq v} \|A_{v-i}^\delta\| a_i \varphi_i(x).$$

Отсюда следует, что  $|r_n^{(3)}(x)|^2 \leq C_1(\alpha) 2^{-k} \left\| \sum_{2^k < v \leq 2^{k+1}} \tilde{\sigma}_v^\delta(x) \right\|^2$  и

$$\sum_{k \geq 0} \lambda^2(2^k) \int_X \sup_{2^k < n \leq 2^{k+1}} |r_n^{(3)}(x)|^2 dx \leq C_2(\alpha) \sum_{i \geq 0} a_i^2 \lambda^2(i) < \infty. \text{ По теореме Леви}$$

$$r_n^{(3)}(x) = \overline{\overline{o_x}} \{1/\lambda(n)\} = \overline{\overline{o_x}} \{1/\lambda_1(n_1) + 1/\lambda_2(n_2)\} \text{ при } n_* \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Для оценки  $r_n^{(2)}(x)$  наряду с прямоугольником  $P_2$  (см.(12)) рассмотрим прямоугольники  $P_2(n)$ , имеющие с  $P_2$  общую вершину  $(1, 2^{k_2+1})$  и переменную правую вершину в точке  $n = (n_1, n_2)$ . Тогда

$$r_n^{(2)}(x) = \|A_n^\alpha\|^{-1} \sum_{v \in P_2(n)} \|A_{n-v}^{\alpha-\delta-1} A_v^\delta\| \tilde{\sigma}_v^\delta(x), \text{ где } \tilde{\sigma}_v^\delta(x) = \|A_v^{\delta-1}\|^{-1} \sum_{i \in P_2(v)} \|A_{v-i}^\delta\| a_i \varphi_i(x)$$

$$\text{и } |r_n^{(2)}(x)| \leq C(\alpha) 2^{-k_2} \sum_{p=1}^{k_1+1} 2^{-p} \sum_{v_1=2^{p-1}+1}^{2^p} \sum_{v_2=2^{k_2+1}}^{2^{k_2+1}} |\tilde{\sigma}_v^\delta(x)|^2 \equiv \psi_{2^k}^2(x).$$

Далее нетрудно показать, что  $\int_X \sup_{2^k < n \leq 2^{k+1}} |r_n^{(2)}(x)|^2 dx \leq C(\alpha) \sum_{i \in P_2(2^{k+1})} a_i^2$ . Последова-

тельность  $F_{k_1}(x) = \sum_{k_2 \geq 0} \lambda_2^2(2^{k_2}) \times \psi_{2^k}^2(x)$  не убывает. Функция  $F(x) = \lim_{k_1 \rightarrow \infty} F_{k_1}(x)$  такова,

что  $\int_X F(x) dx \leq C(\alpha) \sum_{i \geq 0} a_i^2 \lambda^2(i) < \infty$ . По теореме Леви

$$r_n^{(2)}(x) = \overline{o_x} \left\{ 1/\lambda_2(n_2) \right\} \text{ при } n_2 \rightarrow \infty \text{ равномерно по } n_1. \quad (19)$$

Аналогично

$$r_n^{(1)}(x) = \overline{o_x} \left\{ 1/\lambda_1(n_1) \right\} \text{ при } n_1 \rightarrow \infty \text{ равномерно по } n_2. \quad (20)$$

Из (17)–(20) вытекает утверждение (9) леммы 2.

**2. Доказательство теоремы 1.** На основании леммы 2 для  $2^k < n \leq 2^{k+1}$

$$f(x) - \sigma_n^\alpha(x) = f(x) - S_{2^k}(x) + \frac{\alpha_1}{n_1+1} S_{2^k}^{(1)}(x) + \frac{\alpha_2}{n_2+1} S_{2^k}^{(2)}(x) + \left\| \frac{\alpha}{n+1} \right\| S_{2^k}^{(1,2)}(x) + r_n(x) \quad (21)$$

где  $r_n(x) = \overline{o_x} \left\{ 1/\lambda_1(n_1) + 1/\lambda_2(n_2) \right\}$  при  $n_* \rightarrow \infty$ .

Согласно лемме 1, учитывая замечание 1,

$$\begin{aligned} f(x) - S_{2^k}(x) &= \overline{o_x} \left\{ \ln k_1/\lambda_1(2^{k_1+1}) + \ln k_2/\lambda_2(2^{k_2+1}) \right\} = \\ &= \overline{o_x} \left\{ \ln \ln n_1/\lambda_1(n_1) + \ln \ln n_2/\lambda_2(n_2) \right\} \text{ при } n_* \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (22)$$

Для оценки  $S_{2^k}^{(1)}(x) = \sum_{i \leq 2^k} i a_i \varphi_i(x)$  применим теорему 1 из [6, с. 1303–1304], взяв

в качестве  $\lambda(n) = \lambda(n_1, n_2)$  последовательность  $\lambda(n) = \lambda_1(n_1) \ln \ln n_2/n_1$ . Тогда

$$\alpha_1(n_1+1)^{-1} S_{2^k}^{(1)}(x) = \overline{o_x} \left\{ \ln k_1/\lambda_1(2^{k_1}) \right\} = \overline{o_x} \left\{ \ln \ln n_1/\lambda_1(n_1) \right\} \text{ при } n_* \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Аналогично

$$\alpha_2(n_2+1)^{-1} S_{2^k}^{(2)}(x) = \overline{o_x} \left\{ \ln \ln n_2/\lambda_2(n_2) \right\} \text{ при } n_* \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Для оценки суммы  $S_{2^k}^{(1,2)} = \sum_{i \leq 2^k} \|i\| a_i \varphi_i(x)$  выберем  $\lambda'(n) = \lambda(n)/\|n\|$  и снова при-

меним теорему 1 из [6]. Тогда

$$\left\| \alpha/(n+1) \right\| S_{2^k}^{(1,2)}(x) = \overline{o_x} \left\{ \ln k_1 \ln k_2/\lambda(2^k) \right\}, \quad k_* \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Покажем, что

$$\ln k_1 \ln k_2/\lambda(2^k) \leq \ln \ln n_1/\lambda_1(n_1) + \ln \ln n_2/\lambda_2(n_2). \quad (26)$$

Так как

$$\ln k_1 \ln k_2/\lambda(2^k) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\ln k_1}{\lambda_1(n_1)} \frac{\lambda_1(n_1) \lambda_1(2^{k_1+1}) \ln k_2}{\lambda_1(2^{k_1+1}) \lambda(2^k)} + \frac{\ln k_2}{\lambda_2(n_2)} \frac{\lambda_2(n_2) \lambda_2(2^{k_2+1}) \ln k_1}{\lambda_2(2^{k_2+1}) \lambda(2^k)} \right]$$

и так как в условиях теоремы последовательность  $\lambda(n_1, n_2)/\|\ln \ln(n+3)\|^\uparrow \infty$  по каж-

дой переменной, то, например,  $\frac{\lambda(n_1, n_2)}{\ln \ln(n_1+3) \ln \ln(n_2+3)} \geq \frac{\lambda_1(n_1)}{\ln \ln 3 \ln \ln(n_1+3)}$ .

Следовательно,  $\lambda(2^k) \geq C \lambda_1(2^{k_1+1}) \ln(k_2+1)$  и  $\frac{\lambda_1(n_1) \lambda_1(2^{k_1+1}) \ln k_2}{\lambda_1(2^{k_1+1}) \lambda(2^k)} \leq C \frac{\lambda_1(n_1)}{\lambda_1(2^{k_1+1})} \leq C_1$ .

Аналогично  $\frac{\lambda_2(n_2) \lambda_2(2^{k_2+1}) \ln k_1}{\lambda_2(2^{k_2+1}) \lambda(2^k)} \leq C_2$ .

Тем самым неравенство (26) доказано и (см. (25))

$$\left\| \alpha/(n+1) \right\| S_{2^k}^{(1,2)} = \overline{o_x} \left\{ \ln \ln n_1/\lambda_1(n_1) + \ln \ln n_2/\lambda_2(n_2) \right\}, \quad n_* \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Теперь (6) следует из (21)–(24) и (27).

Перейдем к доказательству окончательности. Пусть выполнено одно из условий  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  или  $(\gamma)$ , например, для  $i = 1$ . По теореме 1 [3, с.278] для любой последовательности  $\omega(n) \rightarrow \infty$  существует ортогональный ряд

$$\sum_{n_1 \geq 0} a_{n_1} \varphi_{n_1}(x) \tag{28}$$

с  $L^2$ -суммой  $f(x)$  такой, что  $\sum_{n_1 \geq 0} a_{n_1}^2 \lambda_1^2(n_1) < \infty$  и для всех  $x \in X$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1(n_1) \omega(n_1)}{\ln \ln n_1} \left| f(x) - \sigma_{n_1}^{\alpha_1}(x) \right| = \infty. \tag{29}$$

Построим двойной ортогональный ряд

$$\sum_{n \geq 0} c_n \varphi_n(x), \tag{30}$$

полагая  $c_n \equiv c_{n_1 n_2} = \begin{cases} a_{n_1}, & n_2 = 0 \\ 0, & n_2 > 0 \end{cases}$  и определяя ОНС  $\{\varphi_n(x)\}$  так, как, например, в теореме 3 [7, с.259–260], чтобы  $\varphi_{n_1 n_2}(x) \equiv \varphi_n(x) = \Phi_{n_1}(x)$ , если  $n_2 = 0$ . Тогда двойной ортогональный ряд (30) совпадает с однократным рядом (28), их  $L^2$ -суммы совпадают, а чезаровские средние ряда (30) совпадают с чезаровскими средними ряда (28):

$$\begin{aligned} \sigma_n^\alpha(x) &\equiv \sigma_{n_1 n_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(x) = \frac{1}{A_{n_1}^{\alpha_1} A_{n_2}^{\alpha_2}} \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} A_{n_1-k_1}^{\alpha_1} A_{n_2-k_2}^{\alpha_2} a_{k_1 k_2} \varphi_{k_1 k_2}(x) = \\ &= \frac{1}{A_{n_1}^{\alpha_1} A_0^{\alpha_2}} \sum_{k_1=0}^{n_1} A_{n_1-k_1}^{\alpha_1} A_0^{\alpha_2} a_{k_1} \varphi_{k_1}(x) = \sigma_{n_1}^{\alpha_1}(x) \text{ для любых } n_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим множество  $P_n = \{n = (n_1, n_2) : \lambda_1(n_1) \ln \ln n_2 \leq \lambda_2(n_2) \ln \ln n_1\}$ . В силу (29), всюду на  $X$  имеем:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| f(x) - \sigma_{n_1 n_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(x) \right| \frac{v(n) \lambda_1(n_1) \lambda_2(n_2)}{\lambda_2(n_2) \ln \ln n_1 + \lambda_1(n_1) \ln \ln n_2} &\geq \\ \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty, n \in P_n} \left| f(x) - \sigma_{n_1 n_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(x) \right| \frac{v(n) \lambda_1(n_1) \lambda_2(n_2)}{\lambda_2(n_2) \ln \ln n_1 + \lambda_1(n_1) \ln \ln n_2} &\geq \\ \geq \frac{1}{2} \overline{\lim}_{n_1 \rightarrow \infty} \left| f(x) - \sigma_{n_1}^{\alpha_1}(x) \right| v_1(n_1) \lambda_1(n_1) / \ln \ln n_1 = \infty, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

1. Moricz F. On the  $(C, \alpha \geq 0, \beta \geq 0)$ -summability of double orthogonal series // Studia. Math. 81, 1985. – P. 79–94.
2. Коляда В. И. Скорость сходимости и суммируемости ортогональных рядов и вложение некоторых классов функций многих переменных: Дисс... канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1973. – 129 с.
3. Andrienko V. A. On the rate of Cesaro summability of orthogonal series // Anal. Math. – 1989. – V. 15, № 4. – С. 263–281.
4. Moricz F. Approximation theorems for double orthogonal series // J. Approx. Theory. – 1984. – V. 42, № 2. – P. 108–137.
5. Андриенко В. А. О скорости сходимости кратных ортогональных рядов // Укр. матем. журнал. – 1990. – Т. 42, № 10. – С. 1307–1314.
6. Андриенко В. А. О порядке роста прямоугольных частных сумм двойных ортогональных рядов // Укр. матем. журнал. – 1999. – Т. 51, № 10. – С. 1299–1310.
7. Andrienko V. A. Rate of approximation by rectangular partial sums of double orthogonal series // Anal. Math. – 1996. – 22. – P. 243–266.