

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Геодезичні відображення просторів малої розмірності»

«Geodesic mappings of spaces of small dimension»

Виконала: здобувачка) денної форми навчання
спеціальності 111 Математика

Освітня програма «Математика»

Марченко Наталя Володимирівна

Керівник: доктор фіз.-мат. наук, проф. Кіусак В.А.

Рецензент: канд. техн. наук, доц. Вашпанова Н.В

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ 2024 р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ____ від _____ 2024 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

Одеса — 2024 р.

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Псевдоріманові простори	5
1.1 Об'єкти псевдоріманових просторів	5
1.2 Рекурентні та слабо рекурентні псевдоріманові простори . .	6
1.3 Основні рівняння теорії геодезичних відображень	8
2 Геодезичні відображення тривимірних псевдоріманових просторів	11
2.1 Геодезичні відображення спеціальних просторів	11
2.2 Геодезичні відображення просторів з оболонками	17
Висновки	23
Список літератури	24

ВСТУП

Першим питання про геодезичне відображення поверхні V_2 на площину $\bar{E}_2$ розглянув Е. Бельтрамі [1] в 1865 році, розв'язуючи задачі картографії. Пізніше в 1869 році У. Діні [8] поставив загальну задачу про можливість геодезичного відображення V_2 на $\bar{V}_2$. Ним, по суті, ця задача була розв'язана для ріманових просторів, однак розв'язок був надзвичайно складний, і всі роки після того, він багато раз уточнювався та модифікувався цілим рядом вчених. Серед цих робіт особливе місце займає робота 1896 року Т. Леві-Чевіті [6], в якій він, виходячи з рівнянь динаміки, сформулював постановку задачі та отримав основні рівняння.

Після того, як тензорні методи дослідження зайняли домінуючі позиції в диференціальній геометрії, Г. Вейль, Л. П. Ейзенхарт, В. Ф. Каган, Г. І. Кручкович, А. С. Солодовніков та інші побудували струнку теорію геодезичних відображень псевдоріманових просторів, інваріантну відносно вибору системи координат [2–4, 10, 13, 14].

Новий поштовх ця теорія отримала після робіт М.С. Синюкова, який звів задачу до дослідження лінійної системи диференціальних рівнянь [9].

В теорії геодезичних відображень працювала велика кількість вчених як математиків, так і фізиків, зацікавлених в застосуванні результатів для моделювання динамічних процесів. Як відомо, рух деяких типів механічних систем, багато процесів в гравітаційних та електромагнітних полях, в суцільних середовищах протікають по траєкторіях, які можна розглядати, як геодезичні лінії афіннозв'язного або псевдоріманового простору, що визначаються енергетичним режимом, при якому зовнішні сили відсутні, або по деяким кривим, вектор кривини яких це — вектор узагальнених зовнішніх сил.

Вивчення відображень (морфізмів) різних типів геометричних структур складає актуальну частину сучасної диференціальної геометрії. Під відображенням в сучасній геометрії розуміють дифеоморфізм, що зберігає ті чи інші властивості геометричних об'єктів. Центальною в сучасній геометрії є структура афінної зв'язності, як така, що має широке застосування.

Були сформовані три основних напрямки робіт:

- 1) Вивчення основних закономірностей відображень.
- 2) Для заданого узагальненого простору та спеціального відображення пошук відповіді на питання: допускає чи не допускає він відображення.
- 3) Для заданої пари просторів знайти відображення, яке їх пов'язує.

Особливу роль серед геометричних об'єктів відіграють геодезичні лінії та різні їх узагальнення. Саме тому, серед відображень виділяють, з часів Е. Бельтрамі, геодезичні відображення, тобто відображення, що зберігають геодезичні лінії. Знаменита теорема Бельтрамі, з якої і почалась сучасна теорія геодезичних відображень, опублікована 1865 році, стверджує, що геодезичні відображення на пласкі простори, допускають лише простори сталої кривини [1]. Більше чим через 120 років цей результат узагальнив А. В. Погорєлов для псевдоріманових просторів з мінімальними умовами на гладкість метрики. Значний внесок в вивчення загальних закономірностей теорії геодезичних відображень внесли Т. Леві-Чівіта, Т. Томас, Г. Вейль, А. З. Петров, А. С. Солодовніков, Г. І. Кручкович, М. С. Синюков, В. С. Собчук, Й. Мікеш, В. С. Матвєєв [2, 6, 7, 9–14].

Особливе місце в розвитку теорії відображень займає одеська геометрична школа. Хоча формально школа бере початок від В.Ф. Кагана, основні успіхи пов'язані з роботами професора М. С. Синюкова та його учнів: М. Л. Гаврильченка, С. Г. Лейка, Й. Мікеша, І. М. Курбатової, Н. В. Яблонської, О. М. Синюкової та інших.

Метою даної роботи є дослідження нових характеристик трьохвимірних псевдоріманових просторів та їх відображень.

Об'єктом дослідження є трьохвимірні псевдоріманові простори і їх геодезичні відображення.

Предметом дослідження являються диференціальні рівняння, їх умови інтегрованості та диференціальні продовження, які характеризують те, допускає чи не допускає заданий узагальнений простір вказаний тип відображення.

Методи дослідження це класичні методи дослідження ріманової геометрії. Дослідження ведуться локально, в класі достатньо гладких функцій з використанням тензорних методів.

РОЗДІЛ 1

ПСЕВДОРІМАНОВІ ПРОСТОРИ

1.1 Об'єкти псевдоріманових просторів

Псевдорімановим простором V_n називають дійсний диференціальний многовид X_n класу C^r , в якому визначено поле двічі коваріантного симетричного неособливого тензора, що називається *метричним тензором*.

Метричний тензор позначається g_{ij} , його компоненти в кожній системі координат є відомими функціями класу C^{r-1} від координат $(x^1, x^2, \dots, x^n)$.

В подальшому вказувати локальні координати не будемо, а властивості метричного тензора запишуться в вигляді

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g = \det \|g_{ij}\| \neq 0.$$

Із метричного тензора обчислюються символи Христофеля

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}).$$

Елементи оберненої матриці до матриці g_{ij} позначаються g^{ij} .

Має місце рівність

$$g^{i\alpha} g_{j\alpha} = \delta_j^i.$$

Тут δ_j^i - символи Кронекера.

Символи Христофеля не є тензором, але вони дозволяють визначати коваріантну похідну

$$\begin{aligned}
& S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = \\
& = \partial_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} + \Gamma_{k\alpha}^{i_1} S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p} + \dots + \Gamma_{k\alpha}^{i_p} S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \alpha} - \\
& - \Gamma_{kj_1}^{\beta} S_{\beta j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} - \dots - \Gamma_{kj_q}^{\beta} S_{j_1 j_2 \dots j_{q-1} \beta}^{i_1 i_2 \dots i_p} \\
& (i_1, \dots, i_p; \quad j_1, \dots, j_q; \quad k = 1, 2, \dots, n).
\end{aligned} \tag{1.1}$$

та тензор Рімана

$$R_{.ijk}^h = \partial_j \Gamma_{ik}^h + \Gamma_{ik}^{\alpha} \Gamma_{j\alpha}^h - \partial_k \Gamma_{ij}^h - \Gamma_{ij}^{\alpha} \Gamma_{k\alpha}^h. \tag{1.2}$$

Коли розмірність простору дорівнює трьом, то тензор Рімана має вигляд

$$R_{hijk} = P_{hk} g_{ij} - P_{hj} g_{ik} + P_{ij} g_{hk} - P_{ik} g_{hj}, \tag{1.3}$$

тут $R_{hijk} = g_{\alpha h} R_{ijk}^{\alpha}$, а

$$P_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{4} R g_{ij}, \tag{1.4}$$

$R_{ij} = R_{ij\alpha}^{\alpha}$ – тензор Річчі, $R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ – скалярна кривина.

1.2 Рекурентні та слабо рекурентні псевдоріманові простори

Об'єкти псевдоріманового простору V_n , які визначені за допомогою метричного тензора g_{ij} називають *внутрішніми об'єктами псевдоріманового простору*. Крім внутрішніх об'єктів вивчають і об'єкти, які не є внутрішніми, зокрема тензор D_{ijk}^h такий, що

$$D_{ijk}^h = R_{ijk}^h - B(\delta_k^h g_{ij} - \delta_j^h g_{ik}), \tag{1.5}$$

де δ_i^h — символи Кронекера, R_{ijk}^h — тензор Рімана, а B — деякий інваріант.

Якщо тензор $D_{ijk}^h = 0$, то псевдоріманів простір V_n є простором сталої кривини і

$$B = \frac{R}{n(n-1)}. \quad (1.6)$$

Тут R — скалярна кривина, яка визначається за формулою

$$R = R_{\beta\gamma\alpha}^{\alpha} g^{\beta\gamma}. \quad (1.7)$$

І навпаки, якщо виконується умова (1.6), то тензор D_{ijk}^h співпадає з тензором конциркулярної кривини, який визначається за формулою

$$Y_{ijk}^h = R_{ijk}^h - \frac{R}{n(n-1)} (\delta_k^h g_{ij} - \delta_j^h g_{ik}). \quad (1.8)$$

Псевдоріманові простори, в яких існує тензор $T_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_r}$ такий, що

$$T_{j_1 j_2 \dots j_n, k}^{i_1 i_2 \dots i_r} = \rho_k T_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_r} \quad (1.9)$$

називають *T-рекурентними*.

А якщо умови (1.9) виконуються для тензора Рімана, то такі простори називають *рекурентними*.

Векторні поля $U_k \neq 0$, які задовольняють для ненульових тензорів $T_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_r}$ умові

$$U_k T_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_r} + U_{j_1} T_{j_2 k \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_r} + U_{j_2} T_{k j_1 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_r} = 0 \quad (1.10)$$

називають *векторними оболонками тензора* $T_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_r}$ відносно індексів j_1 та j_2 .

Якщо векторна оболонка задається відносно кососиметричної пари індексів тензора Рімана, тобто

$$U_i R_{jkl}^h + U_k R_{jli}^h + U_l R_{jik}^h = 0 \quad (1.11)$$

то вона називається *векторною оболонкою тензора Рімана*.

Враховуючи властивість тензора Рімана

$$R_{ijk,l}^h + R_{ikl,j}^h + R_{ilj,k}^h = 0 \quad (1.12)$$

легко переконатись, що в рекурентних псевдоріманових просторах існує векторна оболонка тензора Рімана. Тому псевдоріманові простори, в яких виконуються умови (1.11) називають *слабо рекурентними просторами*. Якщо умові (1.10) буде задовольняють тензор D_{ijk}^h , тобто

$$U_i D_{jkl}^h + U_k D_{jli}^h + U_l D_{jik}^h = 0, \quad (1.13)$$

то такі простори будемо називать *D-слабо рекурентними псевдорімановими просторами*.

1.3 Основні рівняння теорії геодезичних відображень

Взаємно однозначна відповідність між точками псевдоріманових просторів V_n з метричним тензором g_{ij} та $\bar{V}_n$ з метричним тензором $\bar{g}_{ij}$ називається геодезичним відображенням, якщо при ній кожна геодезична лінія V_n переходить в геодезичну лінію $\bar{V}_n$.

Псевдоріманові простори V_n та $\bar{V}_n$, які дозволяють геодезичне відображення один на одного, будемо називати просторами, що знаходься в геодезичній відповідності, або такими, що належать до одного геодезичного класу.

Необхідною та достатньою умовою [6] для того, щоб псевдоріманові простори V_n та $\bar{V}_n$ дозволяли геодезичні відображення один на одного є

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \varphi_i \delta_j^h + \varphi_j \delta_i^h, \quad (1.14)$$

або, враховуючи коваріантну сталість метричного тензора —

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\varphi_k \bar{g}_{ij} + \varphi_i \bar{g}_{jk} + \varphi_j \bar{g}_{ik}, \quad (1.15)$$

де φ_i — деякий за необхідністю градієнтний вектор; $\Gamma_{ij}^h, \bar{\Gamma}_{ij}^h$ — символи Христовфеля V_n та $\bar{V}_n$ відповідно; δ_i^h — символи Кронекера; кома “,” — знак коваріантної похідної по зв’язності V_n .

Рівняння (1.14) та (1.15) еквівалентні, необхідні і достатні умови того, щоб псевдоріманів простір V_n та $\bar{V}_n$ знаходились в геодезичній відповідності.

Необхідною умовою для геодезичного відображення будуть рівняння:

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \varphi_{ij} \delta_k^h - \varphi_{ik} \delta_j^h, \quad (1.16)$$

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n-1)\varphi_{ij}, \quad (1.17)$$

де $\varphi_{ij} = \varphi_{i,j} - \varphi_i \varphi_j$; R_{ijk}^h, R_{ij} — тензори Рімана та Річчі.

Геодезичне відображення відмінне від гомотетії називають нетривіальним.

Для того, щоб заданий псевдоріманів простір V_n дозволяв нетривіальне геодезичне відображення необхідно і достатньо, щоб в ньому існував розв’язок системи диференціальних рівнянь відносно тензора $a_{ij} = a_{ji} \neq c g_{ij}$ та вектора $\lambda_i = \lambda_{,i} \neq 0$. Цю систему називають лінійною формою основних рівнянь.

Лінійна форма основних рівнянь теорії геодезичних відображень має вигляд [9]

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}. \quad (1.18)$$

$$n\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + a_{\alpha i} R_j^\alpha - a_{\alpha\beta} R_{.ij}^{\alpha\beta}, \quad (1.19)$$

тут $\mu = \lambda_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta}$; $R_j^i = R_{\alpha j} g^{\alpha i}$; $R_{ij}^{h\ k} = R_{ij\alpha}^h g^{\alpha\ k}$

З останнього будемо мати:

$$(n-1)\mu_{,i} = 2(n+1)\lambda_\alpha R_i^\alpha + a_{\alpha\beta}(2R_{,i,\cdot}^{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta}_{,i}). \quad (1.20)$$

Розв'язки (1.15) та (1.18) пов'язані співвідношенням

$$a_{ij} = e^{2\varphi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}; \quad (1.21)$$

$$\lambda_i = -e^{2\varphi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} \varphi_\beta. \quad (1.22)$$

Система рівнянь (1.18), (1.19) та (1.20) дає принципову можливість відповідати на питання: чи дозволяє заданий псевдоріманів простір V_n геодезичне відображення на псевдоріманів простір $\bar{V}_n$. Питання зводиться до вивчення умов інтегрування цих рівнянь та їх диференціальних подовжень.

РОЗДІЛ 2

ГЕОДЕЗИЧНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ТРИВИМІРНИХ ПСЕВДОРІМАНОВИХ ПРОСТОРІВ

2.1 Геодезичні відображення спеціальних просторів

Метою нашої роботи є отримання виду основних рівнянь теорії геодезичних відображень для тривимірних псевдоріманових просторів.

Розв'язок рівняння (1.21), що задовольняє умові

$$a_{ij} = v g_{ij} + u R_{ij}, \quad (2.1)$$

називають *канонічним розв'язком*.

Тут $R_{ij} = R_{ij\alpha}^{\alpha}$ тензор Річчі V_n , v та u деякі інваріанти, R_{ijk}^h тензор Рімана V_n .

Нами буде доведено теорему

Теорема 2.1. *В псевдоріманових просторах V_3 , які допускають нетривіальні геодезичні відображення, лінійна форма основних рівнянь теорії геодезичних відображень допускає лише канонічні розв'язки.*

Доведення.

Тензор Рімана для псевдоріманових просторів V_3 має вигляд

$$R_{hijk} = P_{hk}g_{ij} - P_{hj}g_{ik} + P_{ij}g_{hk} - P_{ik}g_{hj}. \quad (2.2)$$

Тут

$$P_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{4}Rg_{ij}. \quad (2.3)$$

Умови інтегрування лінійної форми основних рівнянь теорії геодези-

чних відображень будуть мати вид

$$a_{\alpha i} R_{jkl}^{\alpha} + a_{\alpha j} R_{ikl}^{\alpha} = \lambda_{li} g_{jk} + \lambda_{lj} g_{ik} - \lambda_{ki} g_{jl} - \lambda_{kj} g_{il}, \quad (2.4)$$

тут $\lambda_{ij} = \lambda_{i,j}$.

Підставимо (2.2) в (2.4)

$$\begin{aligned} & a_{\alpha i} P_l^{\alpha} g_{jk} - a_{\alpha i} P_k^{\alpha} g_{jl} + a_{ik} P_{jk} - a_{ik} P_{jl} + \\ & a_{\alpha j} P_l^{\alpha} g_{ik} - a_{\alpha j} P_k^{\alpha} g_{il} + a_{jl} P_{ik} - a_{jk} P_{il} = \\ & = \lambda_{li} g_{jk} + \lambda_{lj} g_{ik} - \lambda_{ki} g_{jl} - \lambda_{kj} g_{il}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

де $P_i^h = P_{\alpha i} g^{\alpha h}$.

Після групування будемо мати

$$\begin{aligned} & (a_{\alpha i} P_l^{\alpha} - \lambda_{li}) g_{jk} + (a_{\alpha j} P_l^{\alpha} - \lambda_{lj}) g_{ik} - \\ & - (a_{\alpha i} P_k^{\alpha} - \lambda_{ik}) g_{jl} - (a_{\alpha j} P_k^{\alpha} - \lambda_{jk}) g_{il} + \\ & + a_{il} P_{jk} + a_{jl} P_{ik} - a_{ik} P_{jl} - a_{jk} P_{il}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Домножимо останнє на g^{jk} та згортаємо по індексах j та k .

$$\begin{aligned} & (a_{\alpha i} P_l^{\alpha} - \lambda_{li}) \cdot 3 + (a_{\alpha i} P_l^{\alpha} - \lambda_{li}) - \\ & - (a_{\alpha i} P_l^{\alpha} - \lambda_{il}) - \tau g_{il} + \\ & + P a_{il} + a_{\alpha l} P_i^{\alpha} - a_{\alpha i} P_l^{\alpha} - a P_{il} = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

Тут $\tau = (a_{\alpha\beta} - \lambda_{\beta\gamma}) g^{\beta\gamma}$; $P = P_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$; $a = a_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$.

Після зведення подібних, отримаємо

$$3(a_{\alpha i} P_l^{\alpha} - \lambda_{li}) + a_{\alpha l} P_i^{\alpha} - a_{\alpha i} P_l^{\alpha} - \tau g_{il} + P a_{il} - a P_{il} = 0.$$

Просиметруємо по індексах i та l , щоб переконатись, що

$$a_{\alpha l} P_i^{\alpha} = a_{\alpha i} P_l^{\alpha}$$

І тоді будемо мати

$$a_{\alpha i} P_l^\alpha - \lambda_{li} = \frac{a}{3} P_{il} + \frac{\tau}{3} g_{il} - \frac{P}{3} a_{il}.$$

Тепер (2.6) перепишемо в вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{a}{3} (P_{il} g_{jk} + P_{jl} g_{ik} - P_{jk} g_{il} - P_{ik} g_{jl}) + \\ & + a_{il} P_{jk} + a_{jl} P_{ik} - a_{ik} P_{jl} - a_{jk} P_{il} = \\ & = \frac{P}{3} (a_{il} g_{jk} + a_{jl} g_{ik} - a_{jk} g_{il} - a_{ik} g_{jl}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Проальтернуємо (2.8) по індексам i та k

$$\begin{aligned} & \frac{a}{3} (P_{il} g_{jk} - P_{kl} g_{ji} - P_{jk} g_{il} + P_{ji} g_{kl}) + \\ & + a_{il} P_{jk} - a_{kl} P_{ji} - a_{jk} P_{il} + a_{ji} P_{kl} = \\ & = \frac{P}{3} (a_{il} g_{jk} - a_{kl} g_{ji} - a_{jk} g_{il} + a_{ji} g_{kl}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Взаємно перепозначимо в формулі (2.9) індекси j та k

$$\begin{aligned} & \frac{a}{3} (P_{il} g_{jk} - P_{jl} g_{ki} - P_{jk} g_{il} + P_{ki} g_{jl}) + \\ & + a_{il} P_{jk} - a_{jl} P_{ki} - a_{jk} P_{il} + a_{ki} P_{jl} = \\ & = \frac{P}{3} (a_{il} g_{jk} - a_{jl} g_{ki} - a_{jk} g_{il} + a_{ki} g_{jl}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Додамо рівняння (2.10) та (2.8).

$$\begin{aligned} & \frac{a}{3} (P_{il} g_{jk} - P_{jk} g_{il}) + a_{il} P_{jk} - a_{jk} P_{il} = \\ & = \frac{P}{3} (a_{il} g_{jk} - a_{jk} g_{il}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Згрупуємо доданки наступним чином

$$\begin{aligned} & \left(a_{il} - \frac{a}{3} g_{il} \right) P_{jk} - \left(a_{jk} - \frac{a}{3} g_{jk} \right) P_{il} = \\ & = \frac{P}{3} (a_{il} g_{jk} - a_{jk} g_{il}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Так як $P_{ij} \neq 0$, то можемо підібрати вектор ξ^i так, щоб

$$P_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = 1.$$

Домножимо (2.12) на два вектори ξ^j та ξ^k та згорнемо по індексах k та j , отримаємо

$$\begin{aligned} a_{il} - \frac{a}{3}g_{il} - \xi^\alpha\xi^\beta \left(a_{\alpha\beta} - \frac{a}{3}g_{\alpha\beta} \right) P_{il} = \\ = \frac{P}{3}(g_{\alpha\beta}a_{il} - a_{\alpha\beta}g_{il})\xi^\alpha\xi^\beta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Або

$$\begin{aligned} a_{il} \left(1 - \frac{P}{3}g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \right) = \left(\frac{a}{3} - \frac{P}{3}a_{\alpha\beta} \right) g_{il} + \\ + \xi^\alpha\xi^\beta \left(a_{\alpha\beta} - \frac{a}{3}g_{\alpha\beta} \right) P_{il}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Позначимо

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{3} - \frac{P}{3}a_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \right) \frac{1}{\left(1 - \frac{P}{3}g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \right)} = \overset{1}{v}; \\ \xi^\alpha\xi^\beta \left(a_{\alpha\beta} - \frac{a}{3}g_{\alpha\beta} \right) \frac{1}{\left(1 - \frac{P}{3}g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \right)} = u, \end{aligned}$$

де $\overset{1}{v} = v + \frac{1}{4}R$.

Отримаємо

$$a_{il} = \overset{1}{v}g_{il} + uP_{il},$$

що і треба було довести.

Розглянемо псевдоріманові простори V_n , в яких існує канонічний розв'язок лінійної системи основних рівнянь теорії геодезичних відображень, тобто має місце (2.1).

Коваріантно продиференціюємо (2.1) з урахуванням (1.21), отримаємо

$$\lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} = v_k g_{ij} + u_k R_{ij} + u R_{ij,k}. \quad (2.15)$$

Згорнемо по індексах i та j

$$2\lambda_k = nv_k + Ru_k + uR_{,k}. \quad (2.16)$$

А, якщо згорнути (2.1) по індексам j та k будемо мати

$$(n+1)\lambda_i = v_i + u_\alpha R_i^\alpha + uR_{i,\alpha}. \quad (2.17)$$

Тут $R_{i,k}^j = R_{\alpha i,k} g^{\alpha j}$.

В псевдоріманових просторах V_n має місце рівність

$$2R_{i,\alpha}^\alpha = R_{,i}. \quad (2.18)$$

Це дозволяє записати рівняння (2.17) в вигляді

$$2(n+1)\lambda_i = 2v_i + 2u_\alpha R_i^\alpha + uR_{,i}. \quad (2.19)$$

Віднявши рівняння (2.16) від рівняння (2.19), отримаємо

$$2n\lambda_i = (2-n)v_i - Ru_i + 2u_\alpha R_i^\alpha. \quad (2.20)$$

Таким чином, має місце теорема

Теорема 2.2. *Якщо псевдоріманів простір V_n допускає канонічний розв'язок лінійної форми основних рівнянь теорії геодезичних відображень, то в ньому виконуються умови (2.20).*

Для псевдоріманових просторів V_3 рівняння (2.20) мають вигляд

$$6\lambda_i + v_i + Ru_i = 2u_\alpha R_i^\alpha. \quad (2.21)$$

Продовжимо розглядати псевдоріманові простори $V_n (n=3)$. Домножимо (2.2) на інваріант u та врахуємо (2.1)

$$uR_{hijk} = a_{hk}g_{ij} - a_{hj}g_{ik} + a_{ij}g_{hk} - a_{ik}g_{hj} + 2v(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}). \quad (2.22)$$

Коваріантно продиференціюємо (2.22)

$$\begin{aligned}
 & uR_{hijk,l} + u_l R_{hijk} = \\
 & = \lambda_h g_{kl} g_{ij} + \lambda_k g_{hl} g_{ij} - \lambda_h g_{jl} g_{ik} - \lambda_j g_{hl} g_{ik} + \\
 & + \lambda_i g_{jl} g_{hk} + \lambda_j g_{il} g_{hk} - \lambda_i g_{kl} g_{hj} - \lambda_k g_{il} g_{hj} + \\
 & + 2v_l (g_{hk} g_{ij} - g_{hj} g_{ik}).
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Проциклюємо (2.23) по індексам j, k, l

$$\begin{aligned}
 & u_l R_{hijk} + u_j R_{hikl} + u_k R_{hilj} = \\
 & = 2v_l (g_{hk} g_{ij} - g_{hj} g_{ik}) + 2v_j (g_{hl} g_{ik} - g_{hk} g_{il}) + 2v_k (g_{hj} g_{il} - g_{hl} g_{ij}) + \\
 & + \lambda_h g_{kl} g_{ij} + \lambda_k g_{hl} g_{ij} - \lambda_h g_{jl} g_{ik} - \lambda_j g_{hl} g_{ik} + \\
 & + \lambda_h g_{lj} g_{ik} + \lambda_l g_{hj} g_{ik} - \lambda_h g_{kj} g_{il} - \lambda_k g_{hj} g_{il} + \\
 & + \lambda_h g_{jk} g_{il} + \lambda_j g_{hk} g_{il} - \lambda_h g_{lk} g_{ij} - \lambda_l g_{hk} g_{ij} + \\
 & + \lambda_i g_{jl} g_{hk} + \lambda_j g_{il} g_{hk} - \lambda_i g_{kl} g_{hj} - \lambda_k g_{il} g_{hj} + \\
 & + \lambda_i g_{kj} g_{hl} + \lambda_k g_{ij} g_{hl} - \lambda_i g_{lj} g_{hk} - \lambda_l g_{ij} g_{hk} + \\
 & + \lambda_i g_{lk} g_{hj} + \lambda_l g_{ik} g_{hj} - \lambda_i g_{jk} g_{hl} - \lambda_j g_{ik} g_{hl}.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Після зведення подібних, (2.24) прийме вигляд

$$\begin{aligned}
 & u_l R_{hijk} + u_j R_{hikl} + u_k R_{hilj} + 2(v_l - \lambda_l)(g_{hk} g_{ij} - g_{hj} g_{ik}) + \\
 & + 2(v_j - \lambda_j)(g_{hl} g_{ik} - g_{hk} g_{il}) + 2(v_k - \lambda_k)(g_{hj} g_{il} - g_{hl} g_{ij}) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Домножимо рівняння (2.25) на тензор g^{lh} та згорнемо по індексам l та h

$$\begin{aligned}
 & u_\alpha R_{ijk}^\alpha + u_j R_{ik} - u_k R_{ij} + 2(v_k - \lambda_k)g_{ij} - 2(v_j - \lambda_j)g_{ik} + \\
 & + 6(v_j - \lambda_j)g_{ik} - 2(v_j - \lambda_j)g_{ki} + 2(v_k - \lambda_k)g_{ij} - 6(v_k - \lambda_k)g_{ij} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Зведемо подібні

$$u_\alpha R_{ijk}^\alpha + u_j R_{ik} - u_k R_{ij} + 2(v_j - \lambda_j)g_{ik} - 2(v_k - \lambda_k)g_{ij} = 0. \tag{2.27}$$

Домножимо (2.27) на тензор g^{ij} та згорнемо по індексам i та j

$$2u_\alpha R_k^\alpha - Ru_k - 4(v_k - \lambda_k) = 0. \quad (2.28)$$

Запишемо (2.28) в вигляді

$$2u_\alpha R_k^\alpha = Ru_k + 4v_k - 4\lambda_k. \quad (2.29)$$

Віднімемо від рівняння (2.29) рівняння (2.21)

$$3v_k - 10\lambda_k = 0. \quad (2.30)$$

Із рівняння (2.30) видно, що, якщо $v_k = 0$, то і $\lambda_k = 0$. А цього бути не може через припущення про нетривіальні геодезичні відображення. Аналогічне протиріччя можна отримати із (2.29), якщо припустити, що $u_i = 0$. Таким чином, має місце наслідок

Наслідок 2.1. *В псевдоріманових просторах $V_n(n = 3)$, що допускають канонічні розв'язки, інваріанти v та u відмінні від сталих.*

2.2 Геодезичні відображення просторів з оболонками

Далі ми розглянемо геодезичні відображення D -слабо рекурентних псевдоріманових просторів.

Домножимо рівняння (1.13) на g^{hl} та згорнемо по індексам h та l

$$U_\alpha D_{ijk}^\alpha + U_j D_{ik} + U_k D_{ij} = 0. \quad (2.31)$$

Тут

$$D_{ij} = D_{ij\alpha}^\alpha = R_{ij} - B(n-1)g_{ij}, \quad (2.32)$$

а R_{ij} — тензор Річчі, такий що

$$R_{ij} = R_{ij\alpha}^{\alpha}. \quad (2.33)$$

При отриманні формули (2.31) скористались властивістю тензора D_{ijk}^h

$$D_{ijk}^h + D_{ikj}^h = 0. \quad (2.34)$$

Підставимо (2.32) в (2.31) та врахуємо означення тензора D_{ijk}^h

$$u_{\alpha} R_{ijk}^{\alpha} = B(u_k g_{ij} - u_j g_{ik}) + u_k R_{ij} - u_j R_{ik} - B(n-1)(u_k g_{ij} - u_j g_{ik}).$$

Групуючи, отримаємо

$$u_{\alpha} R_{ijk}^{\alpha} = u_k (R_{ij} - B(n-2)g_{ij}) - u_j (R_{ik} - B(n-2)g_{ik}) \quad (2.35)$$

Позначимо

$$R_{ij} - B(n-2)g_{ij} = M_{ij}. \quad (2.36)$$

Тоді (2.35) прийме вигляд

$$u_{\alpha} R_{ijk}^{\alpha} = u_k M_{ij} - u_j M_{ik}. \quad (2.37)$$

Умови інтегрування лінійної форми основних рівнянь теорії геодезичних відображень будуть мати вид

$$a_{\alpha i} R_{jkl}^{\alpha} + a_{\alpha j} R_{ikl}^{\alpha} = \lambda_{li} g_{jk} + \lambda_{lj} g_{ik} - \lambda_{ki} g_{jl} - \lambda_{kj} g_{il}, \quad (2.38)$$

тут $\lambda_{ij} = \lambda_{i,j}$.

Домножимо рівняння (2.38) на вектор $u^l = u_{\alpha} g^{\alpha l}$ та згорнемо по

індексу l

$$a_{\alpha i} R_{jk\beta}^{\alpha} u^{\beta} + a_{\alpha j} R_{ik\beta}^{\alpha} u^{\beta} = u^{\alpha} \lambda_{\alpha i} g_{jk} + u^{\alpha} \lambda_{\alpha j} g_{ik} - \lambda_{ki} u_j - \lambda_{kj} u_i. \quad (2.39)$$

Скористаємось властивостями тензора Рімана

$$a_{\alpha i} R_{jk\beta}^{\alpha} u^{\beta} = a_i^{\alpha} R_{\alpha jk\beta} u^{\beta} = a_i^{\alpha} u^{\beta} R_{k\beta\alpha j} = a_i^{\alpha} u_{\beta} R_{kj\alpha}^{\beta}.$$

Підставимо отримане в рівняння (2.39) та врахуємо рівняння (2.37)

$$\begin{aligned} a_{\alpha i} u^{\alpha} M_{kj} - a_i^{\alpha} M_{\alpha k} u_j + a_{\alpha j} u^{\alpha} M_{ki} - a_j^{\alpha} M_{\alpha k} u_i = \\ = u^{\alpha} \lambda_{\alpha i} g_{jk} + u^{\alpha} \lambda_{\alpha j} g_{ik} - u_j \lambda_{ki} - u_i \lambda_{kj}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Згрупуємо останнє

$$\begin{aligned} a_{\alpha i} u^{\alpha} M_{kj} + a_{\alpha j} u^{\alpha} M_{ki} = \\ = u^{\alpha} \lambda_{\alpha i} g_{jk} + u^{\alpha} \lambda_{\alpha j} g_{ik} + u_j (a_i^{\alpha} M_{\alpha k} - \lambda_{ki}) + u_i (a_j^{\alpha} M_{\alpha k} - \lambda_{kj}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Переконаємося, що вираз в дужках симетричний, тобто

$$a_i^{\alpha} M_{\alpha k} - \lambda_{ki} = a_k^{\alpha} M_{\alpha i} - \lambda_{ik}. \quad (2.42)$$

Для цього врахуємо означення тензора M_{ij} , симетричність тензора a_{ij} , градієнтність вектора $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = \lambda_{i,j} = \lambda_{j,i}$ та відому властивість тензора Річчі

$$a_{\alpha i} R_j^{\alpha} = a_{\alpha j} R_i^{\alpha}. \quad (2.43)$$

Проальтернуємо рівняння (2.41) по індексам k та i

$$\begin{aligned} a_{\alpha i} u^{\alpha} M_{kj} - a_{\alpha k} u^{\alpha} M_{ij} = \\ = u^{\alpha} \lambda_{\alpha i} g_{jk} - u^{\alpha} \lambda_{\alpha k} g_{ij} + u_i (a_j^{\alpha} M_{\alpha k} - \lambda_{kj}) - u_k (a_j^{\alpha} M_{\alpha i} - \lambda_{ij}). \end{aligned} \quad (2.44)$$

В рівнянні (2.44) перепозначимо індекси k та j

$$\begin{aligned} a_{\alpha i} u^{\alpha} M_{kj} - a_{\alpha j} u^{\alpha} M_{ik} = \\ = u^{\alpha} \lambda_{\alpha i} g_{jk} - u^{\alpha} \lambda_{\alpha j} g_{ik} + u_i (a_j^{\alpha} M_{\alpha k} - \lambda_{kj}) - u_j (a_k^{\alpha} M_{\alpha i} - \lambda_{ki}). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Додавши рівняння (2.45) та (2.41) після зведення подібних, отримаємо

$$a_{\alpha i} u^\alpha M_{kj} = u^\alpha \lambda_{\alpha i} g_{jk} + u_i (a_j^\alpha M_{\alpha k} - \lambda_{kj}). \quad (2.46)$$

Домножимо рівняння (2.46) на тензор g^{jk} та згорнемо по індексах j та k

$$u^\alpha \lambda_{\alpha i} = \frac{M}{n} a_{\alpha i} u^\alpha - \tau u_i. \quad (2.47)$$

Тут $M = M_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$; $\tau = \frac{1}{n} (a_\alpha^\gamma M_{\gamma\beta} - \lambda_{\alpha\beta}) g^{\alpha\beta}$.

Підставимо вираз (2.47) в рівняння (2.46)

$$a_{\alpha i} u^\alpha \left(M_{kj} - \frac{M}{n} g_{kj} \right) = u_i (a_j^\alpha M_{\alpha k} - \lambda_{kj} - \tau g_{kj}). \quad (2.48)$$

Так як вектор $u_i \neq 0$, то підберемо деякий вектор ξ^i так, щоб $\xi^\alpha u_\alpha = 1$.

Домножимо рівняння (2.48) на вектор ξ^i та згорнемо по індексу i .

$$a_j^\alpha M_{\alpha k} - \lambda_{kj} - \tau g_{kj} = \frac{1}{\tau} \left(M_{kj} - \frac{M}{n} g_{kj} \right). \quad (2.49)$$

де $\frac{1}{\tau} = a_{\alpha\beta} u^\alpha \xi^\beta$.

Врахуємо вираз (2.49) в рівнянні (2.48)

$$(a_{\alpha i} u^\alpha - \frac{1}{\tau} u_i) \left(M_{kj} - \frac{M}{n} g_{kj} \right) = 0. \quad (2.50)$$

Таким чином, доведено теорему.

Теорема 2.3. *Якщо D -слаборекурентний псевдоріманів простір V_n допускає нетривіальні геодезичні відображення, то в ньому виконується хоча б одна з умов*

$$M_{kj} - \frac{M}{n} g_{kj} = 0 \quad (2.51)$$

або

$$a_{\alpha i} u^\alpha = \frac{1}{\tau} u_i. \quad (2.52)$$

Розглянемо псевдоріманові D -слаборекурентні простори, в яких виконується умова (2.51). Врахувавши означення тензора M_{ij} (2.36), будемо мати

$$R_{ij} = \frac{R}{n}g_{ij} + B\frac{(n-1)(n-2)}{n}g_{ij} \quad (2.53)$$

Домножимо рівняння (2.53) на g_{ij} та згорнемо по індексах i та j , отримаємо $B = 0$, і тоді рівняння (2.53) прийме вигляд

$$R_{ij} = \frac{R}{n}g_{ij}. \quad (2.54)$$

Псевдоріманові простори, в яких виконуються умови (2.54), називають *просторами Ейнштейна*.

Таким чином, D -слаборекурентні псевдоріманові простори, які допускають нетривіальні геодезичні відображення і, в яких виконується умова (2.51), будуть слаборекурентними просторами Ейнштейна і тоді

$$u_\alpha R_{ijk}^\alpha = (u_k g_{ij} - u_j g_{ik}) \frac{R}{n}. \quad (2.55)$$

Домножимо на g^{ij} та згорнемо по індексах i та j

$$\frac{R}{n}u_k = \frac{R}{n}(n-1)u_k$$

і тоді $R = 0$. Тобто ці простори будуть просторами нульової скалярної кривини, а їх тензор Річчі задовольняє умові

$$R_{ij} = 0. \quad (2.56)$$

Рівняння (2.49) прийме вигляд

$$\lambda_{ij} + \tau g_{ij} = 0. \quad (2.57)$$

Простори, в яких існує векторне поле, що задовольняє умові (2.57), називають *еквідистантними*.

Розглянемо D -слаборекурентні псевдоріманові простори, в яких виконуються умови (2.52).

Вираз (2.52) коваріантно продиференціюємо:

$$\lambda_\alpha u^\alpha g_{ij} + \lambda_i u_j + a_{\alpha i} u_{,j}^\alpha = \frac{1}{\tau_{,j}} u_i + \frac{1}{\tau} u_{i,j}. \quad (2.58)$$

Домножимо рівняння (2.58) на вектор u^i , згорнемо по індексу i та врахуємо рівняння (2.52)

$$2\lambda_\alpha u^\alpha u_j = \frac{1}{\tau_{,j}} u_\alpha u^\alpha. \quad (2.59)$$

Якщо вектор u_i — ізотропний, тобто

$$u_\alpha u^\alpha = 0, \quad (2.60)$$

то тоді

$$\lambda_\alpha u^\alpha = 0 \quad (2.61)$$

і

$$\lambda_\alpha u_{,i}^\alpha + \lambda_{\alpha,i} u^\alpha = 0. \quad (2.62)$$

А рівняння (2.47) набувають вигляду

$$\lambda_\alpha u_{,i}^\alpha = \left(\tau - \frac{M}{n} \frac{1}{\tau} \right) u_i. \quad (2.63)$$

З урахуванням рівнянь (2.60), (2.61), (2.63) продиференціюємо (2.58)

$$\lambda_{i,k} u_j + \lambda_i u_{j,k} + \lambda_i u_{k,j} + a_{\alpha i} u_{,jk}^\alpha = \frac{1}{\tau_{,jk}} u_i + \frac{1}{\tau_{,j}} u_{i,k} + \frac{1}{\tau_{,k}} u_{i,j} + \frac{1}{\tau} u_{i,jk}. \quad (2.64)$$

Домноживши на u^i та згорнувши по i , переконаємось, що

$$u^\alpha \lambda_{\alpha,k} = 0 \quad (2.65)$$

і

$$\tau = \frac{M}{n} \frac{1}{\tau}. \quad (2.66)$$

ВИСНОВКИ

Теорія геодезичних відображень є одним із інструментів моделювання фізичних полів по траєкторіям руху пробних частинок. В просторах малої розмірності є можливість продемонструвати можливості, переваги та складності застосування теорії геодезичних відображень псевдоріманових просторів.

В роботі досліджуються нетривіальні геодезичні відображення трьохмірних псевдоріманових просторів. Знайдено розв'язок лінійної системи основних рівнянь теорії геодезичних відображень. Цей розв'язок є лінійною комбінацією метричного тензора та тензора Річчі псевдоріманового простору V_3 . В якості параметрів виступають два інваріанта, відмінні від констант за необхідністю.

Спеціальна структура розв'язку дозволила довести належність псевдоріманових просторів V_3 , які допускають нетривіальні геодезичні відображення до класу слабо рекурентних просторів. Виявилось, що коваріантна похідна інваріанта утворює векторну оболонку відносно тензора D_{ijk}^h . Вивчення нетривіальних геодезичних відображень слабо рекурентних просторів дало розуміння, що вони є або просторами Ейнштейна, або похідна інваріанту є власним вектором матриці загального розв'язку лінійної форми основних рівнянь. Але псевдоріманові простори Ейнштейна V_3 є просторами сталої кривини, тому такий підхід дозволив виявити властивість одного з параметрів загального розв'язку.

Отримані результати відкривають широкі можливості для детального подальшого вивчення геодезичних відображень псевдоріманових просторів V_3 . Зокрема, відповісти на питання:

- 1) Чи допускає дане V_3 нетривіальні геодезичні відображення.
- 2) Для заданої пари просторів V_3 визначити, чи можуть вони мати спільні геодезичні лінії.

Існує класифікація псевдоріманових просторів за групами рухів. Застосування отриманих результатів до неї дозволить класифікувати псевдоріманові простори V_3 , які допускають нетривіальні геодезичні відображення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Beltrami E., Risoluzione del problema: riportari i punti di una supercie sopraun piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentante da lineerette, Ann. Mat., 1865, 1(7), p.185–204
2. Weyl H. Zur Infinitesimalgeometrie Einordnung der projectiven und der konformen Auffassung /H. Weyl // Gottinger Nachtr. — 1921. — P. 99-112
3. Eisenhart L. P. Riemannian geometry/L.P. Eisenhart.— Princeton Univ. Press.— 1926.— 272p.
4. Kagan, V.F., Subprojective spaces, Moscow:Fizmatgiz, 1961
5. Gavrilchenko M. L., Kinzerska N. N. Infinitesimal geodesic deformations of the totally geodesic manifolds /M.L. Gavrilchenko, N.N. Kinzerska// Differ. Geom. and Appl.: Proc. 7th Int. Conf., DGA 98. Brno: Masaryk Univ.— 1999.— P. 185-189
6. Levi-Civita T. Sulle transformationi delle equazioni dinamiche/ T. Levi-Civita //Ann. Mat. Milano, Ser. 2. — 1896. — №24. — P. 255–300
7. Matveev V.S. Beltrami problem, Lichnerowicz-Obata conjecture and applications of integrable systems in differential geometry/V.S. Matveev //Tr. Semin. Vektorn. Tenzorn. Anal/—2005.—Vol.26.— P. 214–238.
8. Dini U. Sobre un problema che is presenta nella theoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra/U. Dini//Ann. Mat.- 1869. - S.2,III.-P. 269-293
9. Sinyukov, N.S., Geodesic mappings of Riemannian spaces, Nauka, 1979.
10. J. Mikeš, V.A. Kiosak, O. Vanžurova, Geodesic mappings of manifolds with affine connection, Palacký University Press, Olomouc, 2008, 220p.
11. Thomas T. Y. On projective and equiprojective geometries of paths/T. Y. Thomas // PWC. Nat. Acad. Sci. USA. - 1925. - №11 - P. 198-203
12. V. S. Sobchuk, “Geodesic mappings of some classes of Riemannian spaces”, Soviet Math. (Iz. VUZ), 34:4 (1990), 56–59.
13. Solodovnikov, A. S., Geometric description of all possible representations of a Riemannian metric in Levi-Civita form, Dokl. Akad. Nauk SSSR, v.111,

- 1961, p.33-36.
14. Kruchkovich, G.I., Riemannian and pseudo-Riemannian spaces, *Itogi Nauki. Ser. Mat. Algebra. Topol. Geom.*, 1968, p.191-220.
 15. Kiosak, V., Prishlyak, O., Lesechko, O. (2021). On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(4), 13-26. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i4.2140>
 16. V. Kiosak, A. Savchenko and L. Makarenko, Invariant transformations that preserve mappings, *AIP Conference Proceedings* 2522, 120003 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0100787>
 17. Kiosak, V., Kusik, L., Isaiev, V. (2022). Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 15(2), 110-120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
 18. Kiosak, V., Savchenko, A., Latysh, O. Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II, *Proceedings of the International Geometry Center*, 2021, 14(1), p. 80–91; <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i1.1936>
 19. V.A. Kiosak, G.V. Kovalova, Geodesic mappings of quasi-Einstein spaces with a constant scalar curvature, *Mat. Stud.*, 53(2). 212-217 (2020). <https://doi.org/10.30970/ms.53.2.212-217>
 20. V. Kiosak, A. Savchenko, and G. Kovalova, Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I. *Proceedings of the International Geometry Center*, 13(1), 35-48 (2020). <https://doi.org/10.15673/tmgc.v13i1.1711>
 21. D. Doikov and V. Kiosak, On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe, *AIP Conference Proceedings* 2302, 040001 (2020). <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
 22. V. Kiosak, A. Savchenko, and S. Khniunin, On the typology of quasi-Einstein spaces, *AIP Conference Proceedings* 2302, 040003 (2020). <https://doi.org/10.1063/5.0033700>
 23. V. Kiosak, A. Savchenko, and A. Kamienieva, Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces with constant scalar curvature, *AIP Conference Proceedings* 2302, 040002 (2020). <https://doi.org/10.1063/5.0033661>
 24. Kiosak, V., Prishlyak, O., Gudyreva, O. (2024). On geodesic mappings of threesymmetric spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*,

- 17(1), 56-64. <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i1.2647>
25. Y. Vashpanov, O. Olshevska, O. Lesechko, Geodesic mappings of spaces with (Ric) vector fields, AIP Conference Proceedings, 2302, 040010 (2020). <https://doi.org/10.1063/5.0033965>