

Р. О. Бобров¹, А. В. Затовский¹, А. В. Звелиндовский²

¹Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова

²Лейденский университет, г. Лейден (Нидерланды)

Образование и устойчивость вихревого движения воздуха между непроницаемой и пористой поверхностями

В работе рассмотрены вихревые движения воздушной среды между двумя дисками (поверхностями), один из которых вращается и через поры которого нагнетается флюид. Обнаружено существенно неоднородное распределение поля скорости при разных значениях вязкости. Проведен анализ устойчивости течения при очень малых значениях вязкости.

Введение

На данный момент существует много предположений и трудов по описанию возникновения и поведение различных ураганов и вихрей в воздушной среде [1]. Но, к сожалению, полного и точного описания возникновения ураганов на сегодняшний день нет. В нашей работе рассматривается весьма простая модель. Пусть Земля — это не подвижная бесконечно большая плоская поверхность, а облака или облачные образования — это пористый диск, через который нагнетается воздух. Поставим вопрос. Будет ли воздушная среда между этими двумя поверхностями закручиваться в результате нагнетания? Если да, то мы получим простую модель для исследования. Сводя задачу к изучению уравнений гидродинамики сплошной среды, будем анализировать стационарное движение воздушной среды между неподвижной непроницаемой плоскостью и вращающимся (в конце вычислений устремим к нулю) проницаемым диском, через который производится вдув газа [2-5]. Задача содержит два безразмерных параметра: число Рейнольдса $Re = Vd/\nu$ (d — расстояние между плоскостью и диском, V — скорость нагнетаемого воздуха через пористый диск) и степень закрутки $k = \omega d / V$ (ω — угловая скорость вращения диска).

Течение между пористым вращающимся диском и плоскостью

Целесообразно вести цилиндрическую систему координат с осью OZ вдоль оси вращения диска, так чтобы начало координат было на пористом диске. Согласно Карману [6, 7] предположим, что компонента скорости V_z является функцией только от z . Из-за очевидной симметрии задачи ясно, что все три компоненты скорости не будут зависеть от угловой координаты.

Т.о. уравнения гидродинамики для вязкой среды (уравнения Навье-Стокса) примут вид:

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} \right), \quad (1)$$

$$V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r} = \nu \left(\nabla^2 V_\theta - \frac{V_\theta}{r^2} \right), \quad (2)$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 V_z, \quad (3)$$

где $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, ν — кинематическая вязкость.

Уравнение непрерывности для стационарного течения:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Через пористую поверхность будем вдувать воздух со скоростью V и при этом вращать её с угловой скоростью ω , считая, что касательные напряжения на границах отсутствуют. Таким образом, граничные условия имеют вид:

$$V_r = 0, \quad V_\varphi = \omega r, \quad V_z = V \quad \text{при } z = 0, \quad (5)$$

$$V_r = 0, \quad V_\varphi = 0, \quad V_z = 0 \quad \text{при } z = d. \quad (6)$$

Будем искать автомодельное решение, для которого

$$V_z = W(z). \quad (7)$$

Из уравнений гидродинамики и уравнения непрерывности (1)-(4) можно получить

$$V_\varphi = r g(z). \quad (8)$$

Перепишем уравнения (1) и (2) с учетом (7) и (8):

$$\nu W''' = W W'' - \frac{1}{2} W'^2 + 2g^2 - 2(\omega^2 + c^2), \quad (9)$$

$$\nu g'' = Wg' - W'g, \quad (10)$$

где c — произвольная константа интегрирования.

Обезразмерим уравнения (9), (10) и поднимем порядок уравнения (9), а к граничным условиям (5), (6) добавим еще два, характеризующие отсутствие касательных напряжений на границе. После небольших преобразований получим:

$$\tilde{W}''' = \text{Re}(\tilde{W}\tilde{W}'' + 4\tilde{g}\tilde{g}'), \quad (11)$$

$$\tilde{g}'' = \text{Re}(\tilde{W}\tilde{g}' - \tilde{W}'\tilde{g}), \quad (12)$$

$$\tilde{W}(0) = 1, \tilde{W}'(0) = 0, \tilde{g}(0) = \frac{\omega d}{V}, \tilde{W}(1) = 0, \tilde{W}'(1) = 0, \tilde{g}(1) = 0, \quad (13)$$

где $(\tilde{z} = \frac{z}{d}, \tilde{r} = \frac{r}{d}, \tilde{W} = \frac{W}{V}, \tilde{g} = g \frac{d}{V}, \text{Re} = \frac{Vd}{\nu})$.

Решение задачи (11)-(13) в аналитическом виде представляет собой большую трудность, поэтому рассмотрим предельный случай, когда $\nu \rightarrow 0$, что приводит к $\text{Re} \rightarrow \infty$ (при фиксированных остальных параметрах задачи). Поделив систему уравнений (11), (12) на число Рейнольдса и, считая его большим, приравняем правое выражение нулю (при фиксированных других параметрах). Полученная система уравнений имеет аналитическое решение

$$\tilde{W} = \frac{\text{Cos}(2kz) - \text{Cos}(2k)}{2\text{Sin}^2(k)}, \quad (14)$$

$$\tilde{g} = k\tilde{W}, \quad (15)$$

где $k = \frac{\omega d}{V}$ — коэффициент закрутки, определяющий степень закручивания пористого диска.

Особый интерес представляет Φ — составляющая скорости течения. Построим графическую зависимость V_ϕ / r при разных значениях коэффициента закрутки, в случае, когда нет вязкости, и когда вязкость конечна (численное решение задачи (11)-(13) при разных значениях числа Рейнольдса).

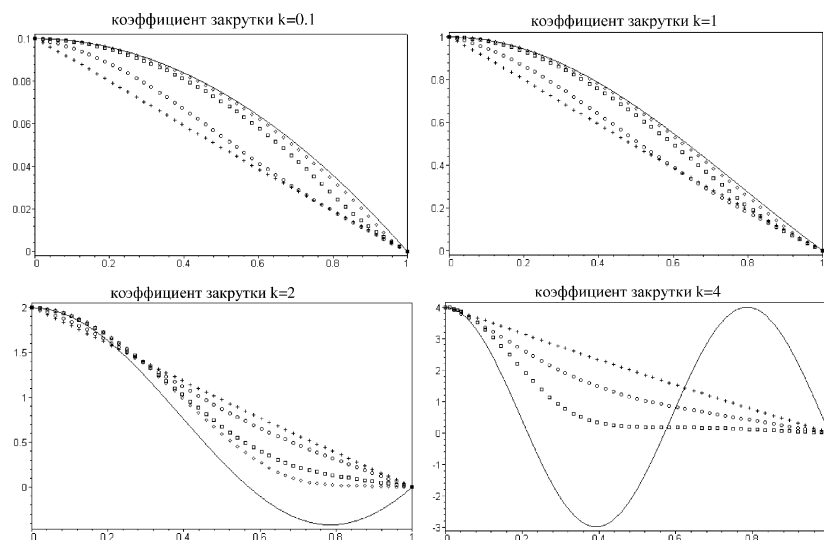


Рис.1. Зависимость $\tilde{g}(\tilde{z})$ при разных значениях коэффициента закрутки и числа Рейнольдса от безразмерного расстояния между диском и поверхностью (сплошная линия соответствует идеальной жидкости, точки — $Re=1000$, квадраты — $Re=100$, кружки — $Re=10$, крестики — $Re=1$).

Из Рис.1. видно, что чем меньше значения коэффициента закрутки, тем меньше значение $\tilde{g}(\tilde{z})$. Это означает, что при нагнетании воздуха через пористую поверхность воздушный поток не будет закручиваться между двумя неподвижными поверхностями, одна из которых пористая. Но понижение угловой скорости пористого диска не всегда означает понижения значения коэффициента закрутки. Если одновременно с угловой скоростью ω устремить к нулю отношение V/d , то выражение $k = \omega d / V$ может стремиться к константе. Кроме того, при $k > \pi/2$ ($v \rightarrow 0$) возникает переориентация вектора скорости на противоположное направление, так что появляется слоистая структура потока между двумя дисками. Для конечной вязкости такая картина не наблюдается даже при $k \approx 4$. Проанализируем устойчивость течения.

Устойчивость течения

Для анализа устойчивости поступим традиционным способом [7, 8]. Представим вектор скорости в виде суммы вектора скорости при стационарном течении и вектора скорости возмущения, аналогично для давления воздуха ($\delta V \ll V_0$, $\delta P \ll P_0$),

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \delta \vec{V}, \quad P = P_0 + \delta P. \quad (16)$$

Компоненты возмущения представим в виде трех функций

$$\delta \vec{V} = (\psi, \xi, \chi). \quad (17)$$

Подставим (17) с учетом (18) в уравнения Навье-Стокса и в уравнение непрерывности. В безразмерной форме после линеаризации относительно возмущений имеем систему уравнений (значок тильда опущен)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi}{\partial t} + V_{r0} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \psi \frac{\partial V_{r0}}{\partial r} + V_{z0} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \\ & + \chi \frac{\partial V_{r0}}{\partial z} - \frac{2\xi V_{\varphi 0}}{r} = -\frac{\partial \delta p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\Delta \psi - \frac{\psi}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + V_{r0} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \psi \frac{\partial V_{\varphi 0}}{\partial r} + V_{z0} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \chi \frac{\partial V_{\varphi 0}}{\partial z} + \frac{\xi V_{r0} + \psi V_{\varphi 0}}{r} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\Delta \xi - \frac{\xi}{r^2} \right), \quad (19)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + V_{r0} \frac{\partial \chi}{\partial r} + V_{z0} \frac{\partial \chi}{\partial z} + \chi \frac{\partial V_{z0}}{\partial z} = -\frac{\partial \delta p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \chi, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} + \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0, \quad (21)$$

Рассмотрим невязкую жидкость, тогда в уравнениях (18)-(19) уйдут все члены, содержащие отношение $1/\text{Re}$, а выражения $V_{\varphi 0}$, V_{z0} будут определяться, как и в (7-8) с учетом (14), (15). Решение полученной системы уравнений будем искать в таком же виде, как и стационарное решение невязкой жидкости

$$\psi = r\Phi(z) \exp(ilt), \quad \xi = rF(z) \exp(ilt),$$

$$\chi = Y(z) \exp(ilt), \quad \delta p = D(r, z) \exp(ilt). \quad (22)$$

Чтобы уравнения (18)-(21) были самосогласованны, необходимо и достаточно, чтобы функция $D(r, z)$ зависела только от одной переменной z . Выберем функции $\Phi(z)$, $F(z)$, $Y(z)$, $D(z)$ так, чтоб они удовлетворяли нулевым условиям на границе ($z = 0$ и $z = 1$) Представим эти функции в виде линейной комбинации бесконечного ряда синусов и косинусов.

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{1n} \sin(2\pi nz) + a_{2n} (\cos(2\pi nz) - 1)),$$

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{1n} \sin(2\pi nz) + b_{2n} (\cos(2\pi nz) - 1)),$$

$$Y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{1n} \sin(2\pi n z) + c_{2n} (\cos(2\pi n z) - 1)),$$

$$D(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (d_{1n} \sin(2\pi n z) + d_{2n} (\cos(2\pi n z) - 1)). \quad (23)$$

Подставим (22) в (21) с учетом (23), знак суммы опустим, получим

$$a_{1n} \sin(2\pi n z) + a_{2n} (\cos(2\pi n z) - 1) + \pi n (c_{1n} \cos(2\pi n z) - c_{2n} \sin(2\pi n z)) = 0. \quad (24)$$

Если (24) умножить на $\sum_{m=1}^{\infty} \sin(2\pi m z)$ и проинтегрировать по всем возможным значениям z , а потом сделать аналогичную процедуру после умножения на $\sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m z)$, то получим:

$$c_{2n} = a_{1n} / \pi n, \quad c_{1n} = -a_{2n} / \pi n. \quad (25)$$

Проделав аналогичную операцию с выражениями (18)-(20) с учетом (25), получим бесконечный набор алгебраических уравнений для четырех амплитуд a_{1n} , a_{2n} , b_{1n} , b_{2n} и двух для d_{1n} , d_{2n} которые определяются только через a_{1n} , a_{2n} . Т.о., для определения возмущений (22), необходимо записать выражения, в которых содержатся неизвестные амплитуды a_{1n} , a_{2n} , b_{1n} , b_{2n} . После небольших преобразований уравнения (18), (19) с учетом (22), (23), (25) получим бесконечную систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{1n} \frac{il}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{1m} A_{11nm}^{(s)} + a_{2m} A_{12nm}^{(s)} + b_{1m} B_{11nm}^{(s)} + b_{2m} B_{12nm}^{(s)}) \right) = 0, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{1m} A_{11nm}^{(c)} + a_{2n} \frac{il}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{2m} A_{12nm}^{(c)} + b_{1m} B_{11nm}^{(c)} + b_{2m} B_{12nm}^{(c)}) \right) = 0, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} (a_{1m} A_{21nm}^{(s)} + a_{2m} A_{22nm}^{(s)}) + b_{1n} \frac{il}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (b_{1m} B_{21nm}^{(s)} + b_{2m} B_{22nm}^{(s)}) \right) = 0, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} (a_{1m} A_{21nm}^{(c)} + a_{2m} A_{22nm}^{(c)} + b_{1m} B_{21nm}^{(c)}) + b_{2n} \frac{il}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} B_{22nm}^{(c)} \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Выражения, стоящие перед неизвестными амплитудами a_{1n} , a_{2n} , b_{1n} , b_{2n} представляют собой матричные элементы, образованные последовательным домножением уравнений (18) — (19) с учетом (22), (23), (25) на $\sin(2\pi n z)$ и $\cos(2\pi n z)$.

Вследствие того, что мы интересуемся устойчивостью течения между двумя дисками, то нас интересует не явный вид возмущений, а значения величины il при времени в (22). Если действительная часть этой величины растёт при соответствующих значениях коэффициента закрутки, то течение не устойчиво. Составим детерминант бесконечной системы уравнений (26), который при обращении в нуль является характеристическим уравнением для il . Такая задача весьма затруднительна. Оборвем бесконечную цепочку уравнений так, чтобы значения n и m менялись в пределах $(1, n_{\max})$. Будем увеличивать значение $n_{\max}$ до тех пор, пока характер поведения действительной части il мало изменяется от значения $n_{\max}$, при соответствующем значении коэффициента закрутки.

Нами проведен анализ до значения $n_{\max} = 3$. Из этого анализа мы установили, что течение вполне устойчиво только до значений $k \leq \pi/2$. Это значит, что слоистой структуры не наблюдается (переориентация направления жидкости возникает при $k > \pi/2$ (Рис.1.)). Течение со слоями будет не устойчивым. Это понятно и из физических соображений. Если в системе нет вязкости, а это равносильно условию $1/\text{Re} \ll 1$, то нет ничего, что способствует к возникновению слоистой структуры течения между двумя дисками.

Заключение

Нами рассмотрена простая нелинейная задача — вихревое движение воздушного потока между двумя бесконечными дисками, один из которых пористый и вращается, что равносильно подачи закрученного воздушного потока через неподвижный пористый диск. Но даже в такой простой задаче возникло ряд сложностей и интересных результатов: расслоение течения между дисками при очень больших значениях коэффициента закрутки (закрутка пористой поверхности), взаимно противоположное движение воздушной среды в этих слоях, наличие нелинейной “воронки”. Анализ на устойчивость показал, что для невязкого воздуха течение будет устойчивым только в том случае, когда нет расслоения.

Литература

1. Экарт К. Гидродинамика океана и атмосферы. — М.: ИЛ, 1963. — 250 с.
2. Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. — Новосибирск, 1984. — 333 с.
3. Terrill R.M., Cornish J.P. Radial flow of a viscous, incompressible fluid between two stationary uniformly porous discs // JAMP. — 1973. — V.24. — P.676-688.
4. Гольдштик М.А. Вихревые процессы и явления. — 1989. — №210. — 69 с. (Препринт АН СССР СО, институт теплофизики).
5. Batchelor G.K. Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations

- representing steady rotationally — symmetric flow// QJMAM. 1951. — V.IV, Pt.1. — P. 29-41.
6. Karman T.V. Über laminare und turbulente Reibung// ZAMM. — 1921. — Bd 1. — S. 232-240.
 7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: ИЛ, 1974. — 742 с.
 8. Гетлинг А.В. Формирование пространственных структур конвекции Рэлея-Бенара// УФН. — 1991. — Т.161, №9. — С. 1-80.

Р. О. Бобров, О. В. Затовський, А. В. Звеліндовський

Утворення та стійкість віхривого руху повітря між непроникливою та поруватою поверхнями

АНОТАЦІЯ

У роботі розглянуті віхриві рухи повітря між двома дисками (поверхнями), один з яких обертається з постійною кутовою швидкістю та через пори якого нагнітається флюїд. Найдений суттєво неоднорідний розподіл поля швидкості для різних значень в'язкості. Проведено аналіз стійкості течії для малих значень в'язкості.

Bobrov R. O., Zatovsky A. V., Zvelindovsky A. V.

Creation and stability of the vortex motion of the air between impermeable and porous surfaces

SUMMARY

In this article the vortex motions of the air medium between two disks (surfaces) are considered. One of disks rotate, and fluid is injected through its pores. Essentially heterogeneous distribution of the velocity field is discovered by different values of the viscosity. The analysis of the stability of the stream at extremely low values of the viscosity is carried out.