Міністерство освіти і науки України
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Огуленко Олексій Павлович

УДК 517.9

Асимптотичні методи дослідження динамічних систем на часових шкалах

01.01.02 — диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Одеса — 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Одеському національному університеті імені І. І. Мечникова Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент
Кічмаренко Ольга Дмитрівна,
Одеський національний університет імені
І. І. Мечникова, завідувач кафедри оптимального
керування та економічної кібернетики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Станжицький Олександр Миколайович,
Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, завідувач кафедри загальної
математики;

доктор фізико–математичних наук, професор
Дончев Цанко,
професор відділення математики Університету
архітектури, цивільної інженерії та геодезії, Софія,
Болгарія.

Захист відбудеться «8» червня 2018 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 41.051.05 Одеського національного університету імені І. І. Мечникова за адресою: 65082 м. Одеса, вул. Дворянська, 2.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Одеського національного університету імені І. І. Мечникова за адресою: 65000, Одеса, вул. Преображенська, 24.

Автореферат розісланий «___» ______________ 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Білозерова М. О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дослідження складних систем та побудова математичних моделей таких систем сприяла розробці різноманітних підходів до розв'язання задач, пов'язаних з цими моделями: з'ясування питання існування розв'язку та його єдиність, аналіз характеру поведінки складної системи без знаходження явного вигляду розв'язку відповідного диференціального рівняння. Але складність системи (як, наприклад, наявність змінних із значною різницею у швидкості, суттєва нелінійність рівнянь руху системи, розривний або імпульсний характер динаміки тощо) викликала суттєві труднощі при реалізації обчислювальних алгоритмів або взагалі робила неможливою розв'язання задачі навіть за допомогою обчислювальної техніки.

Асимптотичні методи часто дозволяють спростити задачу дослідження складних систем. Одним із ключових етапів розвитку асимптотичних методів, зокрема — методу усереднення, стали роботи А. Пуанкаре, в яких він ввів поняття асимптотичного ряду та асимптотичного розкладу функції, розробив метод малого параметру. Строге математичне обґрунтування можливості застосування методу усереднення та постановка задачі усереднення в стандартному вигляді були викладені в монографії М. М. Крилова та М. М. Боголюбова «Вступ в нелінійну механіку» (1937 р.)

Про можливість застосування методу усереднення до задач оптимального керування вперше наголосив М. М. Моісеєв. Він визначив два основних підходи: перший — це усереднення крайової задачі принципу максимуму Понтрягіна та отримання асимптотично оптимального керування через розв'язання усередненої крайової задачі, яка відповідає вихідній крайовій задачі; другий підхід — це усереднення рівнянь керованого руху та утворення нової задачі керування усередненою системою. Перший підхід вимагав додатково розробки схем усереднення для систем із розривною правою частиною, оскільки саме розривність правої частини є специфікою крайової задачі принципу максимуму Понтрягіна. Застосування другого підходу знімає проблему розривності, але вимагає уваги до наявності керування в правій частині. Природним узагальненням диференціального рівняння, права частина якого містить керування, є диференціальне включення — нова математична постановка, яка описує динаміку в'язки траєкторій.

В. О. Плотніков узагальнив метод усереднення на випадок диференціальних включень та разом із колегами та своїми учнями суттєво розширив класи задач, в тому числі задач оптимального керування, для яких обґрунтована можливість застосування методу усереднення та розроблені відповідні схеми усереднення. Пізніше в роботах В. О. Плотнікова, Л. І. Плотнікової, А. В. Плотнікова, О. Н. Вітюка, О. Д. Кічмаренко, Н. В. Скрипник, Н. Кітанова, А. Т. Ярового та ін. метод усереднення був розвинутий для інтегро–диференціальних включень, включень із частинними похідними, включень із похідною Хукухари, апроксимаційних рівнянь в метричних просторах, квазідиференціальних рівнянь, включень та динамічних систем із запізненням та імпульсами, рівнянь із запізненням та максимумом в правій частині, рівнянь з нечіткою правою частиною.

Практично всі згадані результати були отримані для систем різних типів на неперервному часі. Для дискретних динамічних систем обґрунтування методу усереднення було отримано в роботах В. О. Плотнікова, Л. І. Плотнікової разом з А. Т. Яровим, в статтях І. А. Бойцової та роботах О. Д. Кічмаренко і М. Л. Карпичевої, причому дискретні системи в них розглядалися як багатокроковий процес з постійним кроком.

З появою роботи S. Hilger «Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten» (1988 р.) природу часу в динамічній системі можна розуміти по–новому та однією мовою описувати як неперервні і дискретні системи, так і змішані випадки. Такі нові системи називаються динамічними системами на часових шкалах. Докладне викладення аналізу динамічних систем на часових шкалах можна знайти, наприклад, в монографії M. Bohner та A. Peterson «Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications» (2001 р.). За порівняно короткий термін в 2000-х роках на випадок часових шкал були перенесені основні результати теорії звичайних диференціальних рівнянь, теорії стійкості та деякі асимптотичні методи досліджень.

M. Bohner одним із перших розглянув задачі варіаційного числення на часових шкалах, пізніше цей напрямок був ґрунтовно розроблений R. Ferreira, A. Malinowska та D. Torres і знайшов своє застосування в задачах математичної економіки. За останнє десятиліття досить активно вивчалися можливості переносу на часові шкали двох основних методів розв'язання задач оптимального керування: принципу максимуму Понтрягіна та рівняння Гамільтона—Якобі—Беллмана. На сьогодні ця проблема не вирішена остаточно, хоча цікаві результати для широкого класу задач керування отримані в останні роки О. М. Станжицьким та О. Є. Лавровою. Зважаючи на зв'язок між теорією оптимального керування та многозначним аналізом, дуже важливим напрямком досліджень є теорія динамічних включень на часових шкалах, яка в останні роки досить активно розробляється в роботах I. Santos i G. Silva, Y. Peng i G. Liu,

T. Donchev і M. Rafaqat та інших. Це дозволяє ставити питання про перенесення розроблених для диференціальних включень асимптотичних методів, про які згадувалось вище, на випадок динамічних включень на часових шкалах.

В роботах A. Slavík в 2012 році вперше було запропоновано схему усереднення для динамічної системи на часовій шкалі, згідно з якою в якості усередненої було обране узагальнене диференціальне рівняння. А отже, операція усереднення не забезпечувала замкненості множини розв'язків.

Досить короткий історичний період існування теорії динамічних систем на часових шкалах та стрімке зростання кількості наукових досліджень в цій галузі говорить про те, що, з одного боку, обраний напрямок є перспективним в теорії динамічних систем, а з другого боку, в цьому полі досліджень є ще дуже багато відкритих питань.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню динамічних систем на часових шкалах без керування і з керуванням, зокрема обґрунтуванню для таких систем можливості застосування різних схем методу усереднення та розробці на їх основі чисельно–асимптотичного методу розв'язання задач оптимального керування динамічними системами на часовій шкалі. Окремо досліджувались асимптотичні властивості розв'язків побудованої моделі реального процесу на часовій шкалі.

Зв'язок роботи з науковими планами, програмами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках досліджень кафедри оптимального керування та економічної кібернетики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, теми №0111U005877 «Удосконалення чисельно–асимптотичних методів розв'язування задач оптимального керування» та №0117U004072 «Методи усереднення для керованих систем різної природи».

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є подальший розвиток теорії асимптотичних методів для динамічних систем на часових шкалах.

В роботі поставлені та вирішені наступні завдання:

— обґрунтувати схему повного та часткового усереднення для динамічних систем на часовій шкалі за умови, що усереднена система має ту ж природу, що і вихідна та визначена на тій самій часовій шкалі;

— розробити схеми усереднення для Δ–періодичних систем з малим параметром на часовій шкалі;

— отримати умови застосування методу усереднення на нескінченному проміжку для динамічної системи на часових шкалах;

— обґрунтувати метод усереднення для керованих динамічних систем на часових шкалах та розробити на його основі чисельно–асимптотичний метод розв'язання задач оптимального керування динамічними системами на часовій шкалі;
— побудувати динамічну модель реального процесу на часовій шкалі, дослідити вплив характеристик шкали на властивості та поведінку розв'язків відповідної динамічної системи на шкалі.

Об'єкт дослідження — динамічні системи на часових шкалах, як без керування, так і з керуванням.

Предметом дослідження є розв'язки диференціальних рівнянь на часових шкалах, які не містять керування та розв'язки диференціальних рівнянь з керуванням на часових шкалах, керування динамічними системами на часових шкалах та критерії якості керування.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи розв'язання задач оптимізації, методи загальної теорії динамічних систем на часових шкалах, методи теорії стійкості динамічних систем на часових шкалах, методи многозначного аналізу, методи багатокритеріальної оптимізації та методи лінійної алгебри.

Наукова новизна одержаних результатів. В дисертаційній роботі
— вперше отримане обґрунтування схем повного та часткового усереднення для динамічних систем на часовій шкалі з малим параметром на асимптотично великому та нескінченому проміжках за умови, що усереднена система має ту ж саму природу, що і вихідна та визначена на тій самій часовій шкалі;
— вперше для Δ–періодичних систем з малим параметром отримано лінійну оцінку похибки методу усереднення; вперше введено клас геометрично Δ–квазіперіодичних систем, для яких обґрунтована можливість застосування методу усереднення;
— вперше обґрунтовано метод усереднення для керованих динамічних систем на часових шкалах з малим параметром, запропоновано алгоритм відповідності керувань вихідної та усередненої систем, обґрунтовано чисельно–асимптотичний метод розв'язання задач оптимального керування динамічною системою на часовій шкалі з термінальним та векторним критерієм якості;
— вперше побудовано модель на часовій шкалі процесу розповсюдження інформації в соціальній мережі, для якої отримано умови існування єдиного стану рівноваги та умови різних типів його стійкості, виявлено вплив характеристик шкали на якісну поведінку розв'язків системи.

Практичне значення одержаних результатів. Результати, отримані в дисертації, мають здебільшого теоретичний характер. Запропонований чисельно–асимптотичний метод розв'язання задач оптимального керування динамічними системами на шкалах може знайти своє застосування при вивченні моделей складних систем, для яких час має змішану дискретно–неперервну структуру.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження та постановка основних завдань належать науковому керівнику О. Д. Кічмаренко. Результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно та опубліковані в п'яти наукових статтях [1, 2, 3, 4, 5]. З них три роботи [1, 2, 3] опубліковані у співавторстві із О. Д. Кічмаренко, якій належить постановка задачі та загальне керівництво роботою. В опублікованих тезах доповідей [10] автору належить постановка задачі та формулювання основного результату, А. В. Кац належить практична реалізація та чисельне дослідження моделі.

Апробація результатів дисертації. Результати дослідження доповідались та обговорювались на наукових конференціях та наукових семінарах, а саме:

— XVI Міжнародна конференція «Dynamical system modelling and stability investigation», 29-31 травня 2013 р., м. Київ, Україна;
— Міжнародна математична конференція, присвячена 75-річчю з дня народження акад. А. М. Самойленка «Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування», 12–14 червня 2013 р., м. Слав'янск, Україна;
— XXII Міжнародна конференція "Problems of Decision Making under Uncertainties", 23–27 вересня 2013 р., Форос-Ялта, Україна;
— Международная конференция к 95-летию со дня рождения акад. Е. А. Барбашина «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», 1–5 октября 2013 г., г. Минск, Республика Беларусь;
— Дев'ята міжнародна науково-практична конференція «Математичне та імітаційне моделювання систем», 23-27 червня 2014 р., Київ-Жукін, Україна;
— Tenth International Conference «Game Theory and Management», Saint Petersburg, Russia, 2016;
— Міжнародна літня математична школа пам'яті В. О. Плотнікова, 12–17 вересня 2016 р., м. Одеса, Україна;
— Міжнародна конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування», 19-21 травня 2017 р., м. Кам'янець-Подільський, Україна;
— XVIII Міжнародна конференція «Dynamical system modeling and stability investigation», 24–26 травня 2017 р., м. Київ, Україна;

— засідання наукового семінару кафедри оптимального керування та економічної кібернетики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова 28 травня 2015, м. Одеса, Україна;

— International Workshop «Nonlinear Analysis and Nonautonomous Ordinary Differential Equations», June 23–27, 2017, Odesa, Ukraine.

— Спільний науковий семінар кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь і кафедри загальної математики механіко–математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом акад., д. ф.-м.н., проф. М. О. Перестюка та д. ф.-м. н., проф. О. М. Станжицького, Київ, 2017 р.

Публікації. Результати дисертаційного дослідження висвітлені в 14 наукових публікаціях. З них п'ять це статті в наукових фахових виданнях [1, 2, 3, 4, 5], зокрема, [2, 3, 4] — у виданнях з імпакт–фактором, що включені до наукометричної бази Scopus. Крім того, опубліковано дев'ять тез доповідей на міжнародних та всеукраїнських конференціях [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14].

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та додатків. Повний обсяг роботи містить 155 сторінок друкованого тексту, список використаних джерел містить 103 найменування.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульована мета і задачі дослідження, об'єкт та предмет дослідження, визначено наукову новизну, практичну значущість отриманих результатів, особистий внесок здобувача та апробацію отриманих результатів.

В **першому розділі** міститься огляд літератури за напрямком дисертаційної роботи, висвітлено історію розвитку асимптотичних методів дослідження динамічних систем та сучасні результати в цій області. Робиться стислий огляд теорії динамічних систем на часових шкалах та сучасних напрямків її розвитку. Наводиться порівняння з деякими роботами інших авторів, близькими до задач, розв'язаних в дисертації.

Другий розділ містить обґрунтування різних схем методу усереднення динамічних систем на часових шкалах з малим параметром стандартного вигляду.

Під часовою шкалою розуміється непуста замкнена підмножина множини дійсних чисел[1]. Довільна часова шкала зазвичай позначається символом $\mathbb{T}$. Властивості часової шкали визначаються трьома функціями: 1) оператором переходу вперед $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$; 2) оператором переходу назад $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ (при цьому вважається, що $\inf \varnothing = \sup \mathbb{T}$ та $\sup \varnothing = \inf \mathbb{T}$; 3) функцією зернистості $\mu(t) = \sigma(t) - t$. Поведінка операторів $\sigma(t)$ та $\rho(t)$ в конкретній точці часової шкали визначає тип цієї точки. Так, при $t < \sigma(t)$ точка t називається справа розсіяною, при $t = \sigma(t)$ — справа щільною. Аналогічно, точка буде називатися розсіяною зліва при $\rho(t) < t$ та щільною зліва при $\rho(t) = t$. Нарешті, точка може бути щільною ($\rho(t) = t = \sigma(t)$) або ізольованою ($\rho(t) < t < \sigma(t)$). Важливу роль відіграє підмножина часової шкали $\mathbb{T}^\kappa$: якщо існує така справа розсіяна точка $M \in \mathbb{T}$, що $M = \sup \mathbb{T} < \infty$, то $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} \setminus \{M\}$; в іншому випадку вважається $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$.

Число $f^\Delta(t)$ називатимемо Δ-похідною функції $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ в точці $t \in \mathbb{T}^\kappa$, якщо для довільних $\varepsilon > 0$ знайдеться такий окіл U точки t, що $\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)\right| \leqslant \varepsilon\,|\sigma(t) - s|$ для всіх $s \in U$. Якщо $f^\Delta(t)$ існує для всіх $t \in \mathbb{T}^\kappa$, то $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ називається Δ-диференційованою на $\mathbb{T}^\kappa$, а функція $f^\Delta(t) : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}$ називається дельта-похідною функції f на $\mathbb{T}^\kappa$.

Функція $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ називається rd-неперервною (пишуть $f \in \in C_{rd}(\mathbb{T})$), якщо в справа щільних точках вона неперервна, а в зліва щільних точках має скінченні лівосторонні границі. Множину диференційованих функцій, похідна яких є rd-неперервною, позначають $C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T})$. Операція інтегрування функції на часовій шкалі визначається як обернена до операції диференціювання через поняття передпервісної, хоча можливі й інші еквівалентні означення. Δ–інтеграл функції $f(t)$ позначається через $\displaystyle\int f(t)\Delta t$.

Розв'язком диференціального рівняння $x^\Delta(t) = f(t, x(t))$, де $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{T}$, називається функція $x(t)$, якщо $x(t) \in C^1_{rd}\left([t_0, +\infty) \cap \mathbb{T}\right)$ і при підстановці її в рівняння останнє перетворюється в тотожність.

В підрозділі 2.1 встановлюється близькість розв'язків вихідної системи

$$x^\Delta = \varepsilon X(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{T}$ — час, заданий часовою шкалою $\mathbb{T}$ із функцією зернистості $\mu(t)$, $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $x : \mathbb{T} \to D, D \subset \mathbb{R}, X : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, та усередненої системи

$$\xi^\Delta = \varepsilon \overline{X}\,(\xi) \quad \xi(t_0) = x_0, \tag{2}$$

[1]Bohner M., Peterson A. Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications. Birkhäuser Basel, 2001.

де
$$\overline{X}(x) = \lim_{\substack{T\to\infty\\ T\in\mathbb{T}}} \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{T} X(t,x)\Delta t, \qquad (3)$$

на асимптотично великому проміжку часу.

Теорема 2.1. *Нехай в області* $Q = \Big\{t \in \mathbb{T}, x \in D\Big\}$ *виконуються наступні умови:*

1) *функція* $X(t,x)$ *rd-неперервна за* t *і для неї виконуються умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші, причому для всіх* $(t,x) \in Q$ $\|X(t,x)\| \leqslant M, M > 0$. *Крім того,* $X(t,x)$ *ліпшицева за* x *з константою* $\lambda > 0$*;*
2) *границя* (3) *існує рівномірно відносно* $x \in D$*;*
3) *розв'язок* $\xi(t)$ *усередненої системи* (2) *з початковою умовою* $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ *визначений для усіх* $t \in \mathbb{T}^\kappa$ *і лежить разом із* ρ*-околом в області* D*;*
4) *існує таке число* $\mu_0 > 0$*, що для кожного* $t \in \mathbb{T}^\kappa$ *або* $\mu(t) = 0$*, або* $\mu(t) > \mu_0$.

Тоді для будь-яких $\eta > 0$ *та* $L > 0$ *знайдеться таке* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$*, що для* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *і* $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ *справедлива оцінка*

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \eta\ , \qquad (4)$$

де $x(t)$ *та* $\xi(t)$ *— розв'язки задач Коші* (1) *і* (2) *відповідно.*

При доведенні цієї теореми та низки подальших результатів використовується спеціальний спосіб розбиття проміжку часової шкали, так зване δ-розбиття: для заданого діаметру розбиття δ за першу точку розбиття береться точка t_0, а наступні точки визначаються за формулою
$$t_i = \begin{cases} \sup\,(t_{i-1}, t_{i-1}+\delta], & \text{якщо} \quad t_{i-1}+\delta \in \mathbb{T}^\kappa, \\ \sigma(t_{i-1}), & \text{якщо} \quad t_{i-1}+\delta \notin \mathbb{T}^\kappa. \end{cases}$$

У підрозділі 2.2 системі (1) ставиться у відповідність частково усереднена система
$$\xi^\Delta = \varepsilon\widetilde{X}\,(t,\xi) \quad \xi(t_0) = x_0, \qquad (5)$$

де
$$\lim_{\substack{T\to\infty\\ T\in\mathbb{T}}} \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{T} \left\|X(t,x) - \widetilde{X}(t,x)\right\| \Delta t = 0. \qquad (6)$$

Доводиться можливість застосування такої схеми часткового усереднення та отримана оцінка близькості розв'язків систем (1) та (5).

Теорема 2.2. *Нехай в області* $Q = \{t \in \mathbb{T}, x \in D\}$ *виконуються наступні умови:*

1) *функції* $X(t,x)$ *та* $\widetilde{X}(t,x)$ *rd-неперервні за* t*, обмежені константою* $M > 0$ *та задовольняють умову Ліпшиця за* x *з константою* $\lambda > 0$*;*
2) *границя* (6) *існує рівномірно відносно* $x \in D$*;*
3) *розв'язок* $\xi(t)$ *частково усередненої системи* (5) *з початковою умовою* $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ *визначений для усіх* $t \in \mathbb{T}$ *і лежить разом із* ρ*-околом в області* D*;*
4) *існує таке число* $\mu_0 > 0$*, що для будь-якого* $t \in \mathbb{T}$ *або* $\mu(t) = 0$*, або* $\mu(t) > \mu_0$*.*

Тоді для будь-яких $\eta > 0$ *та* $L > 0$ *знайдеться таке* $\varepsilon_0\,(\eta, L) > 0$*, що для* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *та* $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ *справедлива нерівність* $\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \eta$ *де* $x(t)$ *та* $\xi(t)$ *— розв'язки задач Коші* (1) *і* (5) *відповідно.*

Також у цьому підрозділі показано, що можна виключити вимогу ліпшицевості правої частини вихідної системи (1) (при цьому втрачається єдиність розв'язку) та послабити умову рівномірної збіжності границі (3) або (6), замінивши її на умову існування границі в кожній точці.

Теорема 2.3. *Нехай в області* $Q = \{t \in \mathbb{T}, x \in D\}$ *виконуються наступні умови:*

1) *функція* $X(t,x)$ *rd-неперервна за* t*, обмежена константою* $M > 0$ *та рівномірно неперервна за* x *відносно* t*;*
2) *функція* $\widetilde{X}(t,x)$ *rd-неперервна за* t*, обмежена константою* $M > 0$ *та задовольняє умову Ліпшиця за* x *з константою* $\lambda > 0$*;*
3) *границя* (6) *існує рівномірно відносно* $x \in D$*;*
4) *розв'язок* $\xi(t)$ *частково усередненої системи* (2) *з початковою умовою* $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ *визначений для усіх* $t \in \mathbb{T}$ *і лежить разом із* ρ*-околом в області* D*;*
5) *існує таке число* $\mu_0 > 0$*, що для будь-якого* $t \in \mathbb{T}$ *або* $\mu(t) = 0$*, або* $\mu(t) > \mu_0$*.*

Тоді для будь-яких $\eta > 0$ *та* $L > 0$ *знайдеться таке* $\varepsilon_0\,(\eta, L) > 0$*, що для* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *та* $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ *справедлива нерівність* $\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \eta$*, де* $x(t)$ *та* $\xi(t)$ *— розв'язки задач Коші* (1) *і* (5) *відповідно.*

Теорема 2.4. *Нехай в області* $Q = \{t \in \mathbb{T}, x \in D\}$*, де множина* D *замкнена, виконуються умови теореми 2.3, а умова 3) замінена наступною:*

$3'$*) границя* (6) *існує в кожній точці* $x \in D$*.*

Тоді для будь-яких $\eta > 0$ *та* $L > 0$ *знайдеться таке* $\varepsilon_0\,(\eta, L) > 0$*, що для* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *та* $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ *справедлива нерівність* $\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \eta$*, де*

$x(t)$ та $\xi(t)$ — розв'язки задач Коші (1) *і* (5) *відповідно.*

Підрозділ 2.3 присвячено дослідженню динамічних систем на часових шкалах загальної природи, для яких знімається обмеження на функцію зернистості часової шкали. Це стало можливим завдяки детальному дослідженню властивостей δ-розбиття часового проміжку.

Теорема 2.5. *Нехай $|\mathbb{T}| \geqslant \aleph_0$, $Q = \Big\{t \in \mathbb{T}, x \in D\Big\}$, $x(t)$ та $\xi(t)$ позначають розв'язки задач Коші* (1) *та* (2) *відповідно. Припустимо, що в області Q виконуються наступні умови:*

1) *функція $X(t,x)$ є rd-неперервною за t та, крім цього, $X(t,x)$ задовольняє умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші, рівномірно обмежена та задовольняє умову Ліпшиця відносно змінної x із константою $\lambda > 0$;*
2) *границя* (3) *існує рівномірно відносно $x \in D$;*
3) *розв'язок $\xi(t)$ усередненої системи* (2) *із початковою умовою $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ визначений для усіх $t \in \mathbb{T}^\kappa$ та разом із своїм ρ-околом лежить в D.*

Тоді для будь-яких $\eta > 0$ та $L > 0$ знайдеться $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$ таке, що для усіх $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ та $t \in \big[t_0, t_0 + L\varepsilon^{-1}\big] \cap \mathbb{T}$ справедлива нерівність $\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \eta$.

Підрозділ 2.4 присвячено дослідженню систем з періодичним характером динаміки. Використовуючи концепцію періодичності, запропоновану M. Adivar (2013), розглянуто динамічну систему:

$$x^\Delta = \varepsilon X(t,x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{7}$$

Тут $\mathbb{T}$ — необмежена зверху часова шкала, що є періодичною відносно зсувів $\delta_\pm$ з періодом $P \in (t_0, +\infty)_{\mathbb{T}^*}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $X(t,x)$ є n-вимірною вектор–функцією, кожна компонента якої є Δ-періодичною відносно зсувів $\delta_\pm(T,t)$ функцією, $T \in [P, +\infty)_{\mathbb{T}^*}$. Δ-періодичність відносно зсувів $\delta_\pm(T,t)$ розуміється в сенсі означення M. Adivar[2].

У відповідність до вихідної системи (7) ставиться частково усереднена система на тій самій часовій шкалі:

$$\xi^\Delta = \varepsilon \widetilde{X}(t,\xi), \quad \xi(t_0) = x_0, \tag{8}$$

де

[2] Adivar M. A new periodicity concept for time scales / M. Adivar // Mathematica Slovaca. – 63(4). – 2013. – P. 817–828

$$\widetilde{X}(t,x) = \left\{ \widetilde{X}_i(x) = \frac{1}{\delta^{(i+1)}(t_0) - \delta^{(i)}(t_0)} \int\limits_{\delta^{(i)}(t_0)}^{\delta^{(i+1)}(t_0)} X(t,x)\Delta t, \right.$$
$$\left. \delta^{(i)}(t_0) \leqslant t < \delta^{(i+1)}(t_0), \quad i = 0,1,2,\dots \right\}. \tag{9}$$

Для систем (7), (8) доведена теорема про близькість розв'язків з лінійною відносно малого параметра оцінкою.

Теорема 2.6. *Нехай $Q = \Big\{t \in \mathbb{T}, x \in D\Big\}$, $x(t)$ та $\xi(t)$ є розв'язками задач Коші (7) та (8) відповідно. Припустимо, що в області Q виконуються наступні умови:*

1) *кожна компонента вектор–функції $X(t,x)$ є Δ-періодичною функцією відносно зсувів $\delta_{\pm}(T,t)$, $T \in [P,+\infty)_{\mathbb{T}^*}$;*
2) *функція $X(t,x)$ є rd-неперервною відносно t та задовольняє умовам існування та єдиності розв'язку задачі Коші, рівномірно обмежена та задовольняє умову Ліпшиця з константою $\lambda > 0$;*
3) *існує константа $K > 0$ така, що для усіх $i \geqslant 1$ виконується наступна нерівність $\delta^{(i+1)}(t_0) - \delta^{(i)}(t_0) \leqslant K$;*
4) *розв'язок $\xi(t)$ усередненої системи із початковою умовою $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ визначений для усіх $t \in \mathbb{T}^\kappa$ та разом із своїм ρ-околом лежить в D.*

Тоді для будь-якого $L > 0$ знайдеться $\varepsilon_0(L) > 0$ таке, що для всіх $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ та $t \in \left[t_0, t_0 + L\varepsilon^{-1}\right] \cap \mathbb{T}$ справедлива оцінка $\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant C\varepsilon$.

Далі в цьому ж підрозділі вводиться означення геометрично Δ-квазіперіодичної функції, з'ясовуються її важливі властивості, завдяки яким усереднену систему можна побудувати зручним способом:

$$\xi^\Delta = \varepsilon \widehat{X}(t,\xi), \quad \xi(t_0) = x_0, \tag{10}$$

де

$$\widehat{X}(t,x) = \left\{ \widehat{X}_i(x) = \frac{\gamma^i}{\delta^{(i+1)}(t_0) - \delta^{(i)}(t_0)} \int\limits_{t_0}^{\delta_+(T,t_0)} X(t,x)\Delta t, \right.$$
$$\left. \delta^{(i)}(t_0) \leqslant t < \delta^{(i+1)}(t_0), \quad i = 0,1,2,\dots \right\}. \tag{11}$$

Для задач (7), (10) також доведена теорема про лінійну відносно ε близькість розв'язків цих систем.

Теорема 2.7. *Нехай виконуються умови 2)–4) теореми 2.6 і, крім цього, кожна компонента вектор–функції $X(t,x)$ є геометрично Δ-квазіперіодичною функцією з періодом T та множником γ для будь-якого фіксованого x.*

Тоді для будь-якого $L > 0$ найдеться $\varepsilon_0\,(L) > 0$ таке, що для усіх $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ та $t \in \left[t_0, t_0 + L\varepsilon^{-1}\right] \cap \mathbb{T}$ справедлива нерівність $\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant C\varepsilon$, де через $x(t)$ та $\xi(t)$ позначено розв'язки задач Коші (7) та (10) відповідно.

В підрозділі 2.5 метод усереднення переноситься на нескінчений проміжок часу за умови, що розв'язок усередненої системи є асимптотично стійким.

Теорема 2.8. *Нехай $\mathbb{T}$ — необмежена зверху часова шкала, $Q = \Big\{t \in \mathbb{T}, x \in D\Big\}$, через $x(t)$ та $\xi(t)$ позначено розв'язки задач Коші (1) та (2) відповідно. Припустимо, що в області Q виконуються наступні умови:*

1) *функція $X(t,x)$ — rd-неперервна відносно t та задовольняє умову Ліпшиця відносно x з константою $\lambda > 0$;*
2) *границя (3) існує рівномірно відносно $x \in D$ та функція $\overline{X}(x)$ обмежена;*
3) *розв'язок $\xi(t)$ усередненої системи (2) з початковою умовою $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ визначений для усіх $t \in \mathbb{T}^\kappa$ та разом із своїм ν-околом лежить в D.*
4) *розв'язок $\xi(t)$ рівномірно асимптотично стійкий.*

Тоді для будь-якого $\eta : 0 < \eta < \nu$ знайдеться $\varepsilon_0 > 0$ таке, що $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ та $t \geqslant t_0$ буде виконуватися нерівність $\|x(t) - \xi(t)\| < \eta$.

Цей результат є аналогом теореми Банфі—Філатов для звичайних диференціальних рівнянь.

В **третьому розділі** розглядається задача оптимального керування системою
$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = \varepsilon\left[f(t,x(t)) + A(x(t))\varphi(t,u(t))\right] \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{12}$$

якість керування визначається термінальним функціоналом:
$$\min J\left[u\right] = \Phi\left(x(t_1)\right). \tag{13}$$

Тут $\mathbb{T}$ — часова шкала, $\sup\mathbb{T} = +\infty$, $t \in [t_0, t_1] \cap \mathbb{T}$, $x \in \mathbb{R}^n$, x^{Δ} — Δ-похідна, $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $f(t,x)$ — n-вимірна вектор-функція, $A(x)$ — $n \times m$ матриця, $\varphi(t,u)$ — m-вимірна рівномірно обмежена вектор-функція, $u(t) \in U$ — вектор керування, $U \in comp\,(R^r)$, $t_0 \geqslant \inf\mathbb{T}$, $\Phi(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Допустимими керуваннями в системі (12) вважаються функції $u(t)$, які є локально інтегрованими на шкалі при $t \geqslant t_0$ та приймають значення з множини $U \in comp\,(R^r)$. Розв'язком задачі (12)-(13) є пара (x^*, u^*), якщо u^* є допустимим керуванням та $J[u^*] = \inf\limits_{u \in U} J[u]$, а $x^*(t) = x(t, u^*(t))$ — траєкторія, що відповідає керуванню $u^*(t)$.

Для задачі (12)–(13) побудована відповідна їй усереднена задача

$$\begin{cases} \xi^{\Delta} = \varepsilon\left[\bar{f}\,(\xi) + A\,(\xi)\,v\right] \\ \xi(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{14}$$

з критерієм якості

$$\min \bar{J}\,[v] = \Phi\,(\xi(t_1))\,, \tag{15}$$

де

$$\begin{gathered} \bar{f}(x) = \lim_{\substack{T \to \infty \\ T \in \mathbb{T}}} \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{T} f(t,x)\Delta t, \\ v \in V, \quad V = co\left(\lim_{\substack{T \to \infty \\ T \in \mathbb{T}}} \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{T} \varphi(t,U)\Delta t\right). \end{gathered} \tag{16}$$

Останній інтеграл в (16) слід розуміти як аналог інтеграла Аумана на часовій шкалі, а збіжність відповідної границі розуміється у сенсі метрики Хаусдорфа.

У підрозділі 3.1 описується алгоритм відповідності для керувань вихідної та усередненої задач . Нехай спочатку задане допустиме керування $v(t) \in V$ усередненої задачі. Йому у відповідність ставиться керування $u(t) \in U$ вихідної задачі наступним чином:

a) обирається деяке δ–розбиття часової шкали $\mathbb{T}$, точки якого позначаються t_i;

b) обчислюються значення $v_i = \dfrac{1}{t_{i+1} - t_i} \displaystyle\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} v(s)\Delta s$, $i = 0, 1, 2, \ldots$;

c) будується керування $u(t) = \{u_i(t), t_i \leqslant t < t_{i+1}\}$, де $u_i(t)$ — розв'язок задачі мінімізації норми $\left\| \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(t,u(t))\Delta t - v_i \right\|$, тобто

$$u_i(t) = \arg\min_{u(t) \in U} \left\| \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(t,u(t))\Delta t - v_i \right\|.$$

Тепер нехай відоме керування $u(t) \in U$ вихідної задачі, йому ставиться у відповідність керування $v(t) \in V$ усередненої задачі наступним чином:

a) фіксується визначене вище δ–розбиття $\mathbb{T}$;

b) обчислюються значення $w_i = \dfrac{1}{t_{i+1} - t_i} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(t, u_i(t))\Delta t$, $i = 0, 1, 2, \ldots$;

c) побудується керування $v(t) = \{v_i, t_i \leqslant t < t_{i+1}\}$, де $v_i(t)$ знаходиться з умови $v_i = \operatorname*{argmin}_{v \in V} \|w_i - v\|$.

В параграфі 3.1.3 встановлюються умови близькості траєкторій вихідної та усередненої систем при застосуванні цього алгоритму.

Теорема 3.1. *Нехай в області* $Q = \{t \in \mathbb{T}, u \in U \subset comp(\mathbb{R}^r), x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ *виконані наступні умови:*

1) *функція* $f(t, x)$ *rd-неперервна за* t *і для неї виконані умові існування та єдиності розв'язку задачі Коші, причому для всіх* $(t, x) \in Q$ $\|f(t, x)\| \leqslant M$, $M > 0$, $f(t, x)$ *ліпшицева за* x *з константою* $\lambda > 0$*;*
2) *функція* $A(x)$ *задовольняє умову Ліпшиця за* x *з константою* λ_A *та обмежена константою* M*;*
3) *функція* $\varphi(t, u)$ *rd-неперервна за* t *і неперервна за* u*, обмежена константою* M*;*
4) *для будь-яких припустимих керувань* $v(t)$ *розв'язок* $\xi(t)$ *усередненої системи* (14) *з початковою умовою* $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ *разом із* ρ*-околом лежить в області* D*;*
5) *існує таке число* $\mu_0 > 0$*, що для будь-якого* $t \in \mathbb{T}^\kappa$ *або* $\mu(t) = 0$*, або* $\mu(t) > \mu_0$.

Тоді для будь-яких $0 < \eta \leqslant \rho$ *та* $L > 0$ *знайдуться такі додатні числа* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$ *та* $\delta_0 > 0$*, що для* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *та* $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1} \bigcap \mathbb{T}$ *справедливі наступні твердження:*

1. *Для будь-якого припустимого керування* $v(t)$ *системи* (14) *існує керування* $u(t)$ *системи* (12) *таке, що справедлива нерівність* $\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \eta$*, де* $x(t)$ *— розв'язок системи* (12)*, породжений керуванням* $u(t)$*, а* $\xi(t)$ *— розв'язок системи* (14)*, породжений керуванням* $v(t)$*.*
2. *Навпаки, для будь-якого припустимого керування* $u(t) \in U$ *системи* (12) *існує керування* $v(t)$ *системи* (14) *таке, що справедлива нерівність* $\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \eta$*.*

Зауважимо, що, користуючись теоремою 2.5, обмеження на зернистість $\mu(t)$ часової шкали можна зняти.

Підрозділ 3.2 містить головний результат — обґрунтування чисельно–асимптотичного методу розв'язання задач оптимального керування динамічними системами на часових шкалах, згідно з яким керування вихідної системи, побудоване за алгоритмом у відповідність до оптимального керування усередненої задачі, є асимптотично оптимальним.

Теорема 3.2. *Нехай в області* $Q = \{t \in \mathbb{T}, u \in U \subset comp(\mathbb{R}^r), x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ *виконані умови теореми 3.1 і, крім того, 1)* $\Phi(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— ліпшицева з константою Ліпшиця* λ_Φ*; 2) існує оптимальне керування* $u^*(t) \in U$ *задачі* (12),(13) *та оптимальне керування* $v^*(t) \in V$ *задачі* (14),(15)*. Тоді для будь-яких* $0 < \eta \leqslant \rho$ *та* $L > 0$ *знайдеться таке* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$*, що для* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *і* $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ *справедливі наступні нерівності:*

$$\left|J[u^*] - \bar{J}[v^*]\right| \leqslant \eta, \qquad J[u_{v^*}] - J[u^*] \leqslant \eta,$$

де u_{v^*} *— керування системи* (12)*, побудоване за алгоритмом і відповідає оптимальному керуванню* v^* *задачі* (14), (15)*.*

Теорема 3.2 дає обґрунтування для чисельно-асимптотичного методу розв'язання задачі оптимального керування (12), (13):

1. Для керованої системи (12) будуємо усереднену систему (14).
2. Для усередненої керованої системи будуємо множину припустимих керувань V за формулою (16).
3. Записуємо та розв'язуємо усереднену задачу оптимального керування (14), (15), знаходимо оптимальне керування для усередненої системи v^*.
4. За знайденим керуванням усередненої системи v^* за алгоритмом відповідності керувань відновлюємо асимптотично оптимальне керування вихідної системи u_{v^*}.
5. Будуємо траєкторію вихідної системи (12), що відповідає керуванню u_{v^*}.
6. Знаходимо значення функціоналу якості (13) для асимптотично оптимального керування u_{v^*}, яке, згідно з теоремою 3.2 відрізняється від оптимального значення на малу величину η.

У підрозділі 3.3 обґрунтовано чисельно–асимптотичний метод розв'язання задач оптимального керування динамічною системою на часовій шкалі з векторним критерієм якості.

У **розділі 4** побудовано динамічну модель розповсюдження інформації в соціальній мережі, засновану на принципі імітації найліпшої поведінки:

$$u^\Delta(t) = -Bu(t) + Ag(u(t)) + J, \tag{17}$$

де квадратна матриця A характеризує топологію зв'язків в соціальній мережі, діагональна матриця B описує інертність кожного з вузлів мережі при прийнятті нової інформації, вектор J характеризує динаміку вузлів мережі за відсутності будь-яких зв'язків, а вектор-функція $g(u)$ визначає інтенсивність реакції вузла на зміну стану його сусідів. Для динамічної системи (17) сформульовано умови існування єдиного стану рівноваги, умови його рівномірної асимптотичної стійкості та умови експоненційної стійкості.

ВИСНОВКИ

Для динамічних рівнянь на часових шкалах доведено аналог теореми Боголюбова, обґрунтовані схеми часткового усереднення. При досить загальних умовах отримана оцінка близькості розв'язків вихідної та усередненої систем, причому усереднена система має ту ж саму природу, що й вихідна та визначена на тій самій часовій шкалі. Отриманий більш сильний варіант теореми повного усереднення без умови на зернистість часової шкали.

Для Δ–періодичних систем із малим параметром отримана лінійна оцінка похибки методу усереднення. Введено клас геометрично Δ–квазіперіодичних динамічних систем на часових шкалах, для яких усереднену систему можна побудувати зручним способом, а близькість розв'язків вихідної та усередненої систем лінійно залежить від малого параметра. Доведено аналог теореми Банфі—Філатова про усереднення на нескінченному проміжку часу.

Для керованих динамічних систем на часових шкалах з малим параметром стандартного вигляду отримано обґрунтування методу усереднення на асимптотично великому проміжку часу. Запропоновано алгоритм відповідності керувань вихідної та усередненої систем.

Обґрунтовано чисельно–асимптотичний метод розв'язання задачі оптимального керування динамічною системою на часовій шкалі з термінальним та векторним критерієм якості.

Побудовано модель розповсюдження інформації в соціальній мережі, заснованої на принципі імітації найліпшої поведінки, для якої отримано умови існування єдиного стану рівноваги та умови різних типів його стійкості.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Огуленко А. П., Кичмаренко О. Д. Схема полного усреднения уравнений на временных шкалах / А. П. Огуленко, О. Д. Кичмаренко // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2012. – Т. 17, вип. 4 (16). – С. 67–77.
2. Ogulenko A. P. Averaging of the Problem of Optimal Control on Time Scales / A. P. Ogulenko, O. D. Kichmarenko // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 212, no. 3. – pp. 290–304. [doi: 10.1007/s10958-015-2665-1]
3. Kichmarenko O. D. Averaging of multicriteria control problems of systems on time scales / O. D. Kichmarenko, A. P. Ogulenko // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2017. – Vol. 56, No. 1. – pp. 33–43. [doi: 10.1134/S1064230716060071]
4. Ogulenko A. Asymptotical properties of social network dynamics on time scales / A. Ogulenko // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2017. – vol. 319C. – pp. 413-422 [doi: 10.1016/j.cam.2017.01.031]
5. Огуленко А. П. Частичное усреднение систем на временных шкалах / А. П. Огуленко // Дослідження в математиці і механіці. – 2017. – Т. 22, вип. 1 (29). – С. 32–45.
6. Огуленко А. П. Усреднение управляемых систем на временных шкалах / А. П. Огуленко, О. Д. Кичмаренко // Dynamical system modelling and stability investigation: XVI International Conference: Modelling and stability: Abstracts of conf. reports, May 29-31, 2013, Kiev, Ukraine. – Kiev, 2013. – P. 377.
7. Огуленко А. П. Усреднение динамических систем на временных шкалах / А. П. Огуленко // Краевые задачи, теория функций и их применения: Международная математическая конференция, посвященная 75-летию со дня рождения акад. А. М. Самойленко: материалы конф., 12–14 июня 2013 г., г. Славянск. – Славянск: Видавництво Маторіна Б. І., 2013. – С. 23–24.
8. Огуленко А. П. Схема полного усреднения для неуправляемых и управляемых систем на временных шкалах / А. П. Огуленко, О. Д. Кичмаренко // XXII International Conference “Problems of Decision Making under Uncertainties”: материалы конференции, 23–27 сентября 2013 г., Форос-Ялта, Украина. – С. 117.
9. Огуленко А. П. Усреднение задачи оптимального управления на временных шкалах / А. П. Огуленко // Динамические системы: устой-

чивость, управление, оптимизация: Международная конференция к 95-летию со дня рождения акад. Е. А. Барбашина: материалы конф., 1–5 октября 2013 г., г. Минск, Республика Беларусь. – Минск: Из-во БГУ, 2013. – С. 193–194.

10. Кац А. В., Огуленко А. П. Моделирование распространения инфекций на временных шкалах // Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС 2014: тези доповідей Дев'ятої міжнародної науково-практичної конференції, Київ-Жукін, 23-27 червня 2014 р. – Чернігів: ЧДІЕУ, 2014. – С. 48-50.
11. Ogulenko A. Dynamical games on time scales / A. Ogulenko, O. Kichmarenko // Game Theory and Management. Collected abstracts of papers presented on the Tenth International Conference Game Theory and Management, ed. L. A. Petrosyan, N. A. Zenkevich. – SPb.: Saint Petersburg State University, 2016. – P. 118–120.
12. Огуленко А. П. Усреднение динамических систем с медленными и быстрыми переменными на временных шкалах / А. П. Огуленко // Міжнародна літня математична школа пам'яті В. О. Плотнікова 12–17 вересня 2016 р., м. Одеса, Україна. – Одеса: Астропринт, 2016. – С. 48–49.
13. Огуленко О. П. Асимптотичні властивості динаміки на часових шкалах в соціальних мережах / О. П. Огуленко // Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" 19-21 травня 2017 р., м. Кам'янець-Подільський, Україна. – Кам'янець-Подільский:"Аксіома", 2017. – С. 93–95.
14. Огуленко О. П. Часткове усереднення динамічних систем на часових шкалах / О. П. Огуленко // Dynamical system modeling and stability investigation: XVIII International Conference: Abstract of Conf. reports, Kyiv, Ukraine, 24-26 May. – Київ: ДП Інформ.–аналіт. агентство, 2017. – С. 60.

АНОТАЦІЯ

Огуленко О. П. Асимптотичні методи дослідження динамічних систем на часових шкалах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико–математичних наук за спеціальністю 01.01.02 «Диференціальні рівняння». – Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню динамічних систем на часових шкалах без керування і з керуванням, зокрема обґрунтуванню

для таких систем можливості застосування різних схем методу усереднення та розробці на їх основі чисельно–асимптотичного методу розв'язання задач оптимального керування динамічними системами на часовій шкалі. Окремо досліджувались асимптотичні властивості розв'язків побудованої моделі реального процесу на часовій шкалі.

В роботі доведено теореми про можливість застосування методу усереднення для динамічних систем на часових шкалах загального вигляду, згідно з якими відповідні усереднені системи є автономними або частково усередненими. Ці результати є новими та вперше отриманими за умови, що усереднена система має ту ж природу, що і вихідна, та визначена на тій самій часовій шкалі. У тривіальних випадках, коли шкала співпадає з $\mathbb{R}$ або $\mathbb{Z}$, отримані результати збігаються з відомими результатами про усереднення диференціальних рівнянь на неперервному та дискретному часі. Для динамічних систем на часовій шкалі загального вигляду результати є новими та вперше отриманими за умови, що усереднена система має ту ж природу, що і вихідна, та визначена на тій самій часовій шкалі.

Принципове обмеження, яке виникає при обґрунтуванні методу усереднення для таких систем — це умова на функцію зернистості шкали: вона не повинна мати точок згущення. Але завдяки властивостям δ-розбиття часового проміжку, яке є ключовим інструментом в доведенні теорем, вдалося обійти це обмеження.

Для Δ-періодичних систем запропонована схема усереднення, яка дає лінійну відносно малого параметра оцінку близькості розв'язків вихідної та усередненої систем. Завдяки введенню поняття геометрично Δ-квазіперіодичної функції на шкалі описано клас динамічних систем, для яких застосування методу усереднення набуває особливо зручного вигляду, при цьому зберігається лінійна залежність похибки методу від малого параметра.

Використовуючи принцип індукції на часовій шкалі, для необмежених зверху шкал доведено аналог теореми Банфі—Філатова, яка стверджує, що близькість розв'язків вихідної та усередненої систем зберігається на нескінченно довгому проміжку часу, за умови, що розв'язок усередненої системи є асимптотично стійким.

Вперше для керованих динамічних систем на часовій шкалі з малим параметром обґрунтовано метод усереднення та запропоновано алгоритм відповідності керувань вихідної та усередненої систем. На його основі розроблений чисельно–асимптотичний метод розв'язання задачі оптимального керування динамічною системою на часовій шкалі з термінальним та векторним критерієм якості, згідно з яким керування вихідної системи, побудоване за алгоритмом відповідності до оптимального керування усередненої задачі є асимптотично оптимальним. Тобто значення критерія якості вихідної задачі оптимального керування на асимптотично оптимальному керуванні відрізняється від оптимального значення критерія якості на малу величину. Зауважимо, що розглянута постановка задачі керування дозволяє уникнути обмеження асимптотичної сталості функції керування, яке виникає, коли керування входить лінійно в праву частину системи.

В якості ілюстрації застосування асимптотичних методів до дослідження систем на часових шкалах, побудовано модель розповсюдження інформації в соціальній мережі, засновану на принципі імітації найліпшої поведінки. Для отриманої динамічної системи на часовій шкалі встановлені умови існування єдиного стану рівноваги, умови його рівномірної асимптотичної стійкості та умови експоненційної стійкості.

Дисертаційна робота суттєво розширює класи задач, для розв'язання яких можна застосувати метод усереднення.

Ключові слова: часова шкала, динамічна система, задача оптимального керування, малий параметр, метод усереднення, стійкість, Δ-періодична функція, термінальний критерій якості, векторний критерій якості, Парето–оптимальність.

SUMMARY

Ogulenko O. P. Asymptotical methods in the study of dynamic systems on time scales. – Manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.02 "Differential equations". – I. I. Mechnikov Odesa National University, Odesa, 2018.

The dissertation is devoted to the research of dynamic systems on time scales both with and without control, including substantiation for such systems the possibility of using different averaging schemes, construction the averaging method for controlled systems on time scales, construction the algorithm of correspondence between controls of the original and averaged systems, and finally, substantiation the numerical-asymptotic method for the solution of the optimal control problem for dynamic system on time scale. Besides this, for one real-world process model, the asymptotic properties of the solutions were investigated.

In the work, the theorems on the possibility of applying the averaging method for dynamical systems on time scales are proved. According to them,

the corresponding averaged system is autonomous or partially averaged. In trivial cases, when the time scale is $\mathbb{R}$ or $\mathbb{Z}$, obtained results coincide with the well-known ones for the differential equations on a continuous and discrete time. For dynamical systems on time scale, our results are new and first received, provided that the averaged system has the same nature as the original and is defined on the same time scale.

The main limitation that arises when substantiating the averaging method for such systems is the restriction on the graininess function: it should not have condensation points. By using the properties of δ-partition playing key role in the proves, we managed to avoid this restriction.

We established the stronger version of the averaging theorem for Δ-periodic systems with a small parameter and obtained a more accurate linear estimate for proximity between solutions of original and averaged systems. Moreover, the same result was obtained for dynamic systems with a geometric Δ-quasiperiodic right-hand side — a new concept introduced by us. It helped to determine a class of dynamical systems for which the usage of the averaging method takes a particularly comfortable look.

Using induction principle we proved an analogue of Banfi–Filatov theorem on averaging on an infinite interval, provided that the solution of an averaged system is asymptotically stable.

Controlled dynamic systems with a small parameter on the time scale, as well as optimal control problems with terminal and vector quality criteria, are considered. The justification of the averaging method on the asymptotically large period of time and the algorithm correspondence between the controls of the original and averaged systems are presented. The numerical-asymptotic method for solving optimal control problems for dynamic systems on time scales is given. The control of the original system, built in accordance with the algorithm in correspondence to the optimal control of the averaged problem is asymptotically optimal. That is, the value of the original quality criteria for the asymptotically optimal control is little different from the optimal value. It should be noted that considered formulation of problem avoids the restriction of asymptotic constancy for control function, provided that the dynamic system is linear in regard to control variable.

As an illustration of the application of asymptotic methods to the study of system on time scales, a model of information spreading in social networks was developed. The Imitation of Success principle was used as the base for this model. For corresponding dynamical system on time scale the conditions for the existence of a unique equilibrium state was obtained. Moreover, for the unique equilibrium state conditions of uniform asymptotic stability and exponentially asymptotic stability was obtained.

The dissertation essentially extends the classes of problems for which the averaging method can be applied.

Key words: time scale, dynamic system, optimal control problem, small parameter, averaging method, stability, Δ-periodic function, terminal criteria, vector criteria, Pareto–optimality.

АННОТАЦИЯ

Огуленко А. П. Асимптотические методы исследования динамических систем на временных шкалах. – Рукопись.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения». – Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, Одесса, 2018.

Диссертационная работа посвящена исследованию динамических систем на временных шкалах без управления и с управлением, в частности, обоснованию для таких систем возможности применения различных схем усреднения и разработке на их основе численно–асимптотического метода решения задач оптимального управления динамическими системами на временной шкале. Отдельно исследовались асимптотические свойства решений построенной модели реального процесса на временной шкале.

В работе доказаны теоремы о возможности применения метода усреднения для динамических систем на временных шкалах общего вида, согласно которым соответствующие усредненные системы являются автономными или частично усредненными. Эти результаты являются новыми и впервые получены при условии, что усредненная система имеет ту же природу, что и исходная, и определена на той же временной шкале. В тривиальных случаях, когда шкала совпадает с $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$, полученные результаты повторяют известные факты об усреднении дифференциальных уравнений, определенных на непрерывном и дискретном времени. Для динамических систем на временной шкалы общего вида результаты работы являются новыми и впервые получены при условии, что усредненная система имеет ту же природу, что и исходная, и определена на той же временной шкале.

Принципиальное ограничение, возникающее при обосновании метода усреднения для таких систем — это условие на функцию зернистости шкалы: она не должна иметь точек сгущения. Однако благодаря свойствам

δ-разбиения промежутка времени, являющегося ключевым инструментом в доказательствах теорем, это ограничение удалось обойти.

Для Δ-периодических систем предложена схема усреднения, дающая линейную относительно малого параметра оценку близости решения исходной и усредненной систем. Благодаря введению понятия Δ-квазипериодической функции на шкале описан класс динамических систем, для которых применение метода усреднения принимает особенно удобный вид, при этом сохраняется линейная зависимость погрешности метода от малого параметра.

Используя принцип индукции на временной шкале, для неограниченных сверху шкал доказан аналог теоремы Банфи—Филатова, которая утверждает, что близость решений исходной и усредненной систем сохраняется на бесконечно длинном промежутке времени при условии, что решение усредненной системы является асимптотически устойчивым.

Впервые для управляемых динамических систем на временных шкалах с малым параметром обоснован метод усреднения и предложен алгоритм соответствия управлений исходной и усредненной систем. На его основе разработан численно–асимптотический метод решения задачи оптимального управления динамической системой на временной шкале с терминальным и векторным критерием качества, в соответствии с которым управление исходной системы, отвечающее оптимальному управлению усредненной задачи является асимптотически оптимальным.

В работе построена теоретико-игровая модель распространения информации в социальной сети, иллюстрирующая применение асимптотических методов к исследованию систем на временных шкалах. Для динамической системы на временной шкале установлены условия существования единственного состояния равновесия, условия его равномерной асимптотической устойчивости и условия экспоненциальной устойчивости.

Диссертационная работа существенно расширяет классы задач, для решения которых может быть применен метод усреднения.

Ключевые слова: временная шкала, динамическая система, задача оптимального управления, малый параметр, метод усреднения, устойчивость, Δ-периодическая функция, терминальный критерий качества, векторный критерий качества, Парето–оптимальность.

Підписано до друку 03.05.2018.
Обсяг 0,9 авт. арк. Формат 60 × 84/16.
Тираж 100 прим. Папір офсетний. Зам. № 140.

Надруковано у друкарні видавництва «Астропринт»
(Свідоцтво ДК № 1373 від 28.05.2003 р.)
м. Одеса, вул. Разумовська, 21.
Тел./факс: (0482) 37–14–25, 37–24–26, 33–07–17.
www.astroprint.odessa.ua; www.fotoalbom-odessa.com