

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій  
Кафедра оптимального керування і економічної кібернетики

## Дипломна робота

бакалавра

на тему: «Дослідження економетричної моделі на гетероскедастичність»  
«Research of econometric model on heteroskedasticity»

Виконав: студент денної форми навчання  
спеціальності 113 Прикладна математика

Павлов Богдан Олександрович

Керівник

канд. фіз.-мат. наук, доц. Яровий А.Т. \_\_\_\_\_

Рецензент

канд. фіз.-мат. наук, доц. Страхов Є.М. \_\_\_\_\_

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ \_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ р.

Захищено на засіданні ЕК №\_\_

протокол № \_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ р.

Оцінка \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_  
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

Голова ЕК

\_\_\_\_\_  
(підпис) (прізвище, ініціали)

\_\_\_\_\_  
(підпис)

\_\_\_\_\_  
(прізвище, ініціали)

Одеса – 2022

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1 Основні передумови методу 1МНК.....	4
РОЗДІЛ 2 Автокореляція залишків.....	5
2.1 Причини виникнення.....	5
2.2 Наслідки.....	5
2.3 Тестування .....	5
2.4 Усунення.....	6
РОЗДІЛ 3 Гетероскедастичність залишків.....	7
3.1 Причини виникнення.....	7
3.2 Наслідки.....	7
3.3 Тестування .....	7
3.4 Усунення.....	10
РОЗДІЛ 4 Приклади.....	13
4.1 Двофакторні моделі.....	13
4.2 Трьохфакторні моделі.....	36
4.3 Чотирьохфакторні моделі.....	59
ВИСНОВКИ.....	84
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	85
ДОДАТОК А.....	86

## ВСТУП

У сучасних книгах по економетриці завжди розглядається автокореляція залишків першого порядку. Метою цієї дипломної роботи було дослідження впливу автокореляції залишків другого та четвертого порядків на усунення гетероскедастичності. Для дослідження цього питання було розглянуто наступні моделі:

1. У моделі присутня автокореляція другого порядку та гетероскедастичність залишків.
  - а. Не усуваємо автокореляцію залишків другого порядку та перевіряємо модель на наявність гетероскедастичності. У випадку наявності гетероскедастичності залишків усуваємо її.
  - б. Усуваємо автокореляцію другого порядку та перевіряємо отриману моделі на наявність гетероскедастичності залишків. У випадку її наявності – проведемо усунення.

Розглядаємо дві отримані моделі та перевіряємо, чи значимо вони відрізняються одна від одної.

2. За тим самим алгоритмом розглядаємо моделі з автокореляцією четвертого порядку.

Також під час дослідження було розглянуто моделі з різною кількістю регресорів – двофакторні, трьохфакторні та чотирьохфакторні моделі.

Для усунення автокореляції залишків другого та четвертого порядків було використано метод Кохрейна-Орката, для усунення гетероскедастичності залишків було використано два методи – двокрокова процедура Гріна(існуючий метод) та новий метод, описаний у розділі 3.

Для тестування моделей на наявність автокореляції та гетероскедастичності залишків було використано тести Бреуша-Годфрі та Гольдфельда-Квандта.

## РОЗДІЛ 1

## Основні передумови методу 1МНК

Виконання наступних умов є необхідним для можливості оцінювання коефіцієнтів регресійної моделі за допомогою методу 1МНК:

1. Відсутність систематичних помилок спостережень  $y_t$ , тобто математичне очікування  $u$  дорівнює нулеві:  $M(u) = 0$ .
2. Дисперсійно-коваріаційна матриця помилок  $u$  має вигляд:  $\Sigma_u = \sigma_u^{(2I)}$ , де  $\sigma_u^2$  — дисперсія залишків, а  $I$  — одинична матриця. Тобто, помилки повинні мати постійну дисперсію і бути вільними від кореляції:

$$\sigma_{u_i u_j} = \begin{cases} \sigma_u^2, & i = j, \\ 0, & i \neq j, i, j = 1, T. \end{cases}$$

3. Залишки  $u$  нормально розподілені:  $U \sim N(0, \sigma_u^2 I)$ .
4. Регресори вимірюються без помилок і утворюють лінійно незалежні вектори, тобто  $\text{rang } X = N$ .
5. Змінні  $x_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ) не корелюють з помилками  $u$ .

## РОЗДІЛ 2

### Автокореляція залишків

Причинами появи автокореляції залишків можуть бути:

1. Не включення до регресорів значущих чинників, які мають суттєвий вплив на залежну змінну.
2. Невдало підібрана специфікація моделі;
3. Похибки, отримані при дослідженні економічного процесу;
4. Циклічність та/або наявність лагу економічного процесу.
5. Зведення до лінійної форми початкової специфікації моделі.

Також варто зауважити, що автокореляція залишків більше впливає на модель у випадку малого інтервалу між спостереженнями. При збільшенні інтервалу, автокореляція залишків зникає.

**Наслідки автокореляції залишків.** У випадку використання методу 1МНК для оцінки коефіцієнтів регресійної моделі і наявності автокореляції залишків, можна спостерігати такі наслідки:

1. Оцінки  $\hat{\beta}$ , отримані методом 1МНК не будуть кращими, тобто теорема Гауса-Макрова не є дійсною.
2. елементи коваріаційної матриці  $\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}}$  тенденційно «вниз» зміщені, що негативно впливає на  $t$ - і  $F$ -тести, інтервали довіри і прогнозу.

**Тестування автокореляції залишків.** Для тестування автокореляції залишків першого та вищого порядку використовується тест серій (Бреуша-Годфрі). Ідея тесту полягає у оцінюванні за допомогою методу 1МНК коефіцієнта  $\rho$  у наступному рівнянні (у випадку перевірки наявності автокореляції залишків до четвертого порядку):

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T$$

Якщо існує автокореляції залишків першого порядку, то коефіцієнт  $\rho_1$  буде значимо відрізнятися від нуля, другого порядку -  $\rho_2$  тощо.

За допомогою включення у рівняння залишків з різними лагами можливо виявлення автокореляції вищих порядків.

Перевагою цього тесту у порівнянні з тестом Дарбіна-Уотсона є перевірка за допомогою статистичного критерію (не має зон невизначеності, на відміну

від тесту Дарбіна-Уотсона) та можливість виявити автокореляцію вищих порядків.

**Методи усунення автокореляції.** Друга передумова 1МНК має вигляд:  $\Sigma_u = \sigma_u^{(2I)}$ . Якщо ж ця умова не буде виконана, то дисперсійно-коваріаційна матриця буде мати наступний вигляд:  $\hat{\Sigma}_u = \sigma_u^2 \Omega$ . Якщо матриця  $\Omega$  нам відома, то параметри моделі можна оцінити за допомогою методу УМНК(узагальнений метод найменших квадратів). У випадку існування авторегресійного процесу першого порядку матриця  $\Omega$  буде мати вигляд:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{T-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3} & \rho^{T-4} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Узагальнена оцінка коефіцієнтів за допомогою методу УМНК(оцінка Ейткена) розраховується наступним чином:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} &= (\mathbf{X}^\top \Omega^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \Omega^{-1} \mathbf{Y} \\ \tilde{\Sigma}_{\tilde{\beta}} &= \tilde{\sigma}_u^2 (\mathbf{X}^\top \Omega^{-1} \mathbf{X})^{-1} \\ \tilde{\sigma}_u^2 &= \frac{\tilde{\mathbf{u}}^\top \Omega^{-1} \tilde{\mathbf{u}}}{T - N}, \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{y} - \mathbf{X} \tilde{\beta} \end{aligned}$$

Знак  $\tilde{\beta}$  означає оцінку методом УМНК.

Також для усунення автокореляції використовуються методи Кохрейна-Оркатти та Дарбіна.

## РОЗДІЛ 3

### Гетероскедастичність залишків

Явище, коли дисперсії залишків не є однаковими, називається гетероскедастичністю залишків, тобто  $\sigma_{u_i}^2 \neq \sigma_u^2$  хоча б для деяких  $i = 1, T$  і в цьому випадку дисперсійно-коваріаційна матриця буде мати наступний вигляд:

$$\Sigma_u = \sigma_u^2 \Omega = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_T^2 \end{pmatrix}$$

**Причинами виникнення гетероскедастичності залишків є:**

- 1) Неоднорідність досліджуваних об'єктів
- 2) Регресори та регресанд одночасно збільшуються/зменшуються або спостереження є членами часового ряду.
- 3) Похибку виміру та невключені змінні можуть впливати на залишок, що робить залишок залежним від значень регресору(при малих значеннях регресорів залишок є досить малим, а при значних – досить великим.
- 4) Невдало підібрана специфікація моделі.

Гетероскедастичність залишків має наступні **наслідки:**

- 1) Зменшення ефективності оцінок коефіцієнтів моделі
- 2) Стандартні помилки будуть заниженими, що призводить до неправильного уявлення про точність оцінок рівняння регресії, інтервали довіри, значущість оцінок.

**Тестування гетероскедастичності.** Розглянемо декілька загальноновживаних тестів на виявлення гетероскедастичності залишків моделі

$$y = \sum_{i=1}^N \beta_i x_i + u$$

Усі існуючі тести на гетероскедастичність залишків можна розбити на дві групи. У першу групу входять тести, які дозволяють визначити чи наявна або відсутня гетероскедастичність залишків у моделі, але їх використання не дає змоги дослідити кількісний характер залежності дисперсій помилок регресії від значень регресорів. До цієї групи відносяться тести Спірмена та Гольдфельда-Квандта.

Друга група тестів дозволяє дослідити кількісний характер залежності дисперсій помилок регресії від значень регресорів, тобто вони є достатніми умовами існування гетероскедастичності залишків. Ця група тестів допомагає в усуненні гетероскедастичності залишків. До цієї групи тестів відносяться тести Уайта, Парка та інші.

### Тест Гольдфельда — Квандта:

Цей тест є застосовним як до великих, так і до малих вибірок, у випадку справедливості припущення про пряму залежність дисперсії помилок регресії від величини деякої незалежної змінної. Також важливо, щоб помилки регресії були нормально розподіленими випадковими величинами.

Тест Гольдфельда – Квандта краще за все застосовувати для всіх змінних(окрім  $x_1$ ), але також можливе використання і лише для найвпливовішої змінної.

Розглянемо етапи тестування гетероскедастичності залишків за тестом Гольдфельда – Квандта:

1. Упорядкуємо початкові дані за ростом незалежної змінної  $x_p$ , відносно якої існує підозра на гетероскедастичність
2. Видаляємо  $m$  середніх спостережень ( $m = \frac{4}{15}T$ )
3. На основі значень кожної із двох груп спостережень оцінюємо коефіцієнти двох регресійних моделей за допомогою методу 1МНК і розраховуємо залишки для кожної із них:

$$D = [Y | X] = \begin{bmatrix} \frac{Y_1}{-} & \frac{X_1}{-} \\ \frac{Y_2}{-} & \frac{X_2}{-} \end{bmatrix} \begin{matrix} T_1 \times (N + 1) \\ T_2 \times (N + 1) \end{matrix}$$

$$T_1 + T_2 + m = T$$

де  $u_{kt}$ ,  $k = 1, 2$  — залишки  $k$ -ї групи спостережень;

4. розраховуємо  $F_{СТ}$ :

$$F_{СТ} = \frac{\frac{\sum_{t=1}^{T_2} u_{2t}^2}{(T_2 - N)}}{\frac{\sum_{t=1}^{T_1} u_{1t}^2}{(T_1 - N)}}$$

5. Якщо  $F_{СТ} > F_{КР} = F(\alpha, T_2 - N, T_1 - N)$ , то гетероскедастичність залишків існує з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$ .

### Тест рангової кореляції Спірмена:

Цей тест є застосовним як до великих, так і до малих вибірок, у випадку справедливості припущення про лінійну залежність дисперсії помилок регресії від величини деякої незалежної змінної. Якщо залежність не є лінійною, використовується тест Кендалла.

Алгоритм тесту рангової кореляції Спірмена:

1. Розраховуємо залишки регресійної моделі
- 
2. Ранжуємо  $|u_{pt}|$  та  $x_{pt}$ ,  $t = 1, T$  у зростаючому чи спадному порядку;
3. Розраховуємо коефіцієнт рангової кореляції Спірмена за формулою

$$r^c = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^T d_i^2}{T(T^2 - 1)}$$

де  $d_i$  — різниця між рангами, що приписуються  $|u_{pt}|$  і  $x_{pt}$

4. Перевіряємо значущість коефіцієнта Спірмена за критерієм Ст'юдента. Для цього розраховуємо  $t$ -статистику:

$$t_{CT} = \frac{|r^c| \sqrt{T-2}}{\sqrt{1 - (r^c)^2}}$$

5. якщо  $t_{CT} > t_{KP} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T-2\right)$ , то коефіцієнт Спірмена значимо відрізняється від нуля з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$ .

Відомо, що  $|r^c| \leq 1$ . Якщо  $|r^c| \geq 0.6$ , то вважаємо, що гетероскедастичність залишків існує.

Тепер розглянемо тести, які відносяться до другої групи та дозволяють виявити кількісний характер залежності дисперсій помилок регресії від значень регресорів і допомагають усунути гетероскедастичність залишків у випадку її наявності.

### Тест Парка:

1. за допомогою МНК оцінюємо коефіцієнти регресійної моделі і розраховуємо залишки  $u_t$ ;
2. будуємо допоміжну модель:

$$\ln|u| = b_1 z_1 + b_2 \ln|z_2| + \varepsilon$$

де  $z_{1t} \equiv 1$ ,  $t = 1, T$ , а  $z_2$  — незалежна змінна, відносно якої ми вважаємо, що існує гетероскедастичність залишків.

3. За допомогою методу 1МНК оцінюємо коефіцієнти  $b_1$  і  $b_2$ ;
4. Перевіряємо на значущість коефіцієнти  $b_1$  і  $b_2$  за допомогою t-критерію Ст'юдента.

Якщо  $b_1$  і  $b_2$  значимо відрізняються від нуля, то існує змішана гетероскедастичність залишків, а якщо  $b_1$  незначимо відрізняється від нуля, а  $b_2$  значимо відрізняється від нуля, то існує чиста гетероскедастичність залишків. Коли ж  $b_1$  і  $b_2$  незначимо відрізняються від нуля, то залежності не існує між залишками і регресором  $x_p$ , і тому необхідно шукати інший тип залежності.

### Тест Уайта:

Будемо вважати, що дисперсія помилок регресії є одна і та ж функція від спостережених значень регресорів:  $\sigma_t^2 = f(x_t), t = 1, T$ .

У цьому тесті пропонується оцінювати функцію залежності дисперсії помилок регресії від значень регресорів за допомогою квадратів залишків:

$$u_t^2 = f(x_t) + \varepsilon_t, t = 1, T$$

де  $\varepsilon_t$  — випадковий член. Якщо побудована регресія значимо відрізняється від нуля, то гетероскедастичність залишків існує.

**Методи усунення гетероскедастичності.** Будемо вважати, що автокореляція залишків у моделі відсутня. Якщо за будь-яким тестом було виявлено наявність гетероскедастичності залишків, то перетворюємо початкові дані. Потім по новим даним будемо методом 1МНК модель, у якій відсутня гетероскедастичність залишків. Перетворення первинної моделі залежить від типу виявленої залежності між дисперсією залишків та значеннями регресорів.

Матриця перетворення  $T^H$  при наявності гетероскедастичності залишків має вигляд:

$$T^H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_{T-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sigma_T} \end{pmatrix},$$

де  $\sigma_i, i = 1, T$  - стандартні відхилення залишків. Величини  $\sigma_i$  можуть бути невідомі. Розрахувати матрицю  $T^H$  можна різними способами:

- Не використовуючи статистичну оцінку;
- визначення  $T^H$  за принципом «гетероскедастичність між гомоскедастичними групами»;
- $\sigma_i$  або  $\sigma_i^2$  можна отримати як оцінки  $|u_i|$  і  $u_i^2$  у регресійних моделях вище зазначених методів;
- Використання методу УМНК. Метод, що використовує матрицю  $T^H$ , називають зваженим методом найменших квадратів;

1) **Визначення  $T^H$  не використовуючи статистичну оцінку.**

Якщо відомо,  $\sigma_i = ax_{ki}$  або  $\sigma_i^2 = ax_{ki}$ , то елементи матриці  $T^H$  такі:

$$\frac{1}{ax_{ki}} \text{ або } \frac{1}{\sqrt{ax_{ki}}}, i = 1, T.$$

2) **Оцінка  $T^H$  за принципом «гетероскедастичність між гомоскедастичними групами».**

У більшості випадків для визначення діагональних елементів матриці  $T^H$  недостатньо зовнішньої інформації і тоді визначати діагональні елементи не можливо без статистичної оцінки. Тому діагональні елементи повинні бути статистично оцінені. Оцінка відбувається за допомогою розгляду гетероскедастичності між гомоскедастичними групами.

3) Якщо ж значення  $\sigma_i$  не відомі, можливо використання наступного алгоритму:

- Оцінюємо регресійну модель за допомогою методу 1МНК і розраховуємо залишки;
- будуємо одну з моделей зазначених вище (тест Уайта, Парка) розраховуємо  $|\hat{u}_i|$  або  $\hat{u}_i^2, i = 1, T$ , ці оцінки і будуть оцінками  $\sigma_i$  або  $\sigma_i^2$ ,
- $i = 1, T$

- 4) У випадку існування гетероскедастичності залишків, матриця  $\Sigma_u$  має наступний вигляд

$$\Sigma_u = \sigma_u^2 \mathbf{\Omega} = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_T^2 \end{pmatrix}$$

Якщо  $\sigma_i^2$  відомі, то можна скористатися методом УМН, наприклад  $\tilde{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{Y}$ .

**Новий метод усунення гетероскедастичності залишків.** Для проведення дослідження також було використано новий спосіб усунення гетероскедастичності залишків, який дозволяє не витратити час на пошук характеру зв'язку дисперсій помилок регресії від значень регресорів та, як наслідок, зменшити кількість ітерації.

Спочатку знайдемо матрицю:

$$N = X(X^T X)^{-1} X^T$$

Далі ми можемо оцінити  $\sigma_{ii}$  за наступною формулою:

$$\sigma_{ii} = \sqrt{(1 - N_{ii}) * u_i^2}$$

## РОЗДІЛ 4

### Двофакторні моделі

Почнемо дослідження з розгляду двофакторних моделей.

Нехай маємо модель з автокореляцією другого порядку та гетероскедастичністю. Розглянемо два випадки: усунення автокореляції та гетероскедастичності; усунення тільки гетероскедастичності. Далі порівняємо отримані моделі та перевіримо чи значимо відрізняються ці моделі одна від одної.

При дослідженні цих моделей будемо використовувати два методи усунення гетероскедастичності залишків: двокрокову процедуру Гріна(існуючий метод) та новий метод, описаний у розділі 3.

*Приклад 1:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК –  $\hat{y} = 0.2011 * x_1 + 0.2887 * x_2$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = 0.085 * u_{t-1} - 0.37 * u_{t-2} + 0.072 * u_{t-3} - -0.003 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.566 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 2.49 > t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 0.48 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 0.019 < t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_2$ , у моделі присутня автокореляція залишків другого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфелда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T$ ,  $T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 8.4582$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.1} = 0.2733 * x_1 + 0.2664 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.2} = 0.2806 * x_1 + 0.2635 * x_2$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = 0.1952 * x_1 + 0.2817 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.1} = 0.2737 * x_1 + 0.3019 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.2} = 0.2742 * x_1 + 0.302 * x_2$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.2733 * x_1 + 0.2664 * x_2$$

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.2806 * x_1 + 0.2635 * x_2$$

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.2737 * x_1 + 0.3019 * x_2$$

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.2742 * x_1 + 0.302 * x_2$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0, H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{KP} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 48) = 2.3139$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.28, 0.3]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.01, 0.019]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [0.016, 3.66]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.25, 4.09]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 2:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК –  $\hat{y} = 0.2855 * x_1 + 0.2335 * x_2$   
За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = -0.1369 * u_{t-1} + 0.37 * u_{t-2} + 0.26 * u_{t-3} + 0.002 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.87 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 2.38 > t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 1.68 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 0.012 < t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_2$ , у моделі присутня автокореляція залишків другого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T -$  *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 4.38$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.1} = 0.3278 * x_1 + 0.2318 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.2} = 0.3283 * x_1 + 0.2314 * x_2$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\hat{y} = 0.2883 * x_1 + 0.2417 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.1} = 0.3046 * x_1 + 0.2354 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.2} = 0.3047 * x_1 + 0.2354 * x_2$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.3278 * x_1 + 0.2318 * x_2$$

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.3283 * x_1 + 0.2314 * x_2$$

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.3046 * x_1 + 0.2354 * x_2$$

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.3047 * x_1 + 0.2354 * x_2$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0, H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{KP} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 48) = 2.3139$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.028, 0.061]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.004, 0.007]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [1.26, 0.63]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [1.28, 0.72]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 3:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК –  $\hat{y} = 0.3186 * x_1 + 0.2733 * x_2$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = -0.007 * u_{t-1} + 0.364 * u_{t-2} + 0.014 * u_{t-3} - 0.03 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.047 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 2.39 > t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 0.092 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 0.19 < t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_2$ , у моделі присутня автокореляція залишків другого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 2.62$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.1} = 0.3619 * x_1 + 0.2499 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.2} = 0.3644 * x_1 + 0.2487 * x_2$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\hat{y} = 0.3079 * x_1 + 0.2742 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\hat{y}_{2.1} = 0.2932 * x_1 + 0.2775 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\hat{y}_{2.2} = 0.2921 * x_1 + 0.276 * x_2$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\hat{y}_{1.1} = 0.3619 * x_1 + 0.2499 * x_2$$

$$\hat{y}_{1.2} = 0.3644 * x_1 + 0.2487 * x_2$$

$$\hat{y}_{2.1} = 0.2932 * x_1 + 0.2775 * x_2$$

$$\hat{y}_{2.2} = 0.2921 * x_1 + 0.276 * x_2$$

У моделях  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\hat{y}_{2.1}$  та  $\hat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0, H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{KP} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 48) = 2.3139$$

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.09, 0.12]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{2.1}$  та  $\hat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.08, 0.084]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [2.78, 2.65]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [3.09, 3.02]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 4:*

Дані до прикладу знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК –  $\hat{y} = 0.5831 * x_1 + 0.269 * x_2$   
За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = -0.054 * u_{t-1} + 0.47 * u_{t-2} + 0.029 * u_{t-3} - 0.27 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.36 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 3.19 > t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 0.19 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 1.76 < t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_2$ , у моделі присутня автокореляція залишків другого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 4.78$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.1} = 0.6207 * x_1 + 0.276 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.2} = 0.6174 * x_1 + 0.275 * x_2$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = 0.5898 * x_1 + 0.267 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.1} = 0.587 * x_1 + 0.2617 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.2} = 0.5868 * x_1 + 0.2611 * x_2$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.6207 * x_1 + 0.276 * x_2$$

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.6174 * x_1 + 0.275 * x_2$$

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.587 * x_1 + 0.2617 * x_2$$

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.5868 * x_1 + 0.2611 * x_2$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0, H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{kr} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 48) = 2.3139$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.15, 0.167]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.032, 0.097]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [1.61, 2.81]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [1.46, 2.76]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 5:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК –  $\hat{y} = 0.0933 * x_1 + 0.3891 * x_2$   
За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = 0.1624 * u_{t-1} - 0.57 * u_{t-2} + 0.059 * u_{t-3} - 0.14 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 1.07 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 3.75 > t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 0.39 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 0.96 < t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_2$ , у моделі присутня автокореляція залишків другого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  – number of observations середніх значень:

$$F_{ct} = 6.21$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.1} = 0.1272 * x_1 + 0.3953 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.2} = 0.1239 * x_1 + 0.3943 * x_2$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = 0.0607 * x_1 + 0.3497 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.1} = 0.0757 * x_1 + 0.3563 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.2} = 0.0755 * x_1 + 0.3548 * x_2$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.1272 * x_1 + 0.3953 * x_2$$

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.1239 * x_1 + 0.3943 * x_2$$

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.0757 * x_1 + 0.3563 * x_2$$

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.0755 * x_1 + 0.3548 * x_2$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0, H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{kr} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 48) = 2.3139$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.1049, 0.1079]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.006, 0.1539]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [1.64, 4.248]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [1.48, 4.145]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо тепер такі самі регресійні моделі, але вже з автокореляцією залишків четвертого порядку.

*Приклад б:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК –  $\widehat{y} = 0.341 * x_1 + 0.3934 * x_2$   
За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = -0.044 * u_{t-1} + 0.154 * u_{t-2} + 0.162 * u_{t-3} + 0.3589 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\widehat{\beta}_k}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.29 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 1.06 < t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 1.12 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 2.42 > t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_4$ , у моделі присутня автокореляція залишків четвертого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T$ ,  $T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 4.59$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.1} = 0.3806 * x_1 + 0.3864 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.2} = 0.3868 * x_1 + 0.3873 * x_2$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = 0.2416 * x_1 + 0.4018 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.1} = 0.1968 * x_1 + 0.408 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.2} = 0.2702 * x_1 + 0.394 * x_2$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.3806 * x_1 + 0.3864 * x_2$$

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.3868 * x_1 + 0.3873 * x_2$$

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.1968 * x_1 + 0.408 * x_2$$

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.2702 * x_1 + 0.394 * x_2$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0, H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{KP} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 48) = 2.3139$$

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.22, 0.2715]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{2.1}$  та  $\hat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [1.58, 1.61]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [6.64, 2.1]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.2}$  та  $\hat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [4.32, 1.09]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 7:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК –  $\hat{y} = 0.162 * x_1 + 0.2621 * x_2$   
За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = 0.3195 * u_{t-1} - 0.105 * u_{t-2} + 0.314 * u_{t-3} - 0.4019 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KP}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 2.21 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 0.73 < t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 2.13 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 2.67 > t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_4$ , у моделі присутня автокореляція залишків четвертого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 4.41$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.1} = 0.1676 * x_1 + 0.2627 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.2} = 0.1724 * x_1 + 0.2638 * x_2$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = 0.1604 * x_1 + 0.2552 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.1} = 0.19468 * x_1 + 0.2511 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.2} = 0.187 * x_1 + 0.249 * x_2$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.1676 * x_1 + 0.2627 * x_2$$

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.1724 * x_1 + 0.2638 * x_2$$

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.19468 * x_1 + 0.2511 * x_2$$

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.187 * x_1 + 0.249 * x_2$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0, H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{KP} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 48) = 2.3139$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.118, 0.139]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.1241, 0.1601]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [0.66, 1.45]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.35, 1.78]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 8:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК –  $\hat{y} = -0.1265 * x_1 + 0.2675 * x_2$   
За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = -0.107 * u_{t-1} + 0.184 * u_{t-2} - 0.2007 * u_{t-3} - 0.4147 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.75 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 1.28 < t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 1.39 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 2.77 > t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_4$ , у моделі присутня автокореляція залишків четвертого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T -$  *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 2.65$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.1} = -0.1264 * x_1 + 0.2584 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.2} = -0.1254 * x_1 + 0.266 * x_2$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = -0.1208 * x_1 + 0.2669 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.1} = -0.1264 * x_1 + 0.2584 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.2} = -0.118 * x_1 + 0.2652 * x_2$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = -0.1264 * x_1 + 0.2584 * x_2$$

$$\widehat{y}_{1.2} = -0.1254 * x_1 + 0.266 * x_2$$

$$\widehat{y}_{2.1} = -0.1264 * x_1 + 0.2584 * x_2$$

$$\widehat{y}_{2.2} = -0.118 * x_1 + 0.2652 * x_2$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0, H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{KP} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 48) = 2.3139$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.63, 1.28]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.023, 0.1183]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [5.43, 1.12]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [4.16, 0.299]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 9:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК –  $\hat{y} = 0.0833 * x_1 + 0.2708 * x_2$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = 0.1656 * u_{t-1} + 0.1626 * u_{t-2} + 0.0365 * u_{t-3} - 0.3705 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KP}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 1.13 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 1.09 < t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 0.2415 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 2.49 > t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_4$ , у моделі присутня автокореляція залишків четвертого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 2.96$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.1} = 0.1251 * x_1 + 0.2599 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.2} = 0.063 * x_1 + 0.2764 * x_2$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\hat{y} = 0.1204 * x_1 + 0.2846 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\hat{y}_{2.1} = 0.163 * x_1 + 0.2945 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\hat{y}_{2.2} = 0.1629 * x_1 + 0.2923 * x_2$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\hat{y}_{1.1} = 0.1251 * x_1 + 0.2599 * x_2$$

$$\hat{y}_{1.2} = 0.063 * x_1 + 0.2764 * x_2$$

$$\hat{y}_{2.1} = 0.163 * x_1 + 0.2945 * x_2$$

$$\hat{y}_{2.2} = 0.1629 * x_1 + 0.2923 * x_2$$

У моделях  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\hat{y}_{2.1}$  та  $\hat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0$ ,  $H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{KP} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 48) = 2.3139$$

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [2.11, 2.114]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{2.1}$  та  $\hat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.005, 0.2793]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [1.3, 4.43]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.2}$  та  $\hat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [3.71, 2.2173]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 10:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК –  $\hat{y} = -0.0605 * x_1 + 0.2602 * x_2$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = 0.1035 * u_{t-1} - 0.1899 * u_{t-2} + 0.1947 * u_{t-3} - 0.4260 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.71 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 1.27 < t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 1.3 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 2.95 > t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_4$ , у моделі присутня автокореляція залишків четвертого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 2.6$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.1} = -0.0534 * x_1 + 0.2465 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.2} = -0.049 * x_1 + 0.2388 * x_2$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = -0.0523 * x_1 + 0.2767 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.1} = -0.0525 * x_1 + 0.277 * x_2$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.2} = -0.0451 * x_1 + 0.2756 * x_2$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = -0.0534 * x_1 + 0.2465 * x_2$$

$$\widehat{y}_{1.2} = -0.049 * x_1 + 0.2388 * x_2$$

$$\widehat{y}_{2.1} = -0.0525 * x_1 + 0.277 * x_2$$

$$\widehat{y}_{2.2} = -0.0451 * x_1 + 0.2756 * x_2$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0$ ,  $H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{kr} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 48) = 2.3139$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.11, 0.79]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.71, 0.624]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [0.02, 3.2]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.105, 4.1763]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

## ТРЬОХФАКТОРНІ МОДЕЛІ

Перейдемо до дослідження трьохфакторних моделей.

Нехай маємо модель з автокореляцією другого порядку та гетероскедастичністю. Розглянемо два випадки: усунення автокореляції та гетероскедастичності; усунення тільки гетероскедастичності. Далі порівняємо отримані моделі та перевіримо чи значимо відрізняються ці моделі одна від одної.

При дослідженні цих моделей будемо використовувати два методи усунення гетероскедастичності залишків: двокрокову процедуру Гріна(існуючий метод) та новий метод, описаний у розділі 3.

*Приклад 11:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\hat{y} = 0.2118 * x_1 + 0.3347 * x_2 + 0.1471 * x_3$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = -0.1786 * u_{t-1} - 0.5829 * u_{t-2} - 0.1735 * u_{t-3} - 0.2794 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 1.19 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 3.89 > t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 1.141 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 1.842 < t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_2$ , у моделі присутня автокореляція залишків другого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  — *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 3.48$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.1} = 0.2144 * x_1 + 0.3387 * x_2 + 0.1449 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.2} = 0.2152 * x_1 + 0.3396 * x_2 + 0.1442 * x_3$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = 0.2416 * x_1 + 0.3202 * x_2 + 0.159 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.1} = 0.2671 * x_1 + 0.3075 * x_2 + 0.169 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.2} = 0.2648 * x_1 + 0.3114 * x_2 + 0.167 * x_3$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.2144 * x_1 + 0.3387 * x_2 + 0.1449 * x_3$$

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.2152 * x_1 + 0.3396 * x_2 + 0.1442 * x_3$$

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.2671 * x_1 + 0.3075 * x_2 + 0.169 * x_3$$

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.2648 * x_1 + 0.3114 * x_2 + 0.167 * x_3$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0$ ,  $H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\widehat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{KP} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 47) = 2.3155$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.1319, 0.13, 0.0833]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.2389, 0.7659, 0.6263]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [8.53, 4.71, 3.03]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [8.87, 4.72, 3.08]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 12:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\widehat{y} = 0.1008 * x_1 + 0.2569 * x_2 + 0.0613 * x_3$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = 0.2214 * u_{t-1} - 0.3643 * u_{t-2} + 0.19 * u_{t-3} + 0.025 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\widehat{\beta}_k}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KP}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 1.49 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 2.4 > t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 0.19 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 0.0254 < t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_2$ , у моделі присутня автокореляція залишків другого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 2.78$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.1} = 0.1247 * x_1 + 0.2634 * x_2 + 0.0611 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.2} = 0.1241 * x_1 + 0.2628 * x_2 + 0.0566 * x_3$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = 0.1126 * x_1 + 0.2555 * x_2 + 0.0918 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.1} = 0.1113 * x_1 + 0.2545 * x_2 + 0.098 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.2} = 0.1139 * x_1 + 0.2543 * x_2 + 0.1036 * x_3$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.1247 * x_1 + 0.2634 * x_2 + 0.0611 * x_3$$

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.1241 * x_1 + 0.2628 * x_2 + 0.0566 * x_3$$

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.1113 * x_1 + 0.2545 * x_2 + 0.098 * x_3$$

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.1139 * x_1 + 0.2543 * x_2 + 0.1036 * x_3$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0, H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{KP} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 47) = 2.3155$$

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.05, 0.105, 0.69]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{2.1}$  та  $\hat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.44, 0.025, 0.77]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [1.15, 1.42, 5.66]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.2}$  та  $\hat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.72, 1.24, 8.27]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 13:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\hat{y} = 0.1921 * x_1 + 0.2990 * x_2 + 0.1156 * x_3$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = 0.1226 * u_{t-1} - 0.4118 * u_{t-2} - 0.1411 * u_{t-3} + 0.2342 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KP}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.78 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 2.59 > t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 0.85 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 1.38 < t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_2$ , у моделі присутня автокореляція залишків другого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 6.53$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\hat{y}_{1.1} = 0.1643 * x_1 + 0.2902 * x_2 + 0.1229 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\hat{y}_{1.2} = 0.1636 * x_1 + 0.2902 * x_2 + 0.1222 * x_3$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\hat{y} = 0.1588 * x_1 + 0.3062 * x_2 + 0.1018 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\hat{y}_{2.1} = 0.1695 * x_1 + 0.3124 * x_2 + 0.097 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\hat{y}_{2.2} = 0.1695 * x_1 + 0.3126 * x_2 + 0.0918 * x_3$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\hat{y}_{1.1} = 0.1643 * x_1 + 0.2902 * x_2 + 0.1229 * x_3$$

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.1636 * x_1 + 0.2902 * x_2 + 0.1222 * x_3$$

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.1695 * x_1 + 0.3124 * x_2 + 0.097 * x_3$$

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.1695 * x_1 + 0.3126 * x_2 + 0.0918 * x_3$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0$ ,  $H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{KP} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 47) = 2.3155$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.05, 0.0033, 0.1024]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.001, 0.019, 0.63]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [0.28, 4.84, 3.62]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.3, 5.09, 4.64]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 14:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\hat{y} = 0.2799 * x_1 + 0.293 * x_2 + 0.063 * x_3$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = 0.0155 * u_{t-1} + 0.459 * u_{t-2} - 0.0915 * u_{t-3} - 0.1512 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.1018 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 2.96 > t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 0.596 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 0.9876 < t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_2$ , у моделі присутня автокореляція залишків другого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 3.53$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.1} = 0.2656 * x_1 + 0.2892 * x_2 + 0.066 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.2} = 0.2634 * x_1 + 0.2916 * x_2 + 0.0645 * x_3$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\hat{y} = 0.4005 * x_1 + 0.2735 * x_2 + 0.1161 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\hat{y}_{2.1} = 0.4479 * x_1 + 0.2707 * x_2 + 0.1198 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\hat{y}_{2.2} = 0.4545 * x_1 + 0.2716 * x_2 + 0.1205 * x_3$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\hat{y}_{1.1} = 0.2656 * x_1 + 0.2892 * x_2 + 0.066 * x_3$$

$$\hat{y}_{1.2} = 0.2634 * x_1 + 0.2916 * x_2 + 0.0645 * x_3$$

$$\hat{y}_{2.1} = 0.4479 * x_1 + 0.2707 * x_2 + 0.1198 * x_3$$

$$\hat{y}_{2.2} = 0.4545 * x_1 + 0.2716 * x_2 + 0.1205 * x_3$$

У моделях  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\hat{y}_{2.1}$  та  $\hat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0, H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{KP} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 47) = 2.3155$$

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.1337, 0.406, 0.2528]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{2.1}$  та  $\hat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.19, 0.15, 0.21]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [10.95, 3.13, 9.19]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.2}$  та  $\hat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [8.45, 2.47, 6.99]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 15:*

Дані до прикладу знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\hat{y} = 0.1185 * x_1 + 0.4144 * x_2 + 0.1428 * x_3$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = 0.1394 * u_{t-1} + 0.46 * u_{t-2} + 0.006 * u_{t-3} - 0.2466 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.91 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 3.006 > t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 0.0438 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 1.57 < t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_2$ , у моделі присутня автокореляція залишків другого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 3.39$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.1} = 0.0885 * x_1 + 0.4072 * x_2 + 0.1342 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.2} = 0.0587 * x_1 + 0.4038 * x_2 + 0.1257 * x_3$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = 0.0712 * x_1 + 0.424 * x_2 + 0.1439 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.1} = 0.0353 * x_1 + 0.4241 * x_2 + 0.1281 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.2} = 0.065 * x_1 + 0.3858 * x_2 + 0.1707 * x_3$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.0885 * x_1 + 0.4072 * x_2 + 0.1342 * x_3$$

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.0587 * x_1 + 0.4038 * x_2 + 0.1257 * x_3$$

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.0353 * x_1 + 0.4241 * x_2 + 0.1281 * x_3$$

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.065 * x_1 + 0.3858 * x_2 + 0.1707 * x_3$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0$ ,  $H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{kr} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 47) = 2.3155$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.685, 0.269, 0.62]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.84, 3.49, 3.51]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [1.22, 1.36, 0.44]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.1, 1.66, 2.67]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Тепер розглянемо трьохфакторні моделі з автокореляцією залишків четвертого порядку.

*Приклад 16:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\hat{y} = 0.1755 * x_1 + 0.4243 * x_2 + 0.1086 * x_3$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = -0.1617 * u_{t-1} - 0.2317 * u_{t-2} - 0.1417 * u_{t-3} - 0.4496 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KP}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 1.14 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 1.63 < t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 1.01 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 3.17 > t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_4$ , у моделі присутня автокореляція залишків четвертого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T$ ,  $T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 2.61$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.1} = 0.1887 * x_1 + 0.4266 * x_2 + 0.1101 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.2} = 0.177 * x_1 + 0.4256 * x_2 + 0.1175 * x_3$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = 0.1217 * x_1 + 0.412 * x_2 + 0.0924 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.1} = 0.1192 * x_1 + 0.4125 * x_2 + 0.1011 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.2} = 0.1222 * x_1 + 0.4136 * x_2 + 0.1197 * x_3$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.1887 * x_1 + 0.4266 * x_2 + 0.1101 * x_3$$

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.177 * x_1 + 0.4256 * x_2 + 0.1175 * x_3$$

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.1192 * x_1 + 0.4125 * x_2 + 0.1011 * x_3$$

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.1222 * x_1 + 0.4136 * x_2 + 0.1197 * x_3$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0$ ,  $H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{KP} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 47) = 2.3155$$

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.696, 0.127, 0.79]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{2.1}$  та  $\hat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.54, 0.3, 2.41]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [4.12, 1.8, 0.96]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.2}$  та  $\hat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [2.99, 1.36, 0.21]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 17:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\hat{y} = -0.2514 * x_1 + 0.339 * x_2 + 0.0601 * x_3$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = 0.025 * u_{t-1} - 0.0189 * u_{t-2} + 0.1575 * u_{t-3} - 0.4025 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KP}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.18 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 0.13 < t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 1.14 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 2.73 > t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_4$ , у моделі присутня автокореляція залишків четвертого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 3.59$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.1} = -0.2587 * x_1 + 0.3311 * x_2 + 0.0563 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.2} = -0.2594 * x_1 + 0.3312 * x_2 + 0.0567 * x_3$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = -0.3313 * x_1 + 0.329 * x_2 + 0.041 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.1} = -0.354 * x_1 + 0.3373 * x_2 + 0.0232 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.2} = -0.353 * x_1 + 0.3355 * x_2 + 0.0246 * x_3$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = -0.2587 * x_1 + 0.3311 * x_2 + 0.0563 * x_3$$

$$\widehat{y}_{1.2} = -0.2594 * x_1 + 0.3312 * x_2 + 0.0567 * x_3$$

$$\widehat{y}_{2.1} = -0.354 * x_1 + 0.3373 * x_2 + 0.0232 * x_3$$

$$\widehat{y}_{2.2} = -0.353 * x_1 + 0.3355 * x_2 + 0.0246 * x_3$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0, H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{kr} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 47) = 2.3155$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.032, 0.008, 0.049]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.077, 0.216, 0.164]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [4.308, 0.55, 3.69]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [3.87, 0.375, 3.375]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

### Приклад 18:

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\hat{y} = 0.0601 * x_1 + 0.4 * x_2 + 0.1803 * x_3$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = -0.0789 * u_{t-1} + 0.0186 * u_{t-2} + 0.1495 * u_{t-3} - 0.4739 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.56 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 0.13 < t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 1.02 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 3.26 > t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_4$ , у моделі присутня автокореляція залишків четвертого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T -$  *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 4.2$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.1} = -0.0119 * x_1 + 0.3857 * x_2 + 0.1782 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.2} = -0.001 * x_1 + 0.3891 * x_2 + 0.1777 * x_3$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = -0.0966 * x_1 + 0.3627 * x_2 + 0.126 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.1} = -0.1003 * x_1 + 0.356 * x_2 + 0.1171 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  
 $\widehat{y}_{2.2} = -0.0983 * x_1 + 0.3544 * x_2 + 0.1168 * x_3$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = -0.0119 * x_1 + 0.3857 * x_2 + 0.1782 * x_3$$

$$\widehat{y}_{1.2} = -0.001 * x_1 + 0.3891 * x_2 + 0.1777 * x_3$$

$$\widehat{y}_{2.1} = -0.1003 * x_1 + 0.356 * x_2 + 0.1171 * x_3$$

$$\widehat{y}_{2.2} = -0.0983 * x_1 + 0.3544 * x_2 + 0.1168 * x_3$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0$ ,  $H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{kr} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 47) = 2.3155$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.22, 0.42, 0.038]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.0924, 0.1717, 0.037]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [1.8, 3.67, 5.13]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [1.14, 3.23, 3.2953]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 19:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\hat{y} = 0.228 * x_1 + 0.3945 * x_2 + 0.146 * x_3$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = -0.1335 * u_{t-1} + 0.2638 * u_{t-2} - 0.2734 * u_{t-3} - 0.3738 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.92 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 1.87 < t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 1.94 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 2.55 > t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_4$ , у моделі присутня автокореляція залишків четвертого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 3.11$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\hat{y}_{1.1} = 0.1842 * x_1 + 0.371 * x_2 + 0.1557 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\hat{y}_{1.2} = 0.1844 * x_1 + 0.3699 * x_2 + 0.1548 * x_3$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\hat{y} = 0.2974 * x_1 + 0.419 * x_2 + 0.1527 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\hat{y}_{2.1} = 0.2877 * x_1 + 0.4081 * x_2 + 0.1505 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\hat{y}_{2.2} = 0.2846 * x_1 + 0.4053 * x_2 + 0.1506 * x_3$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\hat{y}_{1.1} = 0.1842 * x_1 + 0.371 * x_2 + 0.1557 * x_3$$

$$\hat{y}_{1.2} = 0.1844 * x_1 + 0.3699 * x_2 + 0.1548 * x_3$$

$$\hat{y}_{2.1} = 0.2877 * x_1 + 0.4081 * x_2 + 0.1505 * x_3$$

$$\hat{y}_{2.2} = 0.2846 * x_1 + 0.4053 * x_2 + 0.1506 * x_3$$

У моделях  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\hat{y}_{2.1}$  та  $\hat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0, H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{KP} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 47) = 2.3155$$

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.006, 0.1048, 0.0962]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{2.1}$  та  $\hat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.1423, 0.2516, 0.026]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [3.65, 3.4832, 0.562]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [3.03, 3.0318, 0.4724]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 20:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\widehat{y} = 0.1203 * x_1 + 0.372 * x_2 + 0.0582 * x_3$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = 0.1068 * u_{t-1} - 0.2373 * u_{t-2} + 0.002 * u_{t-3} - 0.4244 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\widehat{\beta}_k}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.76 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 1.68 < t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 0.015 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 3.01 > t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_4$ , у моделі присутня автокореляція залишків четвертого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 2.71$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.1} = 0.1404 * x_1 + 0.361 * x_2 + 0.057 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{1.2} = 0.1316 * x_1 + 0.3547 * x_2 + 0.0589 * x_3$ .

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = 0.1417 * x_1 + 0.4005 * x_2 + 0.053 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.1} = 0.1406 * x_1 + 0.40 * x_2 + 0.0509 * x_3$ .

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:  $\widehat{y}_{2.2} = 0.1404 * x_1 + 0.4001 * x_2 + 0.0508 * x_3$ .

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\begin{aligned}\widehat{y}_{1.1} &= 0.1404 * x_1 + 0.361 * x_2 + 0.057 * x_3 \\ \widehat{y}_{1.2} &= 0.1316 * x_1 + 0.3547 * x_2 + 0.0589 * x_3 \\ \widehat{y}_{2.1} &= 0.1406 * x_1 + 0.40 * x_2 + 0.0509 * x_3 \\ \widehat{y}_{2.2} &= 0.1404 * x_1 + 0.4001 * x_2 + 0.0508 * x_3\end{aligned}$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0$ ,  $H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\widehat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{kr} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 47) = 2.3155$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.147, 0.3753, 0.16]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.009, 0.012, 0.008]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [0.003, 2.33, 0.77]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.126, 2.3499, 0.879]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

## ЧОТИРЬОХФАКТОРНІ МОДЕЛІ

Перейдемо до дослідження чотирьохфакторних моделей.

Нехай маємо модель з автокореляцією другого порядку та гетероскедастичністю. Розглянемо два випадки: усунення автокореляції та гетероскедастичності; усунення тільки гетероскедастичності. Далі порівняємо отримані моделі та перевіримо чи значимо відрізняються ці моделі одна від одної.

При дослідженні цих моделей будемо використовувати два методи усунення гетероскедастичності залишків: двокрокову процедуру Гріна(існуючий метод) та новий метод, описаний у розділі 3.

*Приклад 21:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\hat{y} = -0.7507 * x_1 + 0.0767 * x_2 + 0.2448 * x_3 + 0.1233 * x_4$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = -0,1566 * u_{t-1} + 0.3838 * u_{t-2} + 0.282 * u_{t-3} - 0.0205 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 1.006 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 2.51 > t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 1.84 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 0.13 < t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_2$ , у моделі присутня автокореляція залишків другого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  — *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 5.36$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{1.1} = -0.7072 * x_1 + 0.0816 * x_2 + 0.2514 * x_3 + 0.1209 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{1.2} = -0.7271 * x_1 + 0.077 * x_2 + 0.2487 * x_3 + 0.123 * x_4.$$

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = -0.7411 * x_1 + 0.089 * x_2 + 0.2442 * x_3 + 0.1169 * x_4$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.1} = -0.7661 * x_1 + 0.0706 * x_2 + 0.245 * x_3 + 0.1131 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.2} = -0.8657 * x_1 + 0.0715 * x_2 + 0.2318 * x_3 + 0.1153 * x_4.$$

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = -0.7072 * x_1 + 0.0816 * x_2 + 0.2514 * x_3 + 0.1209 * x_4$$

$$\widehat{y}_{1.2} = -0.7271 * x_1 + 0.077 * x_2 + 0.2487 * x_3 + 0.123 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.1} = -0.7661 * x_1 + 0.0706 * x_2 + 0.245 * x_3 + 0.1131 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.2} = -0.8657 * x_1 + 0.0715 * x_2 + 0.2318 * x_3 + 0.1153 * x_4$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \widehat{\beta}_k \neq \beta_k^0, H_0: \widehat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\widehat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{KR} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 46) = 2.3172$$

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.37, 0.374, 0.47, 0.96]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{2.1}$  та  $\hat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [1.4, 0.08, 1.94, 0.64]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.1}$  та  $\hat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [1.108, 0.8876, 1.1064, 2.48]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\hat{y}_{1.2}$  та  $\hat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [2.1, 0.39, 2.15, 1.99]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 22:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\hat{y} = 0.0953 * x_1 + 0.2361 * x_2 + 0.2106 * x_3 + 0.1115 * x_4$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = 0.013 * u_{t-1} - 0.5042 * u_{t-2} + 0.1941 * u_{t-3} - 0.194 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.09 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 3.39 > t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 1.27 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 1.25 < t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_2$ , у моделі присутня автокореляція залишків другого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 8.82$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.1115 * x_1 + 0.2282 * x_2 + 0.2098 * x_3 + 0.1066 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.14538 * x_1 + 0.2611 * x_2 + 0.2025 * x_3 + 0.1176 * x_4.$$

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\hat{y} = 0.078 * x_1 + 0.2004 * x_2 + 0.1992 * x_3 + 0.1089 * x_4$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.064 * x_1 + 0.2005 * x_2 + 0.1982 * x_3 + 0.1099 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.045 * x_1 + 0.2013 * x_2 + 0.1956 * x_3 + 0.1102 * x_4.$$

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.1115 * x_1 + 0.2282 * x_2 + 0.2098 * x_3 + 0.1066 * x_4$$

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.14538 * x_1 + 0.2611 * x_2 + 0.2025 * x_3 + 0.1176 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.064 * x_1 + 0.2005 * x_2 + 0.1982 * x_3 + 0.1099 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.045 * x_1 + 0.2013 * x_2 + 0.1956 * x_3 + 0.1102 * x_4$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0, H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{KP} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 46) = 2.3172$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [1.77, 3.88, 2.41, 3.79]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [2.28, 1.32, 1.87, 0.41]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [2.47, 3.27, 3.82, 1.12]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [2.44, 4.76, 0.97, 1.45]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 23:*

Дані до прикладу знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом ІМНК:

$$\hat{y} = -0.1075 * x_1 + 0.2815 * x_2 + 0.2642 * x_3 + 0.1158 * x_4$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = 0.2041 * u_{t-1} - 0.4902 * u_{t-2} + 0.1954 * u_{t-3} - 0.0672 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 1.31 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 3.02 > t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 1.17 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 0.4 < t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_2$ , у моделі присутня автокореляція залишків другого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T -$  *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 5.8$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{1.1} = -0.1378 * x_1 + 0.2861 * x_2 + 0.2595 * x_3 + 0.1153 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{1.2} = -0.1267 * x_1 + 0.2786 * x_2 + 0.2625 * x_3 + 0.1172 * x_4.$$

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\hat{y} = -0.1183 * x_1 + 0.2654 * x_2 + 0.2709 * x_3 + 0.1107 * x_4$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.1} = -0.1312 * x_1 + 0.2638 * x_2 + 0.2672 * x_3 + 0.1085 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.2} = -0.0391 * x_1 + 0.228 * x_2 + 0.2868 * x_3 + 0.1236 * x_4.$$

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = -0.1378 * x_1 + 0.2861 * x_2 + 0.2595 * x_3 + 0.1153 * x_4$$

$$\widehat{y}_{1.2} = -0.1267 * x_1 + 0.2786 * x_2 + 0.2625 * x_3 + 0.1172 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.1} = -0.1312 * x_1 + 0.2638 * x_2 + 0.2672 * x_3 + 0.1085 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.2} = -0.0391 * x_1 + 0.228 * x_2 + 0.2868 * x_3 + 0.1236 * x_4$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0$ ,  $H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{kr} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 46) = 2.3172$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.45, 1.4, 0.95, 0.71]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [3.21, 3.59, 2.49, 4.06]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [0.27, 4.15, 2.46, 2.66]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [3.97, 9.42, 6.73, 2.16]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 24:*

Дані до прикладу знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\hat{y} = 0.2434 * x_1 + 0.2573 * x_2 + 0.2947 * x_3 + 0.1398 * x_4$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = -0,206 * u_{t-1} - 0.4626 * u_{t-2} + 0.0119 * u_{t-3} - 0.3533 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 1.37 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 3.15 > t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 0.075 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 2.29 < t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_2$ , у моделі присутня автокореляція залишків другого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 2.93$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.1926 * x_1 + 0.2567 * x_2 + 0.2927 * x_3 + 0.1365 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.1767 * x_1 + 0.2539 * x_2 + 0.2924 * x_3 + 0.1357 * x_4.$$

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = 0.2082 * x_1 + 0.2481 * x_2 + 0.3018 * x_3 + 0.1276 * x_4$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.2118 * x_1 + 0.2472 * x_2 + 0.2999 * x_3 + 0.1295 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.2007 * x_1 + 0.2465 * x_2 + 0.2973 * x_3 + 0.1259 * x_4.$$

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.1926 * x_1 + 0.2567 * x_2 + 0.2927 * x_3 + 0.1365 * x_4$$

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.1767 * x_1 + 0.2539 * x_2 + 0.2924 * x_3 + 0.1357 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.2118 * x_1 + 0.2472 * x_2 + 0.2999 * x_3 + 0.1295 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.2007 * x_1 + 0.2465 * x_2 + 0.2973 * x_3 + 0.1259 * x_4$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0, H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{kr} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 46) = 2.3172$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.91, 0.7857, 0.106, 0.4702]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.919, 0.2732, 1.007, 1.31]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [0.94, 2.62, 2.5, 4.001]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [1.194, 1.405, 1.168, 5.119]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 25:*

Дані до прикладу знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\widehat{y} = -0.2227 * x_1 + 0.2543 * x_2 + 0.2041 * x_3 + 0.097 * x_4$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = 0.0938 * u_{t-1} + 0.4718 * u_{t-2} - 0.0246 * u_{t-3} - 0.1152 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\widehat{\beta}_k}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.61 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 3.15 > t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 0.1654 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 0.77 < t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_2$ , у моделі присутня автокореляція залишків другого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T$ ,  $T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 3.41$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{1.1} = -0.2085 * x_1 + 0.2563 * x_2 + 0.2225 * x_3 + 0.1043 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{1.2} = -0.1993 * x_1 + 0.2583 * x_2 + 0.2241 * x_3 + 0.1054 * x_4.$$

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = -0.1488 * x_1 + 0.2797 * x_2 + 0.1946 * x_3 + 0.1046 * x_4$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.1} = -0.0257 * x_1 + 0.2771 * x_2 + 0.1958 * x_3 + 0.1072 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.2} = -0.154 * x_1 + 0.2961 * x_2 + 0.193 * x_3 + 0.1118 * x_4.$$

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = -0.2085 * x_1 + 0.2563 * x_2 + 0.2225 * x_3 + 0.1043 * x_4$$

$$\widehat{y}_{1.2} = -0.1993 * x_1 + 0.2583 * x_2 + 0.2241 * x_3 + 0.1054 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.1} = -0.0257 * x_1 + 0.2771 * x_2 + 0.1958 * x_3 + 0.1072 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.2} = -0.154 * x_1 + 0.2961 * x_2 + 0.193 * x_3 + 0.1118 * x_4$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і

лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0$ ,  $H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{KP} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 46) = 2.3172$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.39, 0.27, 0.194, 0.337]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [1.96, 2.91, 0.501, 1.62]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [7.7, 2.8, 3.18, 0.87]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [2.6, 5.09, 2.72, 1.37]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Тепер розглянемо чотирьохфакторні моделі з автокореляцією залишків четвертого порядку.

*Приклад 26:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\hat{y} = -0.2427 * x_1 + 0.3378 * x_2 + 0.2223 * x_3 + 0.1148 * x_4$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = -0.0387 * u_{t-1} - 0.2606 * u_{t-2} - 0.1105 * u_{t-3} - 0.3991 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.27 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 1.84 < t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 0.77 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 2.75 > t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_4$ , у моделі присутня автокореляція залишків четвертого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T -$  *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 3.31$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{1.1} = -0.2295 * x_1 + 0.3363 * x_2 + 0.2275 * x_3 + 0.1236 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{1.2} = -0.1905 * x_1 + 0.3342 * x_2 + 0.2324 * x_3 + 0.1256 * x_4.$$

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\hat{y} = -0.3111 * x_1 + 0.348 * x_2 + 0.1961 * x_3 + 0.1041 * x_4$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.1} = -0.3097 * x_1 + 0.3628 * x_2 + 0.1856 * x_3 + 0.1077 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.2} = -0.2526 * x_1 + 0.391 * x_2 + 0.1655 * x_3 + 0.1207 * x_4.$$

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = -0.2295 * x_1 + 0.3363 * x_2 + 0.2275 * x_3 + 0.1236 * x_4$$

$$\widehat{y}_{1.2} = -0.1905 * x_1 + 0.3342 * x_2 + 0.2324 * x_3 + 0.1256 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.1} = -0.3097 * x_1 + 0.3628 * x_2 + 0.1856 * x_3 + 0.1077 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.2} = -0.2526 * x_1 + 0.391 * x_2 + 0.1655 * x_3 + 0.1207 * x_4$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0$ ,  $H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{kr} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 46) = 2.3172$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.55, 0.26, 0.495, 0.3098]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [1.322, 2.08, 2.71, 2.02]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [1.14, 3.26, 4.26, 2.49]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.66, 5.36, 4.86, 0.54]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 27:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\hat{y} = 0.1654 * x_1 + 0.2978 * x_2 + 0.2553 * x_3 + 0.138 * x_4$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = -0.1286 * u_{t-1} + 0.007 * u_{t-2} + 0.2506 * u_{t-3} - 0.4331 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.88 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 0.054 < t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 1.73 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 2.96 > t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_4$ , у моделі присутня автокореляція залишків четвертого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 3.46$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.17686 * x_1 + 0.2851 * x_2 + 0.2544 * x_3 + 0.1364 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.1865 * x_1 + 0.2827 * x_2 + 0.2557 * x_3 + 0.1358 * x_4.$$

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = 0.069 * x_1 + 0.2964 * x_2 + 0.2426 * x_3 + 0.1278 * x_4$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.0759 * x_1 + 0.2877 * x_2 + 0.2366 * x_3 + 0.1264 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.0677 * x_1 + 0.2749 * x_2 + 0.2327 * x_3 + 0.1231 * x_4.$$

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.17686 * x_1 + 0.2851 * x_2 + 0.2544 * x_3 + 0.1364 * x_4$$

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.1865 * x_1 + 0.2827 * x_2 + 0.2557 * x_3 + 0.1358 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.0759 * x_1 + 0.2877 * x_2 + 0.2366 * x_3 + 0.1264 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.0677 * x_1 + 0.2749 * x_2 + 0.2327 * x_3 + 0.1231 * x_4$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0, H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\widehat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{kr} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 46) = 2.3172$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.45, 0.29, 0.2557, 0.50]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [1.06, 1.64, 1.152, 1.93]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [4.69, 0.34, 3.71, 7.76]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [4.26, 0.77, 4.37, 7.5]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 28:*

Дані до прикладу знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\widehat{y} = 0.2776 * x_1 + 0.2279 * x_2 + 0.2047 * x_3 + 0.1152 * x_4$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = 0.092 * u_{t-1} + 0.2967 * u_{t-2} + 0.262 * u_{t-3} - 0.4262 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\widehat{\beta}_k}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.6 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 1.79 < t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 1.57 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 2.6 > t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_4$ , у моделі присутня автокореляція залишків четвертого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T$ ,  $T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 3.35$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.2759 * x_1 + 0.2243 * x_2 + 0.2008 * x_3 + 0.117 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.3351 * x_1 + 0.2298 * x_2 + 0.2196 * x_3 + 0.1083 * x_4.$$

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = 0.2999 * x_1 + 0.2271 * x_2 + 0.2068 * x_3 + 0.1248 * x_4$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.3195 * x_1 + 0.229 * x_2 + 0.2077 * x_3 + 0.1224 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.4179 * x_1 + 0.2402 * x_2 + 0.2035 * x_3 + 0.1291 * x_4.$$

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.2759 * x_1 + 0.2243 * x_2 + 0.2008 * x_3 + 0.117 * x_4$$

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.3351 * x_1 + 0.2298 * x_2 + 0.2196 * x_3 + 0.1083 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.3195 * x_1 + 0.229 * x_2 + 0.2077 * x_3 + 0.1224 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.4179 * x_1 + 0.2402 * x_2 + 0.2035 * x_3 + 0.1291 * x_4$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і

лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0$ ,  $H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{KP} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 46) = 2.3172$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [1.54, 0.71, 2.49, 2.66]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [1.71, 1.97, 0.91, 1.42]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [1.13, 0.6, 0.92, 1.66]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [2.47, 1.42, 2, 3.86]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 29:*

Дані до прикладу знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\hat{y} = -0.1994 * x_1 + 0.3251 * x_2 + 0.2405 * x_3 + 0.1077 * x_4$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = -0.006 * u_{t-1} + 0.131 * u_{t-2} - 0.057 * u_{t-3} - 0.4271 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.04 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 0.92 < t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 0.39 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 2.93 > t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_4$ , у моделі присутня автокореляція залишків четвертого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 2.94$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\hat{y}_{1.1} = -0.1201 * x_1 + 0.3343 * x_2 + 0.2331 * x_3 + 0.1174 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:

$$\hat{y}_{1.2} = -0.1039 * x_1 + 0.3269 * x_2 + 0.244 * x_3 + 0.1173 * x_4.$$

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\hat{y} = -0.2368 * x_1 + 0.299 * x_2 + 0.2353 * x_3 + 0.1073 * x_4$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\hat{y}_{2.1} = -0.2204 * x_1 + 0.295 * x_2 + 0.2271 * x_3 + 0.1132 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.2} = -0.1625 * x_1 + 0.3127 * x_2 + 0.2374 * x_3 + 0.1164 * x_4.$$

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = -0.1201 * x_1 + 0.3343 * x_2 + 0.2331 * x_3 + 0.1174 * x_4$$

$$\widehat{y}_{1.2} = -0.1039 * x_1 + 0.3269 * x_2 + 0.244 * x_3 + 0.1173 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.1} = -0.2204 * x_1 + 0.295 * x_2 + 0.2271 * x_3 + 0.1132 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.2} = -0.1625 * x_1 + 0.3127 * x_2 + 0.2374 * x_3 + 0.1164 * x_4$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0$ ,  $H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{kr} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю  $(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 46) = 2.3172$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.32, 0.86, 1.07, 0.012]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [2.16, 3.5, 1.37, 0.67]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [2.02, 4.55, 0.59, 0.66]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.92, 1.16, 0.65, 0.106]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

*Приклад 30:*

Дані до приклада знаходяться у додатку А.

Оцінимо параметри моделі методом 1МНК:

$$\hat{y} = 0.0749 * x_1 + 0.2834 * x_2 + 0.238 * x_3 + 0.1314 * x_4$$

За допомогою теста Бреуша-Годфрі перевіримо, чи присутня у моделі автокореляція залишків до четвертого порядку. Для цього побудуємо модель:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \rho_4 u_{t-4} + \varepsilon_t, t = 1, T.$$

Коефіцієнти моделі оцінемо за допомогою методу 1МНК та перевіримо, чи значимо відрізняються коефіцієнти  $\rho_i$  від нуля. Оцінивши коефіцієнти за допомогою методу 1МНК отримали наступну модель:

$$u_t = 0.014 * u_{t-1} + 0.072 * u_{t-2} + 0.0725 * u_{t-3} - 0.3926 * u_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Тепер розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$  для кожного коефіцієнта і порівняємо його з  $t_{KR}(0.025, 42) = 2.3246$ .

$$\rho_1: |t_{CT}| = 0.1 < t_{KR}$$

$$\rho_2: |t_{CT}| = 0.52 < t_{KR}$$

$$\rho_3: |t_{CT}| = 0.51 < t_{KR}$$

$$\rho_4: |t_{CT}| = 2.76 > t_{KR}$$

Так як значимо відрізняється від нуля коефіцієнт  $\rho_4$ , у моделі присутня автокореляція залишків четвертого порядку.

Перевіримо модель на наявність гетероскедастичності залишків за допомогою тесту Гольдфельда-Квандта з відкиданням  $m = \frac{5}{14} T, T$  – *number of observations* середніх значень:

$$F_{ct} = 3.86$$

$$F_{kr}(0.05; 15; 15) = 2.40$$

Так як  $F_{ct} > F_{kr}$ , у моделі існує гетероскедастичність залишків з ймовірністю у 95%.

Тепер усунемо гетероскедастичність за допомогою двох зазначених методів і розглянемо отримані моделі.

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\hat{y}_{1.1} = 0.0588 * x_1 + 0.2835 * x_2 + 0.2341 * x_3 + 0.13 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність за допомогою нового методу, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.0827 * x_1 + 0.2903 * x_2 + 0.2334 * x_3 + 0.135 * x_4.$$

Розглянемо другий випадок і спочатку усунемо автокореляцію другого порядку за допомогою метода Кохрейна-Орката.

Отримали наступну модель з відсутньою автокореляцією залишків другого порядку:  $\widehat{y} = 0.164 * x_1 + 0.2237 * x_2 + 0.2334 * x_3 + 0.1479 * x_4$ .

Усунувши гетероскедастичність за допомогою двокрокової процедури Гріна, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.1613 * x_1 + 0.2335 * x_2 + 0.2236 * x_3 + 0.1515 * x_4.$$

Усунувши гетероскедастичність новим методом, отримали наступну модель:

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.216 * x_1 + 0.2192 * x_2 + 0.2296 * x_3 + 0.1475 * x_4.$$

У підсумку маємо чотири моделі:

$$\widehat{y}_{1.1} = 0.0588 * x_1 + 0.2835 * x_2 + 0.2341 * x_3 + 0.13 * x_4$$

$$\widehat{y}_{1.2} = 0.0827 * x_1 + 0.2903 * x_2 + 0.2334 * x_3 + 0.135 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.1} = 0.1613 * x_1 + 0.2335 * x_2 + 0.2236 * x_3 + 0.1515 * x_4$$

$$\widehat{y}_{2.2} = 0.216 * x_1 + 0.2192 * x_2 + 0.2296 * x_3 + 0.1475 * x_4$$

У моделях  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$  було лише усунено гетероскедастичність, тоді як у моделях  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$  було спочатку усунено автокореляцію другого порядку і лише потім усунено гетероскедастичність. Далі нам необхідно визначити, чи значимо відрізняються коефіцієнти даних моделей.

Для цього розглянемо наступний тест. Висунемо дві гіпотези:  $H_A: \hat{\beta}_k \neq \beta_k^0$ ,  $H_0: \hat{\beta}_k = \beta_k^0$ , де  $\hat{\beta}_k$  – коефіцієнти моделі (1), а  $\beta_k^0$  – коефіцієнти моделі (2).

Розрахуємо  $t_{CT} = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^0}{\widehat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}$ . Якщо  $|t_{CT}| > t_{KP} = t\left(\frac{\alpha}{2}, T - N\right)$  то з ймовірністю

$(1 - \alpha)100\%$  гіпотеза  $H_0$  відхиляється і приймається гіпотеза  $H_A$ .

$$t_{kr}(0.025, 46) = 2.3172$$

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{1.2}$ .

$$|t_{CT}| = [0.55, 0.81, 0.0565, 0.868]$$

Ці моделі не значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{2.1}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [2.94, 2.68, 1.02, 1.7]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.1}$  та  $\widehat{y}_{2.1}$ .

$$|t_{CT}| = [2.37, 6.05, 0.855, 3.69]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

Розглянемо моделі  $\widehat{y}_{1.2}$  та  $\widehat{y}_{2.2}$ .

$$|t_{CT}| = [2.56, 7.65, 0.32, 1.91]$$

Ці моделі значимо відрізняються одна від одної з ймовірністю 95%.

## ВИСНОВКИ

Підведемо підсумки дослідження.

Було розглянуто десять двофакторних моделей з автокореляцією залишків другого та четвертого порядків. У випадку автокореляції другого порядку у чотирьох з п'яти розглянутих моделей, моделі, які було попередньо протестовано на автокореляцію залишків вищих порядків та усунуто її, значимо відрізнялися від моделей, у яких не було усунуто автокореляцію. Така ж сама кількість моделей значимо відрізнялася і у випадку наявності автокореляції четвертого порядку. При збільшенні кількості досліджуваних прикладів, тенденція зберігається – у більшості моделей спостерігається значима різниця між моделями отриманими у двох випадках, описаних у вступі.

У випадку двофакторних регресійних моделей, моделі, отримані у результаті використання двох різних способів усунення гетероскедастичності залишків, не значимо відрізнялися одна від одної.

Далі було розглянуто десять трьохфакторних регресійних моделей з автокореляцією залишків другого та четвертого порядків. У цьому випадку вплив автокореляції залишків можна було помітити у всіх розглянутих моделях – для кожного розглянутого випадку, моделі отримані двома різними способами значимо відрізнялися одна від одної.

Також, у двох розглянутих прикладах, моделі отримані за допомогою двох різних методів усунення гетероскедастичності залишків, значимо відрізнялися одна від одної, хоча при порівнянні коефіцієнту детермінації та F-статистики цих двох регресійних моделей, не було значної різниці.

Наприкінці було розглянуто десять чотирьохфакторних регресійних моделей з автокореляцією другого та четвертого порядків та гетероскедастичністю залишків. У цьому випадку, був отриманий той самий результат, що і для трьохфакторних моделей – у всіх розглянутих випадках, отримані моделі значимо відрізнялися одна від одної.

Також, у випадку чотирьохфакторних моделей, моделі отримані за допомогою двокрокової процедури Гріна і нового метода усунення гетероскедастичності, значимо відрізнялися одна від одної у семи з десяти випадків.

Взагалі, у двадцяти восьми з тридцяти розглянутих прикладів автокореляція залишків вищих порядків впливає на усунення гетероскедастичності, незважаючи на обраний метод її усунення. Згідно отриманих результатів, вплив автокореляції залишків на модель більш помітний при більшій кількості регресорів, включених до моделі.

Варто зауважити, що у більшості випадків, регресійна модель, у випадку попереднього тестування та усунення автокореляція вищих порядків та наступного усунення гетероскадстичності залишків, має кращі коефіцієнт детермінації та F-статистику.

Отримані результати підтверджують гіпотезу о наявності впливу автокореляції вищих порядків на усунення гетероскедастичності. Також вони свідчать о необхідності попереднього тестування та усунення автокореляції залишків вищого порядку.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Яровий, А. Т. Економетрія : навч.-метод. посіб. для студ. мат. та екон. спец. / А. Т. Яровий, Є. М. Страхов. – Одеса : Освіта України, 2017. – 129 с.
2. Лук'яненко І., Краснікова Л. Економетрика. — К.: Знання, 1998. — 494 с
3. Магнус Я. Р., Катышев П. К., Перестецкий А. А. Эконометрика. Начальный курс. — М.: Дело, 1998. — 246 с.

## Додаток А

У цьому додатку наведені дані застосовані для побудови регресійної моделі у прикладах:

Приклад 1:

$$X_2 = [ 2.73702971, 0.38965379, -0.10501679, -3.78895745, -0.10292295, \\ 0.9669307, 0.63589839, 0.79183729, 2.70565237, -3.60416193, \\ 2.3256511, -3.67603456, 2.81404405, 2.9030028, 0.52384803, \\ 0.9339082, -5.61057882, -3.48301491, -0.58882373, -1.70446652, \\ 0.94821405, 2.59174277, -2.45698903, -1.50987259, -4.26577666, \\ -5.82562281, -1.85005178, 0.88605444, -5.88976197, -1.7142067, \\ 0.81014842, -0.53672146, 2.8951243, -3.58676601, -2.05188913, \\ -1.85043331, -4.3358778, 0.98234322, -2.43979621, -5.98852327, \\ 2.03592261, -4.92692964, 0.24737962, -2.51057788, -0.98977222, \\ -1.02512119, 1.81109612, 0.89152807, 0.32359422, -1.47728026]$$

$$Y = [ 1.07787445, 0.47728163, -0.13107806, -0.3441529, -0.12847207, \\ 1.06487943, 0.75287514, 0.90960456, 1.09867602, -0.45479164, \\ 1.30978383, -0.40964779, 1.02523394, 0.96208336, 0.63117785, \\ 1.03742732, -0.77961781, -0.53592613, -0.70258916, -1.41719606, \\ 1.04942886, 1.17049494, -1.24661326, -1.37561287, -0.16452871, \\ -1.01464304, -1.42377388, 0.99609593, -1.08908804, -1.41828602, \\ 0.92692661, -0.64550157, 0.96776164, -0.46607716, -1.39946204, \\ -1.42376402, -0.15401639, 1.07738612, -1.2555397, -1.20671435, \\ 1.40274558, -0.25465812, 0.3067091, -1.21760889, -1.08334403, \\ -1.11105739, 1.4240407, 1.00091464, 0.39887484, -1.36495062]$$

Приклад 2:

$$X_2 = [-3.01780807, -5.246477, 0.48631246, 2.70554162, -5.83514608, \\ 0.78424851, -2.80293228, -4.6390082, 2.37681176, -5.41024496, \\ -3.32920358, 2.48742399, 0.10750709, -4.235907, 2.87223713, \\ -4.3416215, -0.0092936, -4.02740652, -2.38413486, 2.85549922, \\ -1.52145974, -4.75204206, -1.99549012, -2.78705995, 0.35511138, \\ -3.93069208, 2.30685374, -4.24319932, 2.21608359, 2.0917777, \\ -4.15481076, 0.4246649, -5.2543754, -4.43749213, -4.59801586, \\ 1.98404065, -0.76331953, 2.2586786, 2.29551443, -6.16250791, \\ -3.78112812, -1.39757104, -4.40357288, 2.76956963, -1.48012799, \\ 0.21818053, -1.45449778, -0.78255669, 0.77822794, -1.87628304]$$

$$Y = [-0.87792073, -0.45088601, 0.58894717, 1.09874872, -1.02558739,$$

0.90235551, -1.03295692, -0.16244321, 1.28658186, -0.5863396 ,  
 -0.64578862, 1.23035574, 0.13417689, -0.17036277, 0.98416954,  
 -0.15335584, -0.01161687, -0.23242149, -1.28311025, 0.99608141,  
 -1.37914813, -0.1887966 , -1.41003748, -1.04391716, 0.43647264,  
 -0.2729539 , 1.31783469, -0.16886484, 1.35294793, 1.39027556,  
 -0.19016365, 0.51818169, -0.45690815, -0.14691983, -0.15603744,  
 1.41183294, -0.88215364, 1.33726195, 1.32256494, -1.42024227,  
 -0.34845925, -1.33442674, -0.14819916, 1.05589322, -1.36592444,  
 0.27099878, -1.35686939, -0.90073388, 0.89657552, -1.42277144]

Приклад 3:

X2 = [-5.59107297, 2.788164 , -5.36541121, -2.7632152 , -5.19984394,  
 0.60126683, 0.91716887, 2.24209369, 2.1277332 , 0.37650435,  
 0.57524243, -4.76160976, 1.39757833, -4.58710863, -3.92874501,  
 -0.03532615, 1.66620154, 1.15466586, 2.27556019, -4.79394778,  
 -2.18322885, 2.39004783, -0.71377866, 0.44985578, 2.45804355,  
 -5.51490539, 0.98236119, -2.1185647 , 0.21995097, -2.68174462,  
 -0.90809083, 2.20118716, -2.21581776, -5.96030679, -2.52627162,  
 2.77338758, 2.40661457, -5.808011 , -0.9802533 , -2.55607139,  
 -1.35936123, -4.5459472 , -1.34630899, 2.9983359 , 0.1736767 ,  
 -3.98782438, 2.02081152, -2.80578799, 1.03829326, -0.04754861]

Y = [-0.75960335, 1.04315757, -0.54710165, -1.06021698, -0.41643322,  
 0.71600429, 1.0231755 , 1.34353878, 1.38081152, 0.46179801,  
 0.68784883, -0.19161354, 1.33442982, -0.15461448, -0.27384016,  
 -0.04415034, 1.41200276, 1.20332641, 1.3306546 , -0.20181102,  
 -1.36405929, 1.28028023, -0.83313937, 0.54729961, 1.24605963,  
 -0.683827 , 1.07740059, -1.38333002, 0.27316952, -1.11424809,  
 -1.01535326, 1.35809398, -1.35304132, -1.17277905, -1.20878861,  
 1.05328829, 1.27222454, -0.9945093 , -1.07570176, -1.19165174,  
 -1.31757106, -0.15030629, -1.3114856 , 0.89235123, 0.21622407,  
 -0.24816802, 1.40564337, -1.03097599, 1.1211123 , -0.05941785]

Приклад 4:

X2 = [-3.48205204, -5.77422188, -4.16211554, -3.90675924, 1.45819068,  
 -4.40429551, 0.96396133, -4.80473452, 1.49560612, -3.68753074,  
 1.58081959, 0.22992364, -5.23121217, 1.56791483, 1.51886143,  
 -3.15888044, -5.89104145, -3.81023001, 1.39744288, -5.04355204,  
 0.80519187, -4.26045191, -6.06084058, -2.95749265, -3.99258816,  
 -1.69626439, -6.15181123, -1.92066369, 0.24027442, -6.22285006,  
 -4.23323211, -4.849555 , -3.86156844, -4.88075312, -3.37146527,  
 1.17388237, -1.43129174, 1.62039372, 0.81813081, 1.82854463,  
 2.04256579, -4.45599611, -0.25671312, -4.75471285, -5.42361208,  
 -0.6417947 , -4.68249896, -2.81412311, 1.76337546, 0.69650799]

Y = [-0.53659286, -0.95628315, -0.18814732, -0.28403265, 1.35821435,  
 -0.14816044, 1.06244737, -0.20544445, 1.37107608, -0.40266264,  
 1.39515467, 0.28538408, -0.43939973, 1.39197456, 1.37836704,

-0.77243318, -1.09058995, -0.33264016, 1.3343726, -0.31522319,  
 0.92226158, -0.16551012, -1.29469291, -0.92243498, -0.24620999,  
 -1.4162053, -1.40695631, -1.41958411, 0.29803778, -1.49541387,  
 -0.17092408, -0.22178127, -0.30602564, -0.23432807, -0.61501282,  
 1.21572896, -1.34810794, 1.40386873, 0.93440205, 1.42410255,  
 1.40140697, -0.14668802, -0.31808104, -0.18957373, -0.59833897,  
 -0.75908268, -0.17107141, -1.02517885, 1.42235774, 0.81566993]

Приклад 5:

X2 = [-0.04126619, -2.04170993, -0.14845465, -0.68220831, 1.96105846,  
 0.71394231, -1.18507937, -2.68533346, 2.11518826, 2.65640424,  
 -0.79577088, 1.85722169, 2.13529425, -1.07077959, -2.15334588,  
 0.15897582, 2.19455521, 1.34208245, -1.87363286, -2.11502857,  
 -3.36179067, -5.52285282, -3.60586569, 0.39856753, -0.40831484,  
 -1.47276089, -5.5292992, 2.51584482, -0.09891903, -6.04664219,  
 -4.0556976, -1.84321293, -3.64366989, 1.4254913, 0.37419088,  
 -1.73533593, -3.64904281, -3.45739896, -3.19444133, -3.64373385,  
 -6.17523443, -4.33758107, 2.33161906, -5.39735441, -0.81587466,  
 -1.15549098, -1.75034009, -3.58154396, -4.05710984, -1.30563222]

Y = [-0.0515742, -1.67923311, -0.18517115, -0.81490413, 1.66758126,  
 0.84911711, -1.29032699, -1.60284686, 1.68542332, 1.61198646,  
 -0.93503818, 1.64496131, 1.68639316, -1.19608177, -1.6870019,  
 0.19823211, 1.68747099, 1.4045923, -1.64911187, -1.68541438,  
 -1.29234794, -0.96614185, -1.15855221, 0.490566, -0.50217815,  
 -1.48552803, -0.96989565, 1.64958211, -0.12353123, -1.37087634,  
 -0.93259584, -1.64124664, -1.13800906, 1.45777723, 0.46140876,  
 -1.60732713, -1.13510136, -1.24001876, -1.38150316, -1.13797443,  
 -1.49784165, -0.82761704, 1.68005391, -0.8996014, -0.95561433,  
 -1.26679665, -1.61260886, -1.17183466, -0.93198034, -1.37968772]

Приклад 6:

X2 = [ 2.92323159, 1.25557872, -5.21868944, -3.20994323, -3.80415295,  
 2.12995276, 1.57926011, 2.18318625, -6.04550677, 1.25932657,  
 -4.46937189, 0.56548717, 0.65142584, 0.64877065, -4.117635,  
 -3.92198704, 2.57402481, 1.61519055, -5.24915552, 2.1170147,  
 3.02748562, -2.6389439, 1.03626407, 2.84820123, -5.40560385,  
 -2.82582454, -5.40096403, 1.81239627, 0.23018193, 0.34038114,  
 -3.13853496, -4.54063959, -2.07057579, -1.54275556, 2.66597396,  
 -1.68237406, 2.59213848, -1.67620088, -2.86504303, -0.49941891,  
 0.82695023, 0.54401081, -0.48346245, 0.0821261, -5.45737362,  
 -1.48899499, -0.34477506, -3.22078302, 1.35915296, -1.70490211]

Y = [ 1.51190534, 1.34387364, -0.82666249, -1.37344478, -1.05303706,  
 1.68616558, 1.54159234, 1.68746873, -1.36979818, 1.34661932,  
 -0.79300504, 0.68517102, 0.78126784, 0.77834634, -0.90636565,  
 -0.9941765, 1.63543633, 1.55846542, -0.83727465, 1.68552417,

1.46450729, -1.61727974, 1.16588646, 1.54339752, -0.90359043,  
 -1.55231896, -0.90134013, 1.63251756, 0.28624879, 0.42070734,  
 -1.41012029, -0.77873689, -1.68216352, -1.52339081, 1.60901365,  
 -1.58722619, 1.6306166, -1.58473555, -1.53653623, -0.60929118,  
 0.96685671, 0.66068529, -0.59072764, 0.10259034, -0.92986492,  
 -1.49465463, -0.42601326, -1.36778085, 1.41591058, -1.5960539 ]

Приклад 7:

X2 = [-3.36022588, -0.16921934, 0.0989827, -3.31515409, -6.2188124,  
 0.76969768, -3.30631137, -0.27302741, -5.64790267, 2.09247214,  
 3.10930425, 1.63883342, -5.74955042, -3.41944024, -3.80078596,  
 1.15846852, -5.1972122, 1.49748231, -3.77678801, -2.54480146,  
 -0.06915376, -0.85937498, -1.49743711, -5.98841287, -2.58739131,  
 -0.57816551, 2.09452768, -0.61691782, -1.55407376, 2.34875834,  
 -2.33018857, -2.61773576, -5.862691, 0.86023814, -5.57755642,  
 1.44939341, -4.79469519, -1.72510669, -0.61180893, -0.85759764,  
 -2.70952878, 1.79394617, 1.48173634, -2.01010797, -2.29029231,  
 -5.75039737, -2.2904699, -5.10048802, -5.80016111, -3.75187667]

Y = [-0.62316088, -0.21071773, 0.12356682, -0.65609716, -1.49037464,  
 0.88834259, -0.66260298, -0.33790479, -0.81857063, 1.39010332,  
 0.80960886, 1.40739472, -0.9287214, -0.58057364, -0.33771712,  
 1.20580758, -0.4145457, 1.37168431, -0.35086222, -1.19819159,  
 -0.08638709, -0.97227837, -1.3716697, -1.20658111, -1.17311218,  
 -0.69102991, 1.38959103, -0.73275334, -1.38837862, 1.29953492,  
 -1.30780172, -1.15465746, -1.057461, 0.97305745, -0.74587644,  
 1.35498807, -0.20205904, -1.41939443, -0.72730144, -0.9706724,  
 -1.0961281, 1.42369176, 1.36647086, -1.40757164, -1.32471105,  
 -0.92966252, -1.3246384, -0.34949189, -0.98558077, -0.36486894]

Приклад 8:

X2 = [-0.89979297, 0.13861415, -3.42238074, -5.71354918, 4.38024373,  
 0.1450515, 0.99982104, 6.02401113, 3.33351365, -1.11209458,  
 -5.99517933, 6.27970538, 4.39901469, -0.12761507, 5.95642443,  
 -3.82206806, -3.78180974, 2.76649091, -1.42250348, -2.71346377,  
 5.37543441, -6.05465489, 0.96668775, -0.1394838, 4.26194037,  
 5.33801326, -2.358428, 5.0236937, -4.88087998, 4.76043008,  
 2.21740082, -3.39112365, 3.32006758, 4.53074746, -2.27430243,  
 -1.10915131, 4.36122078, 5.32285295, -3.8159181, -5.88126301,  
 -1.5123334, -4.57505228, -0.88818031, 1.66985445, 2.64385863,  
 -4.09194505, 3.10566136, -3.05466087, -1.44519517, 3.37914387]

Y = [-1.03908623, 0.17294435, -1.25924458, -1.09069531, 0.81529273,  
 0.18094389, 1.13316414, 1.3495345, 1.30768912, -1.23118199,  
 -1.32280188, 1.60758073, 0.81020308, -0.15926649, 1.28769325,  
 -1.04385813, -1.06458571, 1.57485111, -1.45596462, -1.59352858,  
 0.88926709, -1.378507, 1.10268188, -0.17402529, 0.85194394,  
 0.87251741, -1.67703794, 0.77649019, -0.75894588, 0.75635365,

1.68718492, -1.27635488, 1.31495302, 0.78052164, -1.68480603,  
 -1.22871964, 0.82065968, 0.86605293, -1.04700069, -1.22238941,  
 -1.50741088, -0.77303121, -1.02777475, 1.58214288, 1.61580699,  
 -0.91705199, 1.42658697, -1.45153644, -1.46955701, 1.28289512]

Приклад 9:

$X_2 = [ 4.28694825, 4.43475211, 6.09352599, 5.29070609, -5.3196554, 3.15721464, -5.53841446, -5.09273686, -5.52716159, 4.76315309, 2.85600724, -4.45888025, 3.64939976, 0.02086041, 4.54153974, -2.6539217, -5.13986075, 0.15734621, -3.38807006, 2.04895431, -2.89259739, 3.16134388, -4.90420572, 3.72624889, 2.13291006, 1.45254634, 0.95787472, -4.12268406, 1.83887528, 5.70964414, -5.52598661, -0.76691773, -1.94164443, -2.27983356, 6.23177524, -2.17616824, -5.34217573, 2.19641663, -3.61359348, -5.48521763, -0.72153512, -1.86673567, -2.33732961, 0.47503855, 1.39949493, 2.5915522, -0.08014481, 2.71002374, -0.3557439, -1.0157078 ]$

$Y = [ 0.84356134, 0.80109126, 1.41606676, 0.8529595, -0.86471316, 1.40064036, -0.97525901, -0.79075733, -0.96864729, 0.75629226, 1.54023281, -0.79537742, 1.1349083, 0.02607441, 0.77857767, -1.61274941, -0.80269129, 0.19620993, -1.278023, 1.68002955, -1.5250476, 1.39853334, -0.76072385, 1.09374092, 1.68629427, 1.47387429, 1.09445886, -0.90429866, 1.64006434, 1.08786968, -0.96796263, -0.90513264, -1.66400755, -1.68444952, 1.55654604, -1.6874191, -0.87432476, 1.68746217, -1.15434184, -0.94487766, -0.85723129, -1.64739392, -1.6794534, 0.58089215, 1.44177446, 1.63077563, -0.10011848, 1.59469049, -0.43923783, -1.14753378]$

Приклад 10:

$X_2 = [-1.92397457, 4.38176688, -5.52832918, 0.45008448, 3.64415338, 4.11146457, -0.69686656, -6.11208303, -4.86647034, 4.01601117, -3.52171528, 3.18703307, 5.40764896, 4.14829834, -5.78558762, -0.64311045, 3.48158261, -5.50880654, -0.4479165, 4.69397855, 1.16393396, 5.62830893, 3.70891817, -5.60759529, -1.23518093, -2.41991227, 3.67552217, -3.61850729, -0.81120421, -6.1007454, 1.26461641, 1.55673474, -4.87320674, 0.58712445, 4.08630679, -2.09737482, -1.11128905, -2.79361896, -0.79352437, -4.97217503, 0.82023511, 3.53658789, 5.01644482, -0.57831288, 2.03932532, -2.1876607, -5.85738807, -0.44505941, -1.35098451, 1.8203667 ]$

$Y = [-1.66049369, 0.81487205, -0.96932872, 0.55161821, 1.13774727, 0.90890669, -0.830767, -1.4343089, -0.75805678, 0.95020752, -1.20465289, 1.38533626, 0.90458778, 0.89398565, -1.14481594, -0.77210795, 1.22672213, -0.95807533, -0.54906539, 0.75953028, 1.27357375, 1.03159912, 1.1029485, -1.0180663, -1.32875017, -1.66826108, 1.12082199, -1.15166738, -0.95085354, -1.42314008, 1.35047713, 1.53048671, -0.7584526, 0.70965613, 0.91943457, -1.68430558, -1.23050867, -1.56475639, -0.93272545, -0.76831594,$

0.96004844, 1.19648109, 0.7752129, -0.69970752, 1.67896197,  
-1.68748113, -1.20243802, -0.54569885, -1.41052225, 1.63484881]

Приклад 11:

X2 = [-1.05029879, -6.141045, -3.93945903, -5.43101966, -4.92452042,  
0.99227715, -2.35577087, -3.45470376, -3.85664163, 2.25306878,  
-6.24050042, 1.42837018, 2.16266614, -1.05246505, 1.52112472,  
2.49563896, -4.22064286, -2.50535593, -1.320036, 0.47573279,  
1.41042539, -2.95798996, -5.02149676, -1.83047515, 2.13900177,  
2.62051995, 1.21799127, -2.61080064, -5.51201872, -0.74154561,  
-0.750786, 0.96506466, -4.24559008, 2.81993057, -4.31202043,  
1.29927527, -2.77986057, 1.52911356, 2.09542619, -2.29307953,  
-4.69186031, 0.40292381, -6.22452589, -1.57034034, -1.16396316,  
1.54005611, 1.4533288, -4.00942883, -2.23848852, -3.75877371]

X3 = [-3.88701765, -2.21999522, 1.31582169, 1.93099931, 2.80936903,  
2.97098084, -5.05928913, -0.82212042, -1.9213463, -3.49655792,  
-1.86979627, -1.92482399, 2.25894656, -0.13964101, -2.63006654,  
2.24685823, -4.96630242, 0.07331608, -2.88961907, -5.72771202,  
-4.65100254, 1.72693495, -2.67532902, -3.35691693, 2.75241105,  
0.73531313, -4.78027711, 1.24733858, -3.34578587, -4.71135907,  
-5.84686038, 2.09125722, 2.51064018, 1.22323663, 1.8236734,  
-5.34457736, 1.42818482, 2.65784432, 1.12880864, 2.79582779,  
-3.54884098, -5.69681307, -4.32634589, 1.42728728, -3.67344921,  
-1.67360751, 0.07133688, -1.80673745, -2.71558292, 2.03443422]

Y = [-2.44799890e+00, -2.33114684e+00, 1.80597311e-01, -6.67861283e-01,  
-7.77459832e-01, 5.45508598e-01, -1.71525810e+00, 1.69530193e-03,  
-9.40122340e-01, -1.22733245e-01, -2.09248729e+00, 7.11564984e-01,  
1.07429799e+00, -1.62443513e-01, 1.12539341e-01, 9.37172736e-01,  
-6.67402498e-01, -2.12200702e-01, -2.70059816e+00, 5.67417333e-01,  
5.80776191e-01, -8.18535111e-01, -1.59732238e+00, -2.90453598e+00,  
8.65260224e-01, 2.00485846e+00, 5.93699416e-01, -6.53969021e-01,  
-2.16212519e+00, -1.56854866e+00, -8.40628305e-01, 8.79760424e-01,  
-5.99254038e-01, 1.54521641e+00, -1.33727250e-01, 1.07740790e+00,  
-6.92503583e-01, 8.94828644e-01, 1.98642423e+00, -1.84501048e+00,  
-1.62371612e+00, 4.71272226e-01, -2.52298324e+00, -1.03547493e+00,  
-2.62225376e+00, 1.03087030e+00, 2.36459796e+00, -7.44194105e-01,  
-2.66283420e+00, -5.02994622e-01]

Приклад 12:

X2 = [ 1.59497651, -0.29476741, -3.33559328, -0.74816036, -3.43210542,  
-0.10455856, 1.42646339, -5.66443298, -1.6586231, -5.0464148,  
-1.03649915, 0.19554131, -0.16453545, -3.25376741, 1.73370914,  
1.88365785, -1.83856039, 2.72674828, -0.89905367, 0.76339281,  
-3.41747775, -1.82988242, -5.76738523, -5.75793334, 2.25416007,  
3.00952034, 0.53529247, 0.55958981, -1.3083818, -0.37677185,

-5.734123 , -5.84453343, -6.2500622 , -5.16477334, -0.92587308,  
 -2.01078797, -5.76194999, 0.27833881, -2.06006117, -6.23483031,  
 -3.80500668, 0.47337154, 1.60227604, 2.53498955, -5.17786716,  
 -4.16554207, -1.67170034, 2.21206825, -5.8528341 , -6.19298995]  
 X3 = [-2.61482147, -0.95242326, 2.74651969, 3.07225057, -1.98927218,  
 -5.28949524, 2.84844725, 2.67421976, 1.63966385, -3.08784455,  
 0.35603372, -3.00895235, -1.46256867, -5.24020816, -2.26781749,  
 2.67770261, 0.02031135, 1.87541271, 1.94619686, -4.69622183,  
 1.01966497, 1.28495685, 2.74594672, 1.36969784, -5.25358401,  
 -0.36057727, -0.31012576, -0.81531871, -1.85589209, 1.16877928,  
 -5.67260281, -5.34474816, -5.00422186, 2.95520617, -4.60888985,  
 0.12822718, -0.02591877, 1.38506867, 2.92818169, -5.32614711,  
 1.71882338, -4.06828803, 1.97042576, 1.63949712, 2.07402742,  
 -3.30514458, 0.81527578, -1.11083526, 0.74201026, -4.77807603]  
 Y = [ 0.14179374, 0.07263763, -1.15210285, -1.40409087, -1.27634194,  
 -0.37833094, 0.8161453 , -1.32771102, -1.233665 , -1.77860616,  
 -0.1290598 , -1.19937613, -0.31629674, -0.98388291, 0.4380772 ,  
 0.92970785, -0.42116454, 1.06611924, -1.0822174 , 0.16162519,  
 0.09463038, -0.94938863, -1.45947112, -0.53285184, 1.06611625,  
 1.76567549, 1.54969207, 1.23407469, -1.85249505, 0.10447863,  
 -0.94321939, -1.24707682, -1.99232369, -0.93118525, -1.8252621 ,  
 -0.39642798, 0.0532406 , 0.7367655 , -1.93578082, -1.73334974,  
 -0.22510489, -0.63649042, 1.30656043, 1.38110509, -0.57201422,  
 -1.66964401, -0.60487955, 1.63164052, -0.1976054 , -2.10924596]

Приклад 13:

X2 = [-3.51978569, -2.73093237, 3.09192451, 1.59762363, 1.00333748,  
 2.49881681, -0.39496829, -6.13009655, 1.09695281, -5.91138573,  
 0.72112188, -3.670498 , -3.69199852, 1.47690505, 0.58168424,  
 1.78659931, 0.40250451, -0.80633552, 2.80169193, 0.45459044,  
 -2.49504138, -5.73624431, 2.67210986, 1.51786573, -0.46912763,  
 -5.7551683 , -5.81669152, -3.63554412, -1.21426842, 1.1830696 ,  
 -2.31330357, -2.61606477, -4.32328324, -1.34954222, 1.87642743,  
 -2.42955996, -3.62270913, -1.955404 , -0.88882082, -3.47544186,  
 1.2420396 , -0.65607175, -1.10043376, -2.98501382, -0.05501604,  
 1.17180713, -2.50611946, -3.51138065, -4.32123591, 1.57307152]  
 X3 = [-3.9736208 , 0.93264514, 1.49279618, 2.9385822 , -1.14494085,  
 -1.4214713 , 1.57100089, 2.80455423, 3.13488985, -1.96353857,  
 2.61640343, -4.33332027, -2.30390395, -2.04634571, 0.55390611,  
 -2.41204339, -1.92105684, 0.58093801, -0.10194129, 1.63911759,  
 -1.07432759, -5.13173094, -5.45852614, -3.3264619 , -4.2901483 ,  
 -5.92621225, 1.61417017, -2.15826944, -5.62833392, -3.64990736,  
 -4.26896484, -1.28649575, -2.85561979, 0.4023374 , -1.80843889,  
 -5.56043077, -5.65413093, -2.09792531, -4.17934091, -5.22180973,  
 1.28569287, 0.65583332, 2.41517983, -5.9897482 , -5.55145321,

-3.05544744, -3.1719614, -4.83324832, -0.03118021, 0.91659966]  
 $Y = [-1.78012548e+00, -3.46339626e-01, 1.12446936e+00, 8.60369354e-01,$   
 $1.33546279e+00, 1.15967384e+00, -2.48075423e-01, -1.90308769e+00,$   
 $6.34315175e-01, -1.79180789e+00, 3.67739592e-01, -1.43308943e+00,$   
 $-1.41473416e+00, 6.00042917e-01, 1.62841529e+00, 3.16173175e-01,$   
 $-1.38950988e-01, -2.50612227e-04, 2.01333377e+00, 7.30341510e-01,$   
 $-9.11023240e-01, -1.27658429e+00, 9.80480928e-01, -1.03863643e-01,$   
 $-1.62271786e+00, -8.86943656e-01, -8.05650119e-01, -1.31277729e+00,$   
 $-1.29179305e+00, -1.99513752e-01, -2.38448121e+00, -1.06817411e+00,$   
 $-1.54330277e+00, -3.32509691e-01, 9.16086170e-01, -1.34484197e+00,$   
 $-4.82443470e-01, -2.23353963e+00, -2.13359624e+00, -8.36778166e-01,$   
 $1.73106505e+00, 1.16888246e-01, -1.55179728e+00, -8.43400128e-01,$   
 $-1.57442080e-01, -2.40202980e-01, -2.69542138e+00, -1.12084932e+00,$   
 $8.38997989e-01, 2.13927721e+00]$

Приклад 14:

$X2 = [-6.12905915, 1.71264233, -2.39887744, 0.28843337, -5.6980658,$   
 $-4.58504525, -5.32068049, 2.75924541, 1.81429773, 0.36501601,$   
 $-2.91286483, 2.50799493, 2.48681843, -5.24867786, 1.932719,$   
 $0.13675962, -3.98636678, 0.1731843, -4.54432413, -5.16674023,$   
 $0.61884932, -3.33196911, -4.42876511, -0.67873329, 2.29609784,$   
 $-0.90179782, 1.51931119, -4.99196073, 0.91498845, 2.28768267,$   
 $1.76062845, 0.64095744, 1.10628301, -3.43821747, 0.4071509,$   
 $-3.52781272, -5.97788859, -0.52499522, -2.74813374, -1.58373783,$   
 $-1.28189003, -0.31088343, -1.08385356, -5.65724261, 2.42921865,$   
 $1.43950181, -0.17558956, -5.07617022, 1.69938032, 1.28797248]$   
 $X3 = [-2.91775282, 2.53132807, -1.29118973, -5.80346263, -4.67485964,$   
 $-4.31932773, -1.99211229, -0.11566463, -2.1315104, 2.87537105,$   
 $-0.83690699, 2.7232605, -2.36289671, 2.17597848, 2.54430439,$   
 $-0.42614982, -0.05708553, -5.61139132, -4.53178947, 3.02140159,$   
 $-0.06182428, 2.48092316, -0.92291811, -2.23490729, -6.24377769,$   
 $-0.22277186, 1.22327739, -4.11665897, -4.76275084, -2.07615106,$   
 $2.87939611, -1.32105913, -3.37597998, -0.47874614, 0.3182908,$   
 $1.93555804, 2.13735356, -3.89902362, -2.90523407, 0.69908344,$   
 $-2.14214543, -5.43888344, 2.2323317, -0.79218759, 2.2687197,$   
 $-5.68733675, -5.7477902, -3.37193693, -5.92413008, -2.28899932]$   
 $Y = [-2.79146333, 0.97832009, -1.1937108, 0.37316256, -1.61096691,$   
 $-1.18527574, -1.2173231, 2.03887921, 0.57255654, -0.08524792,$   
 $-0.4107281, 0.71376805, 0.16442023, -0.69507379, 0.97317945,$   
 $1.01716518, 0.74103771, 0.15661362, -1.0095585, -0.93271462,$   
 $1.72362644, -1.06120682, 0.31791459, -1.74908627, 1.38498087,$   
 $-0.06801962, 1.90256045, -1.46542849, 0.3572306, 0.53023532,$   
 $0.8882795, 0.80719293, -0.30844336, 0.24850104, 1.49529778,$   
 $-0.57165656, -1.41002332, -1.9439147, -2.47840097, -0.52555587,$   
 $-2.14111774, -0.53519991, -1.43421024, -0.24498761, 0.9586169,$

1.32584077, -0.22068746, -1.81386284, 1.46419926, 0.28088184]

Приклад 15:

X2 = [-3.91631194, -4.75426742, -1.73108594, -2.38778458, -2.19706705,

1.30778278, 2.45805006, 2.72412237, -3.3409603, -2.21840896,  
-3.62186729, -3.49595242, 0.46798916, -0.44684021, 1.23578634,  
-1.83164899, -3.04933177, -1.49944203, -5.54594631, -2.54612632,  
1.97841138, 1.23040835, -3.30650377, -5.40348226, -6.1921151, ,  
-3.67327525, -2.97071517, 1.06220145, -6.17557279, -3.7267788, ,  
2.15369679, 0.50441608, -6.03536039, -0.61503373, -0.52493162,  
1.57838037, -5.48919192, -2.05854314, 0.61771582, 1.28121779,  
-5.26267252, 2.01542086, 0.07797581, 1.88085475, -1.26743314,  
-0.89379742, -0.90842522, -4.46890624, -1.06495536, -2.73620347]

X3 = [ 2.11435146, 2.76908066, 2.0059025, -1.02953806, -3.86869822,

-3.07155519, -1.99783812, 1.06830733, -3.71040828, -1.13030008,  
-3.83554927, -4.74609476, -5.23130881, 1.88328762, -4.03487963,  
-1.96341996, -5.57665581, 2.02042754, 2.93413353, 0.01625655,  
3.05586503, 0.28559506, -3.55737185, 0.8198783, -1.81562788,  
-3.06778089, -0.29165815, 2.98043491, -4.1348161, -5.6888133, ,  
-5.22418039, -0.96580333, 2.8571651, 1.28883269, -5.87037606,  
-3.21713453, 0.74425744, 1.54720222, -5.43796222, 0.14752138,  
-0.6466674, -0.14433693, 0.63935084, -2.946366, -2.04941302,  
-2.13813525, -2.23533962, 2.91984075, -3.35530223, -3.20952865]

Y = [-0.94117451, -1.28083662, -1.61496438, -1.09091862, -2.82557676,

-0.1315079, 0.71485106, 1.96020165, -2.39019227, -1.23737345,  
-2.19588691, -1.58950718, 0.28102565, -0.57023749, 0.05040518,  
-2.18775725, -1.22606204, -1.55408384, -1.87449682, -0.39364326,  
0.98075809, 2.28133905, -2.45793579, -0.39243219, -2.60012744,  
-2.28680468, -0.27877303, 0.61788021, -3.23100058, -0.83207514,  
1.21128937, 1.03539814, -2.42285749, -0.26298209, -0.59932351,  
-0.027311, -0.43214493, -1.25986977, 0.58532775, 2.32222075,  
-0.37370062, 2.48584326, 0.99578456, 0.09242471, -2.07046878,  
-1.87244981, -1.97963207, -1.2282009, -2.64057117, -2.79173254]

Приклад 16:

X2 = [ 2.742914, -4.02975595, -6.27173395, -5.89305228, 2.4622598,

0.24809587, 0.69858094, 2.92450876, -0.01164049, 0.74603103,  
-0.15773458, 0.79863577, 0.24603667, -3.19763741, 2.04684018,  
-1.40067987, 2.85121772, -4.45913427, -1.38777551, -5.4765192, ,  
-5.96979384, -6.14123861, -0.24681197, -2.01372594, -2.45923543,  
-3.29765069, 0.05608148, -2.90774011, -1.4600753, -3.83145305,  
-4.53915519, 0.01741052, 1.47277991, -2.53438101, 0.12224356,  
2.82038517, 2.13635283, -4.10280951, 1.01591167, -5.50017529,  
-6.24768297, -1.75023986, -2.17764719, -1.21032786, 0.95241368,  
1.12228621, -2.5432773, 1.54108905, -5.77253901, 2.49908362]

X3 = [-4.52640854, -0.54417853, -3.49151584, -4.61418241, -5.29566757,

2.54763505, 1.99867498, -4.8541009, 0.78832003, -4.64006191,  
 -4.66458754, 1.57806293, -2.845039, -2.31079268, -4.74420088,  
 1.52284983, -0.0343741, 2.22313556, 2.11299162, -2.88112431,  
 1.60977351, -0.33361136, 2.03639158, -0.91663434, -0.40896297,  
 -3.68783634, -0.7641433, -0.66525324, 2.77062833, 2.97897593,  
 -3.31382604, -1.30388849, -1.64188784, -0.59148939, -3.72611818,  
 1.58577448, -2.48379637, -1.18594114, 0.83070119, -0.43803895,  
 2.57765812, -3.10016876, 0.73170036, 2.04542704, -1.48882945,  
 -0.85834814, -2.83783532, -5.66792115, -4.01581509, -0.42453499]

$Y = [ 0.44552933, 0.06183446, -3.64792731, -2.51046414, 1.18365092,$   
 $-0.13875079, 0.70818146, 0.6305456, 0.80873532, 0.10369396,$   
 $-0.94405166, 1.15372988, -1.07778658, -2.08966333, 0.83650382,$   
 $-1.1008909, 2.24985969, -0.96298178, -1.56975891, -2.66543384,$   
 $-1.60947112, -1.12728583, -0.44976263, -1.04695474, -0.57210492,$   
 $-2.42195224, 0.67742929, -0.53929075, -1.92189932, -1.30818263,$   
 $-2.18445342, 0.08992911, 1.09383836, -0.65916743, -1.24036108,$   
 $1.49416465, 0.34367405, -0.50054961, 1.91949752, -0.4503075,$   
 $-2.61325352, -2.96230027, -0.64768525, -1.41596923, 0.92523091,$   
 $1.72872112, -2.77696788, 1.4054169, -2.82448732, 2.26151483]$

Приклад 17:

$X2 = [-5.76221949, -0.25734393, -3.05287214, 1.13867819, -3.82224922,$   
 $1.81530194, 2.85276153, 1.38511604, -5.51460229, -5.60564708,$   
 $-2.18489498, 2.58891197, -5.15991813, -6.16413967, -0.38164248,$   
 $0.51229617, 0.38170687, -0.88271305, -5.29533213, 3.09443868,$   
 $-5.35414152, 2.68286766, -4.36153686, -4.10888514, -6.27205452,$   
 $-0.40439462, -1.08979145, -0.14769449, -6.04715079, -1.25491091,$   
 $-4.94664077, -1.08034493, -3.99424615, 3.01945967, -3.00369076,$   
 $0.90989236, -0.96156683, -0.87472299, 0.39193248, -1.9423174,$   
 $-1.30778439, -2.55005127, 0.52223207, -5.55558264, -5.12406132,$   
 $-0.59608465, -1.76487397, 1.15355384, -6.17682579, -5.18418948]$

$X3 = [-5.75399441, 1.45176047, -4.11976423, -5.75108667, -2.14926786,$   
 $-4.2690717, 2.57899662, -4.30998619, -5.08476311, -2.00506714,$   
 $1.58106919, -3.88189129, -4.18678473, -4.22789839, -5.51411722,$   
 $3.00110052, -2.15123175, -5.72015223, -4.21843908, 1.07971336,$   
 $1.68610696, -5.39016136, -4.38808356, -3.27829208, -2.15586278,$   
 $-1.54922434, -2.507172, -0.10509205, -4.50527812, -5.17730628,$   
 $0.55346517, 2.72279284, -4.54359451, 1.29752192, -2.35390627,$   
 $-1.47777694, 2.13765328, 2.67119525, -2.89739991, -5.26655692,$   
 $-3.15217946, -1.0756344, -0.83986178, -3.69940568, -1.62884433,$   
 $2.53964134, -3.55232807, -2.39564165, -0.0347091, -3.74598753]$

$Y = [-1.56871391, 0.01738707, -2.32475375, 1.21489126, -1.64054912,$   
 $0.4392879, 0.79579151, 0.33119215, -1.70339185, -2.11929634,$

-1.27338939, 0.05804196, -2.12435766, -3.15050309, -0.57733411,  
 0.08048347, -0.40222092, -1.01655051, -2.20887794, 1.75901454,  
 -1.01514563, 1.15606355, -1.65822876, -2.17950786, -3.06083578,  
 -0.70646751, -2.36079542, 0.79458373, -2.78746381, -1.6229354 ,  
 0.07782317, -1.67718777, -1.56979328, 1.63097157, -2.23358333,  
 0.90017499, -1.29096391, -1.48749132, -0.92398887, -1.78215728,  
 -2.79954557, -1.08056601, 1.17330204, -2.74920639, -1.27095588,  
 -1.15718168, -2.95048591, 0.13274367, -1.0721545 , -2.39753429]

Приклад 18:

X2 = [-4.84856879, 2.85724251, 2.74830514, -6.12112122, -3.27139877,  
 -2.28189765, 0.8743853 , 0.53749946, -5.54783153, -3.96411303,  
 2.71920791, -2.18573076, 1.74075281, -0.43862673, -3.38263155,  
 -3.55192212, -3.17228343, -3.28050823, -2.85664229, -1.66531108,  
 2.22259749, -3.42123371, -2.95396523, -0.61280661, -2.45093302,  
 -3.79181562, -4.34555272, -0.70092627, -3.68118936, -2.91608536,  
 2.50818815, 3.04728121, -1.61272654, -0.80640154, -6.23605217,  
 -1.69041853, 1.40957332, -5.8314161 , -3.07903658, 0.4042016 ,  
 -2.27530158, 1.94510911, 2.04827899, -5.00420039, -5.67554853,  
 -1.40328794, 1.35834971, 2.07992257, -3.33669881, 1.7807719 ]  
 X3 = [-1.74241386, 1.6905398 , -2.08729073, -3.65081631, 1.43330125,  
 1.93910003, 3.13132551, 2.09888394, -3.56785562, 2.08175576,  
 -2.91224723, -1.38628336, 2.52110909, -4.29117929, 1.26810334,  
 -3.49006473, -6.11455173, -0.98371856, 2.82730741, -5.33973554,  
 -3.31991941, -2.19026673, -2.70240386, -5.19429198, -3.69031151,  
 1.05014231, -0.51448575, -1.81338295, 0.39607664, -4.59930293,  
 -3.34465886, -5.24825698, 2.76350207, -2.03135986, 2.74838713,  
 -5.38201446, 0.70181276, -2.89645519, -2.40666985, 1.17679385,  
 -2.40707241, -1.56062808, -1.54599194, 2.32719308, 0.21510549,  
 -3.15814175, -4.16116769, -5.95634948, -2.614812 , 0.7051994 ]  
 Y = [-1.23746983, 1.3866387 , 0.49988263, -3.41791808, -0.67643441,  
 -1.54971176, 0.46622079, 0.45986569, -2.78367204, -0.90461389,  
 -0.08998663, -1.52461063, 1.06086537, -1.58828789, -0.48077325,  
 -2.34755767, -1.01404958, -0.61718292, -1.7797451 , -1.6928037 ,  
 0.01127256, -1.85816626, -2.51222094, -1.04780889, -2.83790795,  
 -0.12733902, 0.11254964, -1.33797923, 0.15598799, -2.02461124,  
 -0.07058274, 0.87465196, -1.97850911, -1.68101873, -2.65164168,  
 -1.67182468, 2.25062422, -3.05266575, -2.23680955, 1.05583327,  
 -2.58530767, 1.29454525, 1.30913981, -1.2267445 , -0.46338631,  
 -2.85213803, 0.2072854 , 1.56743706, -2.25001286, 2.3707648 ]

Приклад 19:

X2 = [-2.78405297, 2.59383317, 0.25486728, -3.63758395, -6.06482988,  
 0.65247385, 1.6865909 , -2.90567417, 1.91123745, -3.51475872,  
 0.09540382, 1.94074285, -1.49550402, -0.5059801 , -0.37257236,

-1.37395477, -4.41140735, 1.51652573, -4.20446495, -2.41073929,  
-1.65082223, 2.66598547, 1.15365637, 0.98305176, -5.75679277,  
1.94583344, -0.09058264, -4.98746 , -6.26001366, -6.14469507,  
0.35682901, -3.46293518, -3.38500077, -3.12940256, -4.18953286,  
-3.57699461, -6.26549231, -4.57202005, -2.36657828, -4.38254698,  
-2.24991081, -4.61453384, -2.76893454, -0.61215395, -0.18857153,  
-0.99110063, -5.78761555, -0.19588158, 2.17450841, -4.12308474]  
X3 = [ 2.38928956, -1.82659892, -4.05940831, -4.8363838 , -3.84586175,  
-0.99441571, -2.99449263, 0.69653134, 1.79667114, -2.10973511,  
-5.43523171, 2.20647995, 0.00676635, -4.00527035, -1.59603019,  
0.39380505, 2.09913692, -5.73738524, -4.73676956, 2.70072823,  
-6.195562 , -4.41297318, -0.45923358, -0.06794227, -3.72039352,  
-0.60888772, 2.97185788, -3.90903507, -1.37296512, 1.49593594,  
1.36219082, -2.52762694, -3.04898411, 1.43314812, 3.06601148,  
-1.0145536 , 0.30897769, 0.33572045, -4.68013741, 1.85659942,  
-3.22792366, -4.5466961 , 2.84410971, -0.60264653, -2.19250199,  
-3.20828388, -0.87999892, -1.64729582, -0.65551075, -4.41230591]  
Y = [-1.66111567e+00, 8.49528045e-01, -9.00358995e-01, -1.44662126e+00,  
-3.26669276e+00, 1.17063492e+00, 4.59056003e-02, -3.55796618e-01,  
1.56282146e+00, -1.73174242e+00, -3.46409903e-02, 1.25561626e+00,  
-4.19884532e-01, -1.86372800e+00, -7.22647303e-01, -3.80977937e-01,  
-8.73681589e-01, 1.42356341e+00, -1.37131954e+00, -1.94378742e+00,  
-1.40807822e+00, 3.88277383e-01, 2.05411345e+00, 2.08054365e+00,  
-2.95787994e+00, 2.24743787e+00, -6.52967780e-01, -2.18548969e+00,  
-2.17955363e+00, -1.72721923e+00, 8.50688890e-01, -2.12428452e+00,  
-2.42090227e+00, -7.54075543e-01, -1.22382304e+00, -4.96534666e-01,  
-1.17800785e+00, 2.85472255e-01, -2.19232270e+00, -6.85845411e-01,  
-2.96824942e+00, -1.56633262e+00, -1.82627108e+00, 2.01907143e-03,  
-1.14600820e+00, -2.57887121e+00, -1.09253366e+00, -5.67246025e-01,  
2.19639857e+00, -1.65233030e+00]

Приклад 20:

X2 = [-3.27312723, -4.78867196, -0.61720307, -4.44756969, -4.17379639,  
-3.37072885, -6.01999311, 1.54858085, -2.74469 , -5.53153448,  
-3.90465232, -5.2476338 , 0.13430512, -2.76872839, 1.5995535 ,  
-1.11179314, 3.02789241, -3.40854683, -3.58016955, -3.08674081,  
-2.46020978, -3.09262264, -0.89290425, -3.99751115, -4.98358503,  
-5.90198369, 1.91233165, -2.72350434, -2.25680952, -6.26511702,  
-0.05569732, -3.13370547, -3.81596245, -2.3080819 , 2.50522753,  
-5.94195322, 2.53001381, -5.623657 , -1.93796499, -0.69875184,  
3.13095466, -5.70206097, 1.33023641, 1.30621497, -4.23244556,  
-2.41900444, 2.38904484, 2.43308648, 2.18486215, 2.88539414]  
X3 = [ 3.03642156, -6.07085969, -0.63732244, -4.83335457, -6.12535967,  
2.66213939, -3.26910951, -1.06746306, -4.9214278 , -4.91420259,

-6.04574257, 2.62132131, -0.54500524, -6.227489 , -5.61660549,  
 0.31837789, -1.53708687, -1.15910964, -1.36627615, 1.94986022,  
 -4.27537187, -3.49237999, -3.583614 , 0.05464628, 0.47909929,  
 2.50750477, -0.29148845, -3.98336558, -4.32536962, 1.57835954,  
 2.63237971, -5.40098275, -1.7430927 , -2.05423122, -2.92677048,  
 3.09318006, -5.4023377 , -0.57987152, 2.17534261, -4.78962274,  
 3.09969408, -3.93347982, 1.17523701, 1.88180909, 1.43437529,  
 2.46566159, -2.89436849, 0.11854458, -5.69950871, -4.70797979]  
 $Y = [-1.56656586, -0.71173799, -0.02880841, -1.29235595, -0.61947303,$   
 $-1.46325871, -3.35509702, 1.76400985, -1.8392432 , -1.85815984,$   
 $-0.67952466, -1.53702855, 0.94089213, -1.23258486, 1.40292175,$   
 $-0.19847161, 0.96501226, -0.72928693, -0.87271707, -1.20727314,$   
 $-2.49249894, -2.58943277, -2.45495423, 0.2872313 , 0.08212669,$   
 $-2.16034849, 2.43142739, -2.58228569, -2.51251855, -1.94733959,$   
 $-0.54786724, -1.27859072, -1.20653126, -2.24705305, -0.00435187,$   
 $-2.3133514 , 1.22839657, -0.66725789, -1.76038791, -1.46478584,$   
 $0.57123987, -2.79417917, 1.90127693, 1.30210549, -0.33188243,$   
 $-1.85212257, 0.04756566, 2.44797394, 1.47979845, 0.52734629]$

Приклад 21:

$X2 = [-3.32722546, -0.83502225, -1.38915075, -0.96217234, -0.53964866,$   
 $-4.03412535, -5.14529641, -0.13455934, -2.05368862, -3.63681312,$   
 $-5.9110675 , -0.92992752, -0.04392287, -2.72085702, -4.48908117,$   
 $-0.63413688, -4.64203101, -2.68302947, -6.26591198, -3.7198381 ,$   
 $-2.73675045, -1.47092614, -0.76667079, -0.68974594, -1.49222102,$   
 $-6.21197061, -1.82861492, -2.52851803, -0.35196466, -1.05106745,$   
 $-3.69993156, -4.19545774, -5.51267483, -5.25611578, -2.69996581,$   
 $-5.73331863, -1.71658356, -3.59841708, -5.07376978, -6.0351413 ,$   
 $-5.2724141 , -2.46719207, -0.09851674, -4.20339221, -4.38926317,$   
 $-3.30647326, -0.8699844 , -4.78109666, -5.42893216, -6.0156718 ]$   
 $X3 = [ 5.80925448, 1.46317989, 0.73045831, -6.50270972, -0.95965619,$   
 $-6.87858104, -4.35434674, -2.45627993, -7.00149658, 1.69013337,$   
 $-6.32659055, -1.32091667, -5.20050312, -0.73051936, 4.98181096,$   
 $3.62699273, -5.74910718, -5.23468876, -1.21890531, -1.88581334,$   
 $-2.78180476, 0.21095886, -2.44947593, -3.43319611, 5.99591896,$   
 $0.15753131, 3.35889836, -7.18722966, -2.41416171, 4.82308419,$   
 $3.11553355, -4.79296581, 4.04143548, -4.1445582 , 3.78248555,$   
 $0.87503863, -3.27233995, -6.37940602, -2.95857235, -5.60365939,$   
 $0.54103623, -1.41099935, 6.10062483, -7.71083 , 1.67481886,$   
 $6.1135141 , 4.92297889, -5.76488186, 3.88039131, -0.85529208]$   
 $X4 = [ -6.63588952, 7.7154053 , 2.16519321, -6.95495611,$   
 $-1.16807849, 3.65700112, 8.14517597, 9.869208 ,$   
 $12.59044342, 13.57150974, 1.36739269, 15.21044977,$   
 $-12.30992344, -11.35526592, 12.22916695, 10.91234827,$   
 $11.73086262, -7.33129138, 12.82176008, 0.7187913 ,$

-0.68954523, 15.63197556, -9.18717267, -4.88852424,  
 -9.26228892, -8.68609742, -1.79328732, -4.14672485,  
 -5.72906695, -14.14453028, 0.85737843, 7.11169923,  
 10.90437463, 2.03913213, 4.10955242, -5.84349096,  
 -12.12806008, -7.26538545, 6.57861693, 3.28874046,  
 -0.86597156, 0.85904316, 2.41430768, -0.13214458,  
 12.160048 , -0.53634684, 13.65777426, -1.57917404,  
 -3.30427476, 8.74844316]

Y = [ 0.43378414, 0.59595823, -0.1941809 , -2.97803369, -0.72956338,  
 -1.54111584, -1.31879914, -0.3305931 , -1.28948682, 1.27112795,  
 -2.33958153, 0.69112907, -2.52300183, -2.14349776, 2.28237583,  
 0.67651625, -0.29414796, -3.36144762, -0.65438501, -1.38205285,  
 -2.9903869 , 1.31610806, -3.30774509, -2.9462521 , -0.16912566,  
 -2.42085176, -1.7460489 , -3.21960227, -2.29134682, -1.60576349,  
 -0.56040524, -0.95177028, 0.45036472, -2.2401629 , -0.58004972,  
 -1.4246806 , -4.55966615, -2.78520015, -1.68629723, -2.40937718,  
 -0.46918255, -1.46251127, 2.70031531, -2.68869176, 1.08623437,  
 1.28860504, 2.27607641, -1.97659232, -1.13738867, -0.43001073]

Приклад 22:

X2 = [ 1.16815448, -3.70145435, -1.6946044 , 4.2204124 , 1.25349687,  
 -5.53905877, 5.50794317, -5.29062523, -6.08177525, -0.84814623,  
 -5.44212697, -2.98969956, 0.97077533, 0.65561252, -4.5323805 ,  
 1.70519218, 5.2873673 , -5.54087862, 5.21722743, 4.93259829,  
 -5.65657109, 1.8787557 , 5.41250085, -2.65125491, 4.77946361,  
 6.07317753, -5.82130136, -6.26259602, -5.48781188, 2.34634941,  
 -5.11339499, 2.07190506, 0.68943102, 4.36537482, -2.47338122,  
 4.5197695 , 4.9034766 , -2.28487102, 2.77655291, -1.54615988,  
 2.08438638, 2.53377538, -1.34401827, -4.86549921, 2.86253082,  
 -5.40471353, 6.04717486, 1.24286143, -4.8253456 , 4.1332041 ]

X3 = [ 4.11188302, -7.12818445, -0.58950278, 0.3099041 , 4.18131469,  
 -1.93885061, 5.34159025, -5.25034744, 4.53306664, 0.91847673,  
 -6.11093347, 0.67635574, 3.4472766 , -2.69193736, 2.04727793,  
 3.17434289, 4.50060364, -1.48987738, 2.39048603, -3.7984797 ,  
 0.56177756, 0.05011996, 3.45594478, -2.5240466 , -7.50223418,  
 -6.88996286, -5.39501935, -0.75805098, -5.89135066, -5.96885745,  
 -0.20279909, -2.55180728, 3.09287994, -3.27269901, 5.90781461,  
 -0.59476649, -3.75602818, 5.42027754, 5.34214237, -2.39004627,  
 -1.22682638, -6.69107407, -3.81575068, -7.68287076, -6.70569866,  
 -6.23104538, -2.6755211 , -6.81227643, 3.69676962, 2.20344569]

X4 = [ 5.35913243, -5.94848838, -10.40633562, -11.60978253,  
 -3.49789421, -4.31480694, -15.55325352, 11.01989623,  
 -0.7394921 , -1.46983746, 0.61322875, 2.17620164,  
 -9.00319534, -6.32847525, 1.93998276, -5.5787383 ,  
 -8.71750443, -7.72566197, 5.51744493, 5.76282506,

-15.51213322, -15.57718225, 10.42307785, -12.39071243,  
 6.72593702, 8.76179252, 13.40860043, 0.69945145,  
 -5.61716204, -10.73838942, 8.97363242, -10.77917018,  
 11.49343889, -13.3196764, 9.42242352, -12.62446274,  
 6.68082009, 7.28868465, 12.62139553, 13.02975098,  
 15.35488114, 7.23930514, 8.86816251, 9.86741958,  
 9.0103876, -13.54300838, 2.42797821, 2.33370258,  
 9.81092153, -0.95361892]

Y = [ 2.41842892, -2.87571734, -2.1044702, 0.25885849, 1.65015848,  
 -2.51988111, 1.32140426, -0.93328849, -1.05716359, -0.56390415,  
 -1.93580716, 0.00841462, 0.10865016, -1.43536409, -0.14234348,  
 0.97389634, 0.99872822, -2.74436548, 1.65711894, -0.1940042,  
 -2.51395038, 0.43892783, 2.50307643, -4.1461768, -0.10375957,  
 1.87862923, -0.8674184, -1.61660756, -2.71069813, -0.53047541,  
 0.90999861, -0.98632287, 2.09723787, -2.69620421, 2.04714316,  
 -0.32304413, 0.02457581, 1.50513193, 4.72943315, -1.04008617,  
 3.34641595, 1.31982961, -1.85917478, -1.63176563, 1.31054593,  
 -3.83178531, 0.85854805, 0.52680729, 0.64449333, 0.57854529]

Приклад 23:

X2 = [-6.18468725, 0.20991253, -4.96045349, -2.41680063, 3.07646797,  
 -5.12051471, 0.31797067, -0.34753586, 0.45706729, -0.88411897,  
 -0.79610169, -3.0342837, -4.97516397, -5.63020726, 5.47738995,  
 -0.91574196, -0.65509219, 5.93327439, 4.82931388, 5.27947218,  
 -1.77896995, -2.8992287, -4.61970948, -2.14642129, -2.95347992,  
 2.14973689, 2.63513841, -1.90559195, -5.94116571, 5.53672368,  
 0.35944765, 4.52988551, -1.85299943, -5.08838478, -4.94494902,  
 -1.97806243, -0.95894114, 5.11552241, 5.70505411, 5.72345669,  
 -2.2375552, -0.59694597, -4.66180634, 2.88666361, 3.3512298,  
 2.98061806, -1.90111109, -1.18451418, 2.10514961, 1.29222093]

X3 = [ 1.51195531, 4.43731534, -3.40358765, -5.04163907, -4.20122185,  
 3.41281468, 3.44024616, 2.83195333, 3.65278447, -6.89548464,  
 -1.11094606, 0.17009473, -5.00896174, -1.41750301, 1.34308049,  
 0.3940741, -0.49423981, -2.81810557, -5.9993712, -3.41578277,  
 1.43948066, -1.22595469, -1.45279903, -1.31091197, 3.783809,  
 5.47823587, -2.51092748, -5.35074254, -4.064076, -5.22258213,  
 4.68395837, 4.77797423, 2.90302544, -4.52023465, -5.20524592,  
 -6.03463762, -1.31558786, 2.16357314, -3.85619469, -6.70901026,  
 -3.97181233, -3.43807362, 0.86984089, 4.82920088, -5.72715908,  
 -5.97806262, -4.2958295, 5.27040454, 0.27706934, 4.5013373 ]

X4 = [ 12.6545119, -9.67338084, -12.46513644, 15.55755139,  
 7.32606879, -4.23751338, -11.40094597, 10.31772831,  
 -3.88403395, 10.0992423, 2.06373096, 4.02755356,  
 14.29761033, 2.59745282, -12.73706418, -13.03518809,  
 -6.65927616, -8.77184048, -7.61756542, -11.24211914,

-9.12916589, 1.83977945, 1.53744338, 10.70452122,  
 -2.30162241, 2.53035576, 13.03075845, 7.5155241 ,  
 2.69071326, -8.8240454 , 7.3527639 , 2.74335087,  
 8.41776202, -13.06780418, -10.56058578, -5.2842658 ,  
 15.37584273, -12.07103574, 12.41802294, -6.52288615,  
 -0.50141497, 14.7505469 , 4.37794569, 8.04164426,  
 11.16983073, -12.16212334, 1.13730201, -9.71394772,  
 0.71611299, 11.26512881]

Y = [-0.08911646, 0.117889 , -4.03603419, -0.65575479, 0.61835557,  
 -1.19049505, -0.67332513, 0.69579979, 0.48101144, -1.09434343,  
 -0.48692118, 0.04311641, -0.12703931, -1.2949977 , 0.25714945,  
 -1.82113836, -1.06097872, -0.89503056, -1.1153651 , -1.80727626,  
 -2.14899656, -0.92591826, -0.68442784, -0.51373447, -1.20889861,  
 3.92911306, 1.66568369, -1.4416351 , -2.96968202, -0.83638069,  
 2.69819691, 2.43026224, -0.36955723, -3.95728803, -3.01310021,  
 -2.88062277, 0.66840252, -0.27741338, 1.32749141, -0.37588307,  
 -3.23482159, -0.51549301, 0.40169672, 3.74677648, 1.31144169,  
 -1.06401603, -2.72770058, -0.52455245, 2.54004058, 3.57258307]

Приклад 24:

X2 = [-5.32795145, 0.96001286, 4.77214627, 5.84785001, 4.59178183,  
 -0.50911518, 0.47318374, -1.42357784, -5.6272266 , 2.73230602,  
 4.12548849, 0.7354239 , -6.00347229, 4.67847836, 0.08093171,  
 5.50588089, 3.22508491, -5.26356999, 4.69399139, 0.94109211,  
 2.41383775, 3.56017425, -6.14215376, 5.88680608, 0.32250043,  
 3.12030798, -5.60125155, -5.53918594, -2.5938378 , 1.67313501,  
 6.13230997, -2.74310747, -3.58405196, -4.92036594, -5.88539444,  
 4.85334058, -0.69794194, 2.56856178, -5.14046351, 3.05855991,  
 -3.14629066, 0.54115877, 0.21929361, 5.98677117, -3.50171169,  
 -1.3051075 , 3.04703511, 1.98257973, 2.55409632, -0.84427705]

X3 = [-2.24975877, -4.58678552, -2.88037715, -7.55486083, -5.59027337,  
 -5.43351029, -7.54902494, -6.30779156, 5.33838266, 2.16335209,  
 0.99756987, 5.1801027 , -1.15796273, 1.16068269, -0.73973806,  
 -4.75287068, 4.63519444, -1.57889602, 5.80001089, 3.44749824,  
 0.34249154, -1.42436448, -2.77088045, 4.60968526, 2.39620489,  
 5.54896747, 0.08127312, 3.74105714, -6.10737948, -1.1800863 ,  
 3.62600165, 0.27524244, 5.45526197, -2.58699611, 5.44086858,  
 -6.44764202, -3.99424289, 3.36131748, -0.29377621, 2.64187582,  
 0.60130397, 4.81915791, -3.80503485, 3.35187703, -5.83047426,  
 -7.1340908 , 5.08577263, -7.53132074, -3.3287909 , -3.55066358]

X4 = [ 2.66640547, 6.37700431, -15.1941726 , 4.14151423,  
 -1.91438566, 7.46162148, -7.64086515, -12.05777499,  
 -9.15942796, 0.57586594, -13.15807296, -6.38925715,  
 -14.06503272, -6.78525825, -7.62919546, -3.60131655,

1.29616926, -1.1957755, -12.44846703, -8.3560008, 5.47886755, -8.08207217, 6.09000436, -11.45690808, -0.42464691, -9.49494132, 1.87109675, -11.4513776, 3.04553317, -3.84180088, 6.39969051, -9.76124033, 1.21284767, -5.01524487, 3.04675317, -10.34290111, -7.20835491, 2.23320601, -7.0845328, -10.91120588, -4.22534714, -0.07441074, -1.2348939, -2.4308825, -13.21421884, -14.57194214, 2.67439068, -5.32750876, -8.06264103, -10.18260674]

Y = [-1.85120830e+00, 5.13925422e-01, -2.67572863e+00, 2.33903623e-01, -5.51160028e-01, -5.21724676e-01, -2.28578097e+00, -3.66575310e+00, -6.48984808e-01, 1.60257345e+00, -2.64888678e-01, 1.83792306e+00, -3.68184206e+00, 4.83922464e-01, -5.69457726e-01, -3.20667626e-01, 2.54345141e+00, -1.79138320e+00, 1.54130044e+00, 9.05166201e-02, 2.83893854e+00, -5.03572214e-01, -2.81503587e+00, 1.63499574e+00, 3.44478181e-01, 2.07449071e+00, -2.06050279e-01, -2.21910678e+00, -1.85801089e+00, 1.10258158e+00, 3.06749458e+00, -1.58693143e+00, 1.43100919e+00, -2.67875792e+00, 6.70194553e-01, -1.26604132e+00, -3.41230609e+00, 1.90001111e+00, -1.25185403e+00, -3.60679913e-03, -6.49426039e-01, 2.01936714e+00, -1.67492638e+00, 1.56555436e+00, -3.43949547e+00, -4.60864851e+00, 3.20489571e+00, -7.77908453e-01, -1.40627580e+00, -3.77972161e+00]

Приклад 25:

X2 = [-1.49819383, -0.96896184, -2.73560636, 5.81564013, -2.37629063, -1.86445385, -1.95925641, -0.32239694, -4.28214481, -0.59862096, 1.5348325, -4.54008567, 0.73433997, -4.0862496, -3.46175109, -3.9126834, 0.83413943, -4.33593166, 1.14771336, 3.90898773, -4.46830855, 4.28037004, -1.79513684, 3.3842419, -2.13072822, -0.77517267, 3.73530702, -3.60276215, -0.8351985, 4.20728884, 4.96156642, -1.36890057, 5.24180621, 0.91582195, 0.83345787, 0.86369545, -4.83871776, -1.65136874, -4.50320856, -1.60092932, 3.66423781, -3.02859722, -1.98512191, -2.48861188, 4.41718315, 2.68265048, 3.11702464, -4.41620987, -6.24525522, 4.3430118 ]

X3 = [ 4.716618, 0.23812036, -3.58452718, 1.39522413, -0.56282065, 5.93745248, 5.82567544, 5.39673331, 1.60114101, 5.30443959, -6.44124789, 1.55535586, -1.84234241, -2.38909128, -6.11594478, 3.18094683, -4.76907213, -5.81374197, 1.72444305, -1.65173543, -5.53364788, -1.51760836, 2.08132606, 2.03593568, 2.53763376, -3.27288222, -3.01809735, 3.6469155, -5.16548583, -5.60119524, -6.15769869, 2.19250444, 4.98214424, -1.57615816, -0.30067912, 4.22575186, 6.23725041, 3.16147185, -6.01071491, -2.27117179, -0.24303421, -4.30255376, 3.78899812, -1.38199697, -2.84099668, -0.53659022, 2.83046503, -1.65728629, 4.79644998, 5.04531903]

X4 = [ 3.2983519, -0.53115192, 3.57935918, -5.83044168,

-3.2655414 , -11.49386743, -11.00170514, -10.96395123,  
 1.19232587, -14.8791578 , -0.8696828 , -10.70853318,  
 5.26914164, 3.23817038, 2.24591761, 7.03968338,  
 -9.53931812, -10.57033621, -1.78371632, -13.50622656,  
 -8.52969984, 7.24118352, -4.4500883 , -8.98553635,  
 4.49743242, -1.33582746, 6.3821544 , -13.73431751,  
 -5.78441622, -8.14582051, -12.99560444, 1.36677709,  
 -0.05041762, -11.74792676, -10.82800009, -8.29289327,  
 -8.00107701, -12.83750524, -7.63805435, -11.00578534,  
 -12.54908435, 7.05954255, -9.4439258 , -12.8822627 ,  
 -6.06031039, 4.93807054, -12.53779592, -6.12085753,  
 7.19320218, -7.23100721]

Y = [ 0.22725771, -0.37900353, -2.63757995, 1.51225732, -1.30386012,  
 -0.40576137, -0.39823472, 0.39910519, 0.00972665, -0.73408865,  
 0.26851917, -1.41121991, 0.65304789, -1.5558446 , -1.40422964,  
 0.26498081, -1.41130635, -2.6686539 , 1.20485105, -1.50920812,  
 -2.73966835, 1.30524384, -1.72383959, 0.01704948, -1.08848691,  
 -2.88413677, -0.02425571, -2.36192824, -2.62646401, -1.32748509,  
 -1.6264236 , -0.9238957 , 2.60260663, -0.695796 , 0.48940871,  
 0.62241576, 0.57398116, -3.00197816, -2.61123075, -3.75943899,  
 0.04079997, -1.68969686, -2.26413253, -3.23328176, -1.54033331,  
 2.32668592, -0.3845479 , -1.91169422, 0.19211207, 1.31490113]

Приклад 26:

X2 = [-5.37863339, 4.88903575, -3.36184526, -3.08373379, 1.15426344,  
 2.30026273, 4.91683805, 2.61450259, -0.66303054, -0.07445993,  
 0.86370568, 0.02347742, -5.67817714, -1.57548731, 4.91535074,  
 4.78289992, 3.02179814, -5.3150083 , -0.78546443, -4.76575861,  
 4.78044632, 5.04794457, -4.09861339, -2.73957604, -3.29154108,  
 2.0733719 , -2.09930626, -5.01155205, -1.34857829, 5.1330189 ,  
 2.04546272, 1.9858171 , -1.75322589, 5.23931282, -2.27421656,  
 -1.23050663, 2.85595549, 4.58486329, 5.95238849, 3.4703052 ,  
 -0.24276457, 1.39876489, -1.81005878, -0.76044889, 2.30328186,  
 2.37219949, -4.24025022, 0.9066766 , 5.41439128, -5.50427646]

X3 = [-2.82867512, -7.59252966, 3.75828536, -4.53887211, -7.66547011,  
 4.09589054, -1.65656066, -4.40045882, 2.20670152, 2.55789959,  
 -5.64490673, -6.47371564, -2.95214796, 4.30425789, -0.94535812,  
 1.72624143, 3.20411383, -2.0135846 , 1.21634347, -1.17172698,  
 5.4161573 , 0.24260711, -2.04339569, 2.23813963, -3.87142009,  
 -0.74191743, 4.50370924, -4.05183995, -3.75728418, 2.76542173,  
 1.539816 , -2.35779031, -1.63023359, 6.04502859, -6.56401075,  
 -2.8070839 , -3.95124836, -3.82744302, 2.76801291, -6.43372946,  
 -0.0487398 , 0.20328187, -4.07627892, -2.50091544, -4.37794713,  
 -4.71978017, 4.3558486 , -1.22166974, -7.11254624, -1.83536862]

X4 = [ -9.25504673, -2.30895657, -14.25460608, -10.7080647 ,

4.52973109, 0.07857672, -5.72287195, -3.56615227,  
 6.00807302, 3.18112934, 4.16721705, 3.46327747,  
 -6.59490305, 0.95921849, -10.41147559, -5.91095225,  
 -13.09697518, -14.6632734, -8.7036467, -7.59030276,  
 6.41555687, -9.27322603, 4.69044913, -15.27791569,  
 -7.01349221, -10.73315499, -1.88812398, -4.29702561,  
 3.68741157, 0.89451153, 0.77349645, 0.20286939,  
 1.51392932, -12.08469939, -14.62733767, -14.93284152,  
 -5.09037031, -4.12493224, 6.16871212, 2.27560772,  
 -11.02562907, -5.89041432, -1.32489447, -3.24145329,  
 5.12213348, -0.90570368, -6.1067265, -13.88506488,  
 1.30651238, 4.1741922 ]

Y = [-3.83582532, -1.40605934, -2.47743632, -3.63608901, -0.29665657,  
 2.1406177, -0.28318802, -0.43199685, 0.0148871, 0.30588,  
 0.47671014, -0.56486675, -3.89562967, -0.36885903, -0.072284,  
 0.46372086, -0.41568474, -3.89452886, -1.44874907, -1.83046643,  
 3.54494303, 0.62361874, -1.201772, -3.09770952, -3.60078976,  
 0.76069845, -0.8307797, -2.85725287, -2.65281679, 1.20193618,  
 2.15455903, 0.37000875, -1.65495015, 2.08473972, -4.37358641,  
 -4.68955099, -0.83689158, -1.31064265, 2.51667283, 0.36524225,  
 -0.68856896, 1.56525916, -3.38820933, -2.57709945, 0.50774507,  
 -0.0387418, -0.49217352, -0.84160487, 0.12930502, -1.6268826 ]

Приклад 27:

X2 = [-6.00371965, -4.33875411, 1.22834499, 4.01843268, -3.16578187,  
 -0.65142504, 5.72806213, 1.18751282, 1.33741524, 5.40758272,  
 -0.70206296, 4.19445177, -2.54918105, -3.12209299, 0.22793974,  
 6.2030817, -5.77908582, 3.94210824, -5.67751757, -0.05315186,  
 -3.07643933, 1.18196614, 4.53918961, -2.05702044, 1.61488895,  
 5.70632591, 6.0340459, -5.80049016, 5.0413898, -3.07597371,  
 4.64364855, 3.72927726, 2.79303443, -3.38252448, 4.5906843,  
 1.41218964, -2.02117674, 0.89160468, 6.00115253, 4.18552065,  
 1.63596614, -2.92205338, -0.79452536, 1.46576785, -0.49980231,  
 -0.41936738, -5.5995215, 5.48933507, 2.04487482, 2.34171394]

X3 = [ 2.18325126, -0.17709028, 2.67555091, -1.13007202, 2.0395625,  
 3.04101224, 6.09248746, -3.63851282, 2.40270556, -6.61751828,  
 1.04186139, 0.5658424, -7.34608587, 4.5144678, -5.65202402,  
 -1.04246746, 2.13304032, -7.35965069, 4.89610442, -6.04259755,  
 -0.71031061, 1.30315763, -6.43311867, -7.0608107, 3.86857508,  
 -4.50725559, 2.31830035, -5.79280516, -2.95358559, 5.12056189,  
 3.58665738, -1.63793131, -6.76609782, 3.38871865, 1.02390394,  
 -3.93767409, -4.00992554, 5.1886698, -1.21683602, -4.13027433,  
 6.2545965, -3.12734403, 0.1361961, -1.42511508, 3.0999378,  
 6.07398047, -6.307597, 5.18151276, -7.76343933, -7.20904625]

X4 = [-14.39226868, 3.67240823, -9.27654982, 0.8550267,

-13.64584339, -5.82024556, -8.81923031, 7.69223449,  
 -8.61210104, 6.14029099, -14.33845784, 4.67490238,  
 -5.6797344 , -12.53122675, -8.09754352, -0.59792326,  
 -3.02562494, -10.46093476, -15.28946586, 1.10044591,  
 -7.12508179, -9.4953538 , -0.63213741, -1.72905305,  
 -14.67560793, -4.07902508, -11.85362756, -9.07637243,  
 -11.60078779, 1.04909842, -8.78429095, -12.33180277,  
 -7.17651875, 6.22623643, -7.98669015, -1.38892453,  
 -2.88174718, -9.64016613, -14.1796356 , -6.41827768,  
 -10.87298893, -4.89759068, -14.31727695, 5.25130532,  
 -14.33187132, 7.71889908, -0.77303714, -7.34008753,  
 -5.69613214, -10.43338914]

Y = [-3.59568638, 0.4237696 , 0.15003838, 0.96654971, -2.66675991,  
 -1.38001293, 2.81725843, 0.63579486, 0.25868036, 0.88596452,  
 -2.00952925, 1.92528098, -3.5855568 , -1.54715676, -1.7142974 ,  
 2.06467895, -1.81894199, -2.00000157, -1.90235002, -0.65519523,  
 -1.6875026 , 0.68105765, -0.40822252, -3.20761594, 0.02125568,  
 -0.2421348 , 0.64774727, -3.6111292 , -1.93935114, 0.82043059,  
 -0.17001905, -1.13460701, -0.81143568, -0.09126757, 0.29879518,  
 -0.55400902, -3.50157441, 1.6552959 , -0.05274893, -1.65841807,  
 2.80320748, -3.30329836, -1.95654408, 1.64082833, -2.43557078,  
 2.9841902 , -2.49215949, 2.02877143, -1.10779447, -1.12547358]

Приклад 28:

X2 = [-2.2962051 , 4.02866462, 2.51694835, 2.49469501, -4.30324511,  
 5.66112016, -5.4242946 , 0.23992035, 3.3590619 , 1.3218329 ,  
 3.73460052, -1.14817014, 0.04609293, -5.04600088, 4.31027206,  
 4.71509127, -4.9829601 , 3.51409501, 2.97856942, -3.00732752,  
 -0.99288276, -5.23045557, -4.09719727, -4.67285162, 2.80207272,  
 5.96338935, 2.79810274, -5.13440816, 2.51999159, -5.80070717,  
 1.34429148, -4.33010571, 3.99609945, -3.63524965, 3.94793765,  
 5.76965973, 0.32013892, 1.78315657, -2.17255561, 0.92509368,  
 -5.33342417, 1.74188979, 1.98557049, 0.70932812, -5.36561564,  
 2.10475138, -0.18595598, 5.08561731, 0.93769587, -1.31273155]

X3 = [ 0.40104526, -6.8746969 , -1.4508144 , 4.04799399, 0.47952782,  
 -4.9777462 , -6.38837295, 5.63588622, -5.22117308, 3.05891339,  
 3.32596899, 4.77490046, -6.93970276, 4.07604412, -6.76997669,  
 -6.52647942, -5.19714914, -3.10981267, 3.42043367, -2.89618508,  
 4.54762032, -6.62125548, -0.33707734, 0.57364661, -7.05616923,  
 -5.73768844, -6.78629929, 1.86510684, -7.37580169, -7.35668249,  
 -4.55425547, -7.02809804, -4.90937298, 0.21365013, 0.46897912,  
 2.32132405, -4.2431542 , 2.31474416, 5.74727582, 1.98511431,  
 6.04485974, -6.19238869, -0.55292605, -5.84592534, 2.69455856,  
 -6.41907285, -7.0615478 , -1.39460063, 5.7419432 , 3.91196405]

X4 = [ -4.79769771, -6.12217297, -13.75510215, -0.69039595,

5.51475665, 3.21371786, -0.53028226, 5.76536581,  
 -6.84005262, 5.59090153, -11.45822304, 5.14143726,  
 -1.84609885, 7.00793429, -13.42420627, 5.62326541,  
 -14.84867601, -8.08665306, -3.17910304, -4.13487393,  
 1.64908517, -15.12440154, -1.85046228, 2.33278559,  
 -1.45391685, -12.97640054, 4.948477, -3.53690042,  
 3.39631528, -8.48532164, 5.67105557, -4.12013976,  
 7.45809682, 2.20119246, -1.25163165, -10.03249827,  
 -9.01394019, 5.98040268, -12.23021817, -10.04583519,  
 -11.39838676, 6.76428395, -14.88767933, -12.81596267,  
 -1.17696991, -7.96962226, -10.46849727, -5.78526951,  
 -8.35462232, 5.92204993]

Y = [-1.05854148, -1.19037261, -0.67850143, 1.83690378, 0.71634244,  
 0.69759729, -2.28587939, 3.07529239, -0.93862147, 1.93869609,  
 -0.32504664, 0.59709491, -1.54830347, 0.64979729, -2.16480795,  
 0.34740935, -3.80266053, -1.85322125, 0.96712108, -3.10155279,  
 0.34271617, -3.97935898, -0.40128077, 0.4790791, -0.37549163,  
 -0.67799309, 0.5989793, -1.07115492, 0.15252685, -4.35665486,  
 0.58621925, -2.35993574, 0.58422166, 0.37893564, 1.2798202,  
 0.54014236, -2.25371701, 2.26003159, -0.68084078, 0.13830458,  
 0.04493817, 1.50240748, 0.15391698, -1.59417785, -1.43686051,  
 -0.5344935, -2.69502615, 0.08301965, 2.15560509, -0.18989902]

Приклад 29:

X2 = [ 6.05499838, 4.56317771, -2.17568619, 3.97368659, 5.22489321,  
 6.03561308, 3.84557927, -1.64391935, -1.48096167, -4.10957738,  
 -0.24451317, 5.67508684, -0.27689768, 3.12094606, -0.50115947,  
 -4.14629731, -1.66555259, -1.4214479, -4.51563825, -5.47942719,  
 1.31497533, -3.19183792, 1.1009921, -5.33923306, -6.22708463,  
 2.7877504, -2.65776141, 6.03259929, 0.18072391, 2.74078548,  
 -4.65846543, 0.04693539, -5.21374639, 5.38430524, -2.77776994,  
 -6.2636046, -3.33677648, 4.71672002, 0.81764146, 5.45945608,  
 -3.22124951, -1.29615992, 4.49489787, -0.51329502, -2.28518475,  
 -5.51795328, 2.06580866, -6.0290946, -1.920676, -0.84496549]

X3 = [-6.01595762, -5.5611622, -4.02904385, -0.72193698, 3.9836611,  
 2.16560309, -6.95032651, -5.71351412, -7.29692793, -4.61839774,  
 3.71688233, 0.10343328, 0.56950951, -5.20694546, -4.75607913,  
 -2.69264355, -2.1491033, -6.09320529, 0.81798281, -3.57985173,  
 0.15119535, -7.58599022, -1.61326783, 0.72348828, -2.97181192,  
 -2.48607239, 1.99086803, 2.77729664, -3.22306452, -2.51723056,  
 2.55858151, 2.6472681, -3.99184327, 5.52620061, 2.37237353,  
 -3.29644991, 1.87597989, -4.46193654, -1.5580804, -6.5088305,  
 0.23210154, -3.88477268, -3.4136669, 0.07331411, -0.48270072,  
 -6.06837874, 4.80156351, -6.44637679, 4.43710039, 4.68105951]

X4 = [ 7.41479087, 1.66702568, -4.74363778, 2.3709341,

1.25616243, -6.33478807, -12.02292477, 5.39363726,  
 -4.20967451, -9.10934288, -11.05420849, -9.26134075,  
 -11.47373459, 6.10000285, 4.38246941, -4.0220709 ,  
 -12.05972141, -5.05580732, -6.64152288, -1.50073898,  
 -6.45616237, -0.07117048, -13.1719589 , -14.95733116,  
 -12.26804354, -10.79627826, -9.79570001, -9.73567463,  
 -11.59350983, 1.0348662 , -0.90446004, 4.83319738,  
 -8.81482473, 5.14715611, -3.46510151, -6.91064286,  
 0.56549543, 2.65017744, -5.45753815, -14.55395209,  
 4.24357172, -11.35061181, 4.93160096, 0.37477829,  
 -7.46166408, -7.37362608, 6.02620578, -11.71140673,  
 -2.76559808, 4.51557897]

Y = [ 2.25141216e+00, 3.34491126e-01, -3.33415037e+00, 1.64527309e+00,  
 2.05173657e+00, 1.25115668e+00, -1.75680773e+00, -1.95105613e+00,  
 -3.17791706e+00, -3.21452856e+00, -9.68196890e-01, 1.13069939e+00,  
 -5.99309689e-01, 7.56637158e-01, -1.64331089e+00, -2.36754170e+00,  
 -3.78348351e+00, -2.54301305e+00, -8.42745694e-01, -3.47005973e+00,  
 1.33111011e+00, -2.94032974e+00, -1.05019702e+00, -2.36486752e+00,  
 -5.09507328e+00, -9.89942853e-01, -2.19346680e+00, 8.23275596e-01,  
 -2.56102922e+00, 3.89615195e-01, -1.07674641e+00, 3.21573502e-01,  
 -3.88801949e+00, 3.57210103e+00, -1.53761296e+00, -4.87812477e+00,  
 -4.82494887e-01, -1.78396517e-01, 1.19887600e-01, -1.77539569e+00,  
 2.28093013e-04, -4.01052692e+00, -7.28156649e-01, 3.61822507e-01,  
 -2.10182096e+00, -3.34218712e+00, 3.52193861e+00, -3.99147316e+00,  
 -9.90198847e-01, 4.88175297e-01]

Приклад 30:

X2 = [-5.99451424, 1.68824328, -6.0199412 , -3.10740687, -3.43167892,  
 -4.60986672, 0.67045593, 0.23202492, -3.1051145 , 3.39658676,  
 0.52990031, 0.91130911, 1.98174125, 3.47759071, 2.69130332,  
 1.29844709, -2.81186579, 0.68288688, 1.06084642, 3.76146502,  
 4.75516947, -1.59897576, 3.68333198, -4.09781189, 5.37987312,  
 1.991965 , -3.41208513, 5.68064424, -0.754678 , -0.93774593,  
 -3.67281812, 3.63207125, -4.07294446, -5.26550069, -0.13053498,  
 2.96024467, -5.99597679, -3.5910184 , -5.13010798, -1.23878764,  
 1.39148672, -6.20089679, 5.74251118, 3.13207197, 2.13509312,  
 -4.6941471 , -5.18404549, 5.32438807, -3.23372576, -0.55223818]

X3 = [-2.42764589, 3.40490979, -2.8875915 , -3.93858275, 3.96117561,  
 -3.81519772, -1.38505573, 2.47342082, -5.29326338, 5.02111185,  
 0.53286545, -4.82931749, -4.21126669, 5.19273841, -2.210363 ,  
 4.44305718, -5.78456293, -7.13056064, 3.22401351, -3.17120838,  
 -1.15613994, 4.91987286, -6.58804004, 0.38679831, 4.23242214,  
 -6.67798241, -7.19221448, -3.09361965, -4.54054499, -2.86212495,  
 -5.37168825, 2.8087379 , -6.68977383, -6.27407457, -2.84665777,  
 -3.00466276, -4.0601137 , -5.75336287, -1.54825037, 1.59474199,

5.39518863, 1.40501423, 0.45867782, -6.23506179, 3.15788953,  
 -5.96781635, 1.19464167, -3.32127766, 4.12142309, -0.29043478]  
 $X4 = [-8.7852443, 2.96857944, 2.75177526, -14.84789216,$   
 $-15.5331376, 6.15495551, -5.81707019, -11.17566906,$   
 $-7.4884327, 2.25009734, -8.65370215, -4.72337614,$   
 $-0.44690113, 0.06690769, 3.5447695, 4.07798785,$   
 $-1.25850241, -3.64699867, 7.09089789, -4.10032301,$   
 $-5.33470125, -14.7234196, -2.92877164, -3.68652539,$   
 $-3.74925598, -9.61114888, -9.47482171, 2.89630372,$   
 $0.06739794, 6.71822509, 6.06602906, -4.46411515,$   
 $-7.4549117, 4.41738253, -13.64082158, -15.29550044,$   
 $3.86269137, -0.45878258, -15.38367217, 3.61890194,$   
 $-0.02505242, 2.59314493, -0.7094198, -12.99246151,$   
 $4.78663461, -2.61593082, 0.61643816, -8.79571261,$   
 $-11.39603092, -3.66699677]$   
 $Y = [-4.35314072, 2.04462469, -2.97114863, -4.77271155, -2.34153521,$   
 $-1.67715007, 0.01790297, -0.68839584, -3.3165982, 3.08731919,$   
 $0.20490171, -0.41717692, -0.19893655, 2.72221896, 0.55528267,$   
 $2.53160717, -2.59985603, -0.86661327, 2.31938912, -1.0841469,$   
 $0.40324701, -2.00782667, -0.61171108, -0.12490979, 1.68796941,$   
 $-0.63824809, -3.52450378, 0.271497, -2.2131205, -1.65028635,$   
 $-1.13303657, 0.63373786, -2.97346353, -1.75681221, -3.62396693,$   
 $-2.37311116, -3.17981736, -1.93014011, -3.324106, -0.59033137,$   
 $3.3227929, -1.10173765, 2.08769992, -1.47508831, 1.80579269,$   
 $-2.07336698, -0.13149381, -1.8066342, -1.44558023, -0.25186374]$