

Міністерство освіти і науки України
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

С.М. Савін

**МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРИ
В ПРОЦЕСАХ ПОЛІМЕРИЗАЦІЇ МЕТОДОМ КІНЦЕВИХ
ЕЛЕМЕНТІВ**

Монографія

ОЛДІПЛУС

2022

Рецензенти:

А. В. Усов, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики та моделювання систем Державного університету «Одеська політехніка»;

О. С. Тітлов, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теплоенергетики та трубопровідного транспорту енергоносіїв Одеської національної академії харчових технологій;

О. Н. Софранков, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри хімії навколишнього середовища Одеського державного екологічного університету

*Рекомендовано до друку Вченою радою
Одеського національного університету імені І.І. Мечникова
протокол № 13 від 29 червня 2021 року*

Савін С. М.

С12 Моделювання розподілу температури в процесах полімеризації методом кінцевих елементів: монографія / С. М. Савін. – Одеса : ОЛДИ+, 2022. – 192.

ISBN 978-966-289-661-9

Монографія присвячена розв'язуванню задач розподілу температурного поля при формуванні полімерних блоків термореактивних олігомерів написана на основі досліджень автором кінетики тверднення епоксидних систем. Для моделювання температурних режимів в зразках був застосований числовий метод кінцевих елементів. Автором розроблені комп'ютерні QBASIC-програми для виконання розрахункових досліджень, викладено тексти програм з детальними поясненнями. Структура розроблених програм дозволяє застосовувати їх не тільки для розрахунків температурних полів в полімерних зразках, але й для розрахунків теплових режимів в конструкціях технічного обладнання інших видів.

Рекомендована студентам і аспірантам, хімічним, хіміко-технологічним спеціальностям ЗВО, а також фахівцям в області прикладної математики, які цікавляться числовими методами.

УДК 541.64,681.51,619.3

ЗМІСТ

| | |
|--|----|
| ВСТУП..... | 6 |
| Глава 1. ОДНОМІРНІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТАХ | 9 |
| 1.1. Закон Фур'є | 9 |
| 1.2. Тепловий потік в стрижні | 9 |
| 1.3. Крайові умови в задачах теплопровідності | 10 |
| 1.4. Розподіл температури в однорідному стрижні..... | 11 |
| 1.5. Конвективне охолодження однорідного стрижня з двох боків..... | 15 |
| 1.6. Тонкий стрижень, що охолоджується з бокової поверхні | 18 |
| 1.7. Кусочно-однорідний стрижень, що конвективно охолоджується з торця | 21 |
| 1.8. Математичні основи методу кінцевих елементів. | 28 |
| 1.9. Крайові умови Діріхле в методі кінцевих елементів | 33 |
| 1.10. Конвективне охолодження стрижня з бокової поверхні..... | 38 |
| 1.11. Трьохвузлові координатні функції | 35 |
| 1.12. Нелінійний розподіл потужності виділення тепла в однорідному стрижні..... | 38 |
| Глава 2. ОДНОМІРНІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ЦИЛІНДРИЧНИХ КООРДИНАТАХ | 47 |
| 2.1. Рівняння теплопровідності в циліндричних координатах. | 47 |
| 2.2. Однорідний циліндр, що конвективно охолоджується з бокової поверхні | 47 |
| 2.3. Крайові умови Діріхле в циліндричних координатах | 48 |
| 2.4. Кусочно-однорідний циліндр, що конвективно охолоджується з бокової поверхні | 51 |
| 2.5. Метод кінцевих елементів в циліндричних координатах | 52 |
| 2.6. Крайові умови в циліндричних координатах. Розподіл температури в тонкому диску | 58 |
| Глава 3. ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В СФЕРИЧНИХ КООРДИНАТАХ..... | 71 |
| 3.1. Рівняння теплопровідності в сферичних координатах. | 71 |

| | |
|--|-----|
| 3.2. Однорідна куля, що конвективно охолоджується з поверхні | 71 |
| 3.3. Кусочно-однорідна куля, що конвективно охолоджується з поверхні | 73 |
| 3.4. Метод кінцевих елементів в сферичних координатах | 73 |
| 3.5. Нелінійний розподіл потужності виділення тепла по об'єму кулі..... | 79 |
| Глава 4. НЕСТАЦІОНАРНІ ОДНОМІРНІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ | 84 |
| 4.1. Нагрівання та охолодження однорідного тіла | 84 |
| 4.2. Числове інтегрування диференційних рівнянь | 87 |
| 4.3. Рівняння теплопровідності в нестационарному режимі | 89 |
| 4.4. Функції Гріна..... | 91 |
| 4.5. Нестационарний режим в фізичних тілах найпростіших геометричних форм необмежених розмірів | 94 |
| 4.6. Застосування методу кінцевих елементів в розрахунках нестационарних процесів | 99 |
| Глава 5. ПРОГРАМУВАННЯ НА КОМП'ЮТЕРІ ЗАДАЧ РОЗРАХУНКІВ ОДНОМІРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ РЕЖИМІВ | 105 |
| 5.1. Програма розрахунків одномірних стаціонарних режимів | 105 |
| 5.2. Текст QBASIC-програми розрахунків стаціонарних температурних режимів в кусочно-однорідних середовищах | 106 |
| 5.3. Загальні принципи складання комп'ютерних програм розрахунків температурних процесів методом кінцевих елементів | 109 |
| 5.4. Розв'язування системи кінцевоелементних рівнянь | 112 |
| 5.5. Перемноження матриць для формування вектора вільних членів схеми Кранка-Ніколсона | 113 |
| 5.6. Програма розрахунків одномірних нестационарних режимів | 115 |
| 5.7. Текст QBASIC-програми розрахунків нестационарних температурних режимів в кусочно-однорідних середовищах | 119 |
| 5.8. Нестационарний режим тверднення епоксидного композиту в формі кулі | 121 |

| | |
|---|------------|
| 5.9. Текст QBASIC- програми розрахунку нестационарного температурного режиму в нелінійній кулі при квадратичній апроксимації | 122 |
| Глава 6. ДВОМІРНІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ | 130 |
| 6.1. Плоскопаралельне температурне поле. | 130 |
| 6.2. Квадратична апроксимація в двомірній постановці задачі | 134 |
| 6.3. Приклад розрахунку плоскопаралельного температурного поля в декартових координатах..... | 138 |
| 6.4. Осесиметричне температурне поле в циліндричних координатах..... | 143 |
| 6.5. Інтегрування компонентів матриць кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь в циліндричних координатах | 144 |
| 6.6. Математична модель нестационарного температурного поля в нелінійному циліндрі при квадратичній апроксимації..... | 146 |
| 6.7. Текст QBASIC-програми розрахунку нестационарного температурного поля в нелінійному циліндрі при квадратичній апроксимації..... | 150 |
| 6.8. Розв'язування практичних задач при формуванні полімерних блоків | 156 |
| Глава 7. СПЕЦІАЛЬНІ ПИТАННЯ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДА КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ | 166 |
| 7.1. Трикутні кінцеві елементи | 166 |
| 7.2. Загальна формула побудови координатних функцій кінцевих елементів | 170 |
| 7.3. Комп'ютерна реалізація моделей конструкцій з використанням трикутних кінцевих елементів | 172 |
| 7.4. Трикутні кінцеві елементи з квадратичною апроксимацією | 177 |
| 7.5. Криволінійні кінцеві елементи | 178 |
| 7.6. Програма розрахунків температурного поля в конструкціях складних геометричних форм | 180 |
| СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ | 192 |

ВСТУП

Метод кінцевих елементів є числовим методом розв'язування задач математичної фізики, які описуються диференціальними рівняннями теплопровідності, електромагнетизму, дифузії, гідродинаміки і теорії пружності.

Дана книга пропонується тим, хто бажає на практиці оволодіти методом кінцевих елементів для розв'язування задач теплопровідності.

В цій роботі докладно розглянуті математичні основи практичного застосування методу кінцевих елементів для аналізу теплофізичних процесів, що виникають при твердженні епоксидних смол.

При постановці конкретних задач для розрахунків розподілу температури в фізичних тілах задаються: геометричні розміри фізичних конструкцій, розподіл джерел виділення тепла в них, теплофізичні властивості матеріалів, крайові і граничні умови. Задачі класифікуються по вибору системи координат для запису математичних рівнянь заданих конструкцій. Розглядаються особливості реалізації метода кінцевих елементів в різних системах координат: декартових, циліндричних і сферичних. Крайові умови задаються в основному при розв'язуванні задач конвективного охолодження з поверхні. Інші крайові умови розглядаються як допоміжні. Зміст книги викладено в семи главах.

В перших трьох главах показані стаціонарні одномірні задачі. Це задачі, в яких невідома функція залежить тільки від однієї змінної. Виходячи з найпростіших фізичних понять про явища виділення і передачі тепла, виводяться рівняння теплопровідності в однорідних середовищах для стаціонарних режимів. Формулюються три види крайових умов: Ньютона, Неймана і Діріхле. Показані найпростіші розв'язки рівнянь теплопровідності у вигляді аналітичних функцій.

Поряд з аналітичними розв'язками викладаються математичні основи методу кінцевих елементів. Вводяться елементарні поняття матричної алгебри стосовно математичної реалізації метода кінцевих елементів. Особливу увагу приділено питанням інтегрування математичних виразів для компонентів матриць кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь. Всі власні інтеграли для одномірних задач отримані у вигляді аналітичних виразів, а їх числові значення об'єднані в базові матриці.

Приводяться приклади розв'язування задач методом кінцевих елементів. На конкретних прикладах співставляються результати розрахунків розподілу температури в заданій конструкції, отримані методом кінцевих елементів і обчислені аналітично. Всі температурні процеси при цьому розглядаються в стаціонарному режимі.

Четверта глава присвячена розв'язуванню розглянутих в перших трьох главах задач в нестационарному режимі, коли температурне поле змінюється з часом. Це процеси нагрівання і охолодження фізичних тіл. Детально розглядаються питання числового інтегрування диференціальних рівнянь в залежності від часу методом Кранка-Ніколсона.

В **п'ятій** главі розглядаються питання програмування викладених вище математичних моделей на комп'ютері. На мові **QBASIC** написані тексти трьох

програм. Перша програма реалізує алгоритм розрахунків одномірних стаціонарних температурних режимів в кусочно-однородних середовищах в декартових, циліндричних і сферичних координатах на основі аналітичного розв'язку задачі теплопровідності.

Друга програма дозволяє розв'язувати ті самі задачі, що і перша, але вже в нестационарних режимах. Алгоритм розрахунків розроблено на основі числового розв'язування задачі з використанням метода кінцевих елементів. Як додатковий результат отримуємо розв'язок задачі для стаціонарного температурного режиму. Така можливість дозволяє співставляти результати розв'язку однієї і тієї ж самої задачі, що отримані по першій і по другій програмах. Обидві ці програми мають чисто учбово-методичне значення. Вони дозволяють читачу на практиці опанувати основами метода кінцевих елементів.

Третя програма розроблена для розв'язування нелінійної нестационарної задачі розподілу тепла при твердненні епоксидного композиту у вигляді кулі. Ця програма має практичне застосування для дослідження питання того, як впливає хімічний склад епоксидної системи на її термофізичні властивості. За допомогою цієї програми автором були отримані зразки композитів заданого розміру з потрібними властивостями.

Всі програми викладені у вигляді текстів. Досить відсканувати текст або набрати його на комп'ютері у середі QBASIC та застосувати цю програму для розрахунків.

Дана робота націлена не тільки на те, щоб дати читачу можливість опанувати теоретичними і прикладними основами метода кінцевих елементів, але й самостійно писати програми на мові QBASIC для виконання розрахункових досліджень. Тому, в окремих розділах п'ятої глави розглянуто принципові основи побудови таких програм у вигляді окремих блоків. В окремі блоки виділені найскладніші питання програмування, такі як розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь зі стрічковою матрицею коефіцієнтів і спеціальна процедура перемноження матриць в ітераційній схемі Кранка-Ніколсона. Ці блоки оформлені у вигляді окремих підпрограм. Вони дають можливість безпосереднього їх застосування прямим зверненням до них при самостійній розробці конкретних програм для дослідження температурних режимів в різних конструкціях.

Починаючи з шостої глави, розглядаються двомірні задачі теплопровідності, як в стаціонарному, так і в нестационарному режимах. Це плоскопаралельні температурні поля в декартових координатах і двомірні температурні поля в осесиметричних циліндричних конструкціях. Базові матриці для двомірних задач, отримані при обчисленні власних інтегралів, складені тільки для плоскопаралельної задачі в декартових координатах. Для осесиметричних задач аналітичні вирази виглядають дуже нагромадженими, тому при обчисленнях власних інтегралів застосовано квадратурні формули Гауса.

В якості фізичних модельних конструкцій при розробці математичних моделей задач, що розглянуті вище, застосовані прості геометричні тіла: стрижні, прямокутні пластини, циліндри, кульки. Але практичні технічні конструкції, виглядають набагато складніше. Це можуть бути конуси, складні вузли з гострими кутами, конструкції з

криволінійними краями, нарешті, динамічні конструкції, геометричні форми яких змінюються при нагріванні чи охолодженні.

Ці задачі вже не можуть бути розв'язані у вигляді аналітичних виразів. Саме для розв'язування таких задач було розроблено метод кінцевих елементів. Окремим видам таких конструкцій присвячена **сьома** глава.

В перших розділах сьомої глави коротко розглядаються особливості використання трикутних кінцевих елементів найпростіших геометричних форм. Приводяться **QBASIC**-програми, що ілюструють ці особливості.

Окремої уваги заслуговує програма розрахунків нелінійних нестационарних процесів при твердінні епоксидних композитів в осесиметричних зразках з криволінійними границями. Ця програма також найшла практичне застосування при виконанні автором розрахункових досліджень формування полімерних зразків у різноманітних температурних режимах.

Наведені приклади розв'язування конкретних задач показують силу, потужність і універсальність можливостей для застосування метода кінцевих елементів.

Дана книга може бути цікавою для студентів, аспірантів і фахівців, що займаються математичним моделюванням температурних полів. На практиці автор зіткнувся з такими проблемами при дослідженнях фізико-хімічних явищ, що спостерігаються в процесах твердіння епоксидних смол у неізотермічному режимі. Застосування метода кінцевих елементів дозволило моделювати ці процеси з врахуванням нелінійної залежності їх від температури на протязі хімічної реакції, як потужності виділення тепла, так і теплофізичних властивостей їхніх матеріалів (теплопровідності, теплоємності, щільності). Тому, книга більш орієнтована на фахівців в області епоксидних смол.

Автор вдячний співробітникам фізичного факультету Одеського національного університету ім. І.І. Мечникова за співпрацю при плануванні експериментів. Глибоку подяку автор виражає також своїм батькам за допомогу при підготовці матеріалів даної книги до її видавництва.

Глава 1. ОДНОМІРНІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТАХ

1.1. Закон Фур'є

Найпростішою задачею теплопровідності можна вважати передачу тепла в однорідному тілі, обмеженому двома паралельними площинами, або в необмеженій пластині (рис.1.1). В середині цієї пластини можна виділити стрижень довільного перетину S . Розподіл температури в такому стрижні зберігається таким же, як і в пластині. Тому, розв'язки задач теплопровідності для пластини і для стрижня, в якого обмін тепла здійснюється тільки на торцях, але відсутній на його бокових поверхнях, абсолютно ідентичні.

Початковим положенням для виводу рівняння теплопровідності є закон Фур'є. Він проголошує:

Потік тепла, що проходить через одиницю площі за одиницю часу, прямопропорційний градієнту температури [1,с. 7], [2,с. 16].

Для пластини і стрижня розповсюдження тепла відбувається тільки в одному напрямку, вздовж осі x (рис.1.1).

$$p(x) = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1.1)$$

де $[\lambda] \left[\frac{Bm}{m \cdot ^\circ C} \right]$ - коефіцієнт теплопровідності.

Знак мінус показує, що потік тепла рухається в напрямку від поверхні з вищою температурою до поверхні з нижчою температурою. Фізична суть коефіцієнта теплопровідності міститься в кількості теплової енергії за одиницю часу $[Bm]$, яку речовина стрижня одиничної довжини (1 m) перепускає крізь себе при перепаді температури в один градус $[^\circ C]$.

Діапазон змінювання коефіцієнта теплопровідності досить широкий. Від найменшого $\lambda = 0,01 \left[\frac{Bm}{m \cdot ^\circ C} \right]$ для пенопластиків, до $\lambda = 250-400 \left[\frac{Bm}{m \cdot ^\circ C} \right]$ для металів. Із закону Фур'є (1.1) витікають рівняння теплопровідності для тіл найпростіших геометричних форм. Далі розглянемо ці тіла і відповідні до них рівняння в декартових координатах. Виведення рівнянь теплопровідності в циліндричних і сферичних координатах буде розглянуто в наступних главах.

1.2. Тепловий потік в стрижні

При виділенні в одиниці об'єму стрижня потужності $q(x)$, тепловий потік, витікаючий із елемента об'єму $dv = S \cdot dx$, дорівнює $dp(x) \cdot S = q(x) \cdot dv$, або

$$dp(x) \cdot S = q(x) \cdot S \cdot dx, \quad \text{звідки} \quad \frac{dp(x)}{dx} = q(x).$$

Таким чином, в декартових координатах рівняння теплопровідності буде мати вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) = -q(x) \quad \text{або} \quad \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -q(x), \quad (1.2)$$

де $[q] \left[\frac{Bm}{M^3} \right]$ - потужність виділення тепла в одиниці об'єму. Розв'язок цього рівняння, як і кожного диференціального рівняння, складається з суми двох функцій - часткового розв'язку, який визначається правою частиною рівняння, і загального розв'язку відповідного йому однорідного рівняння.

Частковий або фундаментальний розв'язок знаходимо прямим інтегруванням рівняння (1.2):

$$F(x) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \iint q(x) \cdot dx \cdot dx \quad (1.3)$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$, будемо шукати у вигляді функції:

$$G(x) = A \cdot x + B, \quad (1.4)$$

де A і B - постійні інтегрування, які визначаються крайовими і пограничними умовами для кожної конкретної задачі.

1.3. Крайові умови в задачах теплопровідності

В крайових задачах математичної теплофізики розглядаються три види крайових умов. Це крайові умови першого роду (умови Діріхле), коли на поверхні тіла задаються значення температури T_G , крайові умови другого роду (умови Неймана), коли на поверхні задаються значення теплового потоку $p = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} |_{x=x_g}$, і крайові умови третього роду (умови Ньютона), коли на поверхні задаються коефіцієнти конвективного теплообміну Ньютона, або коефіцієнти тепловипромінювання Больцмана.

Найбільш поширеними крайовими умовами при розв'язуванні теплофізичних задач є крайові умови Ньютона на зовнішніх поверхнях фізичних тіл. Ці умови описують процеси конвективного теплообміну окремих частин поверхні тіл з зовнішнім середовищем тепловою енергією, що виділяється в цих тілах.

$$\text{Потужність конвективного теплообміну з поверхні } S: P_S = \alpha \cdot S \cdot (T_S - T_0),$$

де $[\alpha] \left[\frac{Bm}{M^2 \cdot ^\circ C} \right]$ - коефіцієнт конвекції.

Тепловий потік, з цієї поверхні буде $-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_g} = \alpha \cdot (T_s - T_0)$. Довповнюючи загальний

розв'язок рівняння теплопровідності математичними виразами для крайових умов,

знаходимо відповідні постійні інтегрування A і B .

Деколи умови на поверхні контакту двох середовищ з різними теплофізичними характеристиками (λ, c, ρ) розглядають, як крайові умови четвертого роду. Сутність їх полягає в нерозривності функції температури і теплового потоку в місці контакту. Фізичні тіла з різними значеннями характеристик (λ, c, ρ) є неоднорідними і будуть розглянуті в наступному розділі. В той же час умови на межі розділення двох середовищ розглядаються як умови розмежування, а не як крайові, що більше відповідає геометричній структурі тіла. Адже, поверхня розмежування двох різних середовищ в межах одного фізичного тіла є межею, яка розділяє ці середовища, але не краєм самого фізичного тіла. Ні температура, ні тепловий потік не задані на межі розділення двох середовищ, як відомі функції, а повинні бути знайдені в результаті розв'язування задачі. Відомо тільки, що вони є безперервні функції, а принципова відмінність краєвих умов полягає в тому, що вони задані як вихідні данні, як конкретні величини, або як відомі функції.

1.4. Розподіл температури в однорідному стрижні

Однорідний стрижень з постійною щільністю виділення тепла $q(x) = q_0 = const$ і теплопровідністю λ розміщений на осі X між точками X_1 і X_2 (рис. 1.2), конвективно охолоджується з торцевого боку з координатою X_2 . Коефіцієнт конвекції дорівнює α_2 . При цьому $(\alpha_1 = 0)$.

Частковий розв'язок задачі для однорідного стрижня знаходимо після інтегрування виразу (1.3). При цьому отримуємо функцію $F(x) = -\frac{q_0 \cdot x^2}{2 \cdot \lambda}$. Загальний розв'язок всієї задачі $T(x) = F(x) + G(x)$ набуде вигляду:

$$T(x) = -\frac{q_0 \cdot x^2}{2 \cdot \lambda} + A \cdot x + B.$$

Виходячи із крайових умов, знаходимо постійні інтегрування. На торці стрижня (при $x = x_1$) тепловий потік дорівнює нулю

$$\left(-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x_g} = 0 \text{ або } \lambda \cdot \frac{q_0 \cdot x_1}{\lambda} - \lambda \cdot A = 0). \text{ Таким чином, при } x = x_1 \quad A = \frac{q_0 \cdot x_1}{\lambda}.$$

Енергія, що виділяється за одиницю часу по всьому об'єму стрижня,

$$Q_v = S \cdot q_0 \cdot (x_2 - x_1).$$

Енергія, що за цей же час конвективно видаляється з торця стрижня

$$Q_s = \alpha_2 \cdot S \cdot (T_2 - T_0),$$

де T_2 - температура на торці стрижня з координатою x_2 .

T_0 - температура навколишнього середовища.

Із рівняння теплового балансу $Q_v = Q_s$, знаходимо температуру на торці стрижня

$$T_2 = \frac{q_0 \cdot (x_2 - x_1)}{\alpha_2} + T_0.$$

З другого боку, на торці стрижня при $x = x_2$

$$T_2 = -\frac{q_0 \cdot x_2^2}{2 \cdot \lambda} + A \cdot x_2 + B, \text{ звідки } B = \frac{q_0 \cdot (x_2 - x_1)}{\alpha_2} + \frac{q_0 \cdot x_2^2}{2 \cdot \lambda} - A \cdot x_2 + T_0.$$

В окремому випадку для стрижня довжини L при $x_1 = 0$ $x_2 = L$ отримуємо:

$$A = 0, \quad B = \frac{q_0 \cdot L}{\alpha_2} + \frac{q_0 \cdot L^2}{2 \cdot \lambda} + T_0, \quad T(x) = \frac{q_0 \cdot (L^2 - x^2)}{2 \cdot \lambda} + \frac{q_0 \cdot L}{\alpha_2} + T_0 \quad (1.5)$$

На термоізованому торці стрижня, при $x_1 = 0$

$$T(x_1) = \frac{q_0 \cdot L^2}{2 \cdot \lambda} + \frac{q_0 \cdot L}{\alpha_2} + T_0. \quad (1.6)$$

Змінимо умови на краях стрижня. Нехай стрижень охолоджується з боку торця з координатою $x = x_1$, а другий торець стрижня термоізований ($\alpha_2 = 0$). Тоді при

$x = x_2$ тепловий потік буде дорівнювати нулю, або: $-\lambda \cdot \frac{q_0 \cdot x_2}{\lambda} + \lambda \cdot A = 0$. Таким

чином, при $x = x_2$ $A = \frac{q_0 \cdot x_2}{\lambda}$.

Енергія, що виділяється по всьому об'єму стрижня залишиться без змін

$$Q_v = S \cdot q_0 \cdot (x_2 - x_1).$$

Енергія, що конвективно видаляється з торця стрижня

$$Q_s = \alpha_1 \cdot S \cdot (T_1 - T_0),$$

де T_1 - температура на торці стрижня з координатою x_1 .

T_0 - температура навколишнього середовища.

Виходячи з рівняння теплового балансу $Q_v = Q_s$, находимо температуру на торці стрижня

$$\text{з координатою } x_1: T_1 = \frac{q_0 \cdot (x_2 - x_1)}{\alpha_1} + T_0.$$

З другого боку, на торці стрижня при $x = x_1$

$$T_1 = -\frac{q_0 \cdot x_1^2}{2 \cdot \lambda} + A \cdot x_1 + B, \text{ звідки } B = \frac{q_0 \cdot (x_2 - x_1)}{\alpha_1} + \frac{q_0 \cdot x_1^2}{2 \cdot \lambda} - \frac{q_0 \cdot x_2}{\lambda} \cdot x_1 + T_0.$$

Для стрижня довжини L при $x_1 = 0$ $x_2 = L$

$$\text{отримуємо: } A = \frac{q_0 \cdot L}{\lambda}, B = \frac{q_0 \cdot L}{\alpha_1} + T_0. T(x) = -\frac{q_0 \cdot x^2}{2 \cdot \lambda} + \frac{q_0 \cdot L}{\lambda} \cdot x + \frac{q_0 \cdot L}{\alpha_1} + T_0. \quad (1.7)$$

На термоізолюваному торці стрижня, при $x = L$

$$T(x_2) = \frac{q_0 \cdot L^2}{2 \cdot \lambda} + \frac{q_0 \cdot L}{\alpha_1} + T_0. \quad (1.8)$$

Порівнюючи вирази (1.8) і (1.6), слід відмітити їх абсолютну ідентичність. Фізично, немає значення, з якого боку охолоджується однорідний стрижень. Температура на його протилежному боці буде однаково залежати від умов охолодження і виділення тепла.

В деяких випадках виникають задачі з краєвими умовами Діріхле, наприклад, коли один торець стрижня дотикається до металевої плити або рідини з постійною температурою. Тоді, на торці такого стрижня температуру можна вважати заданою. Нехай це буде торець однорідного стрижня з координатою x_2 і температура на цьому торці буде T_2 .

Загальний розв'язок всієї задачі розподілу тепла вздовж стрижня має вигляд функції $T(x) = -\frac{q_0 \cdot x^2}{2 \cdot \lambda} + A \cdot x + B$. Із крайових умов, знаходимо постійні інтегрування.

На краю з координатою $x = x_2$ температура $T_2 = -\frac{q_0 \cdot x_2^2}{2 \cdot \lambda} + A \cdot x_2 + B$. Це буде перше рівняння для знаходження постійних інтегрування. На протилежному краю стрижня, з координатою $x = x_1$ іде конвективний теплообмін с коефіцієнтом конвекції

α . Там виконуються крайові умови Ньютона $(-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_1} = \alpha \cdot (T(x_1) - T_0))$, або

$-\lambda \cdot \frac{q_0 \cdot x_1}{\lambda} + \lambda \cdot A = \alpha \cdot (T(x_1) - T_0)$. Тут ми отримуємо друге рівняння для

знаходження постійних інтегрування. Запишемо його в наступному вигляді:

$-q_0 \cdot x_1 + \lambda \cdot A = \alpha \cdot (-\frac{q_0 \cdot x_1^2}{2 \cdot \lambda} + A \cdot x_1) + \alpha \cdot B - \alpha \cdot T_0$. Із системи цих двох рівнянь

знаходимо постійні інтегрування

$$A = \frac{q_0 \cdot \alpha \cdot (x_2^2 - x_1^2) + 2 \cdot \lambda \cdot \alpha \cdot (T_2 - T_0)}{2 \cdot \lambda \cdot [\lambda + \alpha \cdot (x_2 - x_1)]}, \quad B = T_2 + \frac{q_0 \cdot x_2^2}{2 \cdot \lambda} - A \cdot x_2.$$

Приклад 1.1. Стрижень з епоксидної композиції ($\lambda = 0,04 \frac{Bm}{M \cdot ^\circ C}$), довжиною $L = 0,05$ м, встановлено торцем на плитку льоду ($T_2 = 0^\circ C$). В ньому протікає реакція тверднення, в процесі якої виділяється теплова енергія потужністю $q_0 = 1000 \left[\frac{Bm}{M^3} \right]$.

Коефіцієнт конвективного охолодження на протилежному торці стрижня $\alpha = 12 \frac{Bm}{M^2 \cdot ^\circ C}$. Температура навколишнього середовища $T_0 = 18^\circ C$. Бокова поверхня стрижня термоізована. Встановити розподіл температури по довжині стрижня.

Находимо постійні інтегрування. Нехай $x_1 = 0,05$ м, $x_2 = 0$ м.

При $x_2 = 0$, на поверхні льоду, температура торця стрижня $T_2 = 0^\circ C$.

Виразуємо постійні інтегрування.

$$A = \frac{q_0 \cdot \alpha \cdot (x_2^2 - x_1^2) + 2 \cdot \lambda \cdot [\alpha \cdot (T_2 - T_0) + q_0 \cdot x_1]}{2 \cdot \lambda \cdot [\lambda + \alpha \cdot (x_2 - x_1)]} =$$

$$= \frac{1000 \cdot 12 \cdot (0 - 0,05^2) + 2 \cdot 0,04 \cdot [12 \cdot (0 - 18) + 1000 \cdot 0,05]}{2 \cdot 0,04 \cdot [0,04 + 12 \cdot (0 - 0,05)]} = 966,0715.$$

$$B = T_2 + \frac{q_0 \cdot x_2^2}{2 \cdot \lambda} - A \cdot x_2 = 0 + \frac{1000 \cdot 0^2}{2 \cdot 0,04} - 966,0715 \cdot 0 = 0.$$

$$T(x) = -\frac{q_0 \cdot x^2}{2 \cdot \lambda} + A \cdot x + B = -\frac{1000 \cdot x^2}{2 \cdot 0,04} + 966,0715 \cdot x + 0 = -12500 \cdot x^2 + 966,0715 \cdot x$$

Знаходимо температуру на торцях стрижня.

$$T_1 = -12500 \cdot x_1^2 + 966,0715 \cdot x_1 = -12500 \cdot 0,05^2 + 966,0715 \cdot 0,05 = 17,054.$$

$$T_2 = -12500 \cdot x_2^2 + 966,0715 \cdot x_2 = -12500 \cdot 0 + 966,0715 \cdot 0 = 0.$$

Розподіл температури по довжині стрижня.

| | | | | | | |
|------------------|---|-------|--------|--------|--------|--------|
| $x, \text{м}$ | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 |
| $T(x), ^\circ C$ | 0 | 8,411 | 14,321 | 17,732 | 18,643 | 17,054 |

Графік розподілу температури показано на рис. 1.3.

По розподілу температури вздовж стрижня ми бачимо, що в якомусь місці вона досягає максимуму. Виразуємо координати цього місця і максимальне значення температури. Диференціюємо функцію

$$T(x) = -\frac{q_0 \cdot x^2}{2 \cdot \lambda} + A \cdot x + B \quad \text{і прирівнюємо її похідну до нуля. Отримуємо рівняння:}$$

$$-\frac{q_0 \cdot x}{\lambda} + A = 0. \quad \text{Звідки знаходимо: } x_m = \frac{\lambda \cdot A}{q_0} = \frac{0,04 \cdot 966,0715}{1000} = 0,03864. \quad \text{Максимальне}$$

значення температури:

$$T_{\max} = -12500 \cdot x_m^2 + 966,0715 \cdot x_m = -12500 \cdot 0,03864^2 + 966,0715 \cdot 0,03864 = 18,666.$$

Теоретично, крайові умови Діріхле відповідають крайовим умовам Ньютона з коефіцієнтом конвекції, що наближується до нескінченності, а термоізолювані ділянки поверхні відповідають крайовим умовам Ньютона з коефіцієнтом конвекції, що дорівнює нулю.

Приклад 1.2. В хімічні лабораторії на пластмасову пластинку, товщиною 0,02 м, що лежить на масивні металеві плиті, встановлено стакан з киплячою водою. Теплопровідність пластмаси $\lambda = 0,01 \frac{Вт}{м \cdot ^\circ C}$. Температура навколишнього середовища $T_0 = 20^\circ C$. Вирахувати потужність теплового потоку, що протікає крізь цю пластинку.

Металева плита і кипляча вода в стакані задають на поверхнях пластинки постійно діючі значення температури, $T_1 = 20^\circ C$ на поверхні металеві плити і $T_2 = 100^\circ C$ під стаканом. Таким чином, ми маємо задачу з крайовими умовами Діріхле. Так як в об'ємі самої пластинки тепло не виділяється ($q_0 = 0$), то в функції загального розв'язку задачі $T(x) = -\frac{q_0 \cdot x^2}{2 \cdot \lambda} + A \cdot x + B$ перший доданок дорівнює нулю. Залишається знайти із крайових умов тільки постійні інтегрування A і B .

$$\text{Складемо два рівняння. На поверхні металеві плити: } 20 = A \cdot 0 + B.$$

Під стаканом: $100 = A \cdot 0,02 + B$. З цих двох рівнянь знаходимо: $B = 20$, $A = 4000$. Температура пластинки буде змінюватися як функція $T(x) = 4000 \cdot x + 20$. По закону Фур'є, потужність теплового потоку

$$p(x) = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = -0,01 \cdot 4000 = -40 \frac{Вт}{м^2}.$$

1.5. Конвективне охолодження однорідного стрижня з двох боків

Розглянені вище задачі конвективного охолодження однорідного стрижня з різних боків ілюструють методику знаходження постійних інтегрування, при заданих крайових умовах, а саме, при заданих умовах конвективного теплообміну на поверхні, що охолоджується, і відсутньому теплообміні на протилежній термоізолювані поверхні, де тепловий потік дорівнює нулю.

Далі розглянемо задачу розподілу тепла при конвективному охоложенні стрижня з двох боків. Нехай з одного боку стрижень охолоджується з коефіцієнтом конвекції α_2 , а з другого боку з коефіцієнтом конвекції α_1 .

Для визначення постійних інтегрування A і B , виділимо всередині об'єму стрижня особливу точку (рис.1.4). Це точка поділу розтікання теплового потоку на два протилежних напрямки. Так як тепловий потік конвективно видаляється з кожного боку, а виділяється всередині об'єму стрижня, то всередині цього об'єму є точка, в якій

тепловий потік дорівнює нулю. Позначимо її координату як x_0 . Ця особлива точка ділить задачу охолодження стрижня з двох боків на дві задачі одностороннього охолодження стрижня, які були розв'язані вище.

Опираючись на ці результати, запишемо вирази для температури в особливій точці з координатою x_0 . Для правої ділянки стрижня, що охолоджується з торця x_2 , згідно виразу (1.6), температура в точці з координатою x_0 буде:

$$T(x_0) = \frac{q_0 \cdot (x_2 - x_0)^2}{2 \cdot \lambda} + \frac{q_0 \cdot (x_2 - x_0)}{\alpha_2} + T_0.$$

Для лівої ділянки стрижня, що охолоджується з торця x_1 , згідно виразу (1.8), в

$$\text{точці } x_0 \text{ температура } T(x_0) = \frac{q_0 \cdot (x_0 - x_2)^2}{2 \cdot \lambda} + \frac{q_0 \cdot (x_0 - x_1)}{\alpha_1} + T_0.$$

Складаємо рівняння для цієї точки

$$\frac{q_0 \cdot (x_2 - x_0)^2}{2 \cdot \lambda} + \frac{q_0 \cdot (x_2 - x_0)}{\alpha_2} + T_0 = \frac{q_0 \cdot (x_0 - x_2)^2}{2 \cdot \lambda} + \frac{q_0 \cdot (x_0 - x_1)}{\alpha_1} + T_0.$$

В результаті розв'язування його визначаємо вираз для координати особливої точки.

$$x_0 = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot (x_2^2 - x_1^2) + 2 \cdot \lambda \cdot (\alpha_1 \cdot x_2 + \alpha_2 \cdot x_1)}{2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot (x_2 - x_1) + 2 \cdot \lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Постійна інтегрування $A = \frac{q_0 \cdot x_0}{\lambda}$ безпосередньо обчислюється через координату x_0 .

Як видно, цей вираз вірний не тільки для правої і лівої ділянок, але і для всього стрижня в цілому. Для обчислення постійної інтегрування B можна використати формулу для правої ділянки стрижня

$$B = \frac{q_0 \cdot (x_2 - x_0)}{\alpha_2} + \frac{q_0 \cdot x_2^2}{2 \cdot \lambda} - \frac{q_0 \cdot x_0 \cdot x_2}{\lambda} + T_0,$$

або формулу для лівої ділянки

$$B = \frac{q_0 \cdot (x_0 - x_1)}{\alpha_1} + \frac{q_0 \cdot x_1^2}{2 \cdot \lambda} - \frac{q_0 \cdot x_0 \cdot x_1}{\lambda} + T_0.$$

На перший погляд, це різні вирази, але вони дають однакові результати. Після підстановки в кожного з них виразу для координати x_0 , отримуємо однакові вирази, дійсні не тільки для кожної ділянки, але і для всього стрижня в цілому.

В особливому випадку, при $x_1 = 0$ $x_2 = L$

$$x_0 = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot L^2 + 2 \cdot \lambda \cdot \alpha_1 \cdot L}{2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot L + 2 \cdot \lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)} \quad A = \frac{q_0 \cdot x_0}{\lambda} \quad B = \frac{q_0 \cdot x_0}{\alpha_1} + T_0.$$

Загальний вираз для розподілу температури в стрижні залишається незмінним:

$$T(x) = -\frac{q_0 \cdot x^2}{2 \cdot \lambda} + A \cdot x + B. \quad \text{Ця формула не залежить від умов охолодження стрижня.}$$

Більш того, вона зберігає свій вигляд і при других видах крайових умов (Неймана і Діріхле). Крайові умови впливають тільки на значення постійних інтегрування A і B .

Якщо на одному з торців стрижня задано значення теплового потоку $p(x_g) = p_0$ (крайові умови Неймана), то постійна інтегрування A обчислюється з виразу для

теплового потоку на цьому торці $-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_g} = p(x_g) = p_0$ $A = p_0 - q_0 \cdot x_g$. Друга

постійна інтегрування, B , обчислюється з виразу для крайових умов на протилежном торці стрижня.

Приклад 1.3. Розглянемо розподіл температури вздовж стрижня в прикладі 1.1, при умовах його конвективного охолодження з двох торців. Для зручності приведемо

всі вхідні данні: $T_0 = 18^\circ\text{C}$; $\lambda = 0,04 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{C}}$; $L = 0,05 \text{ м}$; $q_0 = 1000 \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 12 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{C}}$

. Бокова поверхня стрижня термоізолювана. Обчислюємо координату особливої точки, де температура стрижня досягає максимального значення і тепловий потік розділяється на два протилежних напрямки.

$$x_0 = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot L^2 + 2 \cdot \lambda \cdot \alpha_1 \cdot L}{2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot L + 2 \cdot \lambda \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{L}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025.$$

Як і очікувалося, ця точка розмістилася на середині стрижня, оскільки умови нагрівання і охолодження симетричні.

Постійні інтегрування.

$$A = \frac{q_0 \cdot x_0}{\lambda} = \frac{1000 \cdot 0,025}{0,04} = 625; \quad B = \frac{q_0 \cdot x_0}{\alpha_1} + T_0 = \frac{1000 \cdot 0,025}{12} + 18 = 20,0833.$$

Розподіл температури. $T(x) = -\frac{q_0 \cdot x^2}{2 \cdot \lambda} + A \cdot x + B =$

$$= -\frac{1000 \cdot x^2}{2 \cdot 0,04} + 625 \cdot x + 20,0833 = -12500 \cdot x^2 + 625 \cdot x + 20,0833.$$

Температура в особливої точці. $T(x_0) = -12500 \cdot x_0^2 + 625 \cdot x_0 + 20,0833 =$

$$= -12500 \cdot 0,025^2 + 625 \cdot 0,025 + 20,0833 = 27,8958.$$

Розподіл температури по довжині стрижня.

| | | | | | | | |
|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| x | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,025 | 0,03 | 0,04 | 0,05 |
| $T(x)$ | 20,0833 | 25,0833 | 27,5833 | 27,8958 | 27,5833 | 25,0833 | 20,0833 |

1.6. Тонкий стрижень, що охолоджується з бокової поверхні

До цих пір ми розглядали стрижень з термоізолюваною боковою поверхністю. Теплообмін в такому стрижні відбувається тільки на торцях стрижня. На бокові поверхні по довжині стрижня теплообмін відсутній.

Зараз розглянемо довгий тонкий стрижень, що конвективно охолоджується через бокову поверхню. Стрижень задається тонким на стільки, що розподіл температури в усіх точках його поперечного розтину можна вважати постійним. Тоді з рівняння теплового балансу для елемента об'єму круглого такого стрижня $dv = S \cdot dx$ отримуємо диференціальне рівняння теплопровідності [2.,С.135]:

$$\lambda \cdot \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = -q(x) + \frac{\alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}{S} \cdot [T(x) - T_0] \quad (1.9)$$

Тут: S - площа розтину стрижня, R - радіус круглого розтину. Якщо розтин стрижня має другу форму (прямокутник, квадрат, шестигранник), то замість довжини кола $2 \cdot \pi \cdot R$ в (1.9) слід брати периметер цього розтину. При $T_0 = 0$, запишемо рівняння (1.9) наступним чином:

$$\lambda \cdot \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} - \frac{\alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}{S} \cdot T(x) = -q(x) \quad (1.10)$$

При $q(x) = q_0 = const$ частковий розв'язок цього неоднорідного диференціального рівняння $F(x) = \frac{q_0 \cdot S}{\alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}$, що легко перевірити підстановкою. Загальний розв'язок

відповідного однорідного диференціального рівняння $\lambda \cdot \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} - \frac{\alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}{S} \cdot T(x) = 0$ (1.11) будемо шукати у вигляді виразу $G(x) = A \cdot e^{-k \cdot x} + B \cdot e^{k \cdot x}$ [2, с. 140].

Підставляючи цей вираз в рівняння (1.11), отримуємо: $k^2 = \frac{\alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}{\lambda \cdot S}$. Загальний розв'язок всієї задачі $T(x) = F(x) + G(x)$. Постійні інтегрування A і B знаходимо з крайових умов на торцях стрижня. Нехай це будуть крайові умови Діріхле для стрижня довжини L . На торці стрижня з координатою $x_1 = 0$, температура $T(x_1) = T_1$, а на протилежному торці, з координатою $x_2 = L$, температура $T(x_2) = T_2$. Складаємо два рівняння для визначення постійних інтегрування A і B .
 $T_1 = F(x_1) + A + B$ і

$T_2 = F(x_2) + A \cdot e^{-k \cdot L} + B \cdot e^{k \cdot L}$. Звідки знаходимо постійні інтегрування:

$$B = \frac{T_2 - F(x_2) - [T_1 - F(x_1)] \cdot e^{-k \cdot L}}{e^{k \cdot L} - e^{-k \cdot L}}, \quad A = \frac{T_2 - F(x_2) - [T_1 - F(x_1)] \cdot e^{k \cdot L}}{e^{-k \cdot L} - e^{k \cdot L}}.$$

Приклад 1.4. Електрозварювальний електрод ($\lambda = 80 \frac{Bm}{M \cdot ^\circ C}$, $L=0,4$ м, $R=0,002$ м),

нагрівається електричним струмом ($q_0 = 10000 \frac{Bm}{M^3}$). Температура зварювання

$T_1 = 3000$ °С. Температура металевих затискачів електродів дорівнює температурі

навколишнього середовища $T_2 = T_0 = 20$ °С. Коефіцієнт конвекції $\alpha = 10 \frac{Bm}{M^2 \cdot ^\circ C}$.

Встановити розподіл температури по довжині електрода.

$$\text{Обчислюємо параметр } k^2 = \frac{\alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}{\lambda \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{\alpha \cdot 2}{\lambda \cdot R} = \frac{10 \cdot 2}{80 \cdot 0,002} = 125,$$

$k = \sqrt{125} = 11,18$. Крайові умови Діріхле приводимо у відповідність крайовим умовам Ньютона. $T_1 = 3000 - 20 = 2980$, $T_2 = 20 - 20 = 0$.

Фундаментальний, або частковий розв'язок.

$$F(x) = \frac{q_0 \cdot S}{\alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{q_0 \cdot \pi \cdot R^2}{\alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{q_0 \cdot R}{\alpha \cdot 2} = \frac{10000 \cdot 0,002}{10 \cdot 2} = 1.$$

Експоненти. $e^{-k \cdot L} = e^{-4,472} = 0,01142$; $e^{k \cdot L} = e^{4,472} = 87,54352$; $k \cdot L = 11,18 \cdot 0,4 = 4,472$.

Постійні інтегрування:

$$A = \frac{T_2 - F(x_2) - [T_1 - F(x_1)] \cdot e^{-k \cdot L}}{e^{-k \cdot L} - e^{k \cdot L}} = \frac{0 - 1 - (2980 - 1) \cdot 87,54352}{0,01142 - 87,54352} = 2979,4.$$

$$B = \frac{T_2 - F(x_2) - [T_1 - F(x_1)] \cdot e^{-k \cdot L}}{e^{k \cdot L} - e^{-k \cdot L}} = \frac{0 - 1 - (2980 - 1) \cdot 0,01142}{87,54352 - 0,01142} = -0,4.$$

$$T(x) = F(x) + G(x) = 1 + 2979,4 \cdot e^{-11,18 \cdot x} - 0,4 \cdot e^{11,18 \cdot x}.$$

Розподіл температури вздовж довжини стрижня.

x , м 0 0,1 0,2 0,3 0,4.

$T(x)$, °С 2980 973,807 315,6878 93,6493 0,0253.

Те, що температура при $x = 0,4$ не дорівнює нулю, обумовлено похибкою округлення. Тут ця похибка становить 0,00085 %.

Якби, хоть на одному з торців стрижня були задані крайові умови Ньютона, то знайти аналітичне рішення задачі було би неможливо. Проблема полягає в тому, що самі крайові умови Ньютона залежать від значення невідомої нам функції. Для крайових умов Діріхле немає такої проблеми, вони є незалежні. Температура на торцях задана і змінити її ніяк неможливо.

Забігаючи вперед, відзначимо, що в методі кінцевих елементів, якому присвячується ця книга, ніяких проблем з врахуванням всіх видів крайових умов не виникає. Весь математичний апарат метода кінцевих елементів, в кінцевому підсумку, зводиться до

алгебри середньої школи і до арифметики початкових класів. Математичні перетворення по розв'язуванню диференціальних рівнянь з врахуванням крайових умов переводять поставлену задачу в систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

1.7. Кусочно-однорідний стрижень, що конвективно охолоджується з торця

Неоднорідності в задачах теплопередачі і теплопровідності бувають двох видів – це неоднорідний розподіл теплопровідності по об'єму тіла ($\lambda = \lambda(x)$) і неоднорідний розподіл виділення тепла ($q = q(x)$). За звичай, неоднорідний розподіл теплопровідності має кусочно-однорідну структуру. Фізичне тіло складається з окремих частин, з різних видів матеріалів, в межах яких теплопровідність постійна. Розподіл потужності тепла, що виділяється, також є кусочно-однорідним. На одних ділянках тіла тепло може виділятися, а на других – ні.

Причому, на ділянках виділення тепла його потужність може бути функцією координат, наприклад, при реакціях затвердіння епоксидних композицій.

Розглянемо розв'язок задачі в кусочно-однорідному стрижні. Стрижень з перетином S і довжиною L нагрівається всередині нерівномірно розподілу по об'єму стрижня, потужністю тепловиділення $q = q(x)$, і конвективно охолоджується з торця з коефіцієнтом конвекції α (рис. 1.5). Протилежний торець – термоізолюваний. Стрижень складається з окремих ділянок. В границях кожної ділянки стрижня коефіцієнт теплопровідності матеріалу $\lambda = \text{const}$. Температура навколишнього середовища – T_0 .

Для побудови загального алгоритму розв'язку задачі, заданий розподіл функції $q = q(x)$ в межах кожної ділянки $\lambda = \text{const}$ апроксимуємо ступеньчатим розподілом з $q = \text{const}$. Таким чином, ми отримуємо стрижень, що складається з однорідних ділянок (рис.1.5).

Загальний вираз для розподілу температури в однорідному стрижні було отримано вище. Для i -тої однорідної ділянки стрижня запишемо:

$$T_i(x) = \frac{-1}{\lambda_i} \cdot \frac{q_i \cdot x^2}{2} + A_i \cdot x + B_i.$$

В подальшому, виходячи з умови нерозривності функції $T(x)$ на границях однорідних ділянок (граничні умови) і крайових умов на торцях стрижня, складаємо відповідні рівняння і визначаємо постійні інтегрування

A_i і B_i для кожної ділянки. Розглянемо це питання.

На термоізолюваному торці стрижня (при $x = x_1$) тепловий потік дорівнює

нулю ($\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = 0$). Таким чином, при $x = x_1$ $A_1 = \frac{q_1 \cdot x_1}{\lambda_1}$. Із умови нерозривності

теплого потоку на границі 1-шої і 2-гої ділянок $\lambda_1 \cdot \frac{dT_1(x)}{dx} \Big|_{x=x_2} = \lambda_2 \cdot \frac{dT_2(x)}{dx} \Big|_{x=x_2}$,

знаходимо: $A_2 = - \frac{(q_2 - q_1) \cdot x_2}{\lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot A_1$.

Аналогічно запишемо: $A_3 = - \frac{(q_3 - q_2) \cdot x_3}{\lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \cdot A_2$;

$$A_i = - \frac{(q_i - q_{i-1}) \cdot x_i}{\lambda_i} + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \cdot A_{i-1}; \quad A_n = - \frac{(q_n - q_{n-1}) \cdot x_n}{\lambda_n} + \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \cdot A_{n-1}.$$

Енергія, що виділяється за одиницю часу по всьому об'єму стрижня,

$$Q_v = S \cdot \sum_{i=1}^n q_i \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Енергія, що за цей же час конвективно видаляється з торця стрижня

$$Q_s = \alpha \cdot S \cdot (T_L - T_0),$$

де T_L - температура на торці стрижня. Із рівняння теплового балансу

$$Q_v = Q_s, \text{ знаходимо температуру на торці стрижня } T_L = \frac{1}{\alpha} \cdot \sum_{i=1}^n q_i \cdot (x_{i+1} - x_i) + T_0.$$

З другого боку, на торці стрижня при $x = L$ $T_L = - \frac{q_n \cdot L^2}{2 \cdot \lambda_n} + A_n \cdot L + B_n$, звідки $B_n =$

$$T_L - A_n \cdot L + \frac{q_n \cdot L^2}{2 \cdot \lambda_n}. \text{ Із умови нерозривності функції}$$

$$T_{i-1}(x) = T_i(x), \text{ знаходимо } B_{i-1} = \frac{q_{i-1} \cdot x_i^2}{2 \cdot \lambda_{i-1}} - \frac{q_i \cdot x_i^2}{2 \cdot \lambda_i} + A_i \cdot x_i - A_{i-1} \cdot x_i + B_i.$$

Таким чином, ми отримали рішення задачі для кожної ділянки стрижня

$$T_i(x) = - \frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{q_i \cdot x^2}{2} + A_i \cdot x + B_i.$$

1.8. Математичні основи методу кінцевих елементів

По своїй суті метод кінцевих елементів аналогічний кусочно-аналітичному методу. Також кусочно-однорідна область розділяється на окремі підобласті або елементи. Елементами розділення є однорідні ділянки стрижня. У кожній з цих ділянок $q = \text{const}$ і $\lambda = \text{const}$.

В межах окремого елемента невідома функція $T(x)$ апроксимується простими аналітичними функціями (лінійна функція, квадратична або кубічна параболи). Цим і відрізняється метод кінцевих елементів від кусочно-аналітичного. Метод кінцевих елементів дає приблизний результат розв'язування задачі, похибка якого обумовлена похибкою апроксимації функції, а кусочно-аналітичний спосіб дає точний аналітичний вираз для функції в межах виділеного елемента.

Проте, знайти точне аналітичне рішення вдається тільки в найпростіших випадках, наприклад, коли $q = \text{const}$, або коли $q(x)$ є аналітична функція, що дозволяє аналітично виразити інтеграл (1.2) для фундаментального рішення.

У методі кінцевих елементів таких обмежень нема. Функція може бути апроксимована в межах кожного кінцевого елемента лінійно або параболічно практично при довільній залежності $q(x)$. Крім того, такі апроксимації можуть бути виконані в двомірні постановці задачі, де кінцевими елементами будуть прямокутники, або в тримірні постановці, при

розділені простору на паралелепіеди. Двомірні і тримірні задачі, за рідким винятком, взагалі не мають аналітичних рішень.

Математичні основи методу кінцевих елементів почнемо розглядати з найпростішої задачі - кусочно-однорідний стрижень, що конвективно охолоджується з торців. Стрижень розділяємо на n ділянок (кінцевих елементів). Розділення задається координатами границь ділянок $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots, x_n)$ (рис.1.6).

При математичній реалізації метода кінцевих елементів принципове значення мають наступні три поняття:

- **координатні функції,**
- **локальні координати,**
- **глобальні координати.**

Виділимо окремий k -тий елемент і розглянемо такі поняття, як координатні функції, локальні і глобальні координати (рис.1.7).

Координатні функції використовуються для апроксимації функції $T(x)$ в межах кожного кінцевого елемента. В локальних координатах ξ на відріжку від $\xi = -1$ до $\xi = +1$ ці функції при лінійній апроксимації мають наступний вигляд:

$$N_1(\xi) = 0.5 \cdot (1 - \xi); \quad N_2(\xi) = 0.5 \cdot (1 + \xi). \quad (1.12)$$

Геометрично функції $N_1(\xi)$ і $N_2(\xi)$ є відрізки прямих ліній, що проходять через точки з координатами: $[\xi = -1, N_1 = 1]$; $[\xi = 1, N_1 = 0]$ і $[\xi = -1, N_2 = 0]$; $[\xi = 1, N_2 = 1]$. Вони мають такі властивості:

$$N_1(\xi) + N_2(\xi) = 1, \quad \frac{dN_1}{d\xi} + \frac{dN_2}{d\xi} = 0.$$

Опорними точками для апроксимації невідомої функції є вузли апроксимації. В локальних координатах тільки два вузли. Вони номеруються в порядку зростання координати ξ . Це будуть локальні номери 1 і 2. Під цими номерами записані і вирази для координатних функцій $N_1(\xi)$ і $N_2(\xi)$. Локальні номери задаються один раз і залишаються без змін.

В глобальних координатах, в порядку зростання координати X , виконується глобальна нумерація вузлів апроксимації і заданих координат X_k . Значення координати X і невідомої функції $T(X)$ в глобальних координатах для k – того елемента вираховуються через координатні функції і значення цих величин в вузлах кінцевого елемента.

$$X = N_1(\xi) \cdot X_k + N_2(\xi) \cdot X_{k+1}; \quad T(X) = N_1(\xi) \cdot T_k + N_2(\xi) \cdot T_{k+1}.$$

Якщо необхідно вирахувати $T(X_g)$ в задані точці X_g розрахункової області, то спочатку потрібно визначити номер k кінцевого елемента, в межах якого знаходиться точка

x_g , а далі, вирахувати значення локальної координати ξ_g , що відповідає розрахункові точці x_g .

Наприклад, $x_g = 0,5 \cdot (1 - \xi_g) + 0,5 \cdot (1 + \xi_g)$. Звідки $\xi_g = \frac{2 \cdot x_g - x_k - x_{k+1}}{x_{k+1} - x_k}$.

Отже, $T(x_g) = N_1(\xi_g) \cdot T_k + N_2(\xi_g) \cdot T_{k+1}$. На рис. 1.7 показані графіки розподілу лінійних координатних функцій в локальних і глобальних координатах, а також розміщення точок ξ_g і x_g .

Аналітична геометрія пропонує нам цілий ряд аналітичних рівнянь прямої лінії, а саме:

$A \cdot x + B \cdot y = 0$ - канонічне рівняння прямої лінії;

$y = k \cdot x + b$ - рівняння прямої лінії з кутовим коефіцієнтом;

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ - рівняння прямої лінії у відрізках;

$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ - рівняння прямої лінії, що проходить через дві задані точки.

Відомі і другі види рівнянь прямої лінії, наприклад, параметричне рівняння або рівняння в полярних координатах. Кожний вид рівняння має свої переваги в залежності від конкретної задачі.

При розв'язуванні задач методом кінцевих елементів найзручнішим виявляється застосування координатних функцій. Це дещо незвичний спосіб. Він навіть відсутній в підручниках по вищій математиці. Але саме такий спосіб апроксимації функції дозволяє дуже витончено уніфікувати обчислювальні операції при розв'язуванні задач методом кінцевих елементів.

Далі повернемося до основної задачі - визначенню самої функції $T(x)$ з використанням кінцевих елементів. Тепер ця задача зводиться до обчислення значень цієї функції $T_k(x_k)$ в вузлах апроксимації. Рішення будемо шукати виходячи з закону збереження енергії в межах кожного кінцевого елемента.

Визначимо потужність виділення тепла в k -тому кінцевому елементі. При заданій функції $T(x)$, тепловий потік, що підводиться до фізичного тіла $p(x) = -\lambda \cdot \frac{dT(x)}{dx}$.

Визначимо функцію $T(x)$ через координатні функції в глобальних координатах.

$$T(x) = N_1(x) \cdot T_1 + N_2(x) \cdot T_2.$$

$$\text{Тепловий потік тоді буде} \quad p(x) = -\lambda \cdot \left(\frac{dN_1}{dx} \cdot T_1 + \frac{dN_2}{dx} \cdot T_2 \right). \quad (1.13)$$

Запишемо також вираз для теплового потоку через координатні функції

$$p(x) = N_1(x) \cdot p_1 + N_2(x) \cdot p_2. \quad (1.14)$$

Підставляючи (1.13) в праву частину виразу (1.14), отримуємо:

$$p(x) = -N_1(x) \cdot \lambda \cdot \left(\frac{dN_1}{dx} \cdot T_1 + \frac{dN_2}{dx} \cdot T_2 \right) - N_2(x) \cdot \lambda \cdot \left(\frac{dN_1}{dx} \cdot T_1 + \frac{dN_2}{dx} \cdot T_2 \right). \quad (1.15)$$

Потужність виділення тепла, що передається тепловим потоком $p(x)$ в межах k -того кінцевого елемента буде:

$$P_k = S \cdot \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dp(x)}{dx} \cdot dx, \quad \text{де } S \text{ — перетин стрижня. З урахуванням (1.15)}$$

$$P_k = -\lambda \cdot S \cdot \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dN_1}{dx} \cdot \left(\frac{dN_1}{dx} \cdot T_1 + \frac{dN_2}{dx} \cdot T_2 \right) \cdot dx - \lambda \cdot S \cdot \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dN_2}{dx} \cdot \left(\frac{dN_1}{dx} \cdot T_1 + \frac{dN_2}{dx} \cdot T_2 \right) \cdot dx. \quad (1.16)$$

З другого боку, потужність джерела тепла, що виділяється в межах

$$k\text{-того кінцевого елемента} \quad F_k = S \cdot \int_{x_k}^{x_{k+1}} q(x) \cdot dx. \quad \text{Визначимо } q(x) \text{ через координатні}$$

функції в глобальних координатах: $q(x) = N_1(x) \cdot q_1 + N_2(x) \cdot q_2$, де q_1 і q_2 значення об'ємної щільності енергії в вузлах k -того кінцевого елемента, яка виділяється джерелом тепла в одиниці об'єму цього кінцевого елемента. Можливість виразити функцію джерела тепла $q(x)$ через координатні функції забезпечує її лінійну апроксимацію в межах даного кінцевого елемента, так саме як і апроксимацію ще невідомої функції $T(x)$. Загальна потужність енергії, що виділяється джерелом тепла в межах одиниці об'єму k -того кінцевого елемента

$$F_k = S \cdot \int_{x_k}^{x_{k+1}} [N_1(x) \cdot q_1 + N_2(x) \cdot q_2] \cdot dx. \quad (1.17)$$

По закону збереження енергії, $P_k = F_k$. Прирівнюючи вирази (1.16) і (1.17), запишемо в матричній формі.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},$$

$$\text{де} \quad k_{ij}^3 = \lambda_k \cdot \int_{x_i}^{x_j} \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} \cdot dx, \quad f_i = - \int_{x_i}^{x_j} N_i \cdot q_k(x) \cdot dx. \quad (1.18)$$

Таким чином, подальше рішення нашої задачі зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно значень температури T_1 і T_2 в вузлах апроксимації. Цю систему алгебраїчних рівнянь необхідно доповнити ще крайовими умовами на торцях стрижня.

Приведене вище виведення формул для обчислення компонентів підматриць системи кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь не є математично строгим. Вирази

(1.18) дійсно задовольняють тотожність виразів (1.16) і (1.17), але з цього ще не витікає що це єдине рішення.

Строге доведення того, що це єдине рішення, отримано із умов мінімізації енергетичного функціоналу для всієї області, розділеної на кінцеві елементи. Тут ці математичні перетворення внаслідок їх громіздкості опускаються. Познайомитися з такими викладками можна в спеціальній літературі по теорії метода кінцевих елементів, наприклад в роботі [4, с. 71].

При виводі виразів (1.18) збережені також позначення буквами фізичних величин і умови протікання теплофізичних процесів, при яких ці вирази отримані в роботі [4, с. 71]. Так, компоненти матриць коефіцієнтів і вільних членів, позначені буквами k_{ij}^3 і f_i . Сама формула для компонентів матриці вільних членів має знак “мінус” ($f_i = - \int_{x_1}^{x_2} N_i \cdot q_k(x) \cdot dx$). Як пояснює Л. Сегерлінд: “знак мінус поставлено тому, що тепло підводиться до тіла” [4, с. 71].

При подальшому викладені тексту даної книги позначення буквами компонентів матриць будуть змінені. Змінимо також знак “мінус” на “плюс”. Вирази для розрахунків запишемо так:

$$a_{ij}^3 = \lambda_k \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} \cdot dx, \quad b_i = \int_{x_1}^{x_2} N_i \cdot q_k(x) \cdot dx. \quad (1.19)$$

Це викликано тим, що букви k, l, i, j, m, n при позначенні фізичних величин використовуються, як правило, в якості індексів. Самі фізичні величини позначаються іншими буквами латинського або грецького алфавітів. Тому, для позначення компонентів матриць логічно взяти перші букви латинського алфавіту “a” і “b”, а букву “k” використовувати як індекс.

Знак “мінус” відповідає підводу тепла до фізичного тіла зовні. В даній роботі розглядаються теплофізичні процеси, де тепло виділяється всередині фізичних тіл в процесах хімічних реакцій, або індуктивного їх нагрівання. Тепловий потік при цьому буде виводитися з об’єму фізичного тіла внаслідок теплопровідності зразка, або конвекцією з його поверхні, але не підводиться до тіла зовні, як це наголошено при виведенні формул (1.18) у Л. Сегерлінда. Тому, в формулі для обчислення компонентів матриці вільних членів знак “мінус” замінено на знак “плюс”.

З врахуванням прийятих змін, система кінцевоелементних рівнянь

для першого кінцевого елемента набуде вигляду:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} \cdot T_1 + a_{12}^{(1)} \cdot T_2 &= b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} \cdot T_1 + a_{22}^{(1)} \cdot T_2 &= b_2^{(1)} \end{aligned}$$

$$\text{де } a_{ij}^3 = \lambda_k \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} \cdot dx, \quad b_i^3 = \int_{x_1}^{x_2} N_i \cdot q_i(x) \cdot dx. \quad (1.20)$$

Тут, при обчисленні коефіцієнтів “ a_{ij}^3 ” і “ b_i^3 ” індекси “ i ”=1,2 і “ j ”=1,2 - це номери вузлів в глобальних координатах, а при обчисленні інтегралів $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} \cdot dx$ і

$\int_{x_1}^{x_2} N_i \cdot q_1(x) \cdot dx$ “ i ”=1,2 і “ j ”=1,2 - номери вузлів в локальних координатах. Для

першого кінцевого елемента ці номери випадково співпали, так як з першого кінцевого елемента починається відлік і глобальних номерів. Індексами i, j при координатних функціях $N_i(\xi)$, $N_j(\xi)$ позначені локальні номери вузлів, а при компонентах підматриць елементів a_{ij}^3 , b_i^3 цими індексами позначені глобальні номери вузлів в межах виділеного кінцевого елемента.

Для другого кінцевого елемента глобальні номери зміняться, “ i ”=2,3 “ j ”=2,3. Система рівнянь набуде вигляду:

$$\begin{aligned} a_{22}^{(2)} \cdot T_2 + a_{23}^{(2)} \cdot T_3 &= b_2^{(2)} \\ a_{32}^{(2)} \cdot T_2 + a_{33}^{(2)} \cdot T_3 &= b_3^{(2)} \end{aligned}$$

Просумувавши по всіх кінцевих елементах, отримуємо без врахування крайових умов, повною систему кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь для визначення температури в вузлах кінцевих елементів T_n .

| | | | |
|----------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------|
| $a_{11}^{(1)}$ | $a_{12}^{(1)}$ | | |
| | $a_{22}^{(1)} + a_{22}^{(2)}$ | $a_{23}^{(2)}$ | |
| | | $a_{33}^{(2)} + a_{33}^{(3)}$ | |
| СІМ. . . . | | | |
| | | | $a_{n+1n+1}^{(n)}$ |

| |
|-----------|
| T_1 |
| T_2 |
| T_3 |
| . . . |
| T_{n+1} |

| |
|-------------------------|
| $b_1^{(1)}$ |
| $b_2^{(1)} + b_2^{(2)}$ |
| $b_3^{(2)} + b_3^{(3)}$ |
| . . . |
| $b_{n+1}^{(n)}$ |

або, в матричній формі $[A] \cdot \{T\} = \{B\}$. (1.21)

В виразах (1.20) для компонентів матриць коефіцієнтів a_{ij}^3 і вільних членів b_i^3 інтеграли $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} \cdot dx$ і $\int_{x_1}^{x_2} N_i \cdot q_1(x) \cdot dx$ записані в глобальних координатах. Необхідно виразити їх в локальних координатах, так як координатні функції задаються в локальних координатах.

Виконаємо підготовчі математичні операції для підстановки в (1.20). Похідні координатних функцій в глобальних координатах будуть:

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx}, \quad \frac{dN_j}{dx} = \frac{dN_j}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx}.$$

В локальних координатах при лінійній апроксимації

$$\frac{dN_1}{d\xi} = -0,5; \quad \frac{dN_2}{d\xi} = 0,5; \quad x = N_1(\xi) \cdot x_k + N_2(\xi) \cdot x_{k+1};$$

$$dx = \frac{dN_1}{d\xi} \cdot x_k \cdot d\xi + \frac{dN_2}{d\xi} \cdot x_{k+1} \cdot d\xi; \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{x_{k+1} - x_k}; \quad dx = \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2} \cdot d\xi.$$

Таким чином, $\frac{dN_1}{dx} = -\frac{1}{x_{k+1} - x_k}, \quad \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{x_{k+1} - x_k}.$

З врахуванням виконаних перетворень вирази (1.20) набудуть вигляду:

$$a_{ij}^{\alpha} = (-1)^{(i+j)} \cdot \frac{\lambda_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad (1.22)$$

$$b_i^{\alpha} = 0,5 \cdot q_k \cdot (x_{k+1} - x_k) \quad \text{при} \quad q_k = \text{const} \quad (1.23)$$

Тут “i” і “j” - це номери вузлів в глобальних координатах.

Інтегрування в локальних координатах виконується один раз і для всіх кінцевих елементів. Саме в цьому полягає перевага використання координатних функцій і локальних координат. Забігаючи наперед, відзначимо, що це не єдина перевага!

Система кінцеелементних алгебраїчних рівнянь (1.21) має ряд особливостей. Це система лінійних алгебраїчних рівнянь із стрічковою симетричною матрицею коефіцієнтів. З врахуванням крайових умов конвективного двохстороннього охолодження стрижня вона має вигляд:

| | | | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-----|-------------------------------|-----------|-------------------------|
| $a_{11}^{(1)} + \alpha_1$ | $a_{12}^{(1)}$ | | | T_1 | $b_1^{(1)}$ |
| $a_{22}^{(1)} + a_{22}^{(2)}$ | $a_{23}^{(2)}$ | | | T_2 | $b_2^{(1)} + b_2^{(2)}$ |
| | $a_{33}^{(2)} + a_{33}^{(3)}$ | | | T_3 | $b_3^{(2)} + b_3^{(3)}$ |
| СМ. | | ... | | ... | ... |
| | | | $a_{n+1n+1}^{(n)} + \alpha_2$ | T_{n+1} | $b_{n+1}^{(n)}$ |

Крайові умови Ньютона враховуються простим додаванням до першого компонента матриці коефіцієнтів коефіцієнта конвекції на торці першого елемента ($a_{11}^{(1)} = a_{11}^{(1)} + \alpha_1$) і таким же додаванням до останнього компонента коефіцієнта конвекції на торці останнього елемента ($a_{n+1n+1}^{(n)} = a_{n+1n+1}^{(n)} + \alpha_n$).

Слід відзначити простоту і наглядність врахування крайових умов. При $\alpha_1 = 0$, отримуємо рішення задачі для одностороннього охолодження стрижня з торця з коефіцієнтом конвекції $\alpha_n \neq 0$.

Аналітичний розв'язок такої задачі отримано вище. При $\alpha_n = 0$, отримуємо рішення задачі у випадку охолодження стрижня з протилежного торця з коефіцієнтом конвекції $\alpha_1 \neq 0$. Якщо обидва коефіцієнти конвекції охолоджують стрижень, то отримуємо задачу двохстороннього охолодження стрижня. Пошук аналітичного розв'язку такої задачі виглядає досить трудомним. Для цього потрібно по черзі розглянути всі ділянки (елементи) з виділенням тепла і виявити на якій з них знаходиться особлива точка з координатою x_0 . При розв'язуванні цієї задачі

методом кінцевих елементів розподіл температури вздовж всього стрижня визначається просто розв'язуванням системи лінійних алгебраїчних рівнянь із стрічковою матрицею.

Для розв'язування такої системи рівнянь на комп'ютері в пам'яті достатньо зберігати тільки три стрічки матриці - головну діагональ і дві однакові піддіагоналі. Розв'язування її зручно виконувати послідовним виключенням невідомих методом Гауса.

1.9. Крайові умови Діріхле в методі кінцевих елементів

Крайові умови Діріхле, в загальному випадку, припускають заданими значення температури на краях розрахункової області. У випадку одновірної задачі в декартових координатах це будуть значення температури на торцях стрижня.

Розглянемо перший випадок, коли температура задана тільки на одному торці стрижня. Другий торець охолоджується конвективно. Тоді, при глобальній нумерації вузлів кінцевих елементів, вузлу s заданими значеннями температури, слід присвоїти останній номер.

Для лінійної апроксимації, коли число кінцевих елементів дорівнює n , номер останнього вузла буде $n+1$. Число рівнянь в системі кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь буде дорівнювати $n+1$. Проте значення температури T_{n+1} , в вузлі під номером $n+1$ вже задано в якості вхідних даних. Тому, число невідомих в системі алгебраїчних рівнянь зменшиться на одиницю. Останню строку в матриці коефіцієнтів можна просто видалити, а останній стовпець s коефіцієнтом, помноженому на значення температури в останньому вузлі $(T_{n+1} - T_0)$, перенести в праву частину змінивши знак. Так, як це завжди виконується при розв'язуванні алгебраїчних рівнянь.

Тут необхідно пояснити, чому від заданого значення температури на поверхні торця T_{n+1} віднімається температура навколишнього середовища T_0 . В цій задачі ми маємо змішані крайові умови. На одному торці - це умови Діріхле, а на другому - умови конвективного теплообміну Ньютона. Конвективний теплообмін забезпечує різниця температури поверхні тіла і температури навколишнього середовища. Компоненти матриці коефіцієнтів при конвективному теплообміні вираховуються для різниці температури в вузлах і температури навколишнього середовища. Це показує перший коефіцієнт. Якщо ми маємо доданок $\alpha_1 T_1$, то T_1 в цьому доданку є різниця температур. В результаті розв'язування системи рівнянь ми отримуємо різницю температури в вузлах і температури навколишнього середовища. Різниця температур $(T_{n+1} - T_0)$ приводить крайові умови Діріхле до крайових умов Ньютона.

З врахуванням сказаного вище, повна система кінцевоелементних рівнянь набуде вигляду:

| | | | | | | |
|---------------------------|-------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|-------|-----------|---|
| $a_{11}^{(1)} + \alpha_1$ | $a_{12}^{(1)}$ | | | | T_1 | $b_1^{(1)}$ |
| $a_{12}^{(1)}$ | $a_{22}^{(1)} + a_{22}^{(2)}$ | $a_{23}^{(2)}$ | | | T_2 | $b_2^{(1)} + b_2^{(2)}$ |
| | $a_{23}^{(2)}$ | $a_{33}^{(2)} + a_{33}^{(3)}$ | | | T_3 | $b_3^{(2)} + b_3^{(3)}$ |
| | | | | | ... | ... |
| | | | $a_{nn}^{(n-1)} + a_{nn}^{(n)}$ | | T_n | $b_n^{(n-1)} + b_n^{(n)} - a_{n,n+1}^{(n)} \cdot (T_{n+1} - T_n)$ |
| | | | $a_{n,n+1}^{(n)}$ | T_n | T_{n+1} | $b_{n+1}^{(n)} - a_{n+1,n+1}^{(n)} \cdot T_{n+1}$ |

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримуюмо значення температури в усіх вузлах.

У випадку, коли крайові умови Діріхле задані на двох торцях стрижня, глобальну номерацію слід починати з вузла, наступного після будь-якого торця і закінчувати наданням останніх номерів двом вузлам на торця стрижня. Тепер, в системі рівнянь викреслюємо дві останні строки, а компоненти двох останніх стовбців з протилежним знаком переносимо в праву частину рівнянь до вільних членів.

Приклад 1.5. Однорідний стрижень: $\alpha_1=0$; $\alpha_2=20$; $T_0 = 20$; $L = 0,02$; $q = 2000$; $\lambda = 0,01$. На весь стрижень вибираємо один елемент. Тоді

$$a_{ij}^3 = (-1)^{(i+j)} \cdot \frac{\lambda_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad b_i^3 = 0,5 \cdot q_k \cdot (x_{k+1} - x_k).$$

$$x_k=0 \quad x_{k+1} = L = 0,02$$

$$a_{11} = 0,01 / 0,02 = 0,5 \quad a_{12} = -0,01 / 0,02 = -0,5$$

$$a_{21} = -0,01 / 0,02 = -0,5 \quad a_{22} = 0,01 / 0,02 = 0,5$$

$$b_1 = 0,5 \cdot 2000 \cdot 0,02 = 20 \quad b_2 = 0,5 \cdot 2000 \cdot 0,02 = 20$$

$$a_{22} = \alpha_2 + a_{22} = 20 + 0,5$$

$$\text{Система рівнянь.} \quad 0,5 \cdot T_1 - 0,5 \cdot T_2 = 20$$

$$-0,5 \cdot T_1 + 20,5 \cdot T_2 = 20$$

$$\text{Розв'язок системи рівнянь:} \quad T_2 = 2, \quad T_1 = 42.$$

Аналітичний розв'язок:

$$T_1 = \frac{q \cdot L^2}{2 \cdot \lambda} + \frac{q \cdot L}{\alpha} = \frac{2000 \cdot 0,02^2}{2 \cdot 0,01} + \frac{2000 \cdot 0,02}{20} = 40 + 2 = 42, \quad T_2 = \frac{q \cdot L}{\alpha} = \frac{2000 \cdot 0,02}{20} = 2.$$

Приклад 1.6. Розглянемо другий приклад, коли стрижень складається з двох елементів з різними теплофізичними параметрами.

$$\text{Координати границь елементів:} \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 0,02; \quad x_3 = 0,03.$$

$$\text{На першому елементі} \quad q_1 = 2000; \quad \lambda = 40.$$

$$\text{На другому елементі} \quad q_2 = 0; \quad \lambda = 0,4.$$

$$\text{На торцях стрижня} \quad \alpha_1=0; \quad \alpha_3=10; \quad T_0 = 20.$$

Розділення стрижня на два кінцевих елемента показано на рис. 1.8.

$$\text{Для першого елемента} \quad a_{11} = 40 / 0,02 = 2000.$$

$$a_{12} = -40 / 0,02 = -2000$$

$$a_{21} = -40 / 0,02 = -2000$$

$$a_{22} = 40 / 0,02 = 2000$$

$$b_1 = 0,5 \cdot 2000 \cdot 0,02 = 20 \quad b_2 = 0,5 \cdot 2000 \cdot 0,02 = 20$$

Для другого елемента $a_{22} = 0,4 / 0,01 = 40$

$a_{23} = -0,4 / 0,01 = -40$

$a_{32} = -0,4 / 0,01 = -40$

$a_{33} = 0,4 / 0,01 = 40$ $b_2 = 0$ $b_3 = 0$

Об'єднуємо рівняння для окремих елементів в одну систему рівнянь з врахуванням крайових умов $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_3 = 10$.

Отримуємо наступну систему рівнянь.

| | | | | |
|----------|-----------|---------|----------------|--------|
| 2000 + 0 | - 2000 | | T ₁ | 20 |
| - 2000 | 2000 + 40 | - 40 | T ₂ | 20 + 0 |
| | - 40 | 10 + 40 | T ₃ | 0 |

Розв'язування цієї системи рівнянь методом Гауса почнемо діленням першої і другої строк матриці коефіцієнтів і вільних членів на коефіцієнти в їх першому стовбці.

Після ділення матриці набудуть вигляду:

| | | | | |
|---|--------|---------|----------------|--------|
| 1 | - 1 | | T ₁ | 0.01 |
| 1 | - 1.02 | 0.02 | T ₂ | - 0.01 |
| | - 40 | 10 + 40 | T ₃ | 0 |

Далі, віднімаємо від першої строки другу строку і отримуємо:

| | | | | |
|---|------|---------|----------------|------|
| 1 | - 1 | | T ₁ | 0.01 |
| | 0.02 | - 0.02 | T ₂ | 0.02 |
| | - 40 | 10 + 40 | T ₃ | 0 |

Тепер розглянемо другу і третю строки отриманих матриць. Після ділення їх компонентів на коефіцієнти в другому стовбці відповідно отримуємо:

| | | | | |
|---|-----|--------|----------------|------|
| 1 | - 1 | | T ₁ | 0,01 |
| | 1 | - 1 | T ₂ | 1 |
| | 1 | - 1.25 | T ₃ | 0 |

Віднімаємо з другої строки третю.

| | | | | |
|---|-----|------|----------------|------|
| 1 | - 1 | | T ₁ | 0.01 |
| | 1 | - 1 | T ₂ | 1 |
| | | 0.25 | T ₃ | 1 |

Виконуючи ділення третьої строки, завершуємо прямий хід Гауса.

| | | | | |
|---|-----|-----|----------------|------|
| 1 | - 1 | | T ₁ | 0.01 |
| | 1 | - 1 | T ₂ | 1 |
| | | 1 | T ₃ | 4 |

Прямим ходом прямокутна стрічкова матриця коефіцієнтів перетворюється в верхньотрикутну стрічкову матрицю, у якої на головній діагоналі всі коефіцієнти дорівнюють одиниці. Зворотним ходом Гауса запишемо розв'язок системи рівнянь.

$$T_3 = 4; \quad T_2 = 1 + 1 \quad T_3 = 5; \quad T_1 = 0,01 + 1 \quad T_2 = 5,01.$$

Приклад 1.7. Розглянемо стрижень з вхідними даними прикладу 1.1 і розв'яжемо задачу розподілу температури вздовж цього стрижня методом кінцевих елементів. Вхідні данні для стрижня:

$$\lambda = 0,04; \quad L = 0,05; \quad q_0 = 1000; \quad \alpha = 12; \quad T_0 = 18. .$$

Стрижень розділяємо на чотири кінцевих елементи. Координати вузлів:

$x_1 = 0; \quad x_2 = 0,01; \quad x_3 = 0,02; \quad x_4 = 0,03; \quad x_5 = 0,05.$ Крайові умови Діріхле задаємо в вузлі с максимальним номером $T_5 = 0.$

Виразуємо компоненти підматриць кінцевих елементів по формулах

$$a_{ij}^e = (-1)^{(i+j)} \cdot \frac{\lambda_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad b_i^e = 0,5 \cdot q_k \cdot (x_{k+1} - x_k).$$

Для першого елемента $a_{11} = 0,04 / 0,01 = 4 \quad a_{12} = - 0,04 / 0,01 = - 4$
 $a_{21} = - 4 \quad a_{22} = 4$

$$b_1 = 0,5 \cdot 1000 \cdot 0,01 = 5 \quad b_2 = 0,5 \cdot 1000 \cdot 0,01 = 5$$

Для другого елемента $a_{22} = 0,04 / 0,01 = 4 \quad a_{23} = - 0,04 / 0,01 = - 4$
 $a_{32} = - 4 \quad a_{33} = 4$

$$b_2 = 0,5 \cdot 1000 \cdot 0,01 = 5 \quad b_3 = 0,5 \cdot 1000 \cdot 0,01 = 5$$

Для третього елемента $a_{33} = 0,04 / 0,01 = 4 \quad a_{34} = - 0,04 / 0,01 = - 4$
 $a_{43} = - 4 \quad a_{44} = 4$

$$b_3 = 0,5 \cdot 1000 \cdot 0,01 = 5 \quad b_4 = 0,5 \cdot 1000 \cdot 0,01 = 5$$

Для четвертого елемента $a_{44} = 0,04 / 0,02 = 2 \quad a_{45} = - 0,04 / 0,02 = - 2$
 $a_{54} = - 2 \quad a_{55} = 2$

$$b_4 = 0,5 \cdot 1000 \cdot 0,02 = 10 \quad b_5 = 0,5 \cdot 1000 \cdot 0,02 = 10$$

Доданок, що враховує крайові умови Діріхле. $a_{45} \cdot (T_5 - T_0) = - 2 \cdot (0 - 18) = 36$

Складаємо систему кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь в матричній формі:

| | | | | | |
|-------|--------|--------|-------|----------------|-----------|
| 4 +12 | - 4. | | | T ₁ | 5 |
| - 4 | 4 +. 4 | - 4. | | T ₂ | 5 + 5 |
| | - 4. | 4 +. 4 | - 4. | T ₃ | 5 + 5 |
| | | - 4. | 4 + 2 | T ₄ | 5 +10 -36 |

В результаті розв'язування цієї системи рівнянь отримуємо перевищення температури в розрахункових точках стрижня над температурою навколишнього середовища. $T_1 = 0,828$; $T_2 = 2,0625$;
 $T_3 = 0,7969$; $T_4 = -2,9688$; $T_5 = -18$.

Для порівняння результатів числового і аналітичного розв'язків задачі складемо таблицю:

| x | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,05 |
|--------|--------|--------|--------|--------|---|
| $T(x)$ | 18,83 | 20,064 | 18,8 | 15,033 | 0 - аналітичний розв'язок. |
| $T(x)$ | 18,828 | 20,063 | 18,797 | 15,031 | 0 - розв'язок методом кінцевих елементів. |

Ми бачимо практично ідеальне співпадіння цих результатів.

Приклад 1.8. Розглянемо задачу з двосторонніми умовами Діріхле.

В якості вхідних даних візьмемо дані прикладу 1.2 (пластинка під киплячою водою на масивні металеві плиті). $\lambda = 0,01$; $T_0 = 20$.

Пластинку розділяємо на два кінцевих елемента.



Глобальну нумерацію вузлів починаємо з середнього вузла. Це лише один вузол з невідомою температурою. Останні номери надаємо двом крайнім вузлам. Згідно заданим крайовим умовам Діріхле $T_2 = 20$; $T_3 = 100$. Координати границь кінцевих елементів: $x_1 = 0$; $x_2 = 0,01$; $x_3 = 0,02$. Слід звернути увагу на те, що в даному випадку номери координат границь кінцевих елементів x_1 , x_2 і x_3 не співпадають з номерами вузлів кінцевих елементів.

Виразуємо компоненти підматриць кінцевих елементів.

$$a_{ij}^e = (-1)^{(i+j)} \cdot \frac{\lambda_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad b_i^e = 0,5 \cdot q_k \cdot (x_{k+1} - x_k).$$

Для першого елемента $a_{11} = 0,01 / 0,01 = 1$ $a_{12} = -0,01 / 0,01 = -1$
 $a_{21} = -1$ $a_{22} = 1$

$$b_1 = 0,5 \cdot 0 \cdot 0,01 = 0 \quad b_2 = 0,5 \cdot 0 \cdot 0,01 = 0$$

Для другого елемента $a_{11} = 0,01 / 0,01 = 1$ $a_{13} = -0,01 / 0,01 = -1$
 $b_1 = 0$ $b_3 = 0$ $a_{31} = -1$ $a_{33} = 1$

Доданки, що враховують крайові умови Діріхле.

$$a_{21} \cdot (T_2 - T_0) = -1 \cdot (20 - 20) = 0 \quad a_{31} \cdot (T_3 - T_0) = -1 \cdot (100 - 20) = -80$$

Кінцевоелементне рівняння (воно одне).

$$a_{12} \cdot (T_2 - T_0) + (a_{11}^{(1)} + a_{11}^{(2)}) \cdot T_1 + a_{13} \cdot (T_3 - T_0) = b_1^{(1)} + b_1^{(2)}$$

$$0 + 2 \cdot T_1 - 80 = 0 + 0$$

З врахуванням температури навколишнього середовища, $T_1 = 40 + 20 = 60$.

Аналітичний розв'язок. $T(x) = 4000 \cdot x + 20 = 4000 \cdot 0,01 + 20 = 40 + 20 = 60$.

1.10. Конвективне охолодження стрижня з бокової поверхні

Для врахування крайових умов матрицю $[A]$ необхідно доповнити матрицею компонентів конвективного теплообміну, які при теплообміні з бокової поверхні вираховуються через інтеграли:

$$h_{ij}^3 = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{S} \cdot \int_x N_i \cdot N_j \cdot \alpha_y(x) \cdot dx$$
, де R – радіус круглого розтину стрижня. Для стрижня не круглого розтину замість множника $2 \cdot \pi \cdot R$ слід брати периметер його розтину.

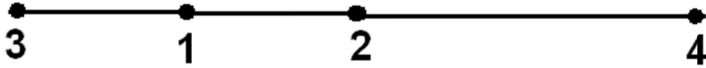
При $\alpha(x) = \alpha_b = const$
$$h_{ij}^3 = \alpha_b \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{2 \cdot S} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot d\xi. \quad (1.24)$$

Після інтегрування в локальних координатах, отримуємо:

$$h_{ij}^3 = \alpha_b \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{2 \cdot S} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Повна система кінцевоелементних рівнянь з врахуванням теплообміну з бокової поверхні набуде вигляду: $[A + H] = \{B\}$.

Приклад 1.9. Розглянемо задачу розподілу температури по довжині сталюго електрода в процесі електрозварювання (приклад 1.4). Вхідні дані: $\lambda = 80$; $\alpha = 10$; $L=0,4$; $R=0,002$; $q_0 = 10\ 000$. Електрод розділяємо на три елементи з координатами границь: $x_1 = 0$; $x_2 = 0,1$; $x_3 = 0,2$; $x_4 = 0,4$:



Температура зварювання $T_3 = 3000$. Температура металевих затискачів електродів дорівнює температурі навколишнього середовища: $T_4 = T_0 = 20$.

Виравуємо компоненти матриць.

$$h_{ij}^3 = \alpha_b \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{R} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Для першого елемента $a_{11} = 80 / 0,1 = 800$ $a_{13} = -80 / 0,1 = -800$
 $a_{31} = -800$ $a_{33} = 800$

$$h_{11} = 10 \cdot \frac{0,1}{0,002} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = 333,3333 \quad h_{33} = 333,3333$$

$$h_{13} = 10 \cdot \frac{0,1}{0,002} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 166,6667 \quad h_{31} = 166,6667$$

$$b_1 = 0,5 \cdot 10000 \cdot 0,1 = 500 \quad b_3 = 0,5 \cdot 10000 \cdot 0,1 = 500.$$

Система кінцевоелементних рівнянь для першого кінцевого елемента.

$$(a_{33}^{(1)}+h_{33}^{(1)}) \cdot T_3 + (a_{31}^{(1)}+h_{31}^{(1)}) \cdot T_1 = b_3^{(1)} \quad (1133,3333) \cdot T_3 + (-466,6667) \cdot T_1 = 500$$

$$(a_{13}^{(1)}+h_{13}^{(1)}) \cdot T_3 + (a_{11}^{(1)}+h_{11}^{(1)}) \cdot T_1 = b_1^{(1)} \quad (-466,6667) \cdot T_3 + (1133,3333) \cdot T_1 = 500.$$

Для другого елемента $a_{11} = 80 / 0,1 = 800$ $a_{12} = -80 / 0,1 = -800$
 $a_{21} = -800$ $a_{22} = 800$

$$h_{11} = 10 \cdot \frac{0,1}{0,002} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = 333,3333 \quad h_{22} = 333,3333$$

$$h_{12} = 10 \cdot \frac{0,1}{0,002} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 166,6667 \quad h_{21} = 166,6667$$

$$b_1 = 0,5 \cdot 10000 \cdot 0,1 = 500 \quad b_2 = 0,5 \cdot 10000 \cdot 0,1 = 500.$$

Система кінцевоелементних рівнянь для другого кінцевого елемента.

$$(a_{11}^{(2)}+h_{11}^{(2)}) \cdot T_1 + (a_{12}^{(2)}+h_{12}^{(2)}) \cdot T_2 = b_1^{(2)}; \quad (1133,3333) \cdot T_1 + (-466,6667) \cdot T_2 = 500$$

$$(a_{21}^{(2)}+h_{21}^{(2)}) \cdot T_1 + (a_{22}^{(2)}+h_{22}^{(2)}) \cdot T_2 = b_2^{(2)}; \quad (-466,6667) \cdot T_1 + (1133,3333) \cdot T_2 = 500.$$

Для третього елемента $a_{22} = 80 / 0,2 = 400$ $a_{42} = -80 / 0,2 = -400$
 $a_{24} = -400$ $a_{44} = 400$

$$h_{22} = 10 \cdot \frac{0,2}{0,002} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = 666,6667 \quad h_{44} = 666,6667$$

$$h_{42} = 10 \cdot \frac{0,2}{0,002} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 333,3333 \quad h_{24} = 333,3333$$

$$b_2 = 0,5 \cdot 10000 \cdot 0,2 = 1000 \quad b_4 = 0,5 \cdot 10000 \cdot 0,2 = 1000.$$

Система кінцевоелементних рівнянь для третього кінцевого елемента.

$$(a_{22}^{(3)}+h_{22}^{(3)}) \cdot T_2 + (a_{24}^{(3)}+h_{24}^{(3)}) \cdot T_4 = b_2^{(3)}; \quad (1066,6667) \cdot T_2 + (-66,6667) \cdot T_4 = 1000$$

$$(a_{42}^{(3)}+h_{42}^{(3)}) \cdot T_2 + (a_{44}^{(3)}+h_{44}^{(3)}) \cdot T_4 = b_4^{(3)}; \quad (-66,6667) \cdot T_2 + (1066,6667) \cdot T_4 = 1000.$$

Доданки, що враховують крайові умови Діріхле.

$$(a_{13} + h_{13}) \cdot (T_3 - T_0) = (-800 + 166,6667) \cdot (3000 - 20) = -1887333,234.$$

$$(a_{24} + h_{24}) \cdot (T_4 - T_0) = (-400 + 333,3333) \cdot (20 - 20) = 0.$$

Об'єднуємо матриці окремих елементів в повну систему кінцевоелементних рівнянь для всієї задачі.

$$-466,6667 \cdot T_3 + 2266,6667 \cdot T_1 - 466,6667 \cdot T_2 = 1000.$$

$$-466,6667 \cdot T_1 + 2200,0000 \cdot T_2 - 66,6667 \cdot T_4 = 1500.$$

Перше и четверте рівняння в повній системі кінцевоелементних рівнянь видалені, так як вони записані для вузлів з заданими крайовими умовами Діріхле.

Залишаються тільки два рівняння. З врахуванням крайових умов Діріхле, вони набудуть вигляду:

$$2266,6667 \cdot T_1 - 466,6667 \cdot T_2 = 1000 + 1887333,234.$$

$$-466,6667 \cdot T_1 + 2200,0000 \cdot T_2 = 1500 + 0.$$

Розв'язок цієї систем рівнянь: $T_2 = 185,5$ и $T_1 = 871,28$.

Співставимо результати аналітичного і числового розв'язків задачі.

| | | | | | |
|--------|------|--------|-------|--------|--------------------------|
| x | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | |
| $T(x)$ | 2980 | 973,84 | 315,7 | 0,0253 | - аналітичний розв'язок, |
| $T(x)$ | 2980 | 871,28 | 185,5 | 0 | - числовий розв'язок. |

Розбіжність результатів аналітичного та числового розв'язків задачі помітно, але не перевищує 5%. Для технічних розрахунків це прийнятно. Математично апроксимація круто падаючої експоненти лише двома точками, як показано на рис. 1.9, виглядає грубовато.

1.11. Трьохвузлові координатні функції

Ми розглянули найпростіший випадок лінійної апроксимації функції по двом вузловим точкам T_k і T_{k+1} . Для підвищення точності апроксимації введемо третю вузлову точку в центрі k -того кінцевого елемента. Тоді розподіл вузлових точок уздовж осі x набуде наступного вигляду (рис.1.10).

Тепер апроксимація функції $T(x)$ в межах кожного кінцевого елемента виконується квадратичною параболою по трьом точкам. Запишемо координатні функції для цих трьох точок в локальних координатах (рис.1.11).

$$N_1(\xi) = 0,5 \cdot (\xi-1) \cdot \xi; \quad N_2(\xi) = 1 - \xi^2; \quad N_3(\xi) = 0,5 \cdot (1 + \xi) \cdot \xi. \quad (1.25)$$

Відповідно, запишемо і вирази для похідних координатних функцій в локальних координатах.

$$\frac{dN_1}{d\xi} = \xi - 0,5; \quad \frac{dN_2}{d\xi} = -2 \cdot \xi; \quad \frac{dN_3}{d\xi} = \xi + 0,5. \quad (1.26)$$

Побудова координатних функцій виконується евристично з єдиною вимогою: у власному i -том вузлі значення $N_i(\xi_i) = 1$; у всіх інших вузлах $N_i(\xi) = 0$. Канонічне рівняння параболи має вигляд: $N(\xi) = a \cdot \xi^2 + b \cdot \xi + c$. Для першого вузла в точці $\xi = -1$ $N_1(\xi) = 1$; в точці $\xi = 0$ $N_1(\xi) = 0$; і в точці $\xi = 1$ $N_1(\xi) = 0$. Для цих трьох точок складаємо три рівняння.

$$1 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c; \quad 0 = a \cdot (0)^2 + b \cdot (0) + c; \quad 0 = a \cdot (1)^2 + b \cdot (1) + c.$$

Розв'язуємо систему цих трьох рівнянь і знаходимо: $c = 0$; $a = 0,5$; $b = -0,5$. Записуємо вираз для координатної функції першого вузла

$$N_1(\xi) = 0,5 \cdot \xi^2 - 0,5 \cdot \xi. \quad \text{Аналогічно знаходимо вирази для координатних функцій } N_2(\xi) \text{ і } N_3(\xi).$$

В локальних координатах тепер вже три вузли. В порядку зростання координати ξ вони наділяються номерами 1 2 3.

В порядку зростання координати x номеруються кінцеві елементи, (1 2 ... k ... n). Номера вузлів в глобальних координатах вираховуються через номери кінцевих елементів.

Вузлу під номером 1 в локальних координатах відповідає вузол під номером $2 \cdot k - 1$ в глобальних координатах. Локальному номеру 2 відповідає глобальний номер $2 \cdot k$. Номеру номеру 3 відповідає глобальний номер $2 \cdot k + 1$.

Інтегральні вирази для компонентів матриць коефіцієнтів $[A]$ і вільних членів $[B]$ в рівнянні $[A] \cdot \{T\} = \{B\}$ залишаються без змін:

$$a_{ij}^3 = \lambda_i \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} \cdot dx, \quad b_i^3 = \int_{x_1}^{x_2} N_i \cdot q_k(x) \cdot dx. \quad (1.27)$$

Змінюються тільки підінтегральні вирази, так як змінилися алгебраїчні вирази для координатних функцій. В зв'язку із збільшенням на одиницю числа координатних функцій, на одиницю збільшиться і ранг підматриць кінцевих елементів.

В глобальних координатах похідні координатних функцій

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx}, \quad \frac{dN_j}{dx} = \frac{dN_j}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx}, \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{(x_{k+1} - x_k)}, \quad dx = \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2} \cdot d\xi.$$

$$\frac{dN_1}{dx} = (\xi - 0,5) \cdot \frac{2}{(x_{k+1} - x_k)}, \quad \frac{dN_2}{dx} = (\xi - 2) \cdot \frac{2}{(x_{k+1} - x_k)}, \quad \frac{dN_3}{dx} = (\xi + 0,5) \cdot \frac{2}{(x_{k+1} - x_k)}.$$

Після підстановки в (1.27) отримуємо вирази для компонентів матриць кінцевоелементних рівнянь.

$$a_{ij}^3 = \lambda_k \cdot \frac{2}{(x_{k+1} - x_k)} \cdot \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{dN_j}{d\xi} \cdot d\xi, \quad b_i^3 = \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2} \cdot \int_{-1}^1 N_i \cdot q_k(\xi) \cdot d\xi. \quad (1.28)$$

Тут x_k і x_{k+1} - координати границь k -того кінцевого елемента.

Вони не співпадають з глобальними координатами вузлів кінцевих елементів.

Те що координати вузлів апроксимації і границь кінцевих елементів співпали при лінійній апроксимації виявилось чисто випадковим. При лінійній апроксимації вузли границі розміщуються в одних и тих же точках.

Інтеграли $[E] = \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{dN_j}{d\xi} \cdot d\xi$ і $[G] = \int_{-1}^1 N_i \cdot q_k(\xi) \cdot d\xi$ легко вираховуються аналітично. Так як локальні номери вузлів i, j змінюються від 1 до 3, то при $q_k(x) = q_k = const$ після інтегрування, отримуємо, так звані базові матриці.

$$[E] = \frac{1}{6} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & -8 & 1 \\ \hline -8 & 16 & -8 \\ \hline 1 & -8 & 7 \\ \hline \end{array} \quad [G] = \frac{1}{3} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

Формули для обчислення компонентів матриць коефіцієнтів і вільних членів набудуть вигляду: $a_{ij}^3 = \lambda_k \cdot \frac{2}{(x_{k+1} - x_k)} \cdot e(i, j)$, $b_i^3 = \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2} \cdot q_k \cdot g(i)$. (1.29)

Після сумірювання підматриць по всіх елементах з врахуванням крайових умов ($a_{11}^{(1)} = a_{11}^{(1)} + \alpha_1$) і ($a_{n+1,n+1}^{(n)} = a_{n+1,n+1}^{(n)} + \alpha_n$), знаходимо повні матриці системи кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь.

Для врахування крайових умов при теплообміні з бокової поверхні тонкого стрижня матрицю $[A]$ слід доповнити матрицею компонентів конвективного теплообміну з цієї поверхні. Компоненти її вираховуються через інтеграли: $h_{ij}^3 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \int_x N_i \cdot N_j \cdot \alpha_y(x) \cdot dx$, де r – радіус кола перетину круглого стрижня. Для стрижня не круглого перетину замість множника $2 \cdot \pi \cdot r$ слід брати периметр некруглого перетину.

$$\text{При } \alpha(x) = \alpha_b = \text{const} \quad h_{ij}^3 = \alpha_b \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{r} \cdot \int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot d\xi.$$

Виконуючи інтегрування в локальних координатах, отримуємо:

$$[U] = \frac{1}{15} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{-1} & \mathbf{16} & \mathbf{-1} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \hline \end{array} \quad h_{ij}^3 = \alpha_b \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{r} \cdot u(i,j)$$

$$\text{де } u(i,j) = \int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot d\xi.$$

Повна система кінцевоелементних рівнянь з врахуванням теплообміну з бокової поверхні має вигляд: $[A+H] \cdot \{T\} = \{B\}$.

Приклад 1.10. Однорідний стрижень; $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 20$; $T_0 = 20$;

$$L = 0,02; \quad q = 2000; \quad \lambda = 0,01.$$

На весь стрижень вибираємо один трьохвузловий елемент (рис.1.12).

$$\text{Тоді } x_1 = 0; \quad x_2 = 0,01; \quad x_3 = 0,02.$$

Система рівнянь в матричній формі, складена по формулах (1.28), легко перетворюється до вигляду:

| | | |
|-------|----|---------|
| (7+0) | -8 | 1 |
| -8 | 16 | -8 |
| 1 | -8 | (7+120) |

| |
|-------|
| T_1 |
| T_2 |
| T_3 |

| |
|-----|
| 40 |
| 160 |
| 40 |

Рішення системи алгебраїчних рівнянь:

$$T_3 = 2; \quad T_2 = 32; \quad T_1 = 42.$$

Аналітичне рішення для температури по центру стрижня.

$$T_2 = \frac{q \cdot (L^2 - x_2^2)}{2 \cdot \lambda} + \frac{q \cdot L}{\alpha} = \frac{2000 \cdot (0,02^2 - 0,01^2)}{2 \cdot 0,01} + \frac{2000 \cdot 0,02}{20} = 30 + 2 = 32.$$

Приклад 1.11. Розглянемо другий приклад, коли стрижень складається з двох елементів з різними теплофізичними характеристиками. Координати границь елементів $x_{b1}=0$; $x_{b2}=0,02$; $x_{b3}=0,03$.

У першого елемента: $q_1 = 2000$; $\lambda_1 = 40$.

У другого елемента $q_2 = 0$; $\lambda_2 = 0,4$.

На торцях стрижня: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_3 = 10$; $T_0 = 20$.

Розділення стрижня на два кінцевих елемента показано на рис.1.13.

Для першого елемента ($k=1$) компоненти підматриць будуть:

$$a_{ij}^1 = \lambda_1 \cdot \frac{2}{(x_{b2} - x_{b1})} \cdot e(i, j) = 40 \cdot \frac{2}{(0,02 - 0)} \cdot e(i, j) = 4000 \cdot e(i, j),$$

$$b_i^1 = \frac{(x_{b2} - x_{b1})}{2} \cdot q_1 \cdot g(i) = \frac{(0,02 - 0)}{2} \cdot 2000 \cdot g(i) = 20 \cdot g(i).$$

Для другого елемента ($k=2$):

$$a_{ij}^2 = \lambda_2 \cdot \frac{2}{(x_{b3} - x_{b2})} \cdot e(i, j) = 0,4 \cdot \frac{2}{(0,03 - 0,02)} \cdot e(i, j) = 80 \cdot e(i, j),$$

$$b_i^2 = \frac{(x_{b3} - x_{b2})}{2} \cdot q_2 \cdot g(i) = \frac{(0,03 - 0,02)}{2} \cdot 0 \cdot g(i) = 0.$$

Об'єднуємо підматриці цих двох кінцевих елементів. З врахуванням крайових умов $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_3 = 10$ отримуємо систему рівнянь, яка після перемноження всіх компонентів на 0,003 набуває зручного для аналізу вигляду.

| | | | | | | |
|-----|-----|-----------|--------|-------------|----------------|----------|
| 14 | -16 | 2 | | | T ₁ | 0.02 |
| -16 | 32 | -16 | | | T ₂ | 0.08 |
| 2 | -16 | 14 + 0.28 | - 0.32 | 0.04 | T ₃ | 0.02 + 0 |
| | | - 0.32 | 0.64 | - 0.32 | T ₄ | 0 |
| | | 0.04 | - 0.32 | 0.28 + 0.03 | T ₅ | 0 |

Рішення системи рівнянь: $T_1 = 5,01$; $T_2 = 5,0078$; $T_3 = 5$;

$T_4 = 4,5$; $T_5 = 4$. легко перевіряється підстановкою.

1.12. Нелінійний розподіл потужності виділення тепла в однорідному стрижні

В хімічних реакціях при затвердінні епоксидних смол потужність виділення тепла $q(x)$ під час реакції нелінійно змінюється. Закон розподілу функції $q(x)$ по об'єму речовини дуже складний. Потужність тепловиділення залежить від температури епоксидного композиту і від тривалості самого процесу.

Вище були розглянуті задачі при кусочно-однорідному розподілу функції $q(x)$ по довжині стрижня. Математично такий розподіл розглядається, як ступенчата апроксимація нелінійної функції $q(x)$. Це найпростіший спосіб апроксимації

функцій. Для досягнення задовільної точності він вимагає значного збільшення числа елементів розділення.

В даному розділі розглянемо ті самі задачі при лінійній і квадратичній апроксимації нелінійної функції $q(x)$ в межах елементів розділення. Спочатку виберемо однорідний k -тий кінцевий елемент стрижня. Координати границь елемента: x_k і x_{k+1} . На границях задані значення потужності виділення тепла q_k і q_{k+1} відповідно. При лінійній апроксимації функції $q_k(\xi)$ в межах кінцевого елемента в локальних координатах $q_k(\xi) = \frac{q_{k+1} - q_k}{2} \cdot \xi + \frac{q_{k+1} + q_k}{2}$. Виконуючи

інтегрування в локальних координатах виразів для вільних членів $b_k^0 = \int_{x_k}^{x_{k+1}} N_i \cdot q_k(x) \cdot dx$ системи кінцевоелементних рівнянь, отримуємо:

$$b_k^0 = 0,5 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot \frac{q_{k+1} + 2 \cdot q_k}{3}; \quad b_{k+1}^0 = 0,5 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot \frac{2 \cdot q_{k+1} + q_k}{3}. \quad (1.30)$$

Вирази для компонентів матриць коефіцієнтів системи кінцевоелементних рівнянь залишаються без змін.

$$a_{ij}^3 = (-1)^{(i+j)} \cdot \frac{\lambda_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad \Pi_{ij}^3 = \alpha_0 \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{2 \cdot S} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Приклад 1.12. Розглянемо приклад розрахунку розподілу тепла в однорідному стрижні довжини L при нелінійному розподілі потужності виділення тепла вздовж його довжини. Нехай $q(x) = 3000 \cdot e^{-\left(\frac{5x}{L}\right)}$.

Інші теплофізичні характеристики стрижня наступні: $\lambda = 0,01$; $L = 0,08$; $\alpha = 10$; $T_0 = 20$.

Спочатку знайдемо аналітичне рішення задачі. Задана функція

$q(x) = 3000 \cdot e^{-\left(\frac{5x}{L}\right)}$ легко інтегрується аналітично. Фундаментальне рішення буде мати вигляд:

$$F(x) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \iint q(x) \cdot dx \cdot dx = -\frac{1}{\lambda} \cdot \iint 3000 \cdot e^{-\left(\frac{5x}{L}\right)} \cdot dx \cdot dx = -\frac{3000}{\lambda} \cdot \frac{L^2}{25} \cdot e^{-\left(\frac{5x}{L}\right)}.$$

$$\text{Постійні інтегрування: } A = -\frac{3000 \cdot L}{5 \cdot \lambda} = -\frac{3000 \cdot 0,08}{5 \cdot 0,01} = -4800 \dots$$

$$B = \frac{3000 \cdot L}{5 \cdot \alpha} \cdot (1 - e^{-5}) + \frac{3000 \cdot L^2}{25 \cdot \lambda} \cdot e^{-5} + 4800 \cdot L = 4,8 \cdot (1 - e^{-5}) + 76,8 \cdot e^{-5} + 384 = 389,285.$$

Розподіл температури по довжині стрижня:

$$T(x) = -76,8 \cdot e^{-\left(\frac{5x}{L}\right)} - 4800 \cdot x + 389,285. \quad (1.31)$$

Далі розглянемо рішення цієї задачі при лінійній апроксимації функції. Стрижень ділимо на чотири елементи однакової довжини ($n=4$). Координати границь елементів будуть : $x_1 = 0$; $x_2 = 0,02$; $x_3 = 0,04$; $x_4 = 0,06$; $x_5 = 0,08$. Вираховуємо значення функції $q(x)$ на границях кінцевих елементів: $q_1 = 3000$; $q_2 = 859,5144$; $q_3 = 246,255$; $q_4 = 70,5532$; $q_5 = 20,2138$.

Компоненти матриць коефіцієнтів для всіх кінцевих елементів будуть однакові і дорівнювати $a_{ij}^3 = (-1)^{(i+j)} \cdot \frac{\lambda_k}{x_{k+1} - x_k} = (-1)^{(i+j)} \cdot \frac{0,01}{0,02} = (-1)^{(i+j)} \cdot 0,5$,

так як всі чотири кінцеві елементи однакові. Компоненти матриці вільних членів вираховуємо по формулах (1.27).

Для першого кінцевого елемента $k=1$;

$$b_1^3 = 0,5 \cdot (x_2 - x_1) \cdot \frac{q_2 + 2 \cdot q_1}{3} = 0,5 \cdot (0,02 - 0) \cdot \frac{859,5144 + 2 \cdot 3000}{3} = 22,865 ;$$

$$b_2^3 = 0,5 \cdot (x_2 - x_1) \cdot \frac{2 \cdot q_2 + q_1}{3} = 0,5 \cdot (0,02 - 0) \cdot \frac{2 \cdot 859,5144 + 3000}{3} = 15,7301.$$

Для другого кінцевого елемента $k=2$;

$$b_1^3 = 0,5 \cdot (x_3 - x_2) \cdot \frac{q_3 + 2 \cdot q_2}{3} = 0,5 \cdot (0,04 - 0,02) \cdot \frac{246,255 + 2 \cdot 859,5144}{3} = 6,3836 ;$$

$$b_2^3 = 0,5 \cdot (x_3 - x_2) \cdot \frac{2 \cdot q_3 + q_2}{3} = 0,5 \cdot (0,04 - 0,02) \cdot \frac{2 \cdot 246,255 + 859,5144}{3} = 4,5067.$$

Для третього кінцевого елемента $k=3$;

$$b_1^3 = 0,5 \cdot (x_4 - x_3) \cdot \frac{q_4 + 2 \cdot q_3}{3} = 0,5 \cdot (0,06 - 0,04) \cdot \frac{70,5532 + 2 \cdot 246,255}{3} = 1,8289 ;$$

$$b_2^3 = 0,5 \cdot (x_4 - x_3) \cdot \frac{2 \cdot q_4 + q_3}{3} = 0,5 \cdot (0,06 - 0,04) \cdot \frac{2 \cdot 70,5532 + 246,255}{3} = 1,2912.$$

Для четвертого кінцевого елемента $k=4$;

$$b_1^3 = 0,5 \cdot (x_5 - x_4) \cdot \frac{q_5 + 2 \cdot q_4}{3} = 0,5 \cdot (0,08 - 0,06) \cdot \frac{20,2138 + 2 \cdot 70,5532}{3} = 0,5394;$$

$$b_2^3 = 0,5 \cdot (x_5 - x_4) \cdot \frac{2 \cdot q_5 + q_4}{3} = 0,5 \cdot (0,08 - 0,06) \cdot \frac{2 \cdot 20,2138 + 70,5532}{3} = 0,3699.$$

За результатами розрахунків з врахуванням конвективного охолодження на торці стрижня формуємо повні матриці системи кінцевоелементних рівнянь.

| | | | | | | |
|-------|---------|---------|---------|--------|-------|--------|
| 0,5 | - 0,5 | | | | T_1 | 22,865 |
| - 0,5 | 0,5+0,5 | - 0,5 | | | T_2 | 22,281 |
| | - 0,5 | 0,5+0,5 | - 0,5 | | T_3 | 6,3836 |
| | | - 0,5 | 0,5+0,5 | - 0,5 | T_4 | 1,8289 |
| | | | - 0,5 | 0,5+10 | T_5 | 0,3699 |

*

В результаті розв'язування даної системи рівнянь отримуємо:

$$T_5 = 5,3729; T_4 = 112,0902; T_3 = 215,1496; T_2 = 305,4418; T_1 = 351,1719.$$

Аналітичне рішення (1.28) дає нам наступні значення температури в вузлових точках кінцевих елементів:

$$T_5 = 4,768; T_4 = 99,479; T_3 = 190,981; T_2 = 271,2818; T_1 = 312,485.$$

Відхилення результатів складає від 12,4% до 12,7%. При цьому числові значення в усіх вузлах перевищують аналітичні значення. Це зумовлено видом функції $q(x)$. На рис. 1.14 показано графіки заданої функції $q(x)$ і кусочно-лінійної функції, яка використовується при числовому рішенні задачі методом кінцевих елементів. Кусочно-лінійна функція на кожному елементі, крім вузлових точок, перевищує значення заданої функції $q(x)$. Це викликає перевищення числових значень над аналітичними.

При квадратичній апроксимації функції $q_k(x)$ в межах кінцевого елемента в локальних координатах функція $q_k(\xi)$ буде змінюватися по закону

$$q_k(\xi) = \frac{q_{2k-1} + q_{2k+1} - 2 \cdot q_{2k}}{2} \cdot \xi^2 + \frac{q_{2k+1} - q_{2k-1}}{2} \cdot \xi + q_{2k}. \text{ Виконуючи інтегрування в}$$

локальних координатах виразів $b_k^3 = \int_{x_1}^{x_2} N_i \cdot q_k(x) \cdot dx$, отримуємо:

$$b_{2k-1}^3 = \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2} \cdot \frac{4 \cdot q_{2k-1} + 2 \cdot q_{2k} - q_{2k+1}}{15};$$

$$b_{2k}^3 = \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2} \cdot \frac{2 \cdot q_{2k-1} + 16 \cdot q_{2k} + 2 \cdot q_{2k+1}}{15}; \quad b_{2k+1}^3 = \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2} \cdot \frac{2 \cdot q_{2k} + 4 \cdot q_{2k+1} - q_{2k-1}}{15}.$$

Приклад 1.13. Розглянемо розрахунок розподілу тепла в однорідному стрижні при вхідних даних прикладу 1.12, але при квадратичній апроксимації. Стрижень розділюємо на два однакових кінцевих елемента. При цьому координати вузлів апроксимації для обох прикладів будуть співпадати, що зручно для порівняння результатів розрахунків. Координати границь елементів будуть: $xb_1 = 0$; $xb_2 = 0,04$; $xb_3 = 0,08$. Значення функції $q(x)$ в вузлах апроксимації $q_1 = 3000$; $q_2 = 859,5144$; $q_3 = 296,255$; $q_4 = 70,5532$; $q_5 = 20,2138$.

Вираховуємо компоненти матриць системи кінцевоелементних рівнянь.

Для першого елемента ($k = 1$):

$$a_{ij}^3 = \lambda_1 \cdot \frac{2}{(xb_2 - xb_1)} \cdot e(i, j) = 0,1 \cdot \frac{2}{(0,04 - 0)} \cdot e(i, j) = 5 \cdot e(i, j).$$

$$b_1^3 = \frac{(xb_2 - xb_1)}{2} \cdot \frac{4 \cdot q_1 + 2 \cdot q_2 - q_3}{15} = \frac{(0,04 - 0)}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3000 + 2 \cdot 859,5144 - 246,255}{15} = 17,9637.$$

$$b_2^3 = \frac{(xb_2 - xb_1)}{2} \cdot \frac{2 \cdot q_1 + 16 \cdot q_2 + 2 \cdot q_3}{15} = \frac{(0,04 - 0)}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3000 + 16 \cdot 859,5144 - 2 \cdot 246,255}{15} = 26,993.$$

$$b_3^3 = \frac{(xb_2 - xb_1)}{2} \cdot \frac{2 \cdot q_2 + 4 \cdot q_3 - q_1}{15} = \frac{(0,04 - 0)}{2} \cdot \frac{2 \cdot 859,5144 + 4 \cdot 246,255 - 3000}{15} = -0,3946.$$

Для другого елемента ($k = 2$):

$$a_{ij}^3 = \lambda_2 \cdot \frac{2}{(xb_3 - xb_2)} \cdot e(i, j) = 0,1 \cdot \frac{2}{(0,08 - 0,04)} \cdot e(i, j) = 5 \cdot e(i, j).$$

$$b_3^3 = \frac{(xb_3 - xb_2)}{2} \cdot \frac{4 \cdot q_3 + 2 \cdot q_4 - q_5}{15} = \frac{(0,08 - 0,04)}{2} \cdot \frac{4 \cdot 246,255 + 2 \cdot 70,5532 - 20,2138}{15} = 1,4746.$$

$$b_4^3 = \frac{(xb_3 - xb_2)}{2} \cdot \frac{2 \cdot q_3 + 16 \cdot q_4 + 2 \cdot q_5}{15} = \frac{(0,08 - 0,04)}{2} \cdot \frac{2 \cdot 246,255 + 16 \cdot 70,5532 - 2 \cdot 20,2138}{15} = 2,2157.$$

$$b_5^3 = \frac{(xb_3 - xb_2)}{2} \cdot \frac{2 \cdot q_4 + 4 \cdot q_5 - q_3}{15} = \frac{(0,08 - 0,04)}{2} \cdot \frac{2 \cdot 70,5532 + 4 \cdot 20,2138 - 246,255}{15} = -0,03239.$$

Об'єднуємо підматриці окремих кінцевих елементів в систему кінцевоелементних рівнянь для всього стрижня. З врахуванням крайових умов після перемноження на 6 отримуємо:

| | | | | | | |
|------|------|-------|------|-------|----------------|-----------------|
| 35 | - 40 | 5 | | | T ₁ | 17,9637 |
| - 40 | 80 | - 40 | | | T ₂ | 26,993 |
| 5 | - 40 | 35+35 | - 40 | 5 | T ₃ | - 0,3496+1,4746 |
| | | - 40 | 80 | - 40 | T ₄ | 2,2157 |
| | | 5 | - 40 | 35+60 | T ₅ | - 0,03239 |

В результаті рішення системи рівнянь знаходимо:

$$T_5 = 4,822 \quad T_4 = 100,773 \quad T_3 = 193,40 \quad T_2 = 276,565 \quad T_1 = 319,241$$

Порівняння отриманих результатів числового рішення з результатами аналітичного рішення, виконаного в прикладі 1.12, показує розбіжність цих результатів від 1,1% до 2,2%.

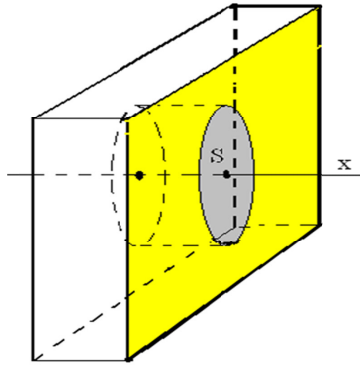


Рис. 1.1. Однорідний стрижень, виділений в однорідній пластині

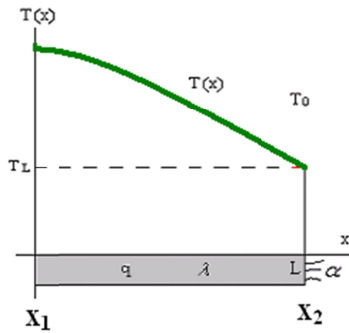


Рис. 1.2. Розподіл температури по довжині однорідного стрижня

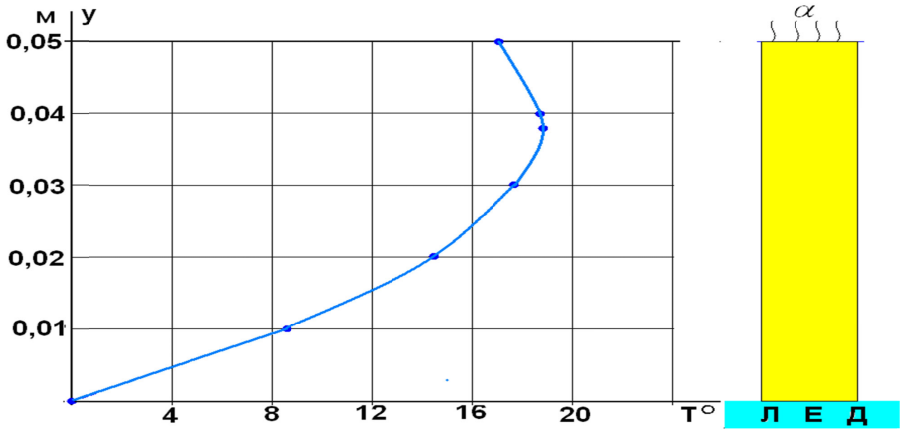


Рис. 1.3. Розподіл температури вздовж стрижня, поставленого на плитку льоду

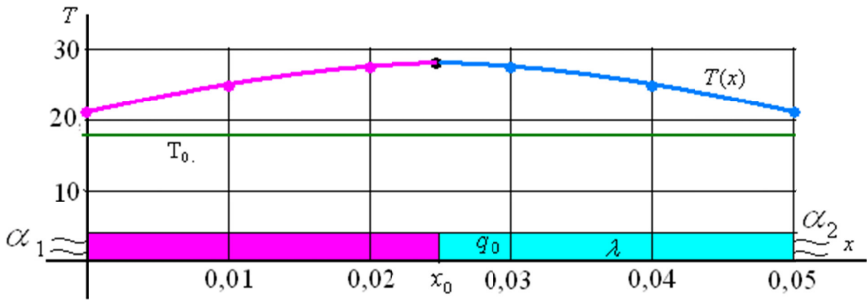


Рис. 1.4. Двохстороннє охолодження однорідного стрижня

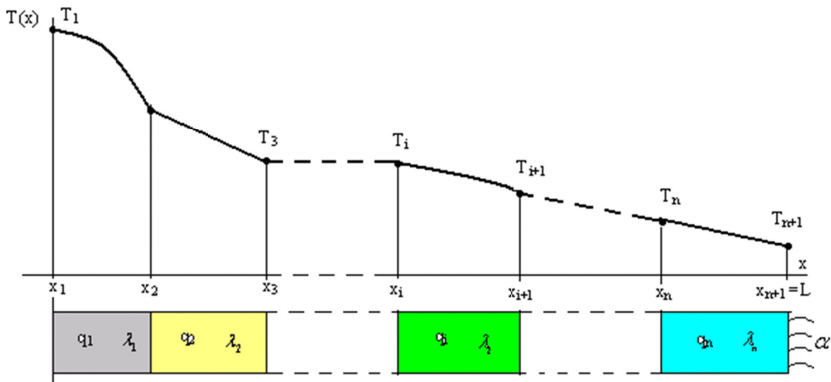


Рис. 1.5. Розділення кусочно-однорідного стрижня на однорідні ділянки

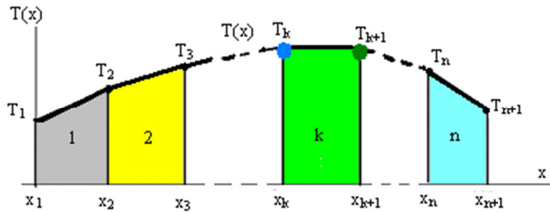


Рис. 1.6. Розміщення вузлів апроксимації в глобальних координатах

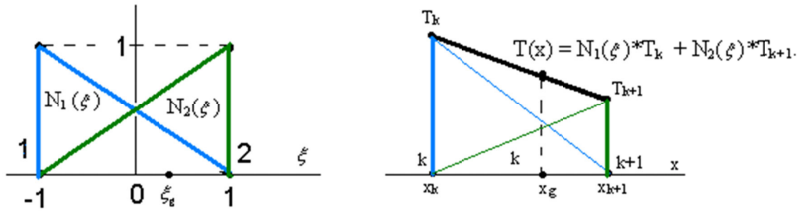


Рис.1.7. Графіки лінійних координатних функцій в локальних і глобальних координатах

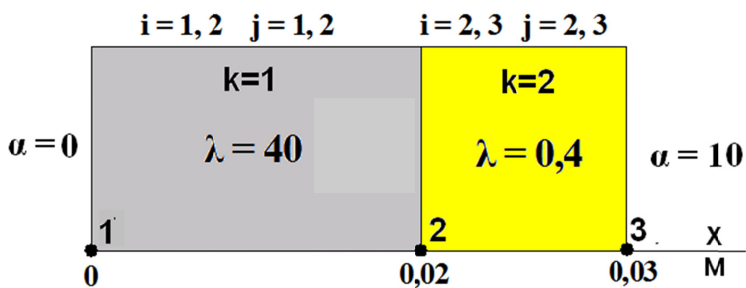


Рис. 1.8. Кусочно-однорідний стрижень, складений з двох елементів

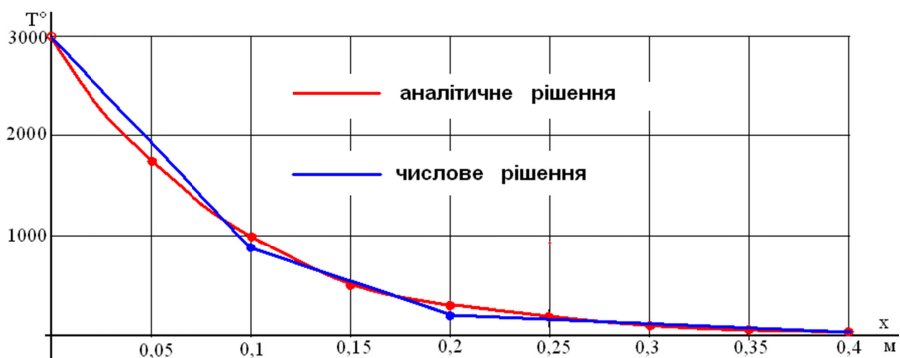


Рис.1.9. Розподіл температури вздовж електрода при аналітичному і числовому рішеннях задачі

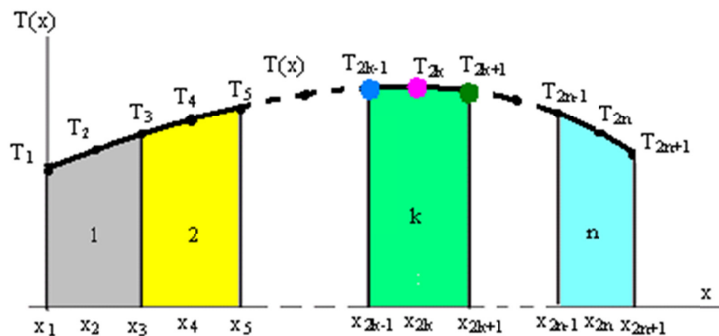


Рис.1.10. Розподіл вузлових точок при квадратичній апроксимації

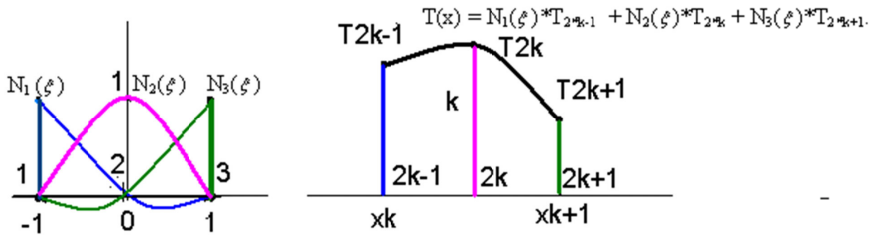


Рис.1.11. Графіки квадратичних координатних функцій в локальних і глобальних координатах

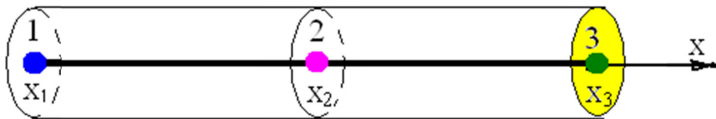


Рис.1.12. Нумерація вузлів однорідного стрижня при квадратичній апроксимації



Рис.1.13. Нумерація кінцевих елементів і вузлів апроксимації стрижня, розділеного на два однорідних елемента

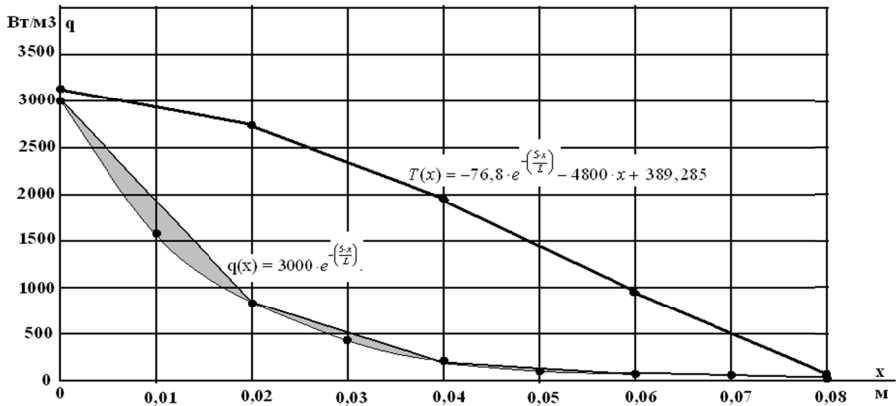


Рис. 1.14. Лінійна апроксимація потужності тепловідлення $q(x)$

Глава 2. ОДНОМІРНІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ЦИЛІНДРИЧНИХ КООРДИНАТАХ

2.1. Рівняння теплопровідності в циліндричних координатах

Для виводу рівнянь теплопровідності в циліндричних координатах розглянемо однорідний циліндр висотою H . Елемент об'єму циліндра $dv = H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$. Тепловий потік $dp(r)$ буде витікати через поверхню $S = H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$. При виділені в одиниці об'єму циліндра потужності $q(r)$ тепловий потік, що витікає з елемента об'єму $dv = S \cdot dr$, буде дорівнювати $dp(r) \cdot S = q(r) \cdot dv$. Складаємо рівняння теплового балансу

$$d(p(r) \cdot H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r) = q(r) \cdot H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr.$$

Скорочуючи в цьому рівнянні тільки константи, отримуємо: $d(p(r) \cdot r) = q(r) \cdot r \cdot dr$.

Рівняння теплопровідності в циліндричних координатах набуде вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \cdot r \right) = -q(r) \cdot r, \text{ або } \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = -q(r). \quad (2.1)$$

Фундаментальне вирішення рівняння (2.1) знаходимо прямим інтегруванням:

$$F(r) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \int \left[\frac{1}{r} \cdot \int q(r) \cdot r \cdot dr \right] \cdot dr. \quad (2.2)$$

Загальне вирішення відповідного однорідного рівняння $\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = 0$ будемо шукати у вигляді функції $G(r) = A \cdot \ln(r) + B$. [2, с. 118] Постійні інтегрування A і B для кожної конкретної задачі знаходяться з крайових і граничних умов.

2.2. Однорідний циліндр, що конвективно охолоджується з бокової поверхні

Циліндр радіуса R і висоти H нагрівається рівномірно розподіленим по об'єму виділенням тепла потужністю $q = \text{const}$ і конвективно охолоджується з бокової поверхні (коефіцієнт конвекції α) (рис. 2.1). Торцеві поверхні циліндра термоізовані, тому рух теплового потоку проходить тільки в радіальному напрямку. Коефіцієнт теплопровідності матеріалу циліндра λ . Температура навколишнього середовища T_0 .

При $q = \text{const}$, після інтегрування виразу (2.2) отримуємо фундаментальне вирішення:

$$F(r) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{q \cdot r^2}{4}. \text{ Загальне вирішення всієї задачі набуде вигляду:}$$

$$T(r) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{q \cdot r^2}{4} + A \ln(r) + B. \quad (2.4)$$

Енергія, що виділяється по всьому об'єму циліндра: $Q_v = q \cdot V = q \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$.

Енергія, що конвективно видаляється з бокової поверхні циліндра:

$$Q_s = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H \cdot \alpha \cdot (T_R - T_0),$$

де T_R - температура на боковій поверхні циліндра. З рівняння теплового балансу $Q_v = Q_s$,

знаходимо температуру на боковій поверхні циліндра $T_R = \frac{q \cdot L}{2 \cdot \alpha} + T_0$. На осі циліндра

(при $r = 0$) тепловий потік дорівнює нулю

$$\left(\lambda \cdot \frac{dT}{dr} \Big|_{r=0} = 0 \right).$$

Таким чином, враховуючи крайові умови на осі і на боковій поверхні циліндра, складаємо два рівняння для визначення постійних інтегрування.

$$\text{При } r = 0, \quad A = 0. \quad \text{При } r = R, \quad B = \frac{q \cdot R}{2 \cdot \alpha} + T_0 + \frac{q \cdot R^2}{4 \cdot \lambda}.$$

$$\text{Тепер запишемо загальне рішення:} \quad T(r) = \frac{q \cdot (R^2 - r^2)}{4 \cdot \lambda} + \frac{q \cdot R}{2 \cdot \alpha} + T_0. \quad (2.5)$$

Постійна інтегрування A може бути також визначена з крайових умов Ньютона для теплового потоку на боковій поверхні циліндра (при $r = R$). Запишемо ці умови: -

$$\lambda \cdot \frac{dT}{dr} \Big|_{x=R} = \alpha \cdot (T_R - T_0), \quad \text{або}$$

$$-\lambda \cdot \left(-\frac{q \cdot R}{2 \cdot \lambda} + A \right) = \alpha \cdot \left(\frac{q \cdot R}{2 \cdot \alpha} + T_0 - T_0 \right). \quad \text{Звідки: } A = 0.$$

2.3. Крайові умови Діріхле в циліндричних координатах

В циліндричних координатах крайові умови Діріхле можливі тільки для труби. Якщо задати постійне значення температури T_R на поверхні циліндра, то вирішення задачі буде тривіальним, а саме:

$$T(r) = \frac{q \cdot (R^2 - r^2)}{4 \cdot \lambda} + T_R.$$

Для труби можливі три стани.

Стан перший. Температура T_1 задана на внутрішній поверхні труби. Зовнішня поверхня охолоджується конвективно. Коефіцієнт конвекції α_2 . Складаємо рівняння для крайових умов на поверхнях циліндра.

На внутрішній поверхні згідно умов Діріхле: $T_1 = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{q \cdot R_1^2}{4} + A \ln(R_1) + B$.

Друге рівняння складаємо згідно крайових умов Ньютона на зовнішній поверхні:

$$-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = \alpha_2 \cdot (T(R_2) - T_0) \quad \text{або} \quad \lambda \cdot \frac{q_0 \cdot R_2}{2 \cdot \lambda} - \lambda \cdot \frac{A}{R_2} = \alpha_2 \cdot (T_2 - T_0).$$

З врахуванням виразу для температури на зовнішній поверхні

$$T_2 = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{q \cdot R_2^2}{4} + A \ln(R_2) + B, \quad \text{запишемо друге рівняння:}$$

$$\lambda \cdot \frac{q \cdot R_2}{2 \cdot \lambda} - \lambda \cdot \frac{A}{R_2} = \alpha_2 \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{q \cdot R_2^2}{4} + A \ln(R_2) + B - T_0 \right). \quad \text{З цих рівнянь знаходимо:}$$

$$A = \frac{R_2 \cdot [2 \cdot \lambda \cdot q \cdot R_2 + \alpha_2 \cdot q \cdot (R_2^2 - R_1^2) + 4 \cdot \lambda \cdot \alpha_2 \cdot (T_1 - T_0)]}{4 \cdot \lambda \cdot (\lambda + \alpha_2 \cdot R_2 \cdot \ln \frac{R_2}{R_1})}, \quad B = T_1 + \frac{q \cdot R_1^2}{4 \cdot \lambda} - A \cdot \ln(R_1).$$

Другий стан. На зовнішній поверхні труби задана температура T_2 . Внутрішня поверхня охолоджується конвективно. Коефіцієнт конвекції α_1 . Аналогічно першому стану, складаємо рівняння для крайових умов на поверхнях труби, і знаходимо:

$$A = \frac{R_1 \cdot [2 \cdot \lambda \cdot q \cdot R_1 - \alpha_1 \cdot q \cdot (R_2^2 - R_1^2) - 4 \cdot \lambda \cdot \alpha_1 \cdot (T_1 - T_0)]}{4 \cdot \lambda \cdot (\lambda - \alpha_1 \cdot R_1 \cdot \ln \frac{R_2}{R_1})}, \quad B = T_2 + \frac{q \cdot R_2^2}{4 \cdot \lambda} - A \cdot \ln(R_2).$$

Третій стан. На обох поверхнях задані крайові умови Діріхле. На зовнішній поверхні задана температура T_2 . На внутрішній - температура T_1 . Тоді зразу запишемо два рівняння для визначення постійних інтегрування.

$$T_1 = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{q \cdot R_1^2}{4} + A \ln(R_1) + B, \quad T_2 = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{q \cdot R_2^2}{4} + A \ln(R_2) + B.$$

Звідки знаходимо:

$$A = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} + \frac{q \cdot (R_2^2 - R_1^2)}{4 \cdot \lambda \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}}; \quad B = \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{A}{2} \cdot \ln(R_1 \cdot R_2) + \frac{q \cdot (R_2^2 + R_1^2)}{8 \cdot \lambda}.$$

В окремому випадку, коли в об'ємі труби тепло не виділяється $q = 0$,

$$A = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}; \quad B = \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{A}{2} \cdot \ln(R_1 \cdot R_2) : \quad T(r) = A \ln(r) + B.$$

Після підстановки постійних інтегрування вираз для температури набуде вигляду:

$$T(r) = \frac{T_2 \cdot \ln \frac{R_2}{r} - T_1 \cdot \ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \text{ Цей вираз повністю співпадає з виразом для температури (2.3),}$$

приведеним в роботі [2.С.188] і з виразом (3.5), приведеним в роботі [1.С.134].

Тепловий потік в трубі:
$$p = -\lambda \cdot \frac{dT}{dr} = -\lambda \cdot \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{r}.$$

Потужність теплового потоку:
$$Q = p \cdot S = -\lambda \cdot \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot H.$$

Тепловий опір труби:
$$R_\lambda = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot H \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

У випадку конвективного охолодження поверхонь труби тепловий опір для внутрішньої

поверхні буде
$$R_{\alpha 1} = \frac{1}{\alpha_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_1 \cdot H} \quad \text{і для зовнішньої поверхні}$$

$$R_{\alpha 2} = \frac{1}{\alpha_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_2 \cdot H}.$$

Для багатшарової труби повний сумарний тепловий опір буде дорівнювати сумі опорів окремих однорідних шарів.

$$R_\Sigma = \sum_{i=1}^n R_{\lambda i} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \alpha_2 \cdot R_{n+1} \cdot H} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot H \cdot \lambda_i} \cdot \ln \left(\frac{R_{i+1}}{R_i} \right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \alpha_2 \cdot R_{n+1} \cdot H}.$$

Тут еквівалентному тепловому опору поверхні конвективного охолодження відповідає

доданок
$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \alpha_2 \cdot R_{n+1} \cdot H}.$$
 Тепловий опір багатшарової труби, як функція зовнішнього

радіусу, при відповідному співвідношенні теплофізичних параметрів має мінімум. Для визначення цього співвідношення прирівнюємо до нуля похідну теплового опору по

зовнішньому радіусу R_{n+1}
$$\frac{dR_\Sigma}{dR_{n+1}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_n \cdot R_{n+1} \cdot H} - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \alpha_2 \cdot R_{n+1}^2 \cdot H} = 0. \quad \text{Звідки}$$

знаходимо критичний радіус $R_{n+1} = R_{кр} = \frac{\lambda}{\alpha}$, при якому багатшарова труба буде мати

мінімальний тепловий опір.

Критичне співвідношення параметрів λ і α важливо забезпечити при виборі ізоляції електричних дротів, так як, при цьому, тепло від електричних втрат в дротах буде найкраще відводитися в навколишнє середовище.

В іншому випадку, при теплоізоляції трубопроводів теплотрас, слід не допускати критичного співвідношення λ і α , так як, при цьому, втрати тепла в теплотрасі будуть максимальними.

2.4. Кусочно-однорідний циліндр, що конвективно охолоджується з бокової поверхні

Кусочно-однорідний циліндр радіуса R і висоти H , що складається з n одноосних трубок, нагрівається рівномірно розподіленою по об'єму окремих трубок потужністю тепловиділення $q_i = \text{const}$ і конвективно охолоджується з бокової поверхні з коефіцієнтом конвекції α . Коефіцієнт теплопровідності матеріалу i -тої трубки циліндра λ_i . Температура навколишнього середовища T_0 .

Для i -тої трубки однорідного елемента циліндра, загальне рішення рівняння теплопровідності має вигляд:

$$T_i(r) = -\frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{q_i \cdot r^2}{4} + A_i \cdot \ln(r) + B_i.$$

На осі циліндра (при $r = 0$) тепловий потік дорівнює нулю ($\lambda \cdot \frac{dT}{dr} \Big|_{r=0} = 0$). Таким чином, при $r = 0$ $A_i = 0$. З умови безперервності теплового потоку на межі 1-шої та 2-гої трубок $\lambda_1 \cdot \frac{dT_1(r)}{dr} \Big|_{r_2} = \lambda_2 \cdot \frac{dT_2(r)}{dr} \Big|_{r_2}$, знаходимо: $A_2 = -\frac{(q_2 - q_1) \cdot r_2^2}{2 \cdot \lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot A_1$. Далі аналогічно запишемо:

$$A_i = -\frac{(q_i - q_{i-1}) \cdot r_i^2}{2 \cdot \lambda_i} + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \cdot A_{i-1}, \quad A_n = -\frac{(q_n - q_{n-1}) \cdot r_n^2}{2 \cdot \lambda_n} + \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \cdot A_{n-1}.$$

Енергія, що виділяється в усьому об'ємі циліндра,

$$Q_v = H \cdot \sum_{i=1}^n q_i \cdot \pi \cdot (r_{i+1}^2 - r_i^2).$$

Енергія, що конвективно видаляється з бокової поверхні циліндра:

$$Q_s = \alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H \cdot (T_R - T_0),$$

де T_R - температура на поверхні циліндра. З рівняння теплового балансу $Q_v = Q_s$, знаходимо температуру на поверхні циліндра

$$T_R = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot R} \cdot \sum_{i=1}^n q_i \cdot \pi \cdot (r_{i+1}^2 - r_i^2) + T_0. \quad \text{С іншого боку, на поверхні циліндра, при}$$

$$r = R \quad T_R = - \frac{q_n \cdot R^2}{4 \cdot \lambda_n} + A_n \cdot \ln(R) + B_n, \quad \text{звідки}$$

$$B_n = T_R - A_n \cdot \ln(R) + \frac{q_n \cdot R^2}{4 \cdot \lambda_n}. \quad \text{З умов безперервності функції на межі розподілу двох середовищ с різними теплофізичними характеристиками}$$

$$T_{i-1}(r) = T_i(r), \quad \text{знаходимо:} \quad B_{i-1} = \frac{q_{i-1} \cdot r_i^2}{4 \cdot \lambda_{i-1}} - \frac{q_i \cdot r_i^2}{4 \cdot \lambda_i} + A_i \cdot \ln(r_i) - A_{i-1} \cdot \ln(r_i) + B_i.$$

2.5. Метод кінцевих елементів в циліндричних координатах

Математичні основи метода кінцевих елементів викладені в главі 1 на прикладі кусочно-однорідного стрижня. Сутьність їх полягає в тому, що розрахункова модель розділюється на однорідні ділянки, або елементи. На кожному елементі $q = \text{const}$ і $\lambda = \text{const}$. Нагадаємо основні положення математичних основ метода кінцевих елементів.

В межах окремого елемента невідома функція апроксимірується найпростішими аналітичними функціями - це лінійна функція, або квадратична парабола. Для апроксимації використовуються, так звані, координатні функції. Їх визначення дано в перші главі, це вирази (1.19) і (1.22). Для зручності подальшого аналізу, розглянемо ці вирази ще раз.

В локальних координатах ξ на відрізьку від $\xi = -1$ до $\xi = +1$ лінійні координатні функції мають вигляд:

$$N_1(\xi) = 0,5 \cdot (1 - \xi); \quad N_2(\xi) = 0,5 \cdot (1 + \xi). \quad (2.6)$$

Квадратичні координатні функції:

$$N_1(\xi) = 0,5 \cdot (\xi - 1) \cdot \xi; \quad N_2(\xi) = 1 - \xi^2; \quad N_3(\xi) = 0,5 \cdot (1 + \xi) \cdot \xi. \quad (2.7)$$

Відповідно, запишемо і вирази для похідних цих координатних функцій в локальних координатах. Для лінійних функцій $\frac{dN_1}{d\xi} = -0,5$; $\frac{dN_2}{d\xi} = 0,5$.

$$\text{Для квадратичних функцій:} \quad \frac{dN_1}{d\xi} = \xi - 0,5; \quad \frac{dN_2}{d\xi} = -2 \cdot \xi; \quad \frac{dN_3}{d\xi} = \xi + 0,5.$$

Координатні функції не залежать від вибору системи координат. В декартових, циліндричних, сферичних, полярних, або в будь-яких інших системах координат, вони залишаються такими, як записані в формулах (2.6) і (2.7).

Подальше вирішення задачі методом кінцевих елементів перетворюється в формування матриць коефіцієнтів і вільних членів системи кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь відносно значень невідомої функції в вузлах апроксимації і розв'язування цієї системи рівнянь.

Компоненти підматриць системи кінцевоелементних рівнянь виводяться з закону збереження енергії і в декартових координатах вираховуються для кожного кінцевого елемента по формулах:

$$a_{ij}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_k}{x_{k+1} - x_k} \cdot \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{dN_j}{d\xi} \cdot d\xi, \quad b_i^3 = 0,5 \cdot q_k \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot \int_{-1}^1 N_i \cdot d\xi. \quad (2.8)$$

Для виведення формул (2.8) з закону збереження енергії, в перші главі було

використано рівняння $P_k = F_k$, де $P_k = S \cdot \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dp(x)}{dx} \cdot dx$ - потужність

тепловиділення, що передається тепловим потоком $p(x)$ в межах k -го кінцевого

елемента, а $F_k = S \cdot \int_{x_k}^{x_{k+1}} q(x) \cdot dx$ - потужність джерела тепла, що виділяється в межах

k -го кінцевого елемента.

В циліндричних координатах площа поверхні, крізь яку проходить тепловий потік, залежить від радіуса $S(r) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$. Тому

$$P_k = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dp(r)}{dr} S(r) dr = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dp(r)}{dr} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot dr. \quad \text{При обчисленні потужності, що виділяється}$$

джерелом тепла в межах k -го кінцевого елемента, інтегрування слід виконувати по об'єму $dv = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot dr$. Тому

$$F_k = \int_{r_k}^{r_{k+1}} q(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot dr. \quad \text{Таким чином, з рівняння } P_k = F_k \text{ знаходимо}$$

$$a_{ij}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_k}{r_{k+1} - r_k} \cdot \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{dN_j}{d\xi} \cdot r \cdot d\xi, \quad b_i^3 = 0,5 \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \int_{-1}^1 N_i \cdot r \cdot q_i(\xi) \cdot d\xi. \quad (2.9)$$

Для інтегрування в локальних координатах необхідно виразити залежність радіуса r від координати ξ . При лінійній апроксимації для

k -го кінцевого елемента запишемо через координатні функції:

$$r(\xi) = N_1(\xi) \cdot r_k + N_2(\xi) \cdot r_{k+1} = 0,5 \cdot (1 - \xi) \cdot r_k + 0,5 \cdot (1 + \xi) \cdot r_{k+1}, \quad \text{або}$$

$r(\xi) = \frac{r_{k+1} - r_k}{2} \cdot \xi + \frac{r_{k+1} + r_k}{2}$. Підставляючи $r(\xi)$ в (2.9) і виконуючи інтегрування,

отримуємо: $a_{ij}^3 = (-1)^{(i+j)} \cdot \frac{\lambda_k \cdot (r_{k+1} + r_k)}{2 \cdot (r_{k+1} - r_k)}$. При $q_k = \text{const}$

$$b_1^3 = 0,5 \cdot q_k \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{(r_{k+1} + 2 \cdot r_k)}{3}; \quad b_2^3 = 0,5 \cdot q_k \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{(2 \cdot r_{k+1} + r_k)}{3}.$$

Слід звернути увагу на врахування крайових умов при формуванні повної матриці коефіцієнтів системи кінцевоелементних рівнянь. Крайові умови Ньютона враховуються додаванням до першого компонента матриці коефіцієнтів (якщо це не циліндр, а трубка) коефіцієнта конвекції на внутрішні поверхні охолодження циліндра, помноженого на внутрішній радіус ($a_{11}^{(1)} = a_{11}^{(1)} + \alpha_1 \cdot r_1$) і таким же додаванням до останнього компонента коефіцієнта конвекції на зовнішні поверхні циліндра, помноженого на зовнішній радіус ($a_{n+1, n+1}^{(n)} = a_{n+1, n+1}^{(n)} + \alpha_n \cdot r_{n+1}$).

Приклад 2.1. Однорідний циліндр радіуса $R = 0,02$ нагрівається виділенням тепла потужністю $q = 2000$ і конвективно охолоджується з бокової поверхні. Коефіцієнт конвекції $\alpha_2 = 20$, коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 0,01$, температура навколишнього середовища $T_0 = 20$.

Весь циліндр розглядаємо, як один кінцевий елемент.

Тоді: $k = 1$; $r_1 = 0$; $r_2 = 0,02$; $\lambda_1 = 0,01$; $q_1 = 2000$.

При лінійній апроксимації невідомої функції:

$$a_{11}^3 = \frac{\lambda_1 \cdot (r_2 + r_1)}{2 \cdot (r_2 - r_1)} = \frac{0,01 \cdot (0,02 + 0)}{2 \cdot (0,02 - 0)} = 0,005; \quad a_{12}^3 = -0,005; \quad a_{22}^3 = 0,005;$$

$$b_1^3 = 0,5 \cdot q_1 \cdot (r_2 - r_1) \cdot \frac{(r_2 + 2 \cdot r_1)}{3} = 0,5 \cdot 2000 \cdot (0,02 - 0) \cdot \frac{0,02 + 2 \cdot 0}{3} = 0,13333;$$

$$b_2^3 = 0,5 \cdot q_1 \cdot (r_2 - r_1) \cdot \frac{(2 \cdot r_2 + r_1)}{3} = 0,5 \cdot 2000 \cdot (0,02 - 0) \cdot \frac{2 \cdot 0,02 + 0}{3} = 0,26667.$$

Складаємо систему рівнянь для кінцевого елемента і доповнюємо її крайовими умовами Ньютона.

| | | | |
|---------|-------------------|-------|---------|
| 0.005 | - 0.005 | T_1 | 0.13333 |
| - 0.005 | 0.005 + 20 · 0.02 | T_2 | 0.26666 |

Виключаємо перше невідоме в другому рівнянні.

| | | | |
|-------|---------|-------|---------|
| 0.005 | - 0.005 | T_1 | 0.13333 |
| | 0.4 | T_2 | 0.39999 |

Вирішення цієї системи рівнянь: $T_2 = 1$; $T_1 = 1,3333 + 26,666 = 27,999$.

Аналітичне вирішення.

$$T_1 = \frac{q(R^2 - r^2)}{4\lambda} + \frac{qR}{2\alpha} = \frac{2000 \cdot (0,02^2 - 0^2)}{4 \cdot 0,01} + \frac{2000 \cdot 0,02}{2 \cdot 20} = 20 + 1 = 21.$$

$$T_2 = \frac{q \cdot R}{2 \cdot \alpha} = \frac{2000 \cdot 0,02}{2 \cdot 20} = 1. \quad \Delta T_1 = \frac{28 - 21}{21} \cdot 100 \% = 33,33 \%.$$

Як бачимо, похибка для T_1 досить значна.

Для T_2 маємо абсолютно однакові значення.

Приклад 2.2. Розглянемо другий приклад, коли на сталений сердечник одіта епоксидна трубка. Такий циліндр складається з двох елементів з різними теплофізичними характеристиками.

Координати границь елементів:

$$r_1 = 0; \quad r_2 = 0,02; \quad r_3 = 0,03; \quad \alpha = 10; \quad T_0 = 20.$$

На першому елементі: $q_1 = 2000; \quad \lambda = 40.$

На другому елементі: $q_2 = 0; \quad \lambda = 0,4.$

Для першого елемента: $k = 1$ - номер першого елемента.

$$\lambda_1 = 40; \quad q_1 = 2000.$$

$r_1 = 0$ - перший вузол росташований на осі циліндра.

$r_2 = 0,02$ - другий вузол росташований на межі поверхні сердечника і епоксидної трубки.

$$a_{11}^3 = \frac{\lambda_1 \cdot (r_2 + r_1)}{2 \cdot (r_2 - r_1)} = \frac{40 \cdot (0,02 + 0)}{2 \cdot (0,02 - 0)} = 20; \quad a_{12}^3 = -20; \quad a_{22}^3 = 20;$$

$$b_1^3 = 0,5 \cdot q_1 \cdot (r_2 - r_1) \cdot \frac{(r_2 + 2 \cdot r_1)}{2} = 0,5 \cdot 2000 \cdot (0,02 - 0) \cdot \frac{0,02 + 2 \cdot 0}{3} = 0,133333;$$

$$b_2^3 = 0,5 \cdot q_1 \cdot (r_2 - r_1) \cdot \frac{(2 \cdot r_2 + r_1)}{2} = 0,5 \cdot 2000 \cdot (0,02 - 0) \cdot \frac{2 \cdot 0,02 + 0}{3} = 0,26667.$$

Для другого елемента: $k = 2$ - номер другого елемента.

$$\lambda_2 = 0,4; \quad q_2 = 0.$$

$r_2 = 0,02$ - другий вузол росташований в точці розмежування поверхонь сердечника і епоксидної трубки.

$r_3 = 0,03$ - третій вузол росташований на зовнішній поверхні трубки.

$$a_{22}^3 = \frac{\lambda_2 \cdot (r_3 + r_2)}{2 \cdot (r_3 - r_2)} = \frac{0,4 \cdot (0,03 + 0,02)}{2 \cdot (0,03 - 0,02)} = 1; \quad a_{23}^3 = -1; \quad a_{33}^3 = 1;$$

$$b_2^3 = 0,5 \cdot q_2 \cdot (r_3 - r_2) \cdot \frac{(r_3 + 2 \cdot r_2)}{2} = 0,5 \cdot 0 \cdot (0,03 - 0,02) \cdot \frac{0,03 + 2 \cdot 0,02}{2} = 0;$$

$$b_3^3 = 0,5 \cdot q_2 \cdot (r_3 - r_2) \cdot \frac{(2 \cdot r_3 + r_2)}{2} = 0,5 \cdot 0 \cdot (0,03 - 0,02) \cdot \frac{2 \cdot 0,03 + 0,02}{2} = 0.$$

З врахуванням крайових умов ($\alpha_1 = 0$ і $\alpha_n = 10$), об'єднуємо підматриці. При цьому отримуємо наступну систему рівнянь.

| | | | | |
|--------|--------|-----------|----------------|---------|
| 20 + 0 | - 20 | | T ₁ | 0.13333 |
| - 20 | 20 + 1 | -1 | T ₂ | 0.26666 |
| | -1 | 1+10·0.03 | T ₃ | 0 |

В результаті вирішення цієї системи рівнянь знаходимо:

$$T_3 = 1,33333; \quad T_2 = 1,73333; \quad T_1 = 1,74.$$

Далі розглянемо формули для обчислення компонентів матриць кінцевоелементних рівнянь при квадратичній апроксимації. Радіус в локальних координатах $r(\xi) = N_1(\xi) \cdot r_{2k-1} + N_2(\xi) \cdot r_{2k} + N_3(\xi) \cdot r_{2k+1}$.

Враховуючи, що $r_{2k} = 0,5 \cdot (r_{2k-1} + r_{2k+1})$, запишемо

$$r(\xi) = \frac{r_{2k+1} - r_{2k-1}}{2} \cdot \xi + \frac{r_{2k+1} + r_{2k-1}}{2}.$$

Після підстановки $r(\xi)$ в (2.9) з врахуванням виразів (2.7) для квадратичних координатних функцій і їх похідних, отримуємо вирази для компонентів підматриць кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь. Спочатку об'єднуємо інтеграли в базові матриці

$$[E] = \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{dN_j}{d\xi} \cdot r(\xi) \cdot d\xi; \quad [G] = \int_{-1}^1 N_i \cdot q_k(\xi) \cdot r(\xi) \cdot d\xi.$$

$$e_{11}^3 = \frac{3 \cdot r_{2k+1} + 11 \cdot r_{2k-1}}{12}; \quad e_{12}^3 = -\frac{r_{2k+1} + 3 \cdot r_{2k-1}}{3}; \quad e_{13}^3 = \frac{r_{2k+1} + r_{2k-1}}{12};$$

$$e_{22}^3 = \frac{4 \cdot (r_{2k+1} + r_{2k-1})}{3}; \quad e_{23}^3 = -\frac{3 \cdot r_{2k+1} + r_{2k-1}}{3}; \quad e_{33}^3 = \frac{11 \cdot r_{2k+1} + 3 \cdot r_{2k-1}}{12}.$$

Тоді, компоненти підматриць кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь набудуть

$$\text{вигляду: } a_{ij}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_k}{(r_{2k+1} - r_{2k-1})} \cdot e(i, j).$$

$$\text{При } q_k = \text{const} \quad g_1 = \frac{r_{2k-1}}{3}; \quad g_3 = \frac{r_{2k+1}}{3}.$$

$$b_1^3 = 0,5 \cdot q_k \cdot (r_{2k+1} - r_{2k-1}) \cdot g_1; \quad b_3^3 = 0,5 \cdot q_k \cdot (r_{2k+1} - r_{2k-1}) \cdot g_3; \quad b_2^3 = 2 \cdot (b_1^3 + b_3^3).$$

Приклад 2.3. Розглянемо задачу по розрахунку розподілу температури в однорідному циліндрі при квадратичній апроксимації невідомої функції. Вхідні данні ті самі, що для прикладу 2.1.:

радіус $R = 0,02$ м; потужність виділення тепла $q = 2000$ Вт/м³; коефіцієнт конвекції $\alpha_2 = 20$ Вт/(м²·°C), коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 0,01$ Вт/(м·°C), температура навколишнього середовища $T_0 = 20$ °C.

Весь циліндр розглядаємо як один трьохвузловий кінцевий елемент (рис.2.2). Тоді, глобальні координати вузлів апроксимації будуть:

$$r_1 = 0; \quad r_2 = 0,01 \text{ м}; \quad r_3 = 0,02 \text{ м}.$$

При квадратичній апроксимації вирази для координатних функцій і їх похідних, в порівнянні з лінійною апроксимацією, будуть іншими. Запишемо ці вирази.

$$N_1(\xi) = 0,5 \cdot (\xi - 1) \cdot \xi; \quad N_2(\xi) = 1 - \xi^2; \quad N_3(\xi) = 0,5 \cdot (1 + \xi) \cdot \xi.$$

$$\frac{dN_1}{d\xi} = \xi - 0,5; \quad \frac{dN_2}{d\xi} = -2 \cdot \xi; \quad \frac{dN_3}{d\xi} = \xi + 0,5.$$

По формулах для компонентів підматриць кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь при квадратичній апроксимації знаходимо:

$$k = 1 \quad - \text{номер першого і єдиного елемента. } \lambda_1 = 0,01.$$

$$r_1 = 0 \quad - \text{перший вузол розміщений на осі циліндра.}$$

$$r_2 = 0,02 \quad - \text{другий вузол розміщений на поверхні циліндра.}$$

$$a_{11}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_1}{(r_2 - r_1)} \cdot \frac{3 \cdot r_2 + 11 \cdot r_1}{12} = \frac{2 \cdot 0,01}{(0,02 - 0)} \cdot \frac{3 \cdot 0,02 + 11 \cdot 0}{12} = 0,005;$$

$$a_{12}^3 = - \frac{2 \cdot \lambda_1}{(r_2 - r_1)} \cdot \frac{r_2 + 3 \cdot r_1}{3} = - \frac{2 \cdot 0,01}{(0,02 - 0)} \cdot \frac{0,02 + 3 \cdot 0}{3} = - 0,00666667;$$

$$a_{13}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_1}{(r_2 - r_1)} \cdot \frac{r_2 + r_1}{12} = \frac{2 \cdot 0,01}{(0,02 - 0)} \cdot \frac{0,02 + 0}{12} = 0,00166667;$$

$$a_{22}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_1}{(r_2 - r_1)} \cdot \frac{4 \cdot (r_2 + r_1)}{3} = \frac{2 \cdot 0,01}{(0,02 - 0)} \cdot \frac{4 \cdot (0,02 + 0)}{3} = 0,266667;$$

$$a_{23}^3 = - \frac{2 \cdot \lambda_1}{(r_2 - r_1)} \cdot \frac{3 \cdot r_2 + r_1}{3} = - \frac{2 \cdot 0,01}{(0,02 - 0)} \cdot \frac{3 \cdot 0,02 + 0}{3} = - 0,02;$$

$$a_{33}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_1}{(r_2 - r_1)} \cdot \frac{11 \cdot r_2 + 3 \cdot r_1}{12} = \frac{2 \cdot 0,01}{(0,02 - 0)} \cdot \frac{11 \cdot 0,02 + 3 \cdot 0}{12} = 0,018333;$$

$$b_{11}^3 = 0,5 \cdot q_1 \cdot (r_2 - r_1) \cdot \frac{r_1}{3} = 0,5 \cdot 2000 \cdot (0,02 - 0) \cdot \frac{0}{3} = 0;$$

$$b_{13}^3 = 0,5 \cdot q_1 \cdot (r_2 - r_1) \cdot \frac{r_2}{3} = 0,5 \cdot 2000 \cdot (0,02 - 0) \cdot \frac{0,02}{3} = 0,133333;$$

$$b_{22}^3 = 2 \cdot (b_{11}^3 + b_{13}^3) = 2 \cdot (0 + 0,133333) = 0,266667.$$

Для зручності обчислень перемножимо значення всіх компонентів матриць на 3000.

Отримуємо наступну систему рівнянь:

| | | | | |
|-----|-----|-----------|----------------|-----|
| 15 | -20 | 5 | T ₁ | 0 |
| -20 | 80 | -60 | T ₂ | 800 |
| 5 | -60 | 55 + 1200 | T ₃ | 400 |

Вона легко розв'язується послідовним виключенням невідомих методом Гауса. В результаті вирішення отримуємо: $T_3 = 1$; $T_2 = 16$; $T_1 = 21$.

Аналітичне вирішення. $T_3 = \frac{qR}{2\alpha} = \frac{2000 \cdot 0,02}{2 \cdot 20} = 1$.

$$T_1 = \frac{q(R^2 - r^2)}{4\lambda} + \frac{qR}{2\alpha} = \frac{2000 \cdot (0,02^2 - 0^2)}{4 \cdot 0,01} + \frac{2000 \cdot 0,02}{2 \cdot 20} = 20 + 1 = 21.$$

$$T_2 = \frac{q(R^2 - r^2)}{4\lambda} + \frac{qR}{2\alpha} = \frac{2000 \cdot (0,02^2 - 0,01^2)}{4 \cdot 0,01} + \frac{2000 \cdot 0,02}{2 \cdot 20} = 15 + 1 = 16.$$

Результати числового і аналітичного вирішень повністю співпали. На рис.2.3 показано графік розподілу температури по радіусу циліндра.

Приведені приклади просто і наглядно ілюструють сам метод кінцевих елементів, показують особливості його практичного використання. Хоч обчислення рутинні і монотонні, але сам алгоритм дуже простий і легко програмується на комп'ютері.

2.6. Крайові умови в циліндричних координат. Розподіл температури в тонкому диску

Крайові умови першого роду (умови Діріхле) в циліндричних координатах враховуються точно так, як і в декартових координатах. В процесі нумерації вузлів останні номери надається вузлам з заданими крайовими умовами Діріхле. Тоді, останні доданки в лівій частині системи кінцевоелементних рівнянь $k_{n-1,n} \cdot T_{n-1}$ і $k_{n,n} \cdot T_n$ переносяться в праву частину, доповнюючи тим самим відповідні компоненти матриці вільних членів.

Крайові умови Ньютона враховують конвективний теплообмін поверхні з навколишнім середовищем. Нехай на зовнішні бокові поверхні циліндра коефіцієнт конвекції буде α_n , а на внутрішні, якщо це труба, α_1 . Тоді, перша клітина матриці коефіцієнтів буде доповнена доданком $\alpha_1 \cdot R_1$, а остання – доданком $\alpha_n \cdot R_n$. Якщо теплообмін можливий тільки з зовнішньої бокової поверхні, то $\alpha_1 = 0$.

Як одномірну задачу в циліндричних координатах можна розглядати розподіл температури в тонкому диску. Диск - це циліндр, у якого висота H набагато менша радіуса R . Якщо диск настільки тонкий, що розподіл температури по його товщині (висоті H) практично постійний, то задачу розподілу температури радіусу r можна розглядати як одномірну.

По аналогії з рівнянням теплопровідності для тонкого стрижня (1.9)

$$\lambda \cdot \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = -q(x) + \frac{\alpha \cdot ds}{dv} \cdot [T(x) - T_0]$$

запишемо рівняння теплопровідності для тонкого диска $\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = -q(r) + \frac{\alpha}{H} \cdot [T(r) - T_0]$. При $T_0 = 0$ представимо рівняння в

класичному вигляді: $\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\alpha}{H} \cdot T = -q(r)$. Це дуже складне рівняння. Воно

навіть не є рівнянням Бесселя. В рівнянні Бесселя доданок $\frac{\alpha}{H} \cdot T$ входить зі знаком

“плюс”, а тут він - зі знаком “мінус”. В класичних роботах Ликова, Карслоу і Єгера це рівняння навіть не наводиться, хоча детально викладається аналітичний розв’язок аналогічного рівняння для стрижня.

Метод кінцевих елементів дозволяє розв’язати дане рівняння без будь-яких труднощів. Крайові умови Ньютона на поверхнях диска враховують відповідні компоненти кінцевоелементної матриці коефіцієнтів, які враховуються по формулі:

$$h_{ij}^3 = 0.5 \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot r \cdot d\xi.$$

Тут α_u і α_o - коефіцієнти конвекції на нижні і верхні поверхнях диска. Повна система кінцевоелементних рівнянь з врахуванням теплообміну на поверхнях диска:

$$[A + H] \cdot \{T\} = \{B\}. \quad (2.10)$$

Компоненти матриці $[A]$ враховуються по формулі (2.9) для однорідного

циліндра: $a_{ij}^3 = \frac{2 \cdot \lambda \cdot r_k}{r_{k+1} - r_k} \cdot \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{dN_j}{d\xi} \cdot r \cdot d\xi$. При лінійній апроксимації:

$a_{ij}^3 = (-1)^{(i+j)} \cdot \frac{\lambda \cdot (r_{k+1} + r_k)}{2 \cdot (r_{k+1} - r_k)}$. При квадратичній апроксимації в розділі 2.5. приведені

інтеграли для всіх дев’яти компонентів a_{ij}^3 . Інтегрування виразів для матриці $[H]$ дає нам наступні формули для компонентів h_{ij}^3 .

При лінійній апроксимації: $u_{11}^3 = \frac{r_{k+1} + 3 \cdot r_k}{6}$; $u_{12}^3 = \frac{r_{k+1} + r_k}{6}$; $u_{22}^3 = \frac{3 \cdot r_{k+1} + r_k}{6}$;

$h_{11}^3 = 0.5 \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot u_{11}^3$; $h_{12}^3 = 0.5 \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot u_{12}^3$;

$h_{22}^3 = 0.5 \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot u_{22}^3$.

При квадратичній апроксимації:

$$h^3_{11} = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{-r_{k+1} + 7 \cdot r_k}{30}; \quad h^3_{12} = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{2 \cdot r_k}{15};$$

$$h^3_{13} = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{2 \cdot (r_{k+1} + r_k)}{15}; \quad h^3_{22} = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{8 \cdot (r_{k+1} + r_k)}{15};$$

$$h^3_{23} = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{2 \cdot r_{k+1}}{15}; \quad h^3_{33} = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{7 \cdot r_{k+1} + r_k}{30}.$$

Щільність теплової енергії, що виділяється в одиниці об'єму кінцевого елемента q_k , не завжди постійна. Часто ця величина нерівномірно розподілена вздовж радіуса.

Вона також апроксимується координатними функціями: $q(\xi) = N_1(\xi) \cdot q_k + N_2(\xi) \cdot q_{k+1} = 0,5 \cdot (1 - \xi) \cdot q_k + 0,5 \cdot (1 + \xi) \cdot q_{k+1}$. Або $q(\xi) = \frac{q_{k+1} - q_k}{2} \cdot \xi + \frac{q_{k+1} + q_k}{2}$. Після підстановки

$q(\xi)$ і $r(\xi)$ в (2.9) і інтегрування при лінійній апроксимації отримуємо:

$$g^3_1 = \frac{q_{k+1} \cdot (r_{k+1} + r_k) + q_k \cdot (r_{k+1} + 3 \cdot r_k)}{6}; \quad g^3_2 = \frac{q_{k+1} \cdot (3 \cdot r_{k+1} + r_k) + q_k \cdot (r_{k+1} + r_k)}{6};$$

$$b^3_k = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot g^3_1; \quad b^3_{k+1} = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot g^3_2. \quad (2.11)$$

При квадратичній апроксимації функції $q(\xi)$ з виразом для $q(\xi)$
 $q(\xi) = N_1(\xi) \cdot q_{2k-1} + N_2(\xi) \cdot q_{2k} + N_3(\xi) \cdot q_{2k+1}$ перетворюємо в поліном другої степені вигляду: $q_k(\xi) = \frac{q_{2 \cdot k-1} + q_{2 \cdot k+1} - 2 \cdot q_{2 \cdot k}}{2} \cdot \xi^2 + \frac{q_{2 \cdot k+1} - q_{2 \cdot k-1}}{2} \cdot \xi + q_{2 \cdot k}$.

Тут q_{2k} не дорівнює $0,5 \cdot (q_{2k-1} + q_{2k+1})$. Функція $q(\xi)$ вважається нелінійною. У випадку коли $q_{2k} = 0,5 \cdot (q_{2k-1} + q_{2k+1})$, маємо лінійний розподіл $q(\xi)$.

Для обчислення компонентів матриці вільних членів {B} потрібно інтегрувати добуток лінійної функції $r(\xi)$ на два поліноми другого степеня, наприклад, $b^3_i = 0,5 \cdot$

$(r_{2 \cdot k+1} - r_{2 \cdot k-1}) \cdot \int_{-1}^1 N_i \cdot r(\xi) \cdot q_i(\xi) \cdot d\xi$. Після інтегрування по всіх трьох координатних функціях отримаємо:

$$g^3_1 = (r_{2 \cdot k+1} \cdot \frac{q_{2 \cdot k+1} - q_{2 \cdot k-1}}{30} + r_{2 \cdot k-1} \cdot \frac{-q_{2 \cdot k+1} + 7 \cdot q_{2 \cdot k-1} + 4 \cdot q_{2 \cdot k}}{30}); \quad b^3_1 = 0,5 \cdot (r_{2 \cdot k+1} - r_{2 \cdot k-1}) \cdot g^3_1;$$

$$g^3_3 = (r_{2 \cdot k+1} \cdot \frac{7 \cdot q_{2 \cdot k+1} - q_{2 \cdot k-1} + 4 \cdot q_{2 \cdot k}}{30} + r_{2 \cdot k-1} \cdot \frac{q_{2 \cdot k+1} - q_{2 \cdot k-1}}{30}); \quad b^3_3 = 0,5 \cdot (r_{2 \cdot k+1} - r_{2 \cdot k-1}) \cdot g^3_3;$$

$$g^3_2 = (r_{2 \cdot k+1} \cdot \frac{7 \cdot q_{2 \cdot k+1} + 3 \cdot q_{2 \cdot k-1} + 10 \cdot q_{2 \cdot k}}{30} + r_{2 \cdot k-1} \cdot \frac{3 \cdot q_{2 \cdot k+1} + 7 \cdot q_{2 \cdot k-1} + 10 \cdot q_{2 \cdot k}}{39});$$

$$b^3_2 = 0,5 \cdot (r_{2 \cdot k+1} - r_{2 \cdot k-1}) \cdot g^3_2.$$

Приклад 2.4. Диск з пластику, що наповнений металевим порошком ($\lambda = 0,5 \text{ Вт/(м} \cdot \text{град)}$), товщиною $H = 0,005 \text{ м}$, радіусом $R = 0,06 \text{ м}$ нагрівається в електромагнітному полі індукційним струмом і конвективно охолоджується з верхньої і бокової поверхонь.

Коефіцієнти конвекції: $\alpha_o = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°C})$, $\alpha_R = \alpha_o$, $\alpha_u = 0$. Температура навколишнього середовища $T_0 = 20 \text{ °C}$. Потужність виділення тепла в диску змінюється по закону: $q(r) = 25000 \cdot e^{-50 \cdot (R-r)} \text{ Вт}/\text{м}^3$.

Визначити розподіл температури в диску вздовж радіуса, $T(r)$.

Для розв'язування задачі накреслимо графік розподілу потужності виділення тепла вздовж радіуса диска (рис.2.4). На графіку видно, як найкраще розділити диск на кінцеві елементи. Розділимо диск на чотири кінцевих елементи. Номера кінцевих елементів $k=1,2,3,4$ позначені зеленим кольором. Границі кінцевих елементів показані синім кольором. Синім кольором позначені також глобальні номери вузлів при лінійній апроксимації невідомої функції $T(r)$.

Запишемо глобальні координати вузлів (в метрах) згідно заданому розділенню розрахункової області на кінцеві елементи.

$$r_1 = 0; \quad r_2 = 0,02; \quad r_3 = 0,04; \quad r_4 = 0,05; \quad r_5 = 0,06.$$

Потужність виділення тепла в цих вузлах ($\text{Вт}/\text{м}^3$).

$$q_1 = 1245,3; \quad q_2 = 3383,4; \quad q_3 = 9197,0; \quad q_4 = 15163,3; \quad q_5 = 25000.$$

Виравовуємо компоненти матриць коефіцієнтів і вільних членів системи кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь по формулах:

Для першого кінцевого елемента. $k=1$ - номер першого елемента.

$$(\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) = 0,02 - 0 = 0,02; \quad (\Gamma_{k+1} + \Gamma_k) = 0,02 + 0 = 0,02.$$

Компоненти підматриці першого кінцевого елемента.

$$a_{11}^3 = \frac{\lambda_k \cdot (r_{k+1} + r_k)}{2 \cdot (r_{k+1} - r_k)} = \frac{0,5 \cdot 0,02}{2 \cdot 0,02} = 0,25.$$

$$a_{12}^3 = -0,25, \quad a_{21}^3 = -0,25, \quad a_{22}^3 = 0,25.$$

$$h_{11}^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{r_{k+1} + 3 \cdot r_k}{6} = 0,5 \cdot 0,02 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{0,02 + 3 \cdot 0}{6} = 0,066667,$$

$$h_{12}^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{r_{k+1} + r_k}{6} = 0,5 \cdot 0,02 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{0,02 + 0}{6} = 0,066667,$$

$$h_{22}^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{3 \cdot r_{k+1} + r_k}{6} = 0,5 \cdot 0,02 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{3 \cdot 0,02 + 0}{6} = 0,2,$$

$$b_1^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{q_{k+1} \cdot (r_{k+1} + r_k) + q_k \cdot (r_{k+1} + 3 \cdot r_k)}{6} =$$

$$= 0,5 \cdot 0,02 \cdot \frac{3383,4 \cdot 0,02 + 1245,3 \cdot (0,02 + 3 \cdot 0)}{6} = 0,15429,$$

$$b_2^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{q_{k+1} \cdot (3 \cdot r_{k+1} + r_k) + q_k \cdot (r_{k+1} + r_k)}{6} =$$

$$=0,5 \cdot 0,02 \cdot \frac{3383,4 \cdot (3 \cdot 0,02 + 0) + 1245,3 \cdot 0,02}{6} = 0,37985.$$

Для другого кінцевого елемента. $k = 2$ - номер другого елемента.

$$(\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) = 0,04 - 0,02 = 0,02; \quad (\Gamma_{k+1} + \Gamma_k) = 0,04 + 0,02 = 0,06.$$

Компоненти підматриць другого кінцевого елемента.

$$a^2_{22} = \frac{\lambda_k \cdot (r_{k+1} + r_k)}{2 \cdot (r_{k+1} - r_k)} = \frac{0,5 \cdot 0,06}{2 \cdot 0,02} = 0,75.$$

$$a^2_{23} = -0,75, \quad a^2_{32} = -0,75, \quad a^2_{33} = 0,75,$$

$$h^2_{22} = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{r_{k+1} + 3 \cdot r_k}{6} = 0,5 \cdot 0,02 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{0,04 + 3 \cdot 0,02}{6} = 0,33333,$$

$$h^2_{23} = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{r_{k+1} + r_k}{6} = 0,5 \cdot 0,02 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{0,04 + 0,02}{6} = 0,2,$$

$$h^2_{33} = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{3 \cdot r_{k+1} + r_k}{6} = 0,5 \cdot 0,02 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{3 \cdot 0,04 + 0,02}{6} = 0,46667,$$

$$b^2_2 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{q_{k+1} \cdot (r_{k+1} + r_k) + q_k \cdot (r_{k+1} + 3 \cdot r_k)}{6} =$$

$$= 0,5 \cdot 0,02 \cdot \frac{9197,0 \cdot 0,06 + 3383,4 \cdot (0,04 + 3 \cdot 0,02)}{6} = 1,4836,$$

$$b^2_3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{q_{k+1} \cdot (3 \cdot r_{k+1} + r_k) + q_k \cdot (r_{k+1} + r_k)}{6} =$$

$$= 0,5 \cdot 0,02 \cdot \frac{9197,0 \cdot (3 \cdot 0,04 + 0,02) + 3383,4 \cdot 0,06}{6} = 2,4843.$$

Для третього кінцевого елемента. $k = 3$ - номер третього елемента.

$$(\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) = 0,05 - 0,04 = 0,01; \quad (\Gamma_{k+1} + \Gamma_k) = 0,05 + 0,04 = 0,09.$$

Компоненти підматриць третього кінцевого елемента.

$$a^3_{33} = \frac{\lambda_k \cdot (r_{k+1} + r_k)}{2 \cdot (r_{k+1} - r_k)} = \frac{0,5 \cdot 0,09}{2 \cdot 0,01} = 2,25.$$

$$a^3_{34} = -2,25, \quad a^3_{43} = -2,25, \quad a^3_{44} = 2,25,$$

$$h^3_{33} = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{r_{k+1} + 3 \cdot r_k}{6} = 0,5 \cdot 0,01 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{0,05 + 3 \cdot 0,04}{6} = 0,28333,$$

$$h^3_{34} = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{r_{k+1} + r_k}{6} = 0,5 \cdot 0,01 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{0,05 + 0,04}{6} = 0,15,$$

$$h^3_{44} = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{3 \cdot r_{k+1} + r_k}{6} = 0,5 \cdot 0,01 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{3 \cdot 0,05 + 0,04}{6} = 0,31667,$$

$$b^3_3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{q_{k+1} \cdot (r_{k+1} + r_k) + q_k \cdot (r_{k+1} + 3 \cdot r_k)}{6} =$$

$$= 0,5 \cdot 0,01 \cdot \frac{15163,3 \cdot 0,09 + 9197,0 \cdot (0,05 + 3 \cdot 0,04)}{6} = 2,44,$$

$$b^3_4 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{q_{k+1} \cdot (3 \cdot r_{k+1} + r_k) + q_k \cdot (r_{k+1} + r_k)}{6} =$$

$$= 0,5 \cdot 0,01 \cdot \frac{15163,3 \cdot (3 \cdot 0,05 + 0,04) + 9197,0 \cdot 0,09}{6} = 3,091.$$

Для четвертого кінцевого елемента. $k = 4$ - номер четвертого елемента.

$$(\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) = 0,06 - 0,05 = 0,01; \quad (\Gamma_{k+1} + \Gamma_k) = 0,06 + 0,05 = 0,11.$$

Компоненти підматриць четвертого кінцевого елемента.

$$a_{44}^3 = \frac{\lambda_k \cdot (r_{k+1} + r_k)}{2 \cdot (r_{k+1} - r_k)} = \frac{0,5 \cdot 0,11}{2 \cdot 0,01} = 2,75.$$

$$a_{45}^3 = -2,75, \quad a_{54}^3 = -2,75, \quad a_{55}^3 = 2,75,$$

$$h_{44}^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{r_{k+1} + 3 \cdot r_k}{6} = 0,5 \cdot 0,01 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{0,06 + 3 \cdot 0,05}{6} = 0,35,$$

$$h_{45}^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{r_{k+1} + r_k}{6} = 0,5 \cdot 0,01 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{0,06 + 0,05}{6} = 0,18333,$$

$$h_{55}^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{3 \cdot r_{k+1} + r_k}{6} = 0,5 \cdot 0,01 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{3 \cdot 0,06 + 0,05}{6} = 0,38333,$$

$$b_{44}^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{q_{k+1} \cdot (r_{k+1} + r_k) + q_k \cdot (r_{k+1} + 3 \cdot r_k)}{6} =$$

$$= 0,5 \cdot 0,01 \cdot \frac{25000 \cdot 0,11 + 15163,3 \cdot (0,06 + 3 \cdot 0,05)}{6} = 4,9452,$$

$$b_{55}^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{q_{k+1} \cdot (3 \cdot r_{k+1} + r_k) + q_k \cdot (r_{k+1} + r_k)}{6} =$$

$$= 0,5 \cdot 0,01 \cdot \frac{25000 \cdot (3 \cdot 0,06 + 0,05) + 15163,3 \cdot 0,11}{6} = 6,1816.$$

Після додавання одноіменних компонентів підматриць, формуюмо повні матриці системи кінцевоелементних рівнянь: $[A] \cdot \{T\} = \{B\}$.

| | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|----------------|---------|
| 0,25 | - 0,25 | | | | T ₁ | 0,15429 |
| - 0,25 | 1,0 | - 0,75 | | | T ₂ | 1,86345 |
| | - 0,75 | 3,0 | - 2,25 | | T ₃ | 4,9243 |
| | | - 2,25 | 5,0 | - 2,75 | T ₄ | 8,0362 |
| | | | - 2,75 | 3,35 | T ₅ | 6,1816 |

Складена система рівнянь не враховує охолодження диска з верхньої поверхні, а тільки з бокової. Запишемо її вирішення.

$$T_1 = 47,105; \quad T_2 = 46,488; \quad T_3 = 43,798; \quad T_4 = 40,713; \quad T_5 = 35,266.$$

В цьому легко перекопатися підстановкою. Отримані значення $T_1 \dots T_5$ є різниця температури в вузлах і температури навколишнього середовища ($T_0 = 20^\circ\text{C}$). На рис. 2.4 показані графіки розподілу температури (синій графік) потужності тепловиділення (червона крива) вздовж радіуса диска при його охолодженні з бокової поверхні.

Задача конвективного охолодження диска с бокової поверхні має аналітичний розв'язок. Він отриманий в розділі 2.1. Оскільки для інтегрування функції

$\frac{1}{r} \cdot q(r) = 25000 \cdot e^{-50 \cdot (R-r)} \text{ Вт} / \text{м}^3$ необхідно виконати додаткові дослідження

розкладання в ряд Тейлора функції $\frac{e^r}{r}$, то порівняємо тільки значення температури на торцеві поверхні диска.

Енергія, що виділяється в усьому об'ємі диска,

$$Q_v = 2 \cdot \pi \cdot H \cdot \int_0^R q(r) \cdot r \cdot dr = 2 \cdot \pi \cdot H \cdot \int_0^R 25000 \cdot e^{-50 \cdot (R-r)} \cdot r \cdot dr = 2 \cdot \pi \text{ Н } 20,49787.$$

Енергія, що конвективно видаляється через торцеву поверхню диска:

$$Q_s = 2 \cdot \pi \text{ Н } R \cdot \alpha \cdot (T_R - T_0) = 2 \cdot \pi \text{ Н } 0,06 \cdot 10 \cdot \alpha \cdot (T_R - T_0),$$

де T_R - температура на торцеві поверхні. З рівняння теплового балансу $Q_v = Q_s$ знаходимо аналітичне значення температури на торцеві поверхні диска

$$T_R = \frac{20,498}{0,6} + T_0 = 34,1633 + T_0.$$

Числове значення дорівнює $T_5 = 35,266 + T_0$.

Розбіжність результатів складає 3,2 %.

Для врахування процесу охолодження диска з верхньої поверхні складемо матрицю $[H]$.

$$[H] = \begin{bmatrix} 0,066667 & 0,066667 & & & \\ 0,066667 & 0,533333 & 0,2 & & \\ & 0,2 & 0,75 & 0,15 & \\ & & 0,15 & 0,66667 & 0,18333 \\ & & & 0,18333 & 0,38333 \end{bmatrix}$$

Додаванням матриць $[A]$ і $[H]$, отримуємо систему рівнянь:

| | | | | | | |
|-----------|-----------|--------|-----------|-----------|-------|---------|
| 0,31667 | - 0,18333 | | | | T_1 | 0,15429 |
| - 0,18333 | 1,53333 | - 0,55 | | | T_2 | 1,86345 |
| | - 0,55 | 3,75 | - 2,1 | | T_3 | 4,9243 |
| | | - 2,1 | 5,6667 | - 2,56667 | T_4 | 8,0362 |
| | | | - 2,56667 | 3,7333 | T_5 | 6,1816 |

Вирішення цієї системи рівнянь:

$$T_1 = 2,418; \quad T_2 = 3,335; \quad T_3 = 5,104; \quad T_4 = 5,895; \quad T_5 = 5,709.$$

можна перевірити підстановкою. На рис. 2.4 показано графік розподілу температури вздовж радіуса диска (зелений колір) при його охолодженні з верхньої і торцевої поверхонь.

Приклад 2.5. Розглянемо розрахунок залежності температури диска $T(r)$ від радіуса методом кінцевих елементів при квадратичній апроксимації. Розміри диска і умови теплового режиму такі, як в прикладі 2.3.

Диск розділимо на два кінцевих елемента. Границі кінцевих елементів виберемо таким чином, щоб координати вузлів при квадратичній апроксимації співпали з координатами вузлів при лінійній апроксимації.

Запишемо глобальні координати вузлів (в метрах) згідно заданому розділенню розрахункової області на кінцеві елементи.

$$r_1 = 0; \quad r_2 = 0,02; \quad r_3 = 0,04; \quad r_4 = 0,05; \quad r_5 = 0,06.$$

Потужність виділення тепла в цих вузлах (Вт/м³).

$$q_1 = 1245,3; \quad q_2 = 3383,4; \quad q_3 = 9197,0; \quad q_4 = 15163,3; \quad q_5 = 25000.$$

Виравхуємо компоненти матриць коефіцієнтів і вільних членів системи кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь.

Для першого кінцевого елемента. $k=1$ - номер первого елемента.

$$(r_{2k+1} - r_{2k-1}) = 0,04 - 0 = 0,04.$$

Компоненти підматриць першого кінцевого елемента.

$$a_{11}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_1}{(r_3 - r_1)} \cdot \frac{3 \cdot r_3 + 11 \cdot r_1}{12} = \frac{2 \cdot 0,5}{(0,04 - 0)} \cdot \frac{3 \cdot 0,04 + 11 \cdot 0}{12} = 0,25;$$

$$a_{12}^3 = - \frac{2 \cdot \lambda_1}{(r_3 - r_1)} \cdot \frac{r_3 + 3 \cdot r_1}{3} = - \frac{2 \cdot 0,5}{(0,04 - 0)} \cdot \frac{0,04 + 3 \cdot 0}{3} = - 0,3333;$$

$$a_{13}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_1}{(r_3 - r_1)} \cdot \frac{r_3 + r_1}{12} = \frac{2 \cdot 0,5}{(0,04 - 0)} \cdot \frac{0,04 + 0}{12} = 0,08333;$$

$$a_{22}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_1}{(r_3 - r_1)} \cdot \frac{4 \cdot (r_3 + r_1)}{3} = \frac{2 \cdot 0,5}{(0,04 - 0)} \cdot \frac{4 \cdot (0,04 + 0)}{3} = 1,3333;$$

$$a_{23}^3 = - \frac{2 \cdot \lambda_1}{(r_3 - r_1)} \cdot \frac{3 \cdot r_3 + r_1}{3} = - \frac{2 \cdot 0,5}{(0,04 - 0)} \cdot \frac{3 \cdot 0,04 + 0}{3} = - 1,0;$$

$$a_{33}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_1}{(r_3 - r_1)} \cdot \frac{11 \cdot r_3 + 3 \cdot r_1}{12} = \frac{2 \cdot 0,5}{(0,04 - 0)} \cdot \frac{11 \cdot 0,04 + 3 \cdot 0}{12} = 0,916667;$$

$$h_{11}^3 = 0,5 \cdot (r_{2k+1} - r_{2k-1}) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{r_3 + 7 \cdot r_1}{30} = 0,5 \cdot 0,04 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{0,04 + 7 \cdot 0}{30} = 0,05333;$$

$$h_{12}^3 = 0,5 \cdot (r_{2k+1} - r_{2k-1}) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{2 \cdot r_1}{15} = 0,5 \cdot 0,04 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{2 \cdot 0}{15} = 0;$$

$$h_{13}^3 = - 0,5 \cdot (r_{2k+1} - r_{2k-1}) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{(r_3 + r_1)}{30} = - 0,5 \cdot 0,04 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{(0,04 + 0)}{30} = - 0,05333;$$

$$h_{22}^3 = 0,5 \cdot (r_{2k+1} - r_{2k-1}) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{8 \cdot (r_3 + r_1)}{15} = 0,5 \cdot 0,04 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{8 \cdot (0,04 + 0)}{15} = 0,85333;$$

$$h_{23}^3 = 0,5 \cdot (r_{2k+1} - r_{2k-1}) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{2 \cdot r_3}{15} = 0,5 \cdot 0,04 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{2 \cdot 0,04}{15} = 0,21333;$$

$$h_{33}^3 = 0,5 \cdot (r_{2k+1} - r_{2k-1}) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{7 \cdot r_3 + r_1}{30} = 0,5 \cdot 0,04 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{7 \cdot 0,04 + 0}{30} = 0,37333;$$

$$b_i^3 = 0,5 \cdot (r_{2k+1} - r_{2k-1}) \cdot (r_{2k+1} \cdot \frac{-q_{2k+1} + q_{2k-1}}{30} + r_{2k-1} \cdot \frac{-q_{2k+1} + 7 \cdot q_{2k-1} + 4 \cdot q_{2k}}{30}) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,04 \cdot (0,04 \cdot \frac{-9197,0 + 1245,3}{30} + 0 \cdot \frac{-9197,3 + 7 \cdot 1245,3 + 4 \cdot 3383,4}{30}) = -0,212;$$

$$b_2^3 = 0,5 \cdot (r_{2k+1} - r_{2k-1}) \cdot (r_{2k+1} \cdot \frac{7 \cdot q_{2k+1} + 3 \cdot q_{2k-1} + 10 \cdot q_{2k}}{30} + r_{2k-1} \cdot \frac{3 \cdot q_{2k+1} + 7 \cdot q_{2k-1} + 10 \cdot q_{2k}}{30}) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,04 \cdot (0,04 \cdot \frac{7 \cdot 9197,0 + 3 \cdot 1245,3 + 10 \cdot 3383,4}{30} + 0 \cdot \frac{3 \cdot 9197,0 + 7 \cdot 1245,3 + 10 \cdot 3383,4}{30}) = 2,719;$$

$$b_3^3 = 0,5 \cdot (r_{2k+1} - r_{2k-1}) \cdot (r_{2k+1} \cdot \frac{7 \cdot q_{2k+1} - q_{2k-1} + 4 \cdot q_{2k}}{30} + r_{2k-1} \cdot \frac{q_{2k+1} - q_{2k-1}}{30}) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,04 \cdot (0,04 \cdot \frac{7 \cdot 9197,0 - 1245,3 + 4 \cdot 3383,4}{30} + 0 \cdot \frac{9197,0 + 1245,3}{30}) = 2,044.$$

Для другого кінцевого елемента: $k=2$ - номер другого елемента.

$$(r_{2k+1} - r_{2k-1}) = 0,06 - 0,04 = 0,02.$$

Компоненти підматриць другого кінцевого елемента.

$$a_{33}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_2}{(r_5 - r_3)} \cdot \frac{3 \cdot r_5 + 11 \cdot r_3}{12} = \frac{2 \cdot 0,5}{(0,06 - 0,04)} \cdot \frac{3 \cdot 0,06 + 11 \cdot 0,04}{12} = 2,58333;$$

$$a_{34}^3 = - \frac{2 \cdot \lambda_2}{(r_5 - r_3)} \cdot \frac{r_5 + 3 \cdot r_3}{3} = - \frac{2 \cdot 0,5}{(0,06 - 0,04)} \cdot \frac{0,06 + 3 \cdot 0,04}{3} = -3,0;$$

$$a_{35}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_2}{(r_5 - r_3)} \cdot \frac{r_5 + r_3}{12} = \frac{2 \cdot 0,5}{(0,06 - 0,04)} \cdot \frac{0,06 + 0,04}{12} = 0,416667;$$

$$a_{44}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_2}{(r_5 - r_3)} \cdot \frac{4 \cdot (r_5 + r_3)}{3} = \frac{2 \cdot 0,5}{(0,06 - 0,04)} \cdot \frac{4 \cdot (0,06 + 0,04)}{3} = 6,66667;$$

$$a_{45}^3 = - \frac{2 \cdot \lambda_2}{(r_5 - r_3)} \cdot \frac{3 \cdot r_5 + r_3}{3} = - \frac{2 \cdot 0,5}{(0,06 - 0,04)} \cdot \frac{3 \cdot 0,06 + 0,04}{3} = -3,6667;$$

$$a_{55}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_2}{(r_5 - r_3)} \cdot \frac{11 \cdot r_5 + 3 \cdot r_3}{12} = \frac{2 \cdot 0,5}{(0,06 - 0,04)} \cdot \frac{11 \cdot 0,06 + 3 \cdot 0,04}{12} = 3,25;$$

$$h_{33}^3 = 0,5 \cdot (r_{2k+1} - r_{2k-1}) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{r_5 + 7 \cdot r_3}{30} = 0,5 \cdot 0,02 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{0,06 + 7 \cdot 0,04}{30} = 0,22667;$$

$$h_{34}^3 = 0,5 \cdot (r_{2k+1} - r_{2k-1}) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{2 \cdot r_3}{15} = 0,5 \cdot 0,02 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{2 \cdot 0,04}{15} = 0,106667;$$

$$h_{35}^3 = -0,5 \cdot (r_{2k+1} - r_{2k-1}) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{(r_5 + r_3)}{30} = -0,5 \cdot 0,02 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{(0,06 + 0,04)}{30} = -0,06667;$$

$$h_{44}^3 = 0,5 \cdot (r_{2k+1} - r_{2k-1}) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{8 \cdot (r_5 + r_2)}{15} = 0,5 \cdot 0,02 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{8 \cdot (0,06 + 0,04)}{15} = 1,06667;$$

$$h_{45}^3 = 0,5 \cdot (r_{2k+1} - r_{2k-1}) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{2 \cdot r_5}{15} = 0,5 \cdot 0,02 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{2 \cdot 0,06}{15} = 0,16 ;$$

$$h_{55}^3 = 0,5 \cdot (r_{2k+1} - r_{2k-1}) \cdot \frac{\alpha_u + \alpha_o}{H} \cdot \frac{7 \cdot r_5 + r_3}{30} = 0,5 \cdot 0,02 \cdot \frac{10}{0,005} \cdot \frac{7 \cdot 0,06 + 0,04}{30} = 0,306667;$$

$$b_3^3 = 0,5 \cdot (r_{2,k+1} - r_{2,k-1}) \cdot (r_{2,k+1} \cdot \frac{-q_{2,k+1} + q_{2,k-1}}{30} + r_{2,k-1} \cdot \frac{-q_{2,k+1} + 7 \cdot q_{2,k-1} + 4 \cdot q_{2,k}}{30}) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,02 \cdot (0,06 \cdot \frac{-25000 + 9197,0}{30} + 0,04 \cdot \frac{-25000 + 7 \cdot 9197,0 + 4 \cdot 15163,3}{30}) = 1,018;$$

$$b_4^3 = 0,5 \cdot (r_{2,k+1} - r_{2,k-1}) \cdot (r_{2,k+1} \cdot \frac{7 \cdot q_{2,k+1} + 3 \cdot q_{2,k-1} + 10 \cdot q_{2,k}}{30} + r_{2,k-1} \cdot \frac{3 \cdot q_{2,k+1} + 7 \cdot q_{2,k-1} + 10 \cdot q_{2,k}}{30}) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,02 \cdot (0,06 \cdot \frac{7 \cdot 25000 + 3 \cdot 9197,0 + 10 \cdot 15163,3}{30} + 0,04 \cdot \frac{3 \cdot 25000 + 7 \cdot 9197,0 + 10 \cdot 15163,3}{30}) = 10,965;$$

$$b_5^3 = 0,5 \cdot (r_{2,k+1} - r_{2,k-1}) \cdot (r_{2,k+1} \cdot \frac{7 \cdot q_{2,k+1} - q_{2,k-1} + 4 \cdot q_{2,k}}{30} + r_{2,k-1} \cdot \frac{q_{2,k+1} - q_{2,k-1}}{30}) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,02 \cdot (0,06 \cdot \frac{7 \cdot 25000 - 9197,0 + 4 \cdot 15163,3}{30} + 0,04 \cdot \frac{25000 - 9197,0}{30}) = 4,74.$$

Аналогічно приклада 2.4 по результатах виконаних розрахунків, формуємо матриці коефіцієнтів і вільних членів системи кінцевоелементних рівнянь при квадратичній апроксимації функцій.

| | | | | | | |
|-----------|-----------|---------|-----------|-----------|----------------|---------|
| 0,25 | - 0,33333 | 0,08333 | | | T ₁ | - 0,212 |
| - 0,33333 | 1,33333 | - 1,0 | | | T ₂ | 2,719 |
| 0,08333 | - 1,0 | 3,5 | - 3,0 | 0,41667 | T ₃ | 3,062 |
| | | - 3,0 | 6,66667 | - 3,66667 | T ₄ | 10,965 |
| | | 0,41667 | - 3,66667 | 3,85 | T ₅ | 4,74 |

В результаті розв'язування системи рівнянь отримуємо наступні значення температури в вузлах апроксимації:

$$T_1 = 46,776; \quad T_2 = 46,711; \quad T_3 = 43,971; \quad T_4 = 40,932; \quad T_5 = 35,455.$$

Порівняння цих результатів з аналогічними результатами, отриманими при лінійній апроксимації, показує їх розбіжність від 0,4% до 0,7%.

Для розв'язування при охолодженні диска с верхньої поверхні формуємо матрицю [H].

| | | | | | |
|-----|----------|---------|----------|---------|----------|
| [H] | 0,05333 | 0 | -0,05333 | | |
| | 0 | 0,85333 | 0,21333 | | |
| | -0,05333 | 0,21333 | 0,6 | 0,10667 | -0,06667 |
| | | | 0,10667 | 0,10667 | 0,16 |
| | | | -0,10667 | 0,16 | 0,306667 |

Додавання її до матриці [A] утворює систему кінцевоелементних рівнянь при охолодженні диска з верхньої поверхні

| | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------------|---------|
| 0,30333 | - 0,33333 | 0,03 | | | T ₁ | - 0,212 |
| - 0,33333 | 2,18666 | - 0,78667 | | | T ₂ | 2,719 |
| 0,03 | - 0,78667 | 4,1 | - 2,8933 | 0,35 | T ₃ | 3,062 |
| | | - 2,8933 | 7,73333 | - 3,50667 | T ₄ | 10,965 |
| | | 0,35 | - 3,50667 | 4,15667 | T ₅ | 4,74 |

Розв'язок цієї системи рівнянь дає нам розподіл температури в вузлах кінцевих елементів при квадратичній апроксимації.

$$T_1 = 2,604; \quad T_2 = 3,461; \quad T_3 = 5,062; \quad T_4 = 5,888; \quad T_5 = 5,681.$$

Порівняння результатів розрахунків при двох видах апроксимації показує їх розбіжність від 0,14% до 7,7%. Як видно, оба види апроксимації дають прийнятні для технічних розрахунків результати. Можна тільки відмітити, що для формування матриць кінцевоелементних рівнянь при лінійній апроксимації потрібна більша кількість обчислювальних операцій, ніж при квадратичній апроксимації і це логічно, так як при однаковій кількості вузлів квадратична апроксимація потребує в два рази меншої кількості кінцевих елементів, ніж лінійна. Крім того, результати числових розрахунків при квадратичній апроксимації ближчі до аналітичних значень, ніж при лінійній апроксимації, хоча і там відхилення незначні.

В цілому, використання квадратичної апроксимації в більшості випадків можна вважати більш прийнятним, чим лінійної. Проте, в окремих випадках, в залежності від конструктивних особливостей зразка, хороші результати дає і лінійна апроксимація.

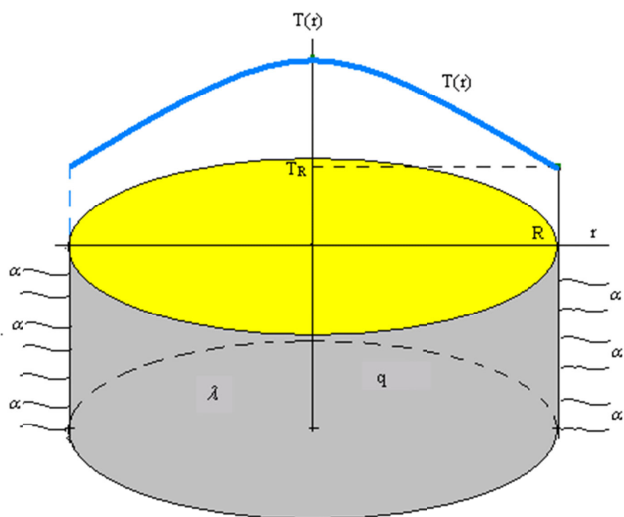


Рис. 2.1. Розподіл температури вздовж радіуса однорідного циліндра

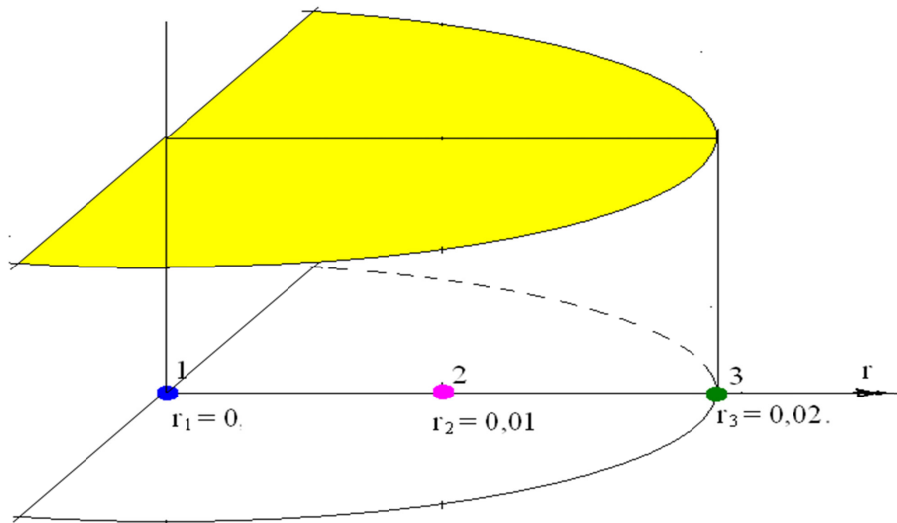


Рис.2.2. Нумерація вузлів однорідного циліндра при квадратичній апроксимації

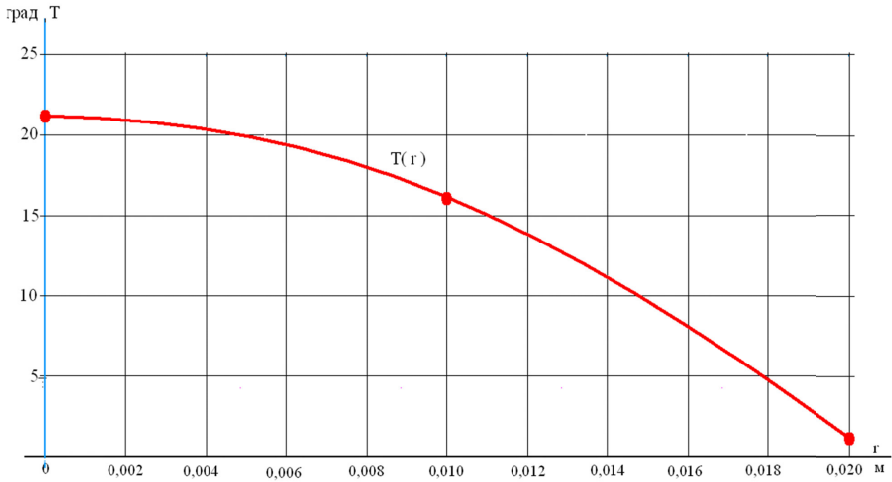


Рис.2.3. Графік розподілу температури вздовж радіуса однорідного циліндра, як трьохвузлового кінцевого елемента

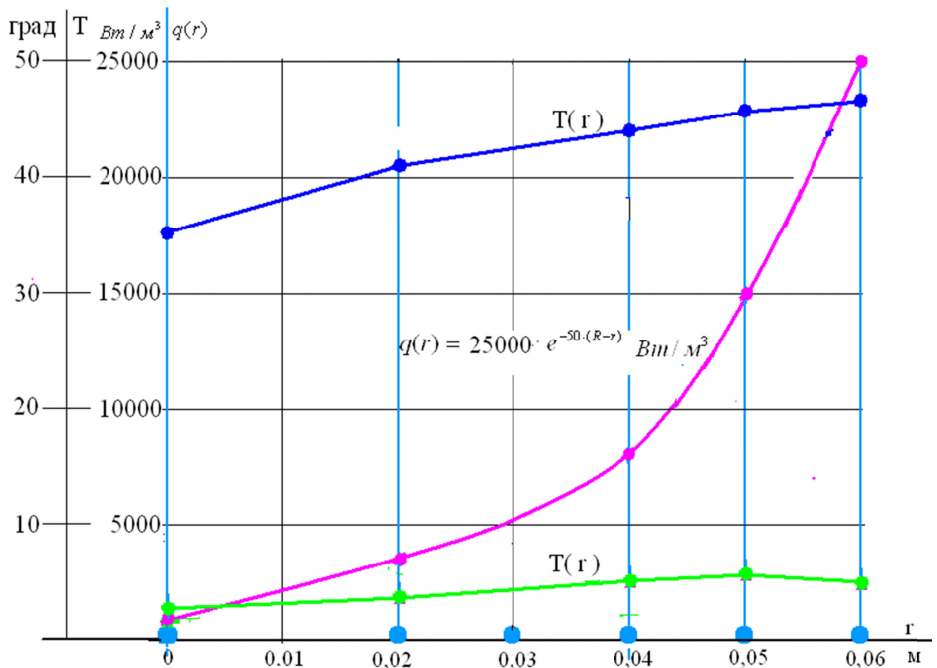


Рис.2.4. Графіки розподілу потужності тепловиділення і температури вздовж радіуса диска

Глава 3. ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В СФЕРИЧНИХ КООРДИНАТАХ

3.1. Рівняння теплопровідності в сферичних координатах

Для виведення рівнянь теплопровідності в сферичних координатах розглянемо однорідну кулю радіуса R . По аналогії з розглянутими вище тілами (стрижень і циліндр), складемо рівняння теплового балансу для однорідної кулі:
 $d(p(r) \cdot 4 \cdot r^2) = q(r) \cdot 4 \cdot r^2 \cdot dr$. Звідси випливає наступне рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial}{\partial r} (\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \cdot r^2) = -q(r) \cdot r^2, \text{ або } \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + 2 \cdot \frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = -q(r) \cdot r^2. \quad (3.1)$$

Фундаментальне вирішення цього рівняння знаходимо його прямим інтегруванням.

$$F(r) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \int \left[\frac{1}{r^2} \cdot \int q(r) \cdot r^2 \cdot dr \right] \cdot dr. \quad (3.2)$$

Загальне вирішення відповідного однорідного рівняння, $\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + 2 \cdot \frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = 0$

має вигляд: $G(r) = \frac{A}{r} + B$. [2., С.227] (3.3)

В цьому легко переконалися підстановкою виразу (3.3) в однорідне рівняння.

3.2. Однорідна куля, що конвективно охолоджується з поверхні

Куля радіуса R нагрівається рівномірно розподіленою по об'єму потужністю тепловиділення $q = \text{const}$ і конвективно охолоджується з поверхні з коефіцієнтом конвекції α (рис.3.1). Коефіцієнт теплопровідності матеріалу кулі λ . Температура навколишнього середовища T_0 .

При $q = \text{const}$ фундаментальне рішення $F(r) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{q \cdot r^2}{6}$.

Загальне рішення всієї задачі набуде вигляду:

$$T(r) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{q \cdot r^2}{6} + \frac{A}{r} + B. \quad (3.4)$$

Енергія, що виділяється в об'ємі кулі, $Q_v = q \cdot V = q \cdot 4 \cdot \pi \cdot \frac{R^3}{3}$.

Енергія, що конвективно видаляється з поверхні кулі,

$Q_s = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \alpha \cdot (T_R - T_0)$, де T_R - температура на поверхні кулі.

З рівняння теплового балансу $Q_v = Q_s$, знаходимо температуру на поверхні кулі

$$T_R = \frac{q \cdot R}{3 \cdot \alpha} + T_0.$$

Друга крайова умова полягає в тому, що в центрі кулі (при $r = 0$) тепловий потік дорівнює нулю ($\lambda \cdot \frac{dT}{dr}|_{r=0} = 0$). Таким чином, з крайових умов на поверхні і в центрі кулі, складаємо два рівняння для визначення постійних інтегрування.

$$\text{При } r = 0, \quad A = 0. \quad \text{При } r = R, \quad B = \frac{q \cdot R}{3 \cdot \alpha} + T_0 + \frac{q \cdot R^2}{6 \cdot \lambda}.$$

$$\text{Тепер запишемо остаточне рішення: } T(r) = \frac{q \cdot (R^2 - r^2)}{6 \cdot \lambda} + \frac{q \cdot R}{3 \cdot \alpha} + T_0. \quad (3.5)$$

Постійна інтегрування A може бути визначена з крайових умов Ньютона для теплового потоку на поверхні кулі. При $r = R$ запишемо:

$$\lambda \cdot \frac{dT}{dr}|_{x=R} = \alpha \cdot (T_R - T_0). \quad \text{Або} \quad -\lambda \cdot \left(-\frac{q \cdot R}{3 \cdot \lambda} - \frac{A}{R^2}\right) = \alpha \cdot \left(\frac{q \cdot R}{3 \cdot \alpha} + T_0 - T_0\right).$$

Звідки $A = 0$.

Приклад 3.1. Батискаф сферичної форми зі склопластику $\lambda = 1,5$, діаметром 6 м і товщиною стінок 0,5 м, занурений в глибини океану. Внутрішня поверхня батискафа покрита шаром термоізоляції товщиною 0,1 м. Теплопровідність термоізоляції $\lambda_u = 0,04$ Вт м^{-1} $^{\circ}\text{C}^{-1}$. Температура води, як і температура на поверхні батискафа, $T_0 = 4^{\circ}\text{C}$. Визначити мінімальну потужність акумулятора для підтримання температури всередині батискафа на рівні $T_B = 10^{\circ}\text{C}$.

Рішення. Вирахуємо тепловий опір стінки батискафа.

$$R_\lambda = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 1,5} \cdot \left(\frac{1}{2,5} - \frac{1}{3}\right) = 0,053 \cdot (0,4 - 0,33333) = 0,00353 \frac{\text{град}}{\text{Вт}}.$$

Тепловий опір термоізоляції:

$$R_u = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \lambda_u} \cdot \left(\frac{1}{r_1 - 0,1} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 0,04} \cdot \left(\frac{1}{2,4} - \frac{1}{2,5}\right) = 1,9894 \cdot (0,416667 - 0,4) = 0,003316 \frac{\text{град}}{\text{Вт}}.$$

Тепловий опір внутрішньої поверхні батискафа при передачі тепла конвекцією на внутрішню поверхню його термоізоляційної стінки:

$$R_\alpha = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \alpha} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 5,5^2 \cdot 10} = 0,000264 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{Вт}}.$$

Потужність джерела тепла.

$$Q = \frac{T_B - T_0}{R_\lambda + R_u + R_\alpha} = \frac{10 - 4}{0,00353 + 0,003316 + 0,000263} = 162,368 \text{ Вт}.$$

3.3. Кусочно-однорідна куля, що конвективно охолоджується з поверхні

Кусочно-однорідна куля складається з однорідних сфер. Загальне вирішення задачі теплопровідності в межах i -тої сфери має вигляд:

$$T_i(r) = -\frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{q_i \cdot r^2}{6} + \frac{A_i}{r} + B_i.$$

В центрі кулі (при $r = 0$) тепловий потік дорівнює нулю ($\lambda \cdot \frac{dT}{dr} \Big|_{r=0} = 0$). Отже, $A_1 = 0$. Із

умов безперервності теплового потоку на границях розділення сфер $\lambda_i \cdot \frac{dT_i(r)}{dr} \Big|_{r=r_{i+1}} =$

$\lambda_{i+1} \cdot \frac{dT_{i+1}(r)}{dr} \Big|_{r=r_{i+1}}$, знаходимо:

$$A_i = -\frac{(q_i - q_{i-1}) \cdot r_i^3}{3 \cdot \lambda_i} + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \cdot A_{i-1}.$$

Енергія, що виділяється в об'ємі кулі, $Q_v = \sum_{i=1}^n q_i \cdot 4 \cdot \pi \cdot \frac{r_{i+1}^3 - r_i^3}{3}$.

Енергія, що конвективно видаляється з поверхні кулі:

$Q_s = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \alpha \cdot (T_R - T_0)$, де T_R - температура на поверхні кулі.

З рівняння теплового балансу $Q_v = Q_s$, знаходимо температуру на поверхні кулі $T_R =$

$\frac{1}{R^2 \cdot \alpha} \cdot \sum_{i=1}^n q_i \cdot \frac{r_{i+1}^3 - r_i^3}{3} + T_0$. З другого боку, на поверхні кулі

$$T_R = -\frac{1}{\lambda_n} \frac{q_n \cdot R^2}{6} + \frac{A_n}{R} + B_n. \text{ Таким чином, } B_n = T_R + \frac{1}{\lambda_n} \frac{q_n \cdot R^2}{6} - \frac{A_n}{R}.$$

Із умов безперервності функції $T_{i-1}(r) = T_i(r)$, знаходимо:

$$B_{i-1} = \frac{q_{i-1} \cdot r_i^3}{6 \cdot \lambda_{i-1}} - \frac{q_i \cdot r_i^3}{6 \cdot \lambda_i} + \frac{A_i}{r_i} - \frac{A_{i-1}}{r_i} + B_i.$$

3.4. Метод кінцевих елементів в сферичних координатах

В сферичних координатах розрахункова модель розділяється на однорідні елементи у вигляді однорідних сфер. В межах кожної сфери $q = \text{const}$ і $\lambda = \text{const}$. Невідома функція в кожному елементі залежить тільки від одної змінної - від радіуса r . Тому маємо одномірну задачу в сферичних координатах.

Координатні функції, що використовуються для апроксимації невідомої функції, не залежать від вибору системи координат. Вони визначаються тільки розмірністю розрахункового простору. Якщо невідома функція залежить тільки від одної змінної, то маємо одномірну задачу. У випадку функцій, що залежать від двох, або трьох змінних, задача стає відповідно двомірною, або тримірною.

Тому, в методі кінцевих елементів в сферичних координатах використовуються розглянуті вище одномірні координатні функції.

В локальних координатах ξ на відріжку від $\xi = -1$ до $\xi = +1$ - це лінійні функції: $N_1(\xi) = 0,5 \cdot (1 - \xi)$; $N_2(\xi) = 0,5 \cdot (1 + \xi)$; або квадратичні функції: $N_1(\xi) = -0,5 \cdot (\xi - 1) \cdot \xi$; $N_2(\xi) = 1 - \xi^2$; $N_3(\xi) = 0,5 \cdot (1 + \xi) \cdot \xi$.

Математична теорія метода кінцевих елементів дає нам для вирахування компонентів підматриць системи алгебраїчних рівнянь для кожного сферичного кінцевого елемента, наступні формули:

$$a_{ij}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_k}{r_{k+1} - r_k} \cdot \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{dN_j}{d\xi} \cdot r^2 \cdot d\xi, \quad b_i^3 = 0,5 \cdot q_k \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \int_{-1}^1 N_i \cdot r^2 \cdot d\xi. \quad (3.6)$$

Вони відрізняються від аналогічних формул в циліндричних координатах тільки додатковим перемноженням підінтегральних функцій на радіус r .

Формули (3.6) виводяться, із закону збереження енергії, згідно рівняння $P_k = F_k$, по аналогії з виводом таких же формул в декартових і циліндричних координатах.

В сферичних координатах площа поверхні, крізь яку протікає тепловий потік, $S(r) = 4 \cdot \pi \cdot r^2$. Тому $P_k = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dp(r)}{dr} S(r) dr = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dp(r)}{dr} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr$. При обчисленні потужності енергії, що виділяється джерелом тепла в межах k -го кінцевого елемента, інтегрування виконується по об'єму $dv = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr$. Тому, $F_k = \int_{r_k}^{r_{k+1}} q(r) \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr$. Таким чином, з рівняння $P_k = F_k$, отримуємо:

$$a_{ij}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_k}{r_{k+1} - r_k} \cdot \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{dN_j}{d\xi} \cdot r^2 \cdot d\xi, \quad b_i^3 = 0,5 \cdot q_k \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \int_{-1}^1 N_i \cdot r^2 \cdot d\xi. \quad (3.7)$$

Для інтегрування в локальних координатах використовуємо залежність радіуса r від координати ξ . При лінійній апроксимації для k -го кінцевого елемента через координатні функції запишемо:

$$r(\xi) = N_1(\xi) \cdot r_k + N_2(\xi) \cdot r_{k+1} = 0,5 \cdot (1 - \xi) \cdot r_k + 0,5 \cdot (1 + \xi) \cdot r_{k+1}, \text{ або}$$

$$r(\xi) = \frac{r_{k+1} - r_k}{2} \cdot \xi + \frac{r_{k+1} + r_k}{2}. \text{ Підставляючи } r(\xi) \text{ в (3.7), після інтегрування}$$

$$\text{отримуємо: } a_{ij}^3 = (-1)^{(i+j)} \cdot \frac{\lambda_k \cdot (r_{k+1}^2 + r_k^2 + r_{k+1} \cdot r_k)}{3 \cdot (r_{k+1} - r_k)}; \quad (3.8)$$

$$b_1^3 = q_k \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{r_{k+1}^2 + 2 \cdot r_{k+1} \cdot r_k + 3 \cdot r_k^2}{12}; \quad (3.9)$$

$$b_2^3 = q_k \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{3 \cdot r_{k+1}^2 + 2 \cdot r_{k+1} \cdot r_k + r_k^2}{12}. \quad (3.10)$$

При квадратичній апроксимації, після підстановки $r(\xi)$ в (3.7) з врахуванням виразів для квадратичних координатних функцій і їх похідних, отримуємо формули для обчислення компонентів підматриць кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь:

$$a_{11}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_k}{(r_{k+1} - r_k)} \cdot \frac{6 \cdot r_{k+1}^2 + 46 \cdot r_k^2 + 18 \cdot r_{k+1} \cdot r_k}{60}; \quad a_{12}^3 = - \frac{2 \cdot \lambda_k}{(r_{k+1} - r_k)} \cdot \frac{3 \cdot r_{k+1}^2 + 13 \cdot r_k^2 + 4 \cdot r_{k+1} \cdot r_k}{15};$$

$$a_{13}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_k}{(r_{k+1} - r_k)} \cdot \frac{6 \cdot r_{k+1}^2 + 6 \cdot r_k^2 - 2 \cdot r_{k+1} \cdot r_k}{60}; a_{22}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_k}{(r_{k+1} - r_k)} \cdot \frac{64 \cdot r_{k+1}^2 + 64 \cdot r_k^2 + 32 \cdot r_{k+1} \cdot r_k}{60};$$

$$a_{23}^3 = -\frac{2 \cdot \lambda_k}{(r_{k+1} - r_k)} \cdot \frac{52 \cdot r_{k+1}^2 + 12 \cdot r_k^2 + 16 \cdot r_{k+1} \cdot r_k}{60}; a_{33}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_k}{(r_{k+1} - r_k)} \cdot \frac{46 \cdot r_{k+1}^2 + 6 \cdot r_k^2 + 18 \cdot r_{k+1} \cdot r_k}{60} \quad (3.11)$$

$$b_1^3 = q_k \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{-r_{k+1}^2 + 9 \cdot r_k^2 + 2 \cdot r_{k+1} \cdot r_k}{60}; \quad (3.12)$$

$$b_3^3 = q_k \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{9 \cdot r_{k+1}^2 - r_k^2 + 2 \cdot r_{k+1} \cdot r_k}{60}; \quad (3.13)$$

$$b_2^3 = q_k \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{12 \cdot r_{k+1}^2 + 12 \cdot r_k^2 + 16 \cdot r_{k+1} \cdot r_k}{60}. \quad (3.14)$$

Крайові умови Ньютона враховуються додаванням до першого компонента матриці (якщо в центрі кулі є сферична порожнина) коефіцієнта конвекції на поверхні сферичної порожнини, помноженого на квадрат її радіуса ($a_{11}^{(1)} = a_{11}^{(1)} + \alpha_1 \cdot r_1^2$). Таким же додаванням до останнього компонента матриці, коефіцієнта конвекції на зовнішній поверхні, помноженого на квадрат зовнішнього радіуса, враховуються крайові умови Ньютона на зовнішній поверхні кулі, ($a_{n+1n+1}^{(n)} = a_{n+1n+1}^{(n)} + \alpha_n \cdot r_{n+1}^2$).

Крайові умови Ньютона доповнюють рівняння теплового балансу

$P_k = F_k$ доданком $P_\alpha = \alpha_n \cdot S \cdot T_R$. Тоді рівняння теплового балансу набуде вигляду: $P_k + P_\alpha = F_k$. Підставляючи в це рівняння вираз для енергії, отримуємо:

$$\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dp(r)}{dr} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr + \alpha_n \cdot 4 \cdot \pi \cdot r_{n+1}^2 \cdot T_R = \int_{r_k}^{r_{k+1}} q(r) \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr.$$

Після скорочення констант: $\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dp(r)}{dr} \cdot r^2 \cdot dr + \alpha_n \cdot r_{n+1}^2 \cdot T_R = \int_{r_k}^{r_{k+1}} q(r) \cdot r^2 \cdot dr.$

Власні інтеграли в цьому рівнянні, як було показано в главі 1., стор.26, вираз (1.13), представляють компоненти матриць кінцеоелементних алгебраїчних рівнянь. В правій частині розміщені вільні члени, а в лівій частині матриця коефіцієнтів, що перемножена на вектор температури. Останнім доданком в останньому рівнянні після перемноження матриць є доданок $\alpha_n \cdot r_{n+1}^2 \cdot T_R$. Таким чином, коефіцієнт $\alpha_n \cdot r_{n+1}^2$ є доданок, який доповнює матрицю коефіцієнтів системи кінцеоелементних алгебраїчних рівнянь.

Задача теплопровідності в сферичних координатах фізично є тримірною. Ми розглядаємо її як одномірну завдяки симетрії. Геометричні розміри і розподіл теплофізичних параметрів в одномірній постановці задачі залежать тільки від одної змінної, від радіуса r , в той час, як сам процес є тримірним.

Ця особливість дозволяє використовувати метод кінцевих елементів для розв'язування задач теплопровідності в необмежених середовищах. У якості приклада розглянемо підземний геологічний вибух. Джерелом виділення тепла в такому явищі є фугас, закладений в сферичну порожнину на дні скважини. В порівнянні з розмірами порожнини, оточуючий її шар ґрунту можна розглядати як необмежений простір. Ми не можемо розділити на кінцеве число сферичних кінцевих елементів необмежений простір, в глибинах якого розміщено джерело виділення тепла. Тому обмежимо епіцентр взриву сферою радіуса R . Тепловий опір необмеженого простору зовні такої сфери дорівнює $R_\lambda = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot R}$. При конвективному видаленні

тепла з поверхні такої сфери тепловий опір буде дорівнювати: $R_\alpha = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \alpha}$.

Приврівнюючи ці вирази, одержуємо: $\alpha = \frac{\lambda}{R}$. Таким чином, необмежений простір з коефіцієнтом теплопровідності λ можна замінити сферою радіуса R з коефіцієнтом конвекції $\alpha = \frac{\lambda}{R}$. Розв'язування задачі розподілу температури методом кінцевих елементів всередині такої сфери було розглянуто вище.

Приклад 3.2. Товстостінна сфера ($R = 0,02$ м, $r_0 = 0,001$ м, $\lambda = 0,05 \frac{Bm}{m \cdot grad}$)

саморозігрівається при $q = 40\,000 \frac{Bm}{m^3}$. Температура навколишнього середовища $T_0 = 10$ °С. $\alpha = 12$. Вирахувати температуру в центрі сфери.

Розглянемо аналітичне рішення задачі. Розрахункові формули приведені в кінці розділу 3.2. Температура на поверхні сфери:

$$T_R = \frac{q \cdot (R^3 - r_0^3)}{3 \cdot R^2 \cdot \alpha} + T_0 = \frac{40000 \cdot (0,02^3 - 0,001^3)}{3 \cdot 0,02^2 \cdot 12} + 10 = 32,219.$$

Постійні інтегрування: $A = -\frac{q \cdot r_0^3}{3 \cdot \lambda} = -\frac{40000 \cdot 0,001^3}{3 \cdot 0,05} = -0,00026667.$

$$B = T_R + \frac{q \cdot R^2}{6 \cdot \lambda} - \frac{A}{R} = 32,219 + \frac{40000 \cdot 0,02^2}{6 \cdot 0,05} + \frac{0,00026667}{0,02} = 32,219 + 53,3333 + 0,013333 = 85,5657.$$

Температура на внутрішній поверхні i в центрі сфери:

$$T(r_0) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{q \cdot r_0^2}{6} + \frac{A}{r_0} + B = -\frac{1}{0,05} \cdot \frac{4 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6}}{6} - \frac{0,00026667}{0,001} + 85,5657 = -0,1333 - 0,26667 + 85,5657 = 85,166.$$

Аналітичне рішення задачі в точці $r = 0,01$.

$$T(r) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{q \cdot r^2}{6} + \frac{A}{r} + B = -\frac{1}{0,05} \cdot \frac{4 \cdot 10^4 \cdot 1,0^2 \cdot 10^{-4}}{6} - \frac{0,00026667}{0,01} + 85,5657 = -13,3333 - 0,026667 + 85,5657 = 72,1966.$$

Розглянемо рішення задачі методом кінцевих елементів при лінійній апроксимації.
Для першого кінцевого елемента (k=1):

$$a_{ij}^3 = (-1)^{(i+j)} \cdot \frac{\lambda_k \cdot (r_{k+1}^2 + r_k^2 + r_{k+1} \cdot r_k)}{3 \cdot (r_{k+1} - r_k)} = \frac{0,05 \cdot (0,01^2 + 0,001^2 + 0,01 \cdot 0,001)}{3 \cdot (0,01 - 0,001)} = 0,000205556;$$

$$b_1^3 = q_k \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{r_{k+1}^2 + 2 \cdot r_{k+1} \cdot r_k + 3 \cdot r_k^2}{12} =$$

$$= 40000 \cdot (0,01 - 0,001) \cdot \frac{0,01^2 + 2 \cdot 0,01 \cdot 0,001 + 3 \cdot 0,001^2}{12} = 0,00369;$$

$$b_2^3 = q_k \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{3 \cdot r_{k+1}^2 + 2 \cdot r_{k+1} \cdot r_k + r_k^2}{12} =$$

$$= 50000 \cdot (0,01 - 0,001) \cdot \frac{3 \cdot 0,01^2 + 2 \cdot 0,01 \cdot 0,001 + 0,001^2}{12} = 0,00963.$$

Для другого кінцевого елемента (k=2):

$$a_{ij}^3 = (-1)^{(i+j)} \cdot \frac{\lambda_k \cdot (r_{k+1}^2 + r_k^2 + r_{k+1} \cdot r_k)}{3 \cdot (r_{k+1} - r_k)} = \frac{0,05 \cdot (0,02^2 + 0,01^2 + 0,02 \cdot 0,01)}{3 \cdot (0,02 - 0,01)} = 0,00116667;$$

$$b_1^3 = q_k \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{r_{k+1}^2 + 2 \cdot r_{k+1} \cdot r_k + 3 \cdot r_k^2}{12} =$$

$$= 40000 \cdot (0,02 - 0,01) \cdot \frac{0,02^2 + 2 \cdot 0,02 \cdot 0,01 + 3 \cdot 0,01^2}{12} = 0,036667;$$

$$b_2^3 = q_k \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{3 \cdot r_{k+1}^2 + 2 \cdot r_{k+1} \cdot r_k + r_k^2}{12} =$$

$$= 40000 \cdot (0,02 - 0,01) \cdot \frac{3 \cdot 0,02^2 + 2 \cdot 0,02 \cdot 0,01 + 0,01^2}{12} = 0,056667.$$

Доповнюємо матрицю коефіцієнтів доданком, що враховує крайові умови Ньютона на зовнішній поверхні кулі:

$$a_{22}^3 = 0,00116667 + 12 \cdot 0,02 \cdot 0,02 = 0,00596667.$$

Система кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь, після перемноження всіх її компонентів на 1000, набуде вигляду:

$$\begin{aligned} 0,20556 \cdot T_1 - 0,20556 \cdot T_2 &= 3,69; \\ -0,20556 \cdot T_1 + 1,37222 \cdot T_2 - 1,16667 \cdot T_3 &= 46,297; \\ -1,16667 \cdot T_2 + 5,96667 \cdot T_3 &= 56,667. \end{aligned}$$

Звідки знаходимо перевищення температури в вузлах кінцевого елемента над температурою навколишнього середовища:

$$T_3 = 22,219; T_2 = 65,065; T_1 = 83,016.$$

Аналітичне рішення: $T_3 = 22,166; T_2 = 62,20; T_1 = 75,166.$

Розбіжність результатів розрахунків: $\Delta T_3 = 0,24\% \quad \Delta T_2 = 4,6\% \quad \Delta T_1 = 10,44\%$

Розбіжність по першому вузлу $\Delta T_1 = 10,44\%$ досить велика і вважається неприйнятною.

Розглянемо графіки розподілу температури по радіусу (рис. 3.2). Співставлення аналітичної (червоної) і кусочно-лінійної (зеленої) кривих показує в цілому їх хороше співпадіння, а розбіжність в одному із вузлів має локальний характер.

Далі розглянемо рішення цієї задачі методом кінцевих елементів при квадратичній апроксимації невідомої функції. Весь об'єм кулі розглядаємо як один кінцевий елемент. При цьому число вузлів кінцевих елементів і їх координати при обох видах апроксимації будуть співпадати.

Вирахуємо компоненти матриць кінцевоелементних рівнянь.

$$a_{11}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_k}{(r_{k+1} - r_k)} \cdot \frac{6 \cdot r_{k+1}^2 + 46 \cdot r_k^2 + 18 \cdot r_{k+1} \cdot r_k}{60} =$$

$$= \frac{2 \cdot 0,05}{(0,02 - 0,001)} \cdot \frac{6 \cdot 0,02^2 + 46 \cdot 0,001^2 + 18 \cdot 0,02 \cdot 0,001}{60} = 0,00024614;$$

$$a_{12}^3 = - \frac{2 \cdot \lambda_k}{(r_{k+1} - r_k)} \cdot \frac{3 \cdot r_{k+1}^2 + 13 \cdot r_k^2 + 4 \cdot r_{k+1} \cdot r_k}{15} =$$

$$= \frac{2 \cdot 0,05}{(0,02 - 0,001)} \cdot \frac{3 \cdot 0,02^2 + 13 \cdot 0,001^2 + 4 \cdot 0,02 \cdot 0,001}{15} = - 0,00045368;$$

$$a_{13}^3 = - \frac{2 \cdot \lambda_k}{(r_{k+1} - r_k)} \cdot \frac{6 \cdot r_{k+1}^2 + 6 \cdot r_k^2 - 2 \cdot r_{k+1} \cdot r_k}{60} =$$

$$= \frac{2 \cdot 0,05}{(0,02 - 0,001)} \cdot \frac{6 \cdot 0,02^2 + 6 \cdot 0,001^2 - 2 \cdot 0,02 \cdot 0,001}{60} = 0,00020754;$$

$$a_{22}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_k}{(r_{k+1} - r_k)} \cdot \frac{64 \cdot r_{k+1}^2 + 64 \cdot r_k^2 + 32 \cdot r_{k+1} \cdot r_k}{60} =$$

$$= \frac{2 \cdot 0,05}{(0,02 - 0,001)} \cdot \frac{64 \cdot 0,02^2 + 64 \cdot 0,001^2 + 32 \cdot 0,02 \cdot 0,001}{60} = 0,0023074;$$

$$a_{23}^3 = - \frac{2 \cdot \lambda_k}{(r_{k+1} - r_k)} \cdot \frac{52 \cdot r_{k+1}^2 + 12 \cdot r_k^2 + 16 \cdot r_{k+1} \cdot r_k}{60} =$$

$$= \frac{2 \cdot 0,05}{(0,02 - 0,001)} \cdot \frac{52 \cdot 0,02^2 + 12 \cdot 0,001^2 + 16 \cdot 0,02 \cdot 0,001}{60} = - 0,00185368;$$

$$a_{33}^3 = \frac{2 \cdot \lambda_k}{(r_{k+1} - r_k)} \cdot \frac{46 \cdot r_{k+1}^2 + 6 \cdot r_k^2 + 18 \cdot r_{k+1} \cdot r_k}{60} = \frac{2 \cdot 0,05}{(0,02 - 0,001)} \cdot$$

$$\frac{46 \cdot 0,02^2 + 6 \cdot 0,001^2 + 18 \cdot 0,02 \cdot 0,001}{60} = 0,001646;$$

$$b_1^3 = q_k \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{-r_{k+1}^2 + 9 \cdot r_k^2 + 2 \cdot r_{k+1} \cdot r_k}{60} =$$

$$= 40000 \cdot (0,02 - 0,001) \cdot \frac{-0,02^2 + 9 \cdot 0,001^2 + 2 \cdot 0,02 \cdot 0,001}{60} = - 0,004446;$$

$$b^3_2 = q_k \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{12 \cdot r_{k+1}^2 + 12 \cdot r_k^2 + 16 \cdot r_{k+1} \cdot r_k}{60} =$$

$$= 40000 \cdot (0,02 - 0,001) \cdot \frac{12 \cdot 0,02^2 + 12 \cdot 0,001^2 + 16 \cdot 0,02 \cdot 0,001}{60} = 0,065;$$

$$b^3_3 = q_k \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{9 \cdot r_{k+1}^2 - r_k^2 + 2 \cdot r_{k+1} \cdot r_k}{60} =$$

$$= 40000 \cdot (0,02 - 0,001) \cdot \frac{9 \cdot 0,02^2 - 0,001^2 + 2 \cdot 0,02 \cdot 0,001}{60} = 0,046094.$$

Доповнюємо матрицю коефіцієнтів доданком, що враховує крайові умови Ньютона на зовнішній поверхні кулі:

$$a^3_{33} = 0,001646 + 12 \cdot 0,02 \cdot 0,02 = 0,001646 + 0,0048 = 0,006446.$$

Складаємо систему кінцевоелементних рівнянь, яка після перемноження всіх її компонентів на 1000 набуде вигляду:

$$\begin{aligned} 0,24614 \cdot T_1 - 0,4537 \cdot T_2 + 0,20754 \cdot T_3 &= -4,446; \\ -0,45366 \cdot T_1 + 2,3074 \cdot T_2 - 1,8537 \cdot T_3 &= 65,0; \\ 0,20754 \cdot T_1 - 1,8537 \cdot T_2 + 6,4460 \cdot T_3 &= 46,094. \end{aligned}$$

В результаті рішення отримуємо перевищення температури в вузлах кінцевого елемента над температурою навколишнього середовища.

$$T_3 = 22,20; \quad T_2 = 60,835; \quad T_1 = 75,335.$$

Порівняння результатів аналітичного і числового рішень задачі показує їх практично повне співпадіння.

| | | | | |
|--------|---------|---------|---------|--------------------------------|
| r | 0,001 | 0,01 | 0,02 | |
| $T(r)$ | 75,166; | 60,830; | 22,166. | - аналітичне рішення, |
| $T(r)$ | 75,335; | 60,835; | 22,20. | - числове квадратичне рішення. |

Найбільша розбіжність цих результатів не перевищує 0,22%.

Практично, це повне співпадіння. В цьому нема нічого дивного. Аналітичне рішення є квадратичною параболою. Якщо квадратичну параболу апроксимувати квадратичною функцією, то співпадіння буде не тільки практичне, но і теоретичне, а розбіжність в 0,22% викликана похибками округлення розрахунків.

3.5. Нелінійний розподіл потужності виділення тепла по об'єму кулі

Розглянені вище задачі розрахунків температурних режимів в однорідній, або кусочно-однорідній кулі мають, швидше всього, учбово-теоретичне, чим практичне значення. Такі задачі можуть бути вирішені як чисельно, методом кінцевих елементів, так і аналітично, прямим інтегруванням диференційного рівняння теплопровідності.

Порівняння результатів, отриманих двома, зовсім різними математичними підходами, дозволяє оцінити похибку числового метода, переваги якого полягають в тому, що числовим методом можуть бути розв'язані задачі, які не мають аналітичного рішення.

Природним при твердненні епоксидних композицій в неізотермічному режимі є нелінійний розподіл потужності тепловиділення по об'єму композита. У випадку нелінійної залежності функції $q(r)$ записати аналітичне рішення задачі розподілу температури $T(r)$ в більшості випадків практично неможливо. Для числового рішення нелінійної задачі методом кінцевих елементів, застосовують кусочно-аналітичні апроксимації заданої нелінійної функції $q(r)$.

При кусочно-лінійній апроксимації компоненти матриці вільних членів кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь $[B]$ виражаються через інтеграл виду:

$$b_k = 0,5 \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \int_{-1}^{+1} N_1(\xi) \cdot q_k(\xi) \cdot r_k^2(\xi) \cdot d\xi. \quad (3.15)$$

Тут: $N_1(\xi) = 0,5 \cdot (1 - \xi); \quad N_2(\xi) = 0,5 \cdot (1 + \xi);$

$$q_k(\xi) = 0,5 \cdot [(q_{k+1} - q_k) \cdot \xi + q_{k+1} + q_k];$$

$$r_k(\xi) = 0,5 \cdot [(r_{k+1} - r_k) \cdot \xi + r_{k+1} + r_k].$$

Підставляючи вирази для підінтегральних функцій в інтеграл (3.15) і виконуючи інтегрування їх добутку, отримуємо розрахункові формули для обчислення компонентів матриці $[B]$ при лінійній апроксимації.

$$b^3_1 = (r_{k+1} - r_k) \cdot (q_{k+1} \cdot \frac{3 \cdot r_{k+1}^2 + 4 \cdot r_{k+1} \cdot r_k + 3 \cdot r_k^2}{60} + q_k \cdot \frac{2 \cdot r_{k+1}^2 + 6 \cdot r_{k+1} \cdot r_k + 12 \cdot r_k^2}{60}); \quad (3.16)$$

$$b^3_2 = (r_{k+1} - r_k) \cdot (q_{k+1} \cdot \frac{12 \cdot r_{k+1}^2 + 6 \cdot r_{k+1} \cdot r_k + 2 \cdot r_k^2}{60} + q_k \cdot \frac{3 \cdot r_{k+1}^2 + 4 \cdot r_{k+1} \cdot r_k + 3 \cdot r_k^2}{60}). \quad (3.17)$$

При кусочно-квадратичній апроксимації підінтегральної функції в інтегралі (3.7) повинні бути квадратичні вирази, а саме: $N_1(\xi) = 0,5 \cdot (\xi^2 - \xi); \quad N_2(\xi) = 1 - \xi^2;$

$$N_3(\xi) = 0,5 \cdot (\xi^2 + \xi);$$

$$q_k(\xi) = 0,5 \cdot [(q_{2,k+1} + q_{2,k-1} - 2 \cdot q_{2,k}) \cdot \xi^2 + (q_{2,k+1} - q_{2,k-1}) \cdot \xi + 2 \cdot q_{2,k}];$$

$$r_k^2(\xi) = 0,25 \cdot [(r_{k+1} - r_k)^2 \cdot \xi^2 + 2 \cdot (r_{k+1}^2 - r_k^2) \cdot \xi + (r_{k+1} + r_k)^2].$$

Після підстановки цих виразів в інтеграл (3.7) і виконання інтегрування отримаємо:

$$b^3_1 = (r_{k+1} - r_k) \cdot 0,5 \cdot (q_{2,k+1} \cdot \frac{-40 \cdot r_{k+1}^2 - 32 \cdot r_{k+1} \cdot r_k - 40 \cdot r_k^2}{1680} + q_{2,k-1} \cdot \frac{16 \cdot r_{k+1}^2 + 80 \cdot r_{k+1} \cdot r_k + 352 \cdot r_k^2}{1680} + 2 \cdot q_{2,k} \cdot \frac{-16 \cdot r_{k+1}^2 + 32 \cdot r_{k+1} \cdot r_k + 96 \cdot r_k^2}{1680}); \quad (3.18)$$

$$b^3_2 = (r_{k+1} - r_k) \cdot (q_{2,k+1} \cdot \frac{96 \cdot r_{k+1}^2 + 32 \cdot r_{k+1} \cdot r_k - 16 \cdot r_k^2}{1680} +$$

$$+ q_{2,k-1} \cdot \frac{-16 \cdot r_{k+1}^2 + 32 \cdot r_{k+1} \cdot r_k + 96 \cdot r_k^2}{1680} + 2 \cdot q_{2,k} \cdot \frac{128 \cdot r_{k+1}^2 + 192 \cdot r_{k+1} \cdot r_k + 128 \cdot r_k^2}{1680}; \quad (3.19)$$

$$b_3^3 = (r_{k+1} - r_k) \cdot 0,5 \cdot (q_{2,k+1} \cdot \frac{352 \cdot r_{k+1}^2 + 80 \cdot r_{k+1} \cdot r_k + 16 \cdot r_k^2}{1680} + \\ + q_{2,k-1} \cdot \frac{-40 \cdot r_{k+1}^2 - 32 \cdot r_{k+1} \cdot r_k - 40 \cdot r_k^2}{1680} + 2 \cdot q_{2,k} \cdot \frac{96 \cdot r_{k+1}^2 + 32 \cdot r_{k+1} \cdot r_k - 16 \cdot r_k^2}{1680}). \quad (3.20)$$

Компоненти матриці $[A]$ не залежать від розподілу функції $q(r)$, тому вираховуються для кожного виду апроксимації відповідно по формулах (3.8) і (3.11).

Поєднання двох різних видів апроксимацій невідомої функції $T(r)$ і функції $q(r)$ можливо, але покладається нерациональним. Логічно обидві функції апроксимувати, або лінійно, або квадратично.

Приклад 3.3. Як приклад нелінійного розподілу щільності потужності тепловиділення вздовж радіуса кулі, розглянемо функцію

$$q(r) = 22000 \cdot e^{-80 \cdot (R-r)} + 18000 \cdot e^{-200 \cdot (R-r)}. \quad (3.21)$$

Графік даної нелінійної функції зображений на рис.3.2.

При лінійній апроксимації кулю розділюємо рівномірно на чотири кінцевих елемента, а при квадратичній - на два. Таке розділення дозволяє отримати однаковий розподіл вузлів апроксимації. По формулі (3.21) вираховуємо значення функції $q(r)$ в цих вузлових точках.

| | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| r | 0,0 | 0,005 | 0,01 | 0,015 | 0,02 |
| $q(r)$ | 4112,0 | 5730,1 | 7449,2 | 8125,2 | 4000,0 |

Далі, формуємо матриці коефіцієнтів $[A]$ і вільних членів $[B]$ кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь.

При лінійній апроксимації обчислення виконуються по формулах (3.8) і (3.16) - (3.17). Опускаючи проміжучочні перетворення, запишемо систему алгебраїчних рівнянь в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} 0,1 \cdot T_1 - 0,1 \cdot T_2 &= 0,161; \\ -0,1 \cdot T_1 + 0,1 \cdot T_2 - 0,7 \cdot T_3 &= 2,791; \\ -0,7 \cdot T_2 + 2,6 \cdot T_3 - 1,9 \cdot T_4 &= 12,240; \\ -1,9 \cdot T_3 + 5,6 \cdot T_4 - 3,7 \cdot T_5 &= 27,810; \\ -3,7 \cdot T_4 + 15,7 \cdot T_5 &= 12,240. \end{aligned}$$

В результаті розв'язування цієї системи рівнянь отримуємо:

$$T_1 = 30,479; \quad T_2 = 28,867; \quad T_3 = 24,650; \quad T_4 = 16,654; \quad T_5 = 5,032.$$

Аналогічно, по формулах (3.11) і (3.18)–(3.20) запишемо систему кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь при квадратичній апроксимації.

$$\begin{aligned} 0,12 \cdot T_1 - 0,24 \cdot T_2 + 0,12 \cdot T_3 &= 0,383; \\ -0,24 \cdot T_1 + 1,28 \cdot T_2 - 1,04 \cdot T_3 &= 3,870; \\ 0,12 \cdot T_1 - 1,04 \cdot T_2 + 3,04 \cdot T_3 - 2,60 \cdot T_4 + 0,52 \cdot T_5 &= 7,352; \\ -2,64 \cdot T_3 + 7,68 \cdot T_4 - 5,04 \cdot T_5 &= 36,358; \\ 0,52 \cdot T_3 - 5,04 \cdot T_4 + 16,52 \cdot T_5 &= 12,240. \end{aligned}$$

Рішення її буде:

$$T_1 = 29,607; \quad T_2 = 28,920; \quad T_3 = 25,039; \quad T_4 = 17,031; \quad T_5 = 5,225.$$

Порівняння результатів розрахунків при двох видах апроксимації показує їх розбіжність від 0,14% до 7,7%. Як видно, оба види апроксимації дають прийнятні для технічних розрахунків результати.

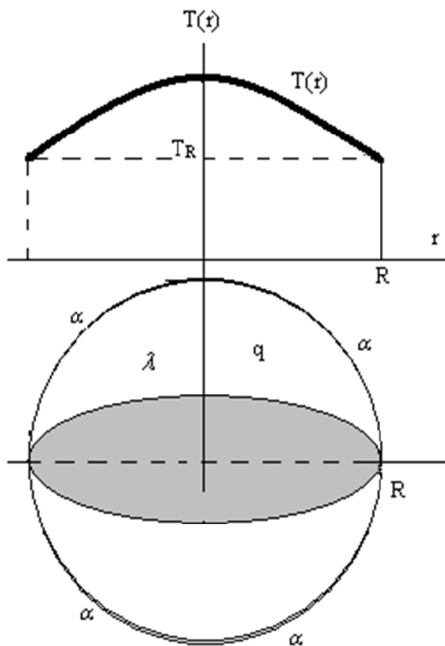


Рис. 3.1. Графік розподілу температури в однорідній кулі

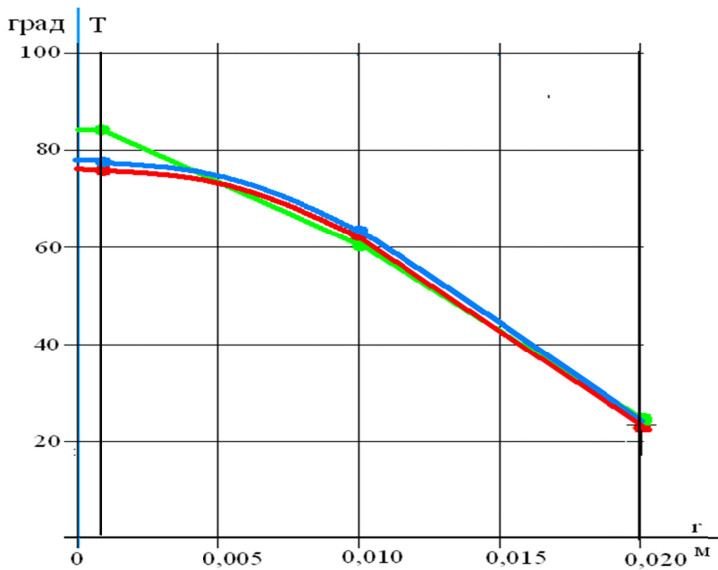


Рис. 3.2. Розподіл температури вздовж радіуса товстостінної сфери

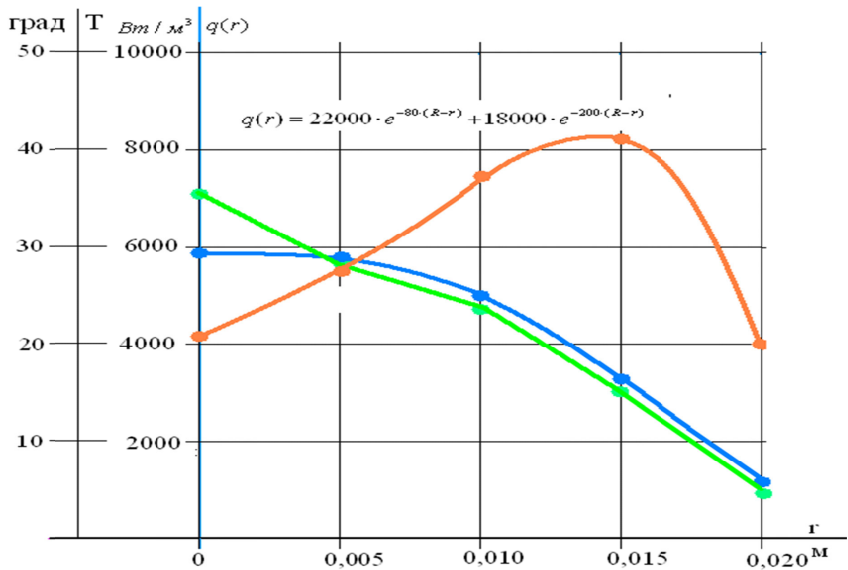


Рис. 3.3. Розподіл температури вздовж радіуса кулі при нелінійній залежності щільності тепловідлення

Глава 4. НЕСТАЦІОНАРНІ ОДНОМІРНІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

4.1. Нагрівання та охолодження однорідного тіла

Розглянемо найпростіший випадок нестационарного режиму, який має аналітичне рішення. Це буде нагрівання, або охолодження фізичного тіла, що конвективно вирівнює температуру з охоплюючої це тіло поверхні. При цьому форма тіла не має значення. Це може бути куля, циліндр, стрижень, або будь-який матеріал довільної геометричної форми (рис. 4.1).

Теплофізичні явища визначаються наступними параметрами:

$[q] \left[\frac{Вт}{м^3} \right]$ - об'ємна щільність потужності виділення тепла;

$[V] [м^3]$ - об'єм фізичного тіла;

$[S] [м^2]$ - площа поверхні теплообміну;

$[\rho] \left[\frac{кг}{м^3} \right]$ - щільність матеріалу;

$[c] \left[\frac{Дж}{кг \cdot ^\circ C} \right]$ - теплоємність матеріалу;

$[\alpha] \left[\frac{Вт}{м^2 \cdot ^\circ C} \right]$ - коефіцієнт конвекції;

$[T_0], ^\circ C$ - температура навколишнього середовища;

$[T_H], ^\circ C$ - початкова температура, з якої починається нагрівання, або охолодження тіла.

По всьому об'єму тіла V виділяється теплова енергія, потужністю q . Тіло охолоджується конвективно з поверхні S . Потрібно визначити закон залежності температури тіла від часу при його нагріванні, або охолодженні.

Складемо рівняння теплового стану тіла.

$$\text{Рівняння теплового балансу: } \rho \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} = q. \quad (4.1)$$

$$\text{Енергія, накопичена в усьому об'ємі тіла } V: W = \rho \cdot c \cdot V \cdot T. \quad (4.2)$$

При охолодженні тіла, накопичена в ньому енергія конвективним потоком буде видалятися з поверхні S , що охоплює об'єм V , зі швидкістю:

$$\frac{dW}{dt} = -\alpha \cdot S \cdot T. \quad (4.3)$$

Диференціюємо вираз (4.2) і отримуємо: $\frac{dW}{dt} = \rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{dT}{dt}$.

З врахуванням (4.3), запишемо диференційне рівняння нагрівання (охолодження)

$$\text{однорідного тіла} \quad -\alpha \cdot S \cdot T = \rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{dT}{dt}. \quad (4.4)$$

$$\text{Рішення цього рівняння має вигляд:} \quad T(t) = A \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + B. \quad (4.5)$$

$$\text{Після підстановки (4.5) в (4.4), знаходимо постійну часу} \quad \tau = \frac{\rho \cdot c \cdot V}{\alpha \cdot S}.$$

Запишемо постійні часу для тіл найпростіших геометричних форм.

$$\text{Стрижень довжиною } L, \text{ перетину } S, \text{ що охолоджується з торця} \quad \tau = \frac{\rho \cdot c \cdot L}{\alpha}.$$

$$\text{Стрижень довжиною } L, \text{ перетину } S, \text{ що охолоджується з торців} \quad \tau = \frac{\rho \cdot c \cdot L}{2 \cdot \alpha}.$$

$$\text{Циліндр, що охолоджується з бічної поверхні} \quad \tau = \frac{\rho \cdot c \cdot R}{2 \cdot \alpha}.$$

$$\text{Куля, що охолоджується по всій поверхні} \quad \tau = \frac{\rho \cdot c \cdot R}{3 \cdot \alpha}.$$

Постійні інтегрування A і B знаходимо з початкових умов. Якщо тіло було нагріте до температури T_H і почало охолоджуватися з моменту часу $t = 0$ до температури T_0 , то отримуємо два вирази: $T_0 = B$ і $T_H = A + B$.

$$\text{Таким чином, при охолодженні тіла:} \quad T(t) = (T_H - T_0) \cdot e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)} + T_0. \quad (4.6)$$

У випадку нагрівання тіла з потужністю тепловиділення $Q = q \cdot V$ від температури T_0 до температури T_y , рівняння теплового балансу буде

$$\alpha \cdot S \cdot (T_y - T_0) = q \cdot V. \quad \text{При сталому стаціонарному режимі знаходимо постійну температури тіла} \quad T_y = \frac{q \cdot V}{\alpha \cdot S} + T_0.$$

Для визначення постійних інтегрування складемо два рівняння.

При $t = 0$ $T_0 = A + B$. При $t = \infty$ $T_y = B$. Отже, при нагріванні тіла від температури T_0 до температури T_y

$$T(t) = (T_0 - T_y) \cdot e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)} + T_y. \quad \text{Або} \quad T(t) = \frac{q \cdot V}{\alpha \cdot S} \cdot \left(1 - e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}\right) + T_0. \quad (4.7)$$

Підставляючи в (4.6) і (4.7) геометричні параметри S і V конкретних фізичних тіл, отримуємо функції, що описують процеси нагрівання і охолодження цих тіл.

Наприклад, для однорідної кулі ці функції мають вигляд:

$$\text{При нагріванні однорідної кулі:} \quad T(t) = \frac{q \cdot R}{3 \cdot \alpha} \cdot \left(1 - e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}\right) + T_0. \quad (4.8)$$

$$\text{При охолодженні однорідної кулі:} \quad T(t) = (T_H - T_0) \cdot e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)} + T_0. \quad (4.9)$$

Оба процеси, як нагрівання, так і охолодження, описуються експоненціальними функціями. Графіки цих функцій показані на рис. 4.2. На графіках показано також постійну часу τ - це довжина підготовки до експоненти. Фізично, постійна часу - це час, на протязі якого експонента зменшується в e разів. За проміжок часу $t = 5 \cdot \tau$, процес можна вважати практично завершеним. Теоретично, він триватиме нескінченно довго, а фізично, будь-який, досить тривалий процес, переривається іншим процесом.

Для неоднорідних тіл, складніших геометричних форм, при нерівномірному розподілі потужності виділення тепла по об'єму і неоднорідному охолодженні з поверхні, необхідно використовувати інтегральні характеристики:

$$q \cdot V = \int_V q(V) \cdot dv, \quad \alpha \cdot S = \int_S \alpha(s) \cdot ds, \quad \rho \cdot c \cdot V = \int_V \rho(v) \cdot c(v) \cdot dv.$$

Зазвичай неоднорідні тіла - це конструкції, що складаються з окремих однорідних елементів, наприклад, електричні машини і апарати. В одних з цих елементів виділяється тепло (обмотки, сталі сердечники при перемагнічуванні змінним струмом), в других елементах $q = 0$ (ізоляція, конструктивні металеві деталі корпусів). Також і теплофізичні характеристики ρ і c у цих конструктивних елементів різні, але в межах кожного елемента вони, зазвичай, однорідні.

Умови охолодження, на окремих ділянках поверхні, також можна вважати однорідними. Тому обчислення інтегралів для визначення $q \cdot V$, $\alpha \cdot S$, і $\rho \cdot c \cdot V$ зводиться до елементарного підсумовування по окремих однорідних ділянках.

Після обчислення еквівалентних теплофізичних інтегральних параметрів $q \cdot V$, $\alpha \cdot S$, і $\rho \cdot c \cdot V$, фізичне тіло складної конструкції може бути представлено еквівалентною однорідною кулею, паралелепіпедом, циліндром, або другим геометричним тілом. Така заміна дозволяє оцінити характер температурного процесу, не вдаючись в деталі розподілення температури, по окремим елементам всередині самої конструкції. Такий підхід носить оціночний характер і дозволяє оцінити середню температуру на поверхні тіла.

Рівняння (4.4) і його розв'язок (4.5) дійсні для теплофізичних процесів в тілах з теоретично безмежно великою теплопровідністю [5., С.103]. Полімери мають низьку теплопровідність, що відчутно впливає на характер протікання теплофізичних процесів в виробках з цих матеріалів.

4.2. Числове інтегрування диференціальних рівнянь

Побудова числових алгоритмів інтегрування диференціальних рівнянь базується на заміні похідних відношеннями приросту функцій до приросту аргументів. В результаті такої заміни диференціальні рівняння перетворюються в рівняння чисто алгебраїчні, що дозволяє побудувати ітераційну схему обчислення наступних значень невідомої функції через її попередні значення. Стартові попередні значення при цьому задаються початковими, або крайовими умовами при постановці задачі.

Наглядним прикладом числового розв'язування диференціальних рівнянь математичної фізики, в тому числі і рівнянь теплопровідності, є метод різницьких схем [1., С.60], або метод сіток [6., С.497]. С позицій теорії метода кінцевих елементів цей метод можна розглядати як метод кінцевих елементів при ступінчастій апроксимації невідомої функції. Ступінчаста апроксимація практично весь об'єм математичного рішення задачі вимагає перекласти на комп'ютерні розрахунки. Існує версія, що якби комп'ютери з'явилися в часи Ньютона і Лейбніца, то диференціальне числення так і не було би відкрито. Можливо не Ньютоном і не Лейбніцем, но ким-то іншим, можливо, чуть пізніше, но всеж таки було би відкрито. Тому що метод сіток потребує об'єму пам'яті для збереження і обробки обчислювальної інформації. Лінійна і квадратична апроксимації дозволяють більший об'єм інформації опрацювати аналітично. Це розширює можливості комп'ютера при розв'язуванні досить складних задач. Саме ці питання при рішенні крайових задач теплофізики і розглядаються в даній книзі.

Спочатку розглянемо використання числового інтегрування при розв'язуванні дуже простого рівняння, яке має аналітичне рішення. Це зручно тим, що результати числового інтегрування можна співставити з аналітичним рішенням і оцінити похибку.

З умов теплового балансу складемо рівняння, що об'єднує процеси нагрівання і охолодження однорідного тіла (рис. 4.2).

$$\rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} = q \cdot V - \alpha \cdot S \cdot T(t). \quad (4.10)$$

Перший доданок ($q \cdot V$) в правій частині рівняння (4.10) відповідає процесу нагрівання тіла. Вся енергія, що виділяється джерелом (q), накопичується в об'ємі тіла. Температура тіла наростає похідна $\frac{dT}{dt} > 0$. Другий доданок ($\alpha \cdot S \cdot T$) відповідає процесу охолодження тіла. Енергія, накопичена в об'ємі тіла, видаляється з поверхні в навколишнє середовище. Температура тіла спадає похідна $\frac{dT}{dt} < 0$.

В лівій частині рівняння (4.10) похідну замінюємо відношенням приросту функції до приросту аргументу: $\frac{dT}{dt} = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta t}$. В правій частині рівняння (4.10) функцію $T(t)$

визначаємо як середнє значення на інтервалі Δt $T(t) = \frac{T_{i+1} + T_i}{2}$

(рис. 4.3).

При цьому рівняння набуде вигляду:

$$\rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta t} = q \cdot V - \alpha \cdot S \cdot \frac{T_{i+1} + T_i}{2}. \quad (4.11)$$

Звідки знаходимо:

$$T_{i+1} = \frac{q \cdot V + \left(\frac{\rho \cdot c \cdot V}{\Delta t} - \frac{\alpha \cdot S}{2} \right) \cdot T_i}{\frac{\rho \cdot c \cdot V}{\Delta t} + \frac{\alpha \cdot S}{2}}.$$

Отже, при початковому значенні невідомої функції $T_i = T_n$, після підстановки його в (4.11) знаходимо значення невідомої функції T_{i+1} на кінці інтервалу Δt . Використовуючи це значення як початкове для наступного інтервалу, після підстановки його в (4.11), отримуємо рішення на кінці другого інтервалу. Цей процес продовжується до тих пір, поки не будуть отримані з необхідною точністю значення невідомої функції. Особливості числового інтегрування проілюструємо на прикладі.

Приклад 4.1. Розглянемо диференціальне рівняння $\frac{dT}{dt} = -10 \cdot T(t)$.

Аналitiчне рішення цього рівняння має вигляд: $T(t) = A \cdot e^{-k \cdot t}$. Після підстановки $T(t)$ в диференціальне рівняння $-k \cdot A \cdot e^{-k \cdot t} = -10 \cdot A \cdot e^{-k \cdot t}$, знаходимо параметер $k = 10$. Постійну інтегрування знаходимо з початкових умов. Нехай при $t = 0$, $T(t) = 100$. Тоді, $T(t) = A = 100$. Запишемо аналitiчне рішення: $T(t) = 100 \exp[-10 \cdot t]$.

Для числового рішення складемо рівняння $\frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta t} = -10 \cdot \frac{T_{i+1} + T_i}{2}$.

Звідки отримуємо ітераційну схему: $T_{i+1} = \frac{2 - 10 \cdot \Delta t}{2 + 10 \cdot \Delta t} \cdot T_i$.

Результати розрахунків при різних Δt представимо в формі таблиці.

| T | $T(t)=100 \cdot e^{-10 \cdot t}$ | $T_{i+1} = \frac{2-10 \cdot 0,01}{2+10 \cdot 0,01} \cdot T_i$ | $T_{i+1} = \frac{2-10 \cdot 0,02}{2+10 \cdot 0,02} \cdot T_i$ | $T_{i+1} = \frac{2-10 \cdot 0,05}{2+10 \cdot 0,05} \cdot T_i$ |
|------|----------------------------------|---|---|---|
| 0,00 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 0,01 | 90,48 | 90,48 | | |
| 0,02 | 81,82 | 81,86 | 81,82 | |
| 0,03 | 74,08 | 74,06 | | |
| 0,04 | 67,03 | 67,00 | 66,94 | |
| 0,05 | 60,65 | 60,63 | | 60,00 |
| 0,06 | 54,88 | 54,85 | 54,77 | |
| 0,07 | 44,66 | 49,63 | | |
| 0,08 | 44,93 | 44,90 | 44,81 | |
| 0,09 | 40,66 | 40,63 | | |
| 0,10 | 36,79 | 36,77 | 36,66 | 33,33 |
| 0,11 | 33,29 | 33,26 | | |
| 0,12 | 30,12 | 30,09 | 30,00 | |
| 0,13 | 27,25 | 27,22 | | |
| 0,14 | 24,66 | 24,63 | 24,54 | |
| 0,15 | 22,31 | 22,29 | | 21,60 |
| 0,16 | 20,19 | 20,16 | 20,08 | |
| 0,17 | 18,27 | 18,24 | | |
| 0,18 | 16,53 | 16,51 | 16,43 | |
| 0,19 | 14,95 | 14,93 | | |
| 0,20 | 13,53 | 13,51 | 13,44 | 12,96 |
| 0,21 | 12,25 | 12,22 | | |

4.3. Рівняння теплопровідності в нестационарному режимі

Рівняння (4.4) і (4.10) описують процеси нагрівання і охолодження тіл без врахування розподілу температури всередині тіла. Самі рівняння і їх рішення складені виходячи з припущення що швидкість розповсюдження тепла по об'єму тіла набагато більша швидкості самого процесу нагрівання (охолодження). В цих рівняннях відсутній такий параметер, як коефіцієнт теплопровідності $-\lambda$. Математично, це означає що температура по всьому об'єму тіла однакова і дорівнює температурі на його поверхні, коефіцієнт теплопровідності матеріалу прагне до незкінченності. Проте, теплопровідність матеріалів і геометричні форми фізичних тіл помітно впливають на розподіл температури по об'єму. Особливо в матеріалах з низькою теплопровідністю, наприклад, в пластмасах. Цей вплив наглядно показують рішення задач для стаціонарних процесів.

Для подальшого аналізу об'єднаємо рівняння для стаціонарних і нестационарних процесів. При цьому отримуємо узагальнені рівняння в різних системах координат:

- в декартових [1., С.18],[2., С.135],
$$\frac{d}{dx}(\lambda \cdot \frac{dT}{dx}) = -q(x,t) + \rho \cdot c \cdot \frac{dT}{dt}; \quad (4.12)$$

- в циліндричних [1., С.20],
$$\frac{d}{dr}(\lambda \cdot \frac{dT}{dr} \cdot r) = -q(r,t) \cdot r + \rho \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} \cdot r; \quad (4.13)$$

- в сферичних [2., С.227],
$$\frac{d}{dr}(\lambda \cdot \frac{dT}{dr} \cdot r^2) = -q(r,t) \cdot r^2 + \rho \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} \cdot r^2. \quad (4.14)$$

Проаналізуємо фізичну суть кожного доданку в цих рівняннях. Функції $q(x,t)$ і $q(r,t)$ описують розподіл потужності виділення тепла по об'єму тіла.

Це - джерела тепла. Ними можуть бути: термохімічні реакції тверднення олігомерів, реакції застигання бетонних сумішей, індукційне електромагнітне нагрівання, нагрівання конструктивно вбудованими провідниками електричного струму, або трубками з рідким теплоносієм.

Тепло, що поступає від джерел, розповсюджується в двох напрямках. Частина тепла накопичується тілом всередині його об'єму. Цей процес описується другим доданком в правій частині рівнянь (4.12) – (4.14), наприклад, $\rho \cdot c \cdot \frac{dT}{dt}$ - для стрижня. Друга частина тепла розподіляється по об'єму тіла, так як його теплопровідність λ створює опір тепловому потоку, що рухається від джерел виділення тепла всередині тіла до його країв. Там тепло, згідно із заданими крайовими умовами, видаляється з тіла. Процес перерозподілу тепла по об'єму тіла описується лівою частиною рівнянь (4.12) – (4.14), наприклад, $\frac{d}{dx}(\lambda \cdot \frac{dT}{dx})$ - для стрижня. Функція, що відображає процес виділення тепла з об'єму тіла згідно із заданими крайовими умовами, в рівняннях (4.12) – (4.14) невідома. Цю функцію необхідно знайти, розв'язавши загальне рівняння теплопровідності з врахуванням заданих крайових і початкових умов.

Початковими умовами, або умовами Коші є значення невідомої функції в початковий момент часу, в момент $t = 0$, $f(x) = T(x,0)$, або $f(r) = T(r,0)$. При нульових початкових умовах, коли вмикається процес нагрівання, $T(x, 0) = 0$. Як правило, температура тіла в початковий момент часу дорівнює температурі навколишнього середовища $T_0 = \text{const}$. В цьому випадку, повне рішення рівняння теплопровідності буде дорівнювати сумі рішень задачі при нульових початкових умовах і температури навколишнього середовища.

Якщо ненульові початкові умови задані у вигляді функції, що описує розподіл температури по об'єму тіла $T(x,0) = f(x)$, то повне рішення буде дорівнювати сумі рішень двох задач. Перша – це задача нагрівання тіла при нульових початкових умовах. Друга – це задача охолодження тіла від заданого розподілу температури $f(x) = T(x,0)$ до нуля ($T(x, \infty) = 0$).

Таке детальне пояснення початкових умов має велике значення для розуміння фізичних особливостей перехідного процесу нагрівання і охолодження фізичного тіла. Л. Д. Ландау говорив, якщо рішення диференційного рівняння шляхом аналізу фізичних процесів, що описують це рівняння можна наглядно виразити графіком функції, що задовільнює це рівняння, то воно вже наполовину розв'язане. Другі 50% - це визначення додаткових коефіцієнтів і числових величин. В даному випадку, виконана саме перша половина пошуку рішення. Далі будуть розглянуті математичні методи пошуку другої половини.

Наведені рівняння (4.12) – (4.14) є найпростішими. В даній роботі розв'язування теплофізичних задач розглядається в послідовності від простого до складного. Найпростішим є одновимірний процес в декартових координатах. Невідома функція $T(x,t)$ є функція двох змінних. В циліндричних координатах, при симетрії задачі відносно осі, маємо двовірну задачу, але завдяки симетрії задачі, невідома функція $T(r,t)$ залишається функцією двох змінних. Збільшення розмірності задачі дещо ускладнює рівняння в циліндричних координатах, але цим двовірною задачею відрізняється від одновірної. Трьохвірна, симетрична відносно центральної точки задачею, також описується функцією двох змінних $T(r,t)$, і рівняння в сферичних координатах ще більше ускладнюється.

Перед тим, як приступити до розв'язування найпростіших рівнянь, для порівняння, наведемо повне рівняння в трьохвірному просторі, коли невідома функція $T(x,y,z,t)$ залежить від всіх трьох координат [1, с. 18].

$$\lambda \cdot \left(\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} \right) = -q(x,y,z) + \rho \cdot c \cdot \frac{dT}{dt}. \quad (4.15)$$

Проте, навіть для рівнянь (4.12) – (4.14) відшукати аналітичне рішення вдається тільки в самих простих випадках: однорідний стрижень, циліндр, куля. Не маючи в своєму розпорядженні на початку ХХ-го століття ЕОМ, вчені того часу розробляли методи розв'язування таких рівнянь з використанням евристичних підходів. Ознайомимося з деякими із них.

4.4. Функції Гріна

Розглянемо однорідний необмежений трьохвірний простір. Нехай, в деякій точці цього простору, в момент часу $t = 0$, миттєво виділяється кількість енергії щільністю q_1 $[Дж/м^3]$. Рівняння процесу розподілу тепла в цьому просторі, без постійно діючого джерела $q(x,y,z)$, має вигляд: [2, с. 251]

$$\frac{\lambda}{\rho c} \cdot \left(\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} \right) = \frac{dT}{dt}. \quad (4.16)$$

Рівнянню (4.16) задовольняють ряд аналітичних функцій. Однією з них є функція джерела q , або функція Гріна [1., С.346], [2., С.252].

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{8 \cdot c \cdot \rho \cdot (\sqrt{\pi \cdot a \cdot t})^3} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4 \cdot a \cdot t}\right), \quad (4.17)$$

де: $a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \left[\frac{M^2}{сек} \right]$. В цьому легко переконатися диференцюванням функції (4.17) і підстановкою отриманих похідних в рівняння (4.16). На рис. 4.4 показано взаємне положення координат (ξ, η, ζ) точки тепловиділення і координат (x, y, z) точки, в якій визначається температура $\varphi(x, y, z, t)$.

Якщо функцію Гріна проінтегрувати в площині (η, ζ) , що розміщена паралельно площині (y, z) через точку ξ , то отримуємо функцію Гріна для нескінченно протяжної плоскої поверхні [1, с. 348], [2, с. 254].

$$\varphi(x, t) = \frac{q}{2 \cdot c \cdot \rho \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot t}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4 \cdot a \cdot t}\right]. \quad (4.18)$$

Тут $q \left[\frac{Дж}{M^2} \right]$ - щільність енергії що миттєво виділяється по всій плоскій поверхні.

На рис. 4.4 показано взаємне розміщення площини тепловиділення і розрахункової точки. Розрахункова точка визначається тільки координатою x , так як поверхня тепловиділення нескінченно протяжна і в кожній площині перпендикулярній осі x температура буде однакою. Фізично, такі площини є ізотермами.

Проведемо через точку тепловиділення (ξ, η, ζ) (рис.4.4) циліндричну поверхню, симетричну відносно осі z (рис. 4.4). В циліндричних координатах, після інтегрування функції (4.17) вздовж осі z по координаті ξ і по кутові координаті по замкнутому колу, отримуємо функцію Гріна для нескінченно протяжної циліндричної поверхні, що проходить перпендикулярно осі r через точку ξ [1, с. 347], [2, с. 255].

$$\varphi(r, t) = \frac{q}{c \cdot \rho \cdot 2 \cdot a \cdot t} \cdot \xi \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + \xi^2}{4 \cdot a \cdot t}\right) \cdot I_0\left(\frac{r \cdot \xi}{2 \cdot a \cdot t}\right), \quad (4.19)$$

де I_0 - видозмінена функція Бесселя першого роду нульового порядку: [1., С.578], [6., С.29].

$$I_0(x) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1 \cdot 2}\right)^2 \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right)^2 \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{x}{2}\right)^8 + \dots$$

$q \left[\frac{Дж}{M^2} \right]$ - щільність енергії, що миттєво виділяється по всій циліндричній поверхні.

На рис. 4.4 показано взаємне розміщення циліндричної поверхні тепловиділення і розрахункової точки $г$. Ізотермічні поверхні, в даному випадку, розміщуються у вигляді циліндричних трубок симетрично осі z .

Продовжуючи рух в напрямку збільшення розмірності простору, проведемо через точку тепловиділення (ξ, η, ζ) сферичну поверхню з центром координат. Інтегрування функції (4.17) в сферичних координатах дає вираз [1., С.347], [2., С.255]:

$$\varphi(r, t) = \frac{q}{2 \cdot c \cdot \rho \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot t}} \cdot \frac{\xi}{r} \cdot \left\{ \exp \left[-\frac{(r - \xi)^2}{4 \cdot a \cdot t} \right] - \exp \left[-\frac{(r + \xi)^2}{4 \cdot a \cdot t} \right] \right\}, \quad (4.20)$$

де щільність енергії q $[\text{Дж} / \text{м}^2]$ - є повна енергія, що миттєво виділилася на поверхні сфери.

Для джерела в заданій точці, щільність енергії q буде виражена в $[\text{Дж} / \text{м}^3]$, так як вся енергія виділяється в нескінченно малому об'ємі $dv = d\xi d\eta d\zeta$.

Проаналізуємо фізичні явища, що описуються функціями Гріна. Для кожної із розглянутих поверхонь (площина, циліндр, сфера, точка) в момент часу $t = 0$ температура $\varphi(x, 0)$ буде прагнути до нескінченності. Це впливає з математичних виразів для цих функцій. Точка $t = 0$ є точкою сингулярності функцій Гріна. Фізично, миттєве виділення енергії принципіально неможливо. Для цього потрібно нескінченно велика потужність. Тому, в реальних фізичних умовах, сингулярність буде зглажена кінцевою, нехай, дуже, великою швидкістю тепловиділення. Навіть під час вибуху атомної бомби, швидкість виділення енергії не є нескінченно великою, так як обмежується швидкістю ланцюгової реакції і другими фізичними факторами.

Проте, якщо виділення тепла минуло дуже швидко, то температурний фронт (плоский, циліндричний, або сферический) почне розповсюджуватися від зони тепловиділення в оточуючий простір і з часом згасає. В момент виділення тепла температура в оточуючому просторі дорівнює температурі навколишнього середовища (умовно нулю). По мірі розповсюдження температурного фронту, температура в кожній точці простору буде наростати, але в певний момент часу цей процес досягне максимуму, після чого температура буде спадати до колишнього значення (до нуля).

Привірюючи похідні функції Гріна по часу до нуля, знаходимо час досягнення максимуму температури в кожній точці простору. Для всіх функцій (4.12) – (4.14) ця

$$\text{величина дорівнює } t_{\max} = \frac{r^2}{6 \cdot a}, \text{ де } a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}.$$

Точка сингулярності досить часто зустрічається в фізичних явищах і процесах. Так, напруженість електричного поля точкового заряду, гравітаційна сила точкової маси, напруженість магнітного поля нескінченно тонкої нитки струму, прагнуть до нескінченності, по мірі наближення до джерел цих полів. Навіть Всесвіт, згідно теорії Великого Вибуху, виник з сингулярної точки.

Інтегрування функції Гріна по заданому об'єму розподілення функції тепловиділення $q(v)$ дозволяє отримувати рішення задачі теплопровідності в нестационарному режимі. Задача досить непроста. Трудності обчислення інтегралів залежать від геометрії і

конструктивних розмірів конкретних фізичних тіл. Ще більші труднощі виникають при побудові функцій Гріна з врахуванням крайових умов.

Опустимося з безмежних просторів Всесвіту на нашу Землю і розглянемо методи інтегрування рівнянь (4.12) – (4.14) в фізичних тілах найпростіших геометричних форм за допомогою функції Гріна.

4.5. Нестационарний режим в фізичних тілах найпростіших геометричних форм необмежених розмірів

В загальному випадку, розподіл температури в стрижні необмеженої довжини визначається заданим початковим розподілом температури $T(x, 0) = f(\xi)$ і функцією Гріна (4.18) через інтеграл

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \xi, t) \cdot f(\xi) \cdot \rho \cdot c \cdot d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot t}} \cdot \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4 \cdot a \cdot t}\right] \cdot d\xi. \quad (4.21)$$

Аналогічно, запишемо інтеграли для необмеженого циліндра:

$$T(r, t) = \int_0^{\infty} \varphi(r, \xi, t) \cdot f(\xi) \cdot \rho \cdot c \cdot d\xi = \int_0^{\infty} \frac{f(\xi) \cdot \xi}{2 \cdot a \cdot t} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4 \cdot a \cdot t}\right] \cdot I_0\left(\frac{r \cdot \xi}{2 \cdot a \cdot t}\right) \cdot d\xi. \quad (4.22)$$

І для необмеженого простору в сферичних координатах:

$$T(r, t) = \int_0^{\infty} \varphi(r, \xi, t) \cdot f(\xi) \cdot \rho \cdot c \cdot d\xi = \int_0^{\infty} \frac{f(\xi) \cdot \xi}{r \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot t}} \cdot \left\{ \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4 \cdot a \cdot t}\right] - \exp\left[-\frac{(x + \xi)^2}{4 \cdot a \cdot t}\right] \right\} \cdot d\xi. \quad (4.23)$$

Нехай, на відрізках необмеженого стрижня від x_1 до x_2 і необмежених по радіусу циліндра і кулі від r_1 до r_2 , задана температура $f(\xi) = T_0$. На всіх інших участках цих тіл $f(\xi) = 0$. Фізична сутність такої постановки задачі означає, що в необмеженому однорідному просторі в декартових координатах задана пластина товщиною $(x_2 - x_1)$, в циліндричних координатах соосно осі Z задана трубка товщиною $(r_2 - r_1)$, в сферичних координатах задана центральносиметрична сфера товщиною $(r_2 - r_1)$, при постійній температурі на них $f(\xi) = T_0$.

Починаючи з моменту часу $t = 0$, ці тіла остигають, віддаючи своє тепло відповідно своєї теплопровідності в необмежений лінійний, циліндричний і сферичний простори. Розподіл температури в таких задачах як раз і описується функціями Гріна через інтеграли (4.20) - (4.22). Отримати аналітичні вирази для цих інтегралів, навіть при $f(\xi) = T_0$,

дуже складно і трудоємно, а вираховувати їх - ще складніше. В роботі [2], наведено рішення різних задач з допомогою функції Гріна. Читач самостійно може оцінити їх можливості для подальшого практичного використання. В ті часи, коли пошуки рішення задач теплопровідності велися без допомоги ОЕМ, одержати аналітичний вираз для невідомої функції вже було значним вкладом в теорію теплопровідності.

В наш час, завдяки комп'ютерам, процеси обчислення інтегралів реалізуються набагато простіше. Запишемо розрахункові вирази для обчислення інтегралів виду (4.20) - (4.22) методом прямокутників. Для цього область задання функції $f(\xi) = T_0$

розділяємо на n інтервалів с кроком $\Delta\xi = (x_2 - x_1) / n$, або $\Delta\xi = (r_2 - r_1) / n$.

$\xi_i = x_1 + i \cdot \Delta\xi - 0,5 \cdot \Delta\xi$, або $\xi_i = r_1 + i \cdot \Delta\xi - 0,5 \cdot \Delta\xi$.

Розрахункові вирази набудуть виду:

Для стрижня
$$T(x,t) = \frac{\Delta\xi}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot t}} \cdot \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \exp\left[-\frac{(x - \xi_i)^2}{4 \cdot a \cdot t}\right]. \quad (4.24)$$

Для циліндра
$$T(r,t) = \frac{\Delta\xi}{2 \cdot a \cdot t} \cdot \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \xi_i \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi_i^2}{4 \cdot a \cdot t}\right] \cdot I_0\left(\frac{r \cdot \xi_i}{2 \cdot a \cdot t}\right). \quad (4.25)$$

Для кулі
$$T(r,t) = \frac{\Delta\xi}{r \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot t}} \cdot \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \xi_i \cdot \left\{ \exp\left[-\frac{(r - \xi_i)^2}{4 \cdot a \cdot t}\right] - \exp\left[-\frac{(r + \xi_i)^2}{4 \cdot a \cdot t}\right] \right\}. \quad (4.26)$$

Приклад 4.2. Розглянемо характер протікання нестационарних процесів в однорідному стрижні, циліндрі і кулі при наступних вихідних даних:

$$\lambda = 20 \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}} \right]; \quad c = 2400 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}} \right]; \quad \rho = 1200 \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right];$$

$$x_1 = 0,1 \text{ м}; \quad x_2 = 0,7 \text{ м}; \quad T_0 = 15 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad t_1 = 500 \text{ с}; \quad t_2 = 3000 \text{ с}.$$

Розрахунки по формулах (4.23) – (4.25) було виконано на комп'ютері по програмі, що написана в середовищі **QBASIC**. Текст цієї програми наведено в кінці розділу.

При $n = 1$, отримуємо розподіл функції Гріна в точці $\xi = 0,4$ м. Графіки залежності температури від координати x в заданий момент часу $T(x, t_1)$ і $T(x, t_2)$ наведені на рис. 4.5.

При $n = 10$, отримуємо модель процесу сумарної дії миттєвого тепловиділення в десяти рівномірно розподілених точках на відрізьку від x_1 до x_2 .

Приклад 4.3. Для наглядності ілюстрації графіками нестационарних процесів, змінимо в даній програмі деякі вихідні дані:

$$n = 10; \quad x_2 = 0,5 \text{ м}; \quad T_0 = 40^\circ\text{C}.$$

В результаті виконаних розрахунків, отримуємо розподіл температури при охолодженні нагрітих до температури $T_0 = 40^\circ\text{C}$ участків стрижня, циліндричної трубки і сфери. Графіки залежності розподілу температури від часу показані на рис. 4.6.

З наведених виразів видно, що функція $f(\xi)$ може змінюватися по довільному закону. Якщо $f(\xi) = T_0$, то T_0 можна винести за знак суми, а інтеграл (4.20) виражається аналітично.

$$F(x, t) = 0,5 \cdot T_0 \cdot \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x-x_1}{\sqrt{4 \cdot a \cdot t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-x_2}{\sqrt{4 \cdot a \cdot t}}\right) \right], \quad (4.27)$$

де $\operatorname{erf}(x) = \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\xi^2} \cdot d\xi$ - інтеграл Френеля, або функція помилок

[2., С.470]. Інтеграл Френеля не виражається через елементарні функції. Тому, використовуючи заміну змінної $x = -\xi^2$ і, інтегруючи почленно розкладання експоненти $\exp(x)$ в ряд Тейлора, отримаємо вираз:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2 \cdot k + 1}. \quad \text{Такий ряд сходиться при всіх кінцевих значеннях } x.$$

При $\xi \rightarrow \infty$, $\Phi(x)$ досить швидко прагне до границі

$$\operatorname{erf}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} \cdot d\xi = 1. \quad \text{Так, } \operatorname{erf}(2) = 0.9955747, \quad \operatorname{erf}(3) = 0.999999. \quad \text{При}$$

$\xi \rightarrow -\infty$, $\operatorname{erf}(-\infty) = -1$. На рис. 4.7 наведено графік функції $\operatorname{erf}(x)$.

Приклад 4.4. Маючи у розпорядженні аналітичне рішення задачі охолодження участка стрижня, порівняємо результати числових розрахунків розподілу температури по даним прикладу 4.2 і аналітичних розрахунків з використанням інтеграла Френеля. Порівняння результатів розрахунків наведено в табличній формі. Порівняння результатів аналітичного і числового інтегрування показує їх співпадіння з точністю до четвертої значущої цифри.

| X | t = 500 с | t = 3000 с | |
|-----|-----------|------------|--------|
| | | Φ(x) | Φ(x) |
| M | Φ(x) | n = 10 | n = 10 |
| 0 | 4,6 | 4,5 | 12,2 |
| 0,1 | 20,0 | 20,0 | 19,0 |
| 0,2 | 35,4 | 35,5 | 24,7 |
| 0,3 | 39,3 | 39,4 | 26,9 |
| 0,4 | 35,4 | 35,5 | 24,7 |
| 0,5 | 20,0 | 20,0 | 19,0 |
| 0,6 | 4,6 | 4,5 | 12,2 |
| 0,7 | 0,3 | 0,3 | 6,5 |
| 0,8 | 0,0 | 0,0 | 2,8 |
| 0,9 | 0,0 | 0,0 | 1,0 |

Нижче приводиться текст **QBASIC** – програми для обчислення інтеграла Френеля і побудови графіка залежності функції від аргумента $\text{erf} = \Phi(z)$.

Текст програми обчислення інтеграла Френеля.

```
SCREEN 12
REM Обчислення залежності інтеграла Френеля від z, erf = Φ(z).
WINDOW (0, 0)-(10, 6):
LINE (4, 0)-(4, 6), 1
FOR i = 1 TO 5: LINE (0, i)-(10, i), 1: NEXT i
FOR i = 0 TO 10 STEP 2: LINE (i, 0)-(i, 6), 1: LINE (i, 0)-(i, 6), 1: NEXT i
LINE (4, 0)-(4, 6), 7: LINE (0, 3)-(10, 3), 7: PRINT " z", " erf(z)"
FOR z = 0 TO 3 STEP .25: GOSUB 99: PRINT z, s
CIRCLE (2 * z + 4, 2 * s + 3), .03, 2: CIRCLE (-2 * z + 4, -2 * s + 3), .03, 2
NEXT z: FOR z = 0 TO 3 STEP .001: GOSUB 99:
CIRCLE (2 * z + 4, 2 * s + 3), .001, 2: CIRCLE (-2 * z + 4, -2 * s + 3), .001, 2 NEXT z:
STOP
99 p = ABS(z): s = p: IF p > 2.5 THEN GOTO 98
s1 = -p * p * p / 3: s = s + s1
FOR i = 2 TO 100: s1 = -s1 * p * p * (2 * i - 1) / (i * (2 * i + 1)): s = s + s1
NEXT i
s = 2 * s / SQR(3.141593)
98 IF p > 2.5 THEN s = 1
IF z < 0 THEN s = -s
RETURN
```

Функції Гріна і їх інтеграли – є часткове, або фундаментальне рішення неоднорідного диференційного рівняння теплопровідності. Проте, це тільки перший доданок. Для отримання повного рішення необхідно знайти другий доданок - загальне рішення відповідного однорідного диференційного рівняння, яке визначається крайовими умовами. На жаль, це найважча задача при розрахунках температурного режиму в нестационарному процесі. Проте, вона легко розв'язується методом кінцевих елементів.

Для наглядності на рис.4.5 і 4.6 наведені графіки функцій Гріна в декартових, циліндричних і сферичних координатах. Нижче приводиться текст **QBASIC** - програми обчислення функції Гріна для стрижня і побудови графіків розподілу в часі температури прямокутного теплового імпульса вздовж стрижня.

Текст програми обчислення функції Грина для стрижня.

```
SCREEN 12: WINDOW (0, 0)-(10, 6)
```

```
ld = 20: c = 2400: ro = 1200: x1 = .1: x2 = .7: n = 8: T1 = 40: a = ld / (c * ro)
```

```
LINE (10 * x1, 0)-(10 * x1, 6), 1: LINE (10 * x2, 0)-(10 * x2, 6), 1
```

```
LINE (0, 3)-(10, 3), 1: LINE (0, 4)-(10, 4), 1: LINE (0, 5)-(10, 5), 1
```

```
LINE (0, 2)-(10, 2), 1: LINE (0, 1)-(10, 1), 7
```

```
FOR x = 0 TO 1 STEP .0001
```

```
IF x < x1 THEN CIRCLE (10 * x, 1), .02, 7
```

```
IF x > x2 THEN CIRCLE (10 * x, 1), .02, 7
```

```
IF x > x1 AND x < x2 THEN CIRCLE (10 * x, 5), .02, 7
```

```
NEXT x
```

```
FOR x = 0 TO 1 STEP .0001: CIRCLE (10 * x1, 4 * x + 1), .02, 7
```

```
CIRCLE (10 * x2, 4 * x + 1), .02, 7: NEXT x
```

```
REM Числове інтегрування функції Гріна
```

```
REM для стрижня методом прямокутників ( n = 8 ).
```

```
n1 = 1: dx = (x2 - x1) / n
```

```
FOR t = 500 TO 26000 STEP 1000
```

```
FOR x = 0 TO 1 STEP .0001: s = 0
```

```
FOR i = 1 TO n: eps = x1 + i * dx - .5 * dx:
```

```
f1 = EXP(-(x - eps) * (x - eps) * .25 / (a * t))
```

```
f = T1 * .5 * f1 * dx / SQR(3.141593 * a * t): s = s + f: NEXT i
```

```
CIRCLE (10 * x, .1 * s + 1), .001, n1: NEXT x: n1 = n1 + 1: NEXT t
```

```
REM Аналітичне обчислення функції Гріна
```

```
REM з використанням інтеграла Френеля.
```

```
n1 = 1: FOR t = 500 TO 6000 STEP 1000
```

```
FOR x = 0 TO 1 STEP .0001: z = .5 * (x - x1) / SQR(a * t): GOSUB 99
```

```
ss = s: z = .5 * (x - x2) / SQR(a * t): GOSUB 99: sp = s: f = T1 * (ss - sp) / 2
```

```
CIRCLE (10 * x, .1 * f + 1), .01, n1: NEXT x: n1 = n1 + 1: NEXT t: STOP
```

```
99 p = ABS(z): s = p: IF p > 2.5 THEN GOTO 98
```

```
s1 = -p * p * p / 3: s = s + s1
```

```
FOR i = 2 TO 100: s1 = -s1 * p * p * (2 * i - 1) / (i * (2 * i + 1)): s = s + s1
```

```
NEXT i
```

```
s = 2 * s / SQR(3.141593)
```

```
98 IF p > 2.5 THEN s = 1
```

```
IF z < 0 THEN s = -s
```

```
RETURN
```

4.6. Застосування метода кінцевих елементів в розрахунках нестационарних температурних процесів

Для порівняння, співставимо диференційне рівняння теплопровідності стаціонарного і нестационарного режимів. Вони відрізняються тим, що рівняння для нестационарного режиму мають додатковий доданок, з похідною невідомої функції в часі. Як було показано в главі 1, диференційному рівнянню виду $\frac{d}{dx}(\lambda \cdot \frac{dT}{dx}) = -q(x) - \rho \cdot c \cdot \frac{dT}{dt}$, без доданку

$\rho \cdot c \cdot \frac{dT}{dt}$ відповідає кінцевоелементне рівняння виду $[A] \cdot \{T\} = \{B\}$, де компоненти матриць коефіцієнтів $[A]$ і вільних членів $\{B\}$ вираховуються через координатні функції

$$a_{ij}^3 = \lambda_n \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} \cdot dx, \quad b_i = \int_{x_1}^{x_2} N_i \cdot q_k(x) \cdot dx.$$

Згідно теоретичним основам метода кінцевих елементів, рівняння, що має похідну в часі $\rho \cdot c \cdot \frac{dT}{dt}$ з використанням координатних функцій перетворюється в наступну систему

лінійних диференційних рівнянь відносно функції $\{T(t)\}$ в вузлах апроксимації:

$$[A] \cdot \{T(t)\} = \{B\} - [C] \cdot \left\{ \frac{dT(t)}{dt} \right\}, \text{ де компоненти матриці теплоємностей } c_{ij}^3 = \rho_k \cdot c_k$$

$$\cdot \int_{x_1}^{x_2} N_i \cdot N_j \cdot dx. \text{ Для зручності інтегрування компонентів матриці теплоємностей, ще раз}$$

запишемо вирази для координатних функцій при лінійній апроксимації:

$$N_1(\xi) = 0,5 \cdot (1 - \xi); \quad N_2(\xi) = 0,5 \cdot (1 + \xi).$$

Виконуючи інтегрування, отримуємо компоненти підматриць теплоємностей для k -того кінцевого елемента при лінійній апроксимації.

$$c_{11}^3 = c_{22}^3 = 0,5 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{3} \cdot 2; \quad c_{12}^3 = c_{21}^3 = 0,5 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{3} \cdot 1.$$

Для кусочно-однорідного стрижня компоненти матриць $[A]$ і $[B]$ вираховуються по вже отриманих в першій главі формулах:

$$a_{ij}^3 = (-1)^{(i+j)} \cdot \lambda_k / (x_{k+1} - x_k), \quad b_i = 0,5 \cdot q_i \cdot (x_{k+1} - x_k).$$

При квадратичній апроксимації:

$$N_1(\xi) = 0,5 \cdot (\xi^2 - \xi); \quad N_2(\xi) = 1 - \xi^2; \quad N_3(\xi) = 0,5 \cdot (\xi^2 + \xi).$$

Після інтегрування отримуємо:

$$c_{11}^3 = c_{33}^3 = 0,5 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{15} \cdot 4; \quad c_{12}^3 = c_{21}^3 = 0,5 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{3} \cdot 2;$$

$$c^3_{13} = c^3_{31} = -0,5 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{15} \cdot 1; \quad c^3_{32} = c^3_{23} = 0,5 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{3} \cdot 2;$$

$$c^3_{22} = 0,5 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{15} \cdot 16.$$

По аналогії з рівнянням (4.10) замінемо $\frac{dT}{dt} = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta t}$ і $T = \frac{T_{i+1} + T_i}{2}$.

Після тождесних математичних перетворень, аналогічно рівнянню (4.11), отримуємо в матричному вигляді

$$\left[\frac{1}{2} \cdot [A] + \frac{1}{\Delta t} \cdot [C] \right] \cdot \{T_{i+1}\} = \{B\} + \left[\frac{1}{\Delta t} \cdot [C] - \frac{1}{2} \cdot [A] \right] \cdot \{T_i\}. \quad (4.28)$$

Отже, ми розглянули числовий алгоритм розрахунку нестационарного температурного процесу методом кінцевих елементів в декартових координатах при лінійній і квадратичній апроксимації функції $T(x,t)$ по координаті x і при ступінчатій апроксимації цієї функції в часі t . Рекурентна формула ітераційного процесу (4.28) в літературі називається схема Кранка-Ніколсона [8, С.369], 4, С.206].

Для поширення цього алгоритму на циліндричні і сферичні координати необхідно в цих координатах виконати інтегрування компонентів підматриць теплоємностей c^3_{ij} , так як відповідні компоненти підматриць джерел тепла b_i і теплопровідностей a^3_{ij} вже отримані в главах 2 і 3, при розв'язуванні задач для стаціонарних режимів.

По аналогії, запишемо вирази для компонентів матриць теплоємностей. В циліндричних координатах

$$c^3_{ij} = \rho_k \cdot c_k \cdot \int_{r_1}^{r_2} N_i \cdot N_j \cdot r \cdot dr. \quad (4.29)$$

Підставляючи в (4.28) вирази для функцій $N_i(\xi)$, $N_j(\xi)$, $r(\xi) = \frac{r_{k+1} - r_k}{2} \cdot \xi + \frac{r_{k+1} + r_k}{2}$ після інтегрування, отримуємо вирази для компонентів матриць теплоємностей c^3_{ij} в циліндричних координатах.

При лінійній апроксимації:

$$c^3_{11} = 0,5 \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{6} \cdot (r_{k+1} + 3 \cdot r_k); \quad c^3_{22} = 0,5 \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{6} \cdot (3 \cdot r_{k+1} + r_k);$$

$$c^3_{12} = c^3_{21} = -0,5 \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{6} \cdot (r_{k+1} + r_k).$$

При квадратичній апроксимації:

$$c^3_{11} = 0,5 \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{30} \cdot (r_{k+1} + 7 \cdot r_k); \quad c^3_{33} = 0,5 \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{30} \cdot (7 \cdot r_{k+1} + r_k);$$

$$c^3_{22} = 0,5 \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{16 \cdot \rho_k \cdot c_k}{30} \cdot (r_{k+1} + r_k); \quad c^3_{12} = c^3_{21} = 0,5 \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{4 \cdot \rho_k \cdot c_k}{30} \cdot r_k;$$

$$c^3_{13} = c^3_{31} = -0,5 \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{30} \cdot (r_{k+1} + r_k);$$

$$c_{23}^3 = c_{32}^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{4 \cdot \rho_k \cdot c_k}{30} \cdot r_{k+1}.$$

В сферичних координатах $c_{ij}^3 = \rho_k \cdot c_k \cdot \int_{r_1}^{r_2} N_i \cdot N_j \cdot r^2 \cdot dr.$ (4.30)

При лінійній апроксимації після підстановки $r^2(\xi)$ в (4.30)

$$c_{11}^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{15} \cdot (r_{k+1}^2 + 6 \cdot r_k^2 + 3 \cdot r_{k+1} \cdot r_k);$$

$$c_{22}^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{15} \cdot (6 \cdot r_{k+1}^2 + r_k^2 + 3 \cdot r_{k+1} \cdot r_k);$$

$$c_{12}^3 = c_{21}^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{30} \cdot (3 \cdot r_{k+1}^2 + 3 \cdot r_k^2 + 4 \cdot r_{k+1} \cdot r_k). \quad (4.31)$$

При квадратичній апроксимації і підстановки $r^2(\xi)$ в (4.30) з врахуванням виразів для квадратичних координатних функцій, отримуємо наступні розрахункові формули для обчислення компонентів матриць теплоємностей кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь:

$$c_{11}^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{1680} \cdot (16 \cdot r_{k+1}^2 + 352 \cdot r_k^2 + 80 \cdot r_{k+1} \cdot r_k);$$

$$c_{12}^3 = c_{21}^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{1680} \cdot (-32 \cdot r_{k+1}^2 + 192 \cdot r_k^2 + 64 \cdot r_{k+1} \cdot r_k);$$

$$c_{13}^3 = c_{31}^3 = -0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{1680} \cdot (40 \cdot r_{k+1}^2 + 40 \cdot r_k^2 + 32 \cdot r_{k+1} \cdot r_k);$$

$$c_{22}^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{1680} \cdot (512 \cdot r_{k+1}^2 + 512 \cdot r_k^2 + 768 \cdot r_{k+1} \cdot r_k);$$

$$c_{23}^3 = c_{32}^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{1680} \cdot (192 \cdot r_{k+1}^2 - 32 \cdot r_k^2 + 64 \cdot r_{k+1} \cdot r_k);$$

$$c_{33}^3 = 0,5 \cdot (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k) \cdot \frac{\rho_k \cdot c_k}{1680} \cdot (352 \cdot r_{k+1}^2 + 16 \cdot r_k^2 + 80 \cdot r_{k+1} \cdot r_k). \quad (4.32)$$

Таким чином, маючи в своєму розпорядженні повний набір розрахункових виразів для компонентів матриць теплоємностей в декартових, циліндричних і сферичних координатах при лінійній і квадратичній апроксимаціях невідомої функції, можна приступити до програмування відповідних математичних моделей на комп'ютері.

Цим питанням присвячена наступна глава.

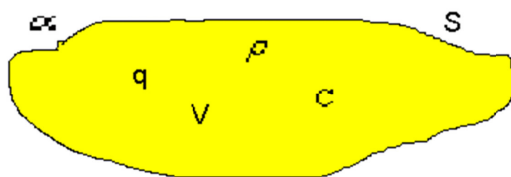


Рис. 4.1. Однорідне тіло довільної геометричної форми

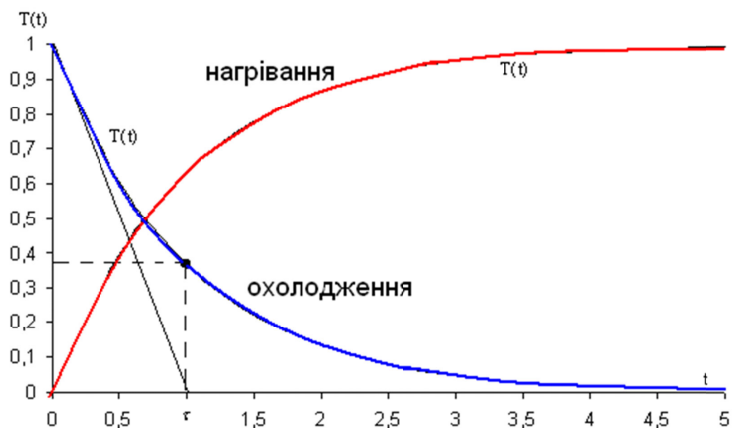


Рис. 4.2. Графіки залежності температури в часі при нагріванні і охолодженні однорідного тіла

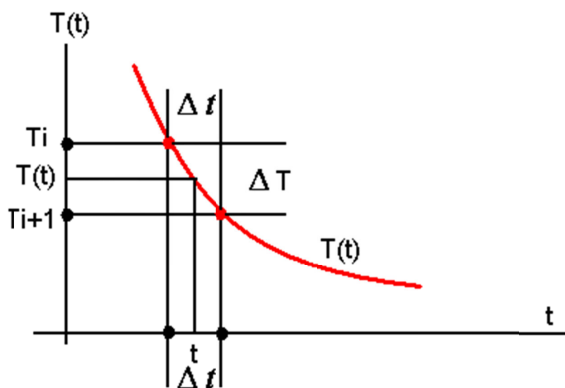


Рис. 4.3. Заміна похідної відношенням приросту функції до приросту аргумента

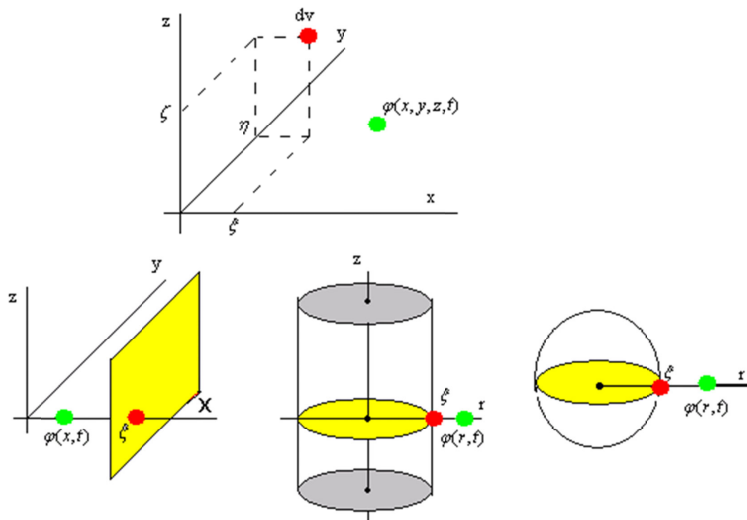


Рис. 4.4. Взаємне розміщення розрахункової точки і точки виділення тепла в різних системах координат

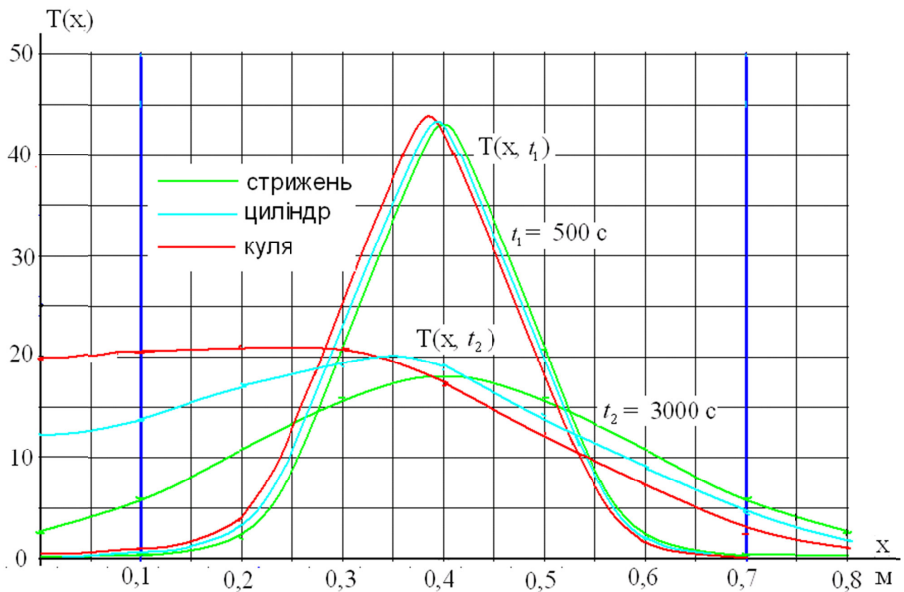


Рис. 4.5. Розподіл функції Гріна для стрижня, циліндра і кулі при миттєвому виділенні тепла в точці $\xi = 0,4$ м

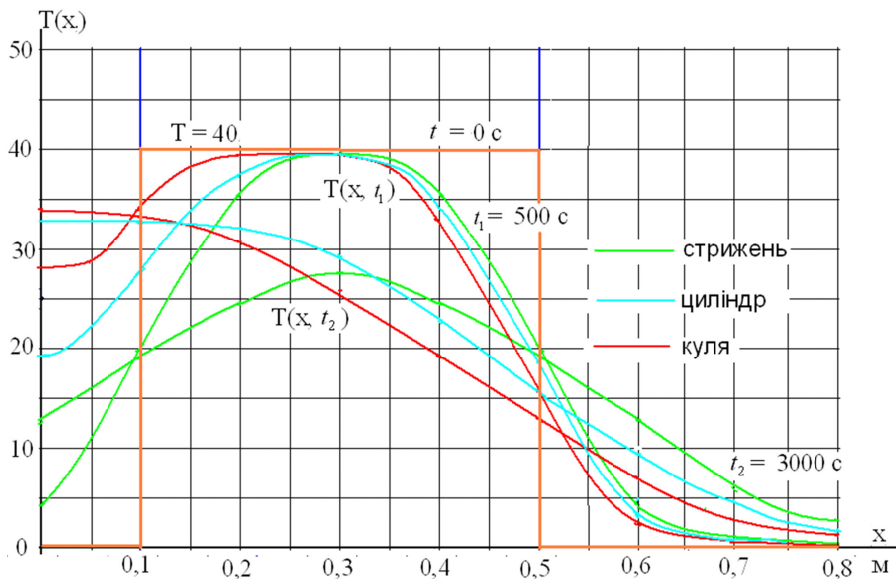


Рис. 4.6. Розподіл функції Гріна для стрижня, циліндра і кулі при стигненні прямокутного імпульсу температури $T = 40^\circ\text{C}$

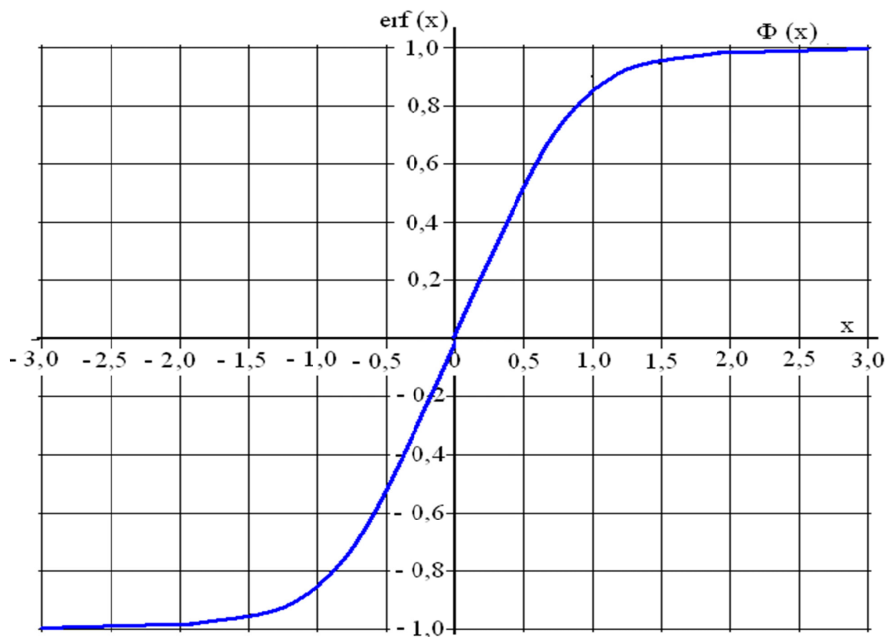


Рис. 4.7. Графік функції $\Phi(x)$, або інтеграла Френеля $\text{erf}(x)$.

Глава 5. ПРОГРАМУВАННЯ НА КОМП'ЮТЕРІ ЗАДАЧ РОЗРАХУНКІВ ОДНОМІРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ РЕЖИМІВ

5.1. Програма розрахунків одномірних стаціонарних режимів

В даному розділі розглянемо програму у середі QBASIC для розрахунків температурних режимів в кусочно-однорідних середовищах для стрижня, циліндра і кулі. Математичні рішення цих задач наведені в розділах 1.7, 2.4 і 3.3, відповідно. Кожне рішення представимо в якості окремої підпрограми.

Для стрижня рішення задачі в межах i -го однорідного участка має вигляд:

$$T_i(x) = -\frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{q_i \cdot x^2}{2} + A_i \cdot x + B_i.$$

Обчислення постійних інтегрування A_i і B_i оформимо у вигляді підпрограми **SUB 300**.

300 REM: Підпрограма обчислення постійних

REM: інтегрування для кусочно-однорідного стрижня.

a(1) = qe(1) * xb(1) / ex(1)

FOR i = 2 TO n: a(i) = (qe(i) - qe(i - 1)) * xb(i) / ex(i) + a(i - 1) * ex(i - 1) / ex(i)

NEXT i

S = 0: FOR i = 1 TO n : S = S + qe(i) * (xb(i + 1) - xb(i)): NEXT i

t(n + 1) = S / al + t0

b(n) = t(n + 1) - a(n) * xb(n + 1) + .5 * qe(n) * xb(n + 1) * xb(n + 1) / ex(n)

FOR i = n TO 2 STEP -1: S1 = xb(i) * (a(i) - a(i - 1)) + b(i):

b(i - 1) = .5 * xb(i) * xb(i) * (qe(i - 1) / ex(i - 1) - qe(i) / ex(i)) + S1: NEXT i

RETURN

Для циліндра, що складається з однорідних соосних трубок, рішення задачі для i -тої

трубки має вигляд: $T_i(r) = -\frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{q_i \cdot r^2}{4} + A_i \cdot \ln(r) + B_i$. Обчислення постійних

інтегрування A_i і B_i оформимо у вигляді підпрограми **SUB 400**.

400 REM Підпрограма обчислення постійних інтегрування

REM для кусочно-однорідного циліндра.

a(1) = 0: FOR i = 2 TO n

a(i) = .5 * (qe(i) - qe(i - 1)) * xb(i) * xb(i) / ex(i) + a(i - 1) * ex(i - 1) / ex(i)

NEXT i: S = 0: FOR i = 1 TO n

S = S + 3.141593 * qe(i) * (xb(i + 1) * xb(i + 1) - xb(i) * xb(i)): NEXT i

t(n + 1) = S / (2 * 3.141593 * al * xb(n + 1)) + t0

b(n) = t(n+1) - a(n) * LOG(xb(n+1)) + .25 * qe(n) * xb(n+1)*xb(n+1)/ex(n)

FOR i = n TO 2 STEP -1: S1 = LOG(xb(i)) * (a(i) - a(i - 1)) + b(i)

$b(i - 1) = .25 * xb(i) * xb(i) * (qe(i - 1) / ex(i - 1) - qe(i) / ex(i)) + S1$: NEXT i
 RETURN

Аналогічно, запишемо рішення задачі для кусочно-однорідної кулі

$$T_i(r) = -\frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{q_i \cdot r^2}{6} + \frac{A_i}{r} + B_i. \text{ Обчислення постійних інтегрування } A_i \text{ і } B_i \text{ оформимо у}$$

вигляді підпрограми **SUB 500**.

500 REM: Підпрограма обчислення постійних інтегрування

REM: для кусочно-однорідної кулі.

$a(1) = 0$: FOR i = 2 TO n: $S1 = a(i - 1) * ex(i - 1) / ex(i)$

$a(i) = -(qe(i) - qe(i - 1)) * xb(i) * xb(i) * xb(i) / (3 * ex(i)) + S1$: NEXT i

$S = 0$: FOR i = 1 TO n

$S = S + qe(i) * (xb(i + 1) * xb(i + 1) * xb(i + 1) - xb(i) * xb(i) * xb(i))$: NEXT i

$t(n + 1) = S / (3 * a1 * xb(n + 1) * xb(n + 1)) + t0$

$b(n) = t(n + 1) - a(n) / xb(n + 1) + qe(n) * xb(n + 1) * xb(n + 1) / (6 * ex(n))$

FOR i = n TO 2 STEP -1: $S1 = (a(i) - a(i - 1)) / xb(i) + b(i)$

$b(i - 1) = xb(i) * xb(i) * (qe(i - 1) / ex(i - 1) - qe(i) / ex(i)) / 6 + S1$: NEXT i

RETURN

Маючи в своєму розпорядженні підпрограми розрахунків постійних інтегрування, приступимо до складання самої програми розрахунків температурних режимів в кусочно-однорідних середовищах.

5.2. Текст QBASIC-програми розрахунків стаціонарних температурних режимів в кусочно-однорідних середовищах

SCREEN 12

DIM xb(31): DIM qe(30): DIM ex(30): DIM a(100): DIM b(100): DIM t(31)

WINDOW (0, 0)-(10, 6): LINE (0, 0)-(0, 6), 1: LINE (0, 1)-(10, 1), 1

REM: Вихідні дані. Початок.

ip= 500: n = 5: R = .02: ld = .05: al= 10: q0 = 20000: t0 = 20

d = R / n : xb(1) = 0

FOR i = 1 TO n: qe(i) = q0: ex(i) = ld: xb(i + 1) = xb(i) + d: NEXT i

qe(n-2)=100000

REM: Вихідні дані. Закінчення.

REM: Обчислення постійних інтегрування.

REM: Постійні інтегрування для стрижня.

IF ip=300 THEN GOSUB 300:

```

REM: Постійні інтегрування для циліндра.
IF ip=400 THEN GOSUB 400:
REM: Постійні інтегрування для кулі.
IF ip = 500 THEN GOSUB 500
REM: Обчислення значень температури
REM: на межах розділення однорідних середовищ.
FOR i = 1 TO n: qxb=-qe(i) * xb(i) * xb(i)
IF ip = 300 THEN t(i) = qxb / (2*ex(i)) + a(i) * xb(i) + b(i)
IF ip = 400 AND i > 1 THEN t(i) = qxb / (4*ex(i)) + a(i) * LOG(xb(i)) + b(i)
IF ip = 400 AND i = 1 THEN t(i) = qxb / (4*ex(i)) + b(i)
IF ip = 500 AND i > 1 THEN t(i) = qxb / (6*ex(i)) + a(i)/xb(i) + b(i)
IF ip = 500 AND i = 1 THEN t(i) = qxb / (6 * ex(i)) + b(i)
NEXT i
S1 = a(n) * xb(n + 1) + b(n)
IF ip = 300 THEN t(n + 1) = -qe(n) * xb(n + 1) * xb(n + 1) / (2 * ex(n)) + S1
S1 = a(n) * LOG(xb(n + 1)) + b(n)
IF ip = 400 THEN t(n + 1) = -qe(n) * xb(n + 1) * xb(n + 1) / (4 * ex(n)) + S1
S1 = a(n) / xb(n + 1) + b(n)
IF ip = 500 THEN t(n + 1) = -qe(n) * xb(n + 1) * xb(n + 1) / (6 * ex(n)) + S1
REM: Друкування результатів розрахунків.
PRINT "i", "xb(i)", "t(i)": FOR i = 1 TO n + 1
PRINT i, xb(i), t(i): CIRCLE (500 * xb(i), 1 + t(i) / 40), .04, 7: NEXT i
FOR i = 1 TO n: FOR z = xb(i) TO xb(i + 1) STEP .00001
IF ip = 300 THEN tt = -qe(i) * z * z / (2 * ex(i)) + a(i) * z + b(i)
IF ip = 400 AND z > 0 THEN tt = -qe(i) * z * z / (4 * ex(i)) + a(i) * LOG(z) + b(i)
IF ip = 500 AND z > 0 THEN tt = -qe(i) * z * z / (6 * ex(i)) + a(i) / z + b(i)
IF ip = 300 THEN CIRCLE (500 * z, 1 + (tt) / 40), .01, 2
IF ip = 400 THEN CIRCLE (500 * z, 1 + (tt) / 40), .01, 3
IF ip = 500 THEN CIRCLE (500 * z, 1 + (tt) / 40), .01, 6
NEXT z: NEXT i: STOP
300 REM: Підпрограма обчислення постійних
    REM: інтегрування для кусочно-однорідного стрижня.
a(1) = qe(1) * xb(1) / ex(1) : FOR i = 2 TO n
a(i) = (qe(i) - qe(i - 1)) * xb(i) / ex(i) + a(i - 1) * ex(i - 1) / ex(i) : NEXT i
S = 0: FOR i = 1 TO n : S = S + qe(i) * (xb(i + 1) - xb(i)): NEXT i
t(n + 1) = S / al + t0
b(n) = t(n + 1) - a(n) * xb(n + 1) + .5 * qe(n) * xb(n + 1) * xb(n + 1) / ex(n)
FOR i = n TO 2 STEP -1: S1 = xb(i) * (a(i) - a(i - 1)) + b(i):
b(i - 1) = .5 * xb(i) * xb(i) * (qe(i - 1) / ex(i - 1) - qe(i) / ex(i)) + S1: NEXT i

```

RETURN

400 REM Підпрограма обчислення постійних

REM інтегрування для кусочно-однорідного циліндра.

a(1) = 0: FOR i = 2 TO n

a(i) = .5 * (qe(i) - qe(i - 1)) * xb(i) * xb(i) / ex(i) + a(i - 1) * ex(i - 1) / ex(i)

NEXT i

S = 0: FOR i = 1 TO n

S = S + 3.141593 * qe(i) * (xb(i + 1) * xb(i + 1) - xb(i) * xb(i)): NEXT i

t(n + 1) = S / (2 * 3.141593 * al * xb(n + 1)) + t0

b(n) = t(n+1) - a(n) * LOG(xb(n+1)) + .25 * qe(n) * xb(n+1)*xb(n+1)/ex(n)

FOR i = n TO 2 STEP -1: S1 = LOG(xb(i)) * (a(i) - a(i - 1)) + b(i)

b(i - 1) = .25 * xb(i) * xb(i) * (qe(i - 1) / ex(i - 1) - qe(i) / ex(i)) + S1: NEXT i

RETURN

500 REM: Підпрограма обчислення постійних

REM: інтегрування для кусочно-однорідної кулі.

a(1) = 0: FOR i = 2 TO n: S1 = a(i - 1) * ex(i - 1) / ex(i)

a(i) = -(qe(i) - qe(i - 1)) * xb(i) * xb(i) * xb(i) / (3 * ex(i)) + S1: NEXT i

S = 0: FOR i = 1 TO n

S = S + qe(i) * (xb(i + 1) * xb(i + 1) * xb(i + 1) - xb(i) * xb(i) * xb(i)): NEXT i

t(n + 1) = S / (3 * al * xb(n + 1) * xb(n + 1)) + t0

b(n) = t(n + 1) - a(n) / xb(n + 1) + qe(n) * xb(n + 1) * xb(n + 1) / (6 * ex(n))

FOR i = n TO 2 STEP -1: S1 = (a(i) - a(i - 1)) / xb(i) + b(i)

b(i - 1) = xb(i) * xb(i) * (qe(i - 1) / ex(i - 1) - qe(i) / ex(i)) / 6 + S1: NEXT i

RETURN

В даному розділі викладено найпростіший варіант програми розрахунків температурних режимів в кусочно-однорідних середовищах на базі аналітичного рішення задачі. Вхідними даними для цієї програми є

наступні величини:

ip - ознака задачі. При ip=300 розв'язується задача для стрижня,

при ip=400 – для циліндра,

при ip=500 – для кулі,

n - число однорідних участків,

R - зовнішній радіус циліндра, або кулі. Для стрижня - його довжина,

t0 - температура навколишнього середовища,

ld - теплопровідність матеріалу,

q0 - потужність тепловиділення.

Заданий набір вихідних даних прийнято для спрощення структури програми. Практично, він відповідає абсолютно однорідному тілу. Але в програмі, кожне тіло розділюється на рівномірні частки i в подальшому задача розв'язується як кусочно-однорідна. Це дає можливість користувачу програми змінити структуру вихідних даних i , у випадку складнішої задачі, самостійно задавати масиви теплофізичних параметрів на частках:

$x_b(i)$ - координати меж частків;

$e_x(i)$ - теплопровідність частків;

$q_e(i)$ - щільність тепловиділення в межах участка.

При цьому буде реалізовано варіант вихідних даних, відповідаючий задачі користувача програми.

Аналогічно, можна поступати і з виведенням на екран результатів розрахунків. В запропонованому варіанті програми, на екран виводяться:

i - номери однорідних частків;

$x_b(i)$ - координати меж частків;

$t(i)$ - значення температури на межах частків.

Застосовуючи наведені вище формули для $T_i(x)$, користувач програми може самостійно розробляти другі варіанти виводу результатів розрахунків, в тому числі, збереження графіків, або таблиць у вигляді окремих файлів.

Задаючи різні значення ознаки **ip** , при збереженні незмінними значення всіх інших вихідних даних, можна порівнювати температурні режими при різних конструктивних видах зразків.

Далі розглянемо програми розрахунків для складніших температурних процесів в нестационарних і в нелінійних режимах.

5.3. Загальні принципи складання комп'ютерних програм для розрахунків температурних процесів методом кінцевих елементів

Скласти єдину універсальну комп'ютерну програму для розрахунків температурних процесів в різних температурних режимах дуже складно і, практично, неможливо. Трудно наперед передбачити всі можливі варіанти постановки таких задач в різноманітних конструкціях дослідних зразків.

Проте, цілий ряд загальних принципів, що мають універсальний характер, зберігається. В даній главі об'єднаємо загальні принципи розв'язування одномірних задач в декартових, циліндричних і сферичних координатах. У всіх трьох постановках задач для

кусочно-однорідних середовищ є аналітичні рішення. Для середовищ з нелінійним розподілом потужності тепловиділення $q(x)$ в стаціонарному режимі раціонально використовувати метод кінцевих елементів, правда, в окремих випадках такі задачі мають аналітичні рішення. В нестационарних режимах аналітичні рішення відсутні. Розрахунки для нестационарного режиму можуть бути реалізовані на комп'ютері тільки чисельно, наприклад, з використанням метода кінцевих елементів. При цій реалізації окремі особливості математичних моделей виділимо в самостійні універсальні блоки. Загальну програму будемо складати з цих блоків. При цьому, слід дотримуватися тільки двох питань. Перше питання: *що задається на вході?* Друге питання: *що необхідно отримати на виході?*

Розглянемо загальні принципи складання комп'ютерних програм для моделювання стаціонарного і нестационарного температурних режимів. Першим кроком для кожної програми є введення вихідних даних. Спочатку необхідно задати геометричні розміри досліджуваних конструкцій. Далі, конструкцію слід розділити на однорідні частини, або кінцеві елементи з розподілом в них вузлів апроксимації. Це можуть бути кусочно-однорідні частини при аналітичному розв'язанні задачі, або кінцеві елементи з лінійною чи квадратичною апроксимацією невідомої функції. Після формування кусочно-однорідної структури і розподілу вузлів апроксимації рекомендується для контролю вивести введені вихідні дані на екран дисплея.

Для кожного кінцевого елемента необхідно задати потужність тепловиділення, теплопровідність, теплоємність і щільність матеріала. Для стаціонарного режиму задавати теплоємність і щільність матеріалу немає необхідності. Результати виконання процедур введення і виведення вихідних даних слід візуалізувати на екрані, наприклад, розфарбувати структуру кінцевих елементів різними кольорами, відповідно до їх теплофізичних властивостей. Якщо якийсь із елементів виявиться незафарбованим, то дані введені некоректно і неточність слід виправити.

Кінцевим результатом введення вихідних даних повинна бути геометрія структури, теплофізичні характеристики окремих частків, або кінцевих елементів, координати і номери вузлів апроксимації.

Після цього можна приступати до формування матриць коефіцієнтів і вільних членів системи кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь. Для нестационарного режиму паралельно з матрицею коефіцієнтів $[A]$ формується і матриця теплоємностей $[C]$. На виході з блоку формування матриць слід отримати величини:

nb – ширина стрічкової матриці коефіцієнтів $[A]$;

lb – число рівнянь, або ранг матриці коефіцієнтів $[A]$;

a(lb,nb) – масив компонентів матриці коефіцієнтів $[A]$;

br(lb) – вектор вільних членів матриці $[B]$;

c(lb,nb) – масив компонентів матриці теплоємностей $[C]$.

Надалі програмна реалізація процесу формування матриць системи кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь буде проілюстрована на окремих прикладах.

Після завершення процедур формування матриць коефіцієнтів і вільних членів, ці матриці необхідно доповнити крайовими умовами Ньютона, Неймана і Діріхле. Це також індивідуальні процедури. Реалізація їх обумовлена розподілом заданих крайових умов на поверхні конструкції. Для одномірних задач це лише два крайніх вузла. Для двомірних – це окремі частки границь.

Далі обчислювальний процес розгалужується у двох напрямках. Для стаціонарного режиму слідує рішення сформованої системи рівнянь $[A] \cdot \{T(t)\} = \{B\}$. Дана процедура оформлена в вигляді окремого блока під номером **100: REM** Підпрограма рішення системи рівнянь. На виході підпрограми **SUB 100** отримуємо масив **x(nb)**, в якому зберігаються результати рішення задачі розрахунків для стаціонарного температурного поля в заданій конструкції. Опис підпрограми **SUB 100** дано в наступному розділі.

Для нестационарного режиму необхідно сформувати матричне рівняння (4.27).

В середовищі **QBASIC** ці операції мають вигляд:

FOR i = 1 TO lb

FOR j = 1 TO nb

$ca(i, j) = (c(i, j) / dt - .5 * a(i, j))$ - вираховуємо матрицю $\left[\frac{1}{\Delta t} \cdot [C] - \frac{1}{2} \cdot [A] \right]$

$a(i, j) = (.5 * a(i, j) + c(i, j) / dt)$ - вираховуємо матрицю $\left[\frac{1}{2} \cdot [A] + \frac{1}{\Delta t} \cdot [C] \right]$

NEXT j: NEXT i

В масиві **ca(lb,nb)** при цьому будуть розміщені компоненти прямокутної матриці, яку в подальшому на кожному кроці ітераційного процесу буде необхідно перемножувати на вектор $\{T_i\}$ і підсумовувати з матрицею вільних членів $\{B\}$. Розгляду цих процедур також виділено самостійний розділ.

В масиві **a(lb,nb)**, де розміщувалися компоненти матриць коефіцієнтів системи кінцевоелементних рівнянь стаціонарного режиму, тепер будуть розміщуватися компоненти матриці коефіцієнтів системи рівнянь для ітераційної схеми Кранка-Ніколсона.

5.4. Розв'язування системи кінцевоелементних рівнянь

В розглянутих в перших трьох главах числових прикладах розрахунків стаціонарних температурних задач для розв'язування систем кінцевоелементних рівнянь всюди був застосований метод Гауса. Для кожного кінцевого елемента були обчислені компоненти підматриць коефіцієнтів і вільних членів кінцевоелементних рівнянь. Потім, ці підматриці були об'єднані в повну систему кінцевоелементних рівнянь з врахуванням крайових умов. Далі система рівнянь розв'язувалась шляхом послідовного виключення невідомих методом Гауса. При цьому, не приймалась до уваги дуже важлива особливість матриці коефіцієнтів системи кінцевоелементних рівнянь, а саме, її симетрична діагональна структура. В цьому не було необхідності, так як приклади мали чисто ілюстраційне призначення. Порядок систем рівнянь не перевищував п'яти невідомих. Методом Гауса ці рівняння розв'язувалися просто і наглядно. Не було необхідності враховувати також, якісь особливості матриці коефіцієнтів і ускладнювати обчислення при розв'язуванні рівнянь.

Проте, розв'язування практичних задач розрахунків температурних режимів в складних інженерних конструкціях, особливо в нелінійних і нестационарних, потребує раціонального використання ресурсів комп'ютера. Чим складніша конструкція, тим більшого об'єму оперативної пам'яті необхідно для зберігання і обробки кінцевоелементних матриць. Тому, врахування таких особливостей цих матриць, як симетрія і діагональна структура, дозволяє до мінімуму скоротити об'єм задіяної оперативної пам'яті комп'ютера і число арифметичних операцій при розв'язуванні систем рівнянь.

З врахуванням цих факторів, була розроблена підпрограма рішення системи алгебраїчних рівнянь, яка використовує тільки піддіагональні коефіцієнти і коефіцієнти головної діагоналі матриці $[A]$ прямокутної форми $a(lb, nb)$.

Підпрограма побудована на основі модифікації метода Гауса, з врахуванням симетрії матриці коефіцієнтів. Вона називається схема Холецького, або «метод квадратного кореня» [7., С.330]. Сутність ідеї полягає в тому, що симетрична прямокутна матриця $[A]$ розкладається на перемноження двох симетричних трикутних матриць: нижньотрикутної і верхньотрикутної, так зване LU – розкладання, з наступним обчисленням їх коефіцієнтів [8., С.232]. При цьому, компоненти трикутної матриці зберігаються в тіж самій прямокутній матриці $[A]$. Прямокутна матриця $[A]$ просто перетворюється в нижньотрикутну матрицю ширини nb . Додаткова матриця $x(nb)$, використовується для збереження строк матриці $[A]$ в процесі її перетворення в нижньотрикутну. Після завершення роботи підпрограми, в масиві $x(nb)$ зберігаються

результати рішення системи рівнянь. Сам алгоритм математичних перетворень дуже складний, тому його математичні викладки тут не приводяться. Далі надається повний текст самої підпрограми.

```

100 REM Розв'язування системи рівнянь.
m = nb: n = lb: FOR l = 1 TO n: IF a(l, m) <= 0 THEN PRINT " ERROR"
a(l, m) = SQR(a(l, m)): IF l = n THEN EXIT FOR
lp = l + 1: iu = l + m - 1: IF iu > n THEN iu = n
FOR i = lp TO iu: lh = l - i + m: a(i, lh) = a(i, lh) / a(l, m)
FOR k = lp TO i: kh = k - i + m: a(i, kh) = a(i, kh) - a(i, lh) * a(k, l - k + m)
NEXT k: NEXT i: NEXT l
FOR k = 1 TO n: s = -br(k)
IF k = 1 THEN GOTO 101
il = k - m + 1: IF il < 1 THEN il = 1
k1 = k - 1: FOR i = il TO k1: s = s - a(k, i - k + m) * x(i): NEXT i
101 x(k) = s / a(k, m): NEXT k
FOR kh = 1 TO n: k = n + 1 - kh: s = x(k): IF k = n THEN GOTO 102
iu = k + m - 1: IF iu > n THEN iu = n
k1 = k + 1: FOR i = k1 TO iu: s = s + a(i, k - i + m) * x(i): NEXT i
102 x(k) = -s / a(k, m): NEXT kh
RETURN

```

Дана підпрограма є універсальною і може застосовуватися при розробці програм розрахунків температурних режимів в різних постановках задач. Це можуть бути розглянуті вище одномірні задачі, а також, двумірні задачі, які будуть розглянуті далі. Для того, щоб скористатися цією підпрограмою, достатньо сформувати матриці $[A]$, $\{B\}$, задати ширину стрічкової матриці nb і ранг матриці lb . Після чого викликати підпрограму оператором **GO SUB 100**. При цьому, в основній програмі слід уникати номерів строк **101** і **102**.

5.5. Перемноження матриць для формування вектора вільних членів схеми Кранка-Ніколсона

При складанні програм розрахунків нестационарних температурних режимів, в процесі ітераційного рішення алгебраїчного рівняння (4.27), доцільно виділити в окрему підпрограму операцію перемноження матриць $\left[\frac{1}{\Delta t} \cdot [C] - \frac{1}{2} \cdot [A] \right] \cdot \{T_i\}$. Вихідною інформацією для звертання до підпрограми **SUB 200** є матриці коефіцієнтів $[A]$, теплоємностей $[C]$ і вільних членів $\{B\}$, а також матриця $\{T_i\}$, що зберігається в масиві

x(nb). Різниця матриць $\left[\frac{1}{\Delta t} \cdot [C] - \frac{1}{2} \cdot [A] \right]$ зберігається в масиві ca(lb,nb). В результаті перемноження матриць $\left[\frac{1}{\Delta t} \cdot [C] - \frac{1}{2} \cdot [A] \right] \cdot \{T_i\}$ і додавання матриці {B} формується новий вектор {B}, який зберігається в масиві **br(lb)**.

Перші значення компонентів вектора $\{T_i\}$ (при $i = 1$), задають початок ітераційного процесу схеми Кранка-Ніколсона. Фізично, перші значення вектора $\{T_i\}$, є початковими умовами для нестационарного режиму. Вони можуть бути різними. Початкові умови можна задати просто як вихідні дані, наприклад, br(1) = 12: br(2) = 22: br(3) = 30: br(4) = 10: br(lb) = 2. Нульові початкові умови відповідають початку нестационарного процесу при температурі тіла, рівній температурі навколишнього середовища. Характер подальшого протікання процесу залежить від умов температурного режиму, в якому знаходиться фізичне тіло.

Якщо тепловий режим забезпечується внутрішніми джерелами виділення тепла і конвективним відведенням його з поверхні, то при нульових початкових умовах буде протікати процес нагрівання тіла від температури навколишнього середовища до температури сталого режиму.

Якщо тіло спочатку нагріли і залишили його стигнути при температурі навколишнього середовища, то початковими умовами будуть значення температури, до якої було нагріте дане тіло, а тепловий процес буде відповідати вистиганню тіла до температури навколишнього середовища. Всі ці процеси проходять автоматично, за допомогою ітераційної схеми Кранка-Ніколсона. Для її реалізації достатньо задати початкові умови, звернутися до підпрограми перемноження матриць **SUB 200**, що сформує новий вектор {B} в масиві br(lb) і після звернення до підпрограми **SUB 100** отримемо значення температури для другого кроку ітераційного процесу.

200 REM Перемноження матриць.

FOR i = 1 TO lb: FOR j = 1 TO lb: x(j) = 0: NEXT j

FOR j = 1 TO i: IF i <= nb THEN x(i - j + 1) = ca(i, nb - j + 1)

NEXT j: IF i > nb THEN GOTO 201

FOR j = 1 TO i: x(i - j + 1) = ca(i, nb - j + 1): NEXT j: GOTO 202

201 FOR j = i - nb + 1 TO i: x(j) = ca(i, nb - i + j): NEXT j

202 FOR j = 1 TO nb - 1: IF i + j < lb + 1 THEN x(i + j) = ca(i + j, nb - j)

NEXT j: s = 0: FOR j = 1 TO lb: s = s - br(j) * x(j): NEXT j: a(i, 1) = bx(i) + s

NEXT i: FOR i = 1 TO lb: br(i) = a(i, 1): NEXT i

RETURN

Підпрограма перемноження матриць **SUB 200** також універсальна, як і підпрограма рішення системи кінцевоелементних рівнянь **SUB 100**. Вона не потребує адаптацій до других програм. При її використанні в основній програмі необхідно уникати номерів строк **201** і **202**.

По завершенні розробки всієї програми, як для стаціонарного, так і для нестаціонарного режимів, необхідно передбачити блок візуалізації результатів розрахунків. Це можуть бути різні графіки розподілу температури по об'єму, або по поверхні конструкцій.

Вихідними даними для візуалізації результатів розрахунків є геометричні розміри конструкцій, координати вузлів апроксимації і значення температури в цих вузлах. Самим простим є виведення інформації на екран. Другі варіанти залежать від фантазії і натхнення автора програми.

5.6. Програма розрахунків одномірних нестаціонарних режимів

Розглянемо варіант програми розрахунків нестаціонарних температурних режимів в кусочно-однорідних середовищах при розв'язуванні задач методом кінцевих елементів. Ці задачі ідентичні задачам розрахунків стаціонарних температурних режимів, програма для яких наведена в розділі 5.1. Там в основу математичної моделі покладено аналітичне рішення. В даному варіанті, застосовується числове рішення, оскільки розглядається нестаціонарний режим, для якого можливості аналітичних методів вже вичерпані.

Вихідними даними для цієї програми є ті самі величини, що і для програми в розділі 5.1, доповнені величинами, відповідними нестаціонарному режиму, а саме:

ip - ознака задачі. При $ip=350$ розв'язується задача для стрижня;

при $ip=450$ - для циліндра;

при $ip=550$ - для кулі;

n - число однорідних участків, або кінцевих елементів;

R - зовнішній радіус циліндра чи кулі; для стрижня - його довжина;

t0 - температура навколишнього середовища;

ld - теплопровідність матеріалу;

q0 - щільність виділення тепла;

ps - щільність матеріалу;

cs - теплоємність матеріалу;

al1 - коефіцієнт конвекції на внутрішній поверхні тіла;

al2 - коефіцієнт конвекції на зовнішній поверхні тіла;

tn - початкова температура тіла, або початкові умови;

id - ознака присутності крайових умов Діріхле;

id=1 - крайові умови Діріхле задані на зовнішній поверхні;

id=0 - крайові умови Діріхле на зовнішній поверхні відсутні;

tg - температура на зовнішній поверхні тіла, або крайові умови;

dt - крок інтегрування в часі;

ml - число кроків інтегрування в часі для досягнення
сталого режиму.

Заданий набір вихідних даних прийнято для спрощення структури програми. Він забезпечує заповнення теплофізичними величинами по всім кінцевим елементам наступних масивів:

xb(i) - координати границь кінцевих елементів;

ex(i) - теплопровідність матеріалу в межах кінцевих елементів;

qe(i) - щільність виділення тепла в межах кінцевих елементів;

po(i) - щільність матеріалу в межах кінцевих елементів;

co(i) - теплоємність матеріалу в межах кінцевих елементів;

br(i) - початкове значення температури в вузлах кінцевих елементів.

```
d=R/n: xb(1)=0: FOR i=1 TO n: qe(i)=q0: ex(i)=ld: po(i)=ps  
co(i)=cs: br(i)= tn - t0: xb(i+1)=xb(i)+d: NEXT i
```

Цей варіант вихідних даних фізично відповідає абсолютно однорідному тілу з рівномірним розподілом кінцевих елементів по його об'єму. У випадку складнішої задачі, відповідні масиви розмірів, температури чи інших величин слід задавати самостійно. Після введення вихідних даних рекомендується вивести їх на екран для контролю.

Далі, у вигляді окремих підпрограм розглянемо формування матриць коефіцієнтів, теплоємностей і вільних членів системи кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь. Для стрижня при квадратичній апроксимації складемо підпрограму **SUB 350**.

350 REM Формування матриць для стрижня.

```
asr(1, 1) = 7 / 3: asr(1, 2) = -8 / 3: asr(1, 3) = 1 / 3:  
asr(2, 1) = -8 / 3: asr(2, 2) = 16 / 3: asr(2, 3) = -8 / 3:  
asr(3, 1) = 1 / 3: asr(3, 2) = -8 / 3: asr(3, 3) = 7 / 3:  
csr(1, 1) = 4 / 3: csr(1, 2) = 2 / 3: csr(1, 3) = -1 / 3:  
csr(2, 1) = 2 / 3: csr(2, 2) = 16 / 3: csr(2, 3) = -8 / 3:  
csr(3, 1) = -1 / 3: csr(3, 2) = 3 / 3: csr(3, 3) = 4 / 3:  
sr(1) = 1: sr(2) = 4: sr(3) = 1: nb = 3: lb = nx * 2 + 1:  
IF id > 0 THEN lb = nx * 2  
PRINT "nb =", nb, "lb =", lb, "id =", id  
FOR i = 1 TO lb: br(i) = 0: NEXT i:
```

```

FOR i = 1 TO lb: FOR j = 1 TO nb: a(i, j) = 0: c(i, j) = 0: NEXT j, i
FOR k = 1 TO nx: lg(1) = 2 * k - 1: lg(2) = 2 * k: lg(3) = 2 * k + 1
xg(1) = xb(k): xg(2) = .5 * (xb(k) + xb(k + 1)): xg(3) = xb(k + 1)
c1 = (xb(k + 1) - xb(k)) / 2 : s1 = qe(k) * (xb(k + 1) - xb(k)) / 6
FOR i = 1 TO 3: ia = lg(i): IF ia > lb THEN GOTO 5
br(ia) = br(ia) + s1 * sr(i)
5 FOR j = 1 TO 3
ja = lg(j): sij = 0: cij = 0: sij = ex(k) * asr(i, j) / (xb(k + 1) - xb(k))
IF ja > lb THEN br(ia) = br(ia) - sij * (tg - t0)
cij = c1 * po(k) * co(k) * csr(i, j) / 5
IF ja > ia THEN GOTO 6
IF ja > lb THEN GOTO 6
a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij :
c(ia, ja - ia + nb) = c(ia, ja - ia + nb) + cij
6 NEXT j: NEXT i: NEXT k
RETURN
450 REM Формування матриць для циліндра.
nb = 3: lb = nx * 2 + 1: IF id > 0 THEN lb = nx * 2
PRINT "nb ="; nb, "lb ="; lb, "id ="; id: FOR i = 1 TO lb: br(i) = 0: NEXT i:
FOR i = 1 TO lb: FOR j = 1 TO nb: a(i, j) = 0: c(i, j) = 0: NEXT j, i
FOR k = 1 TO nx: lg(1) = 2 * k - 1: lg(2) = 2 * k: lg(3) = 2 * k + 1
xg(1) = xb(k): xg(2) = .5 * (xb(k) + xb(k + 1)): xg(3) = xb(k + 1)
a1 = ex(k) / (6 * (xb(k + 1) - xb(k))): c1 = (xb(k + 1) - xb(k)) * po(k) * co(k) / 60
b1 = qe(k) * (xb(k + 1) - xb(k)) / 6: asr(1, 1) = 3 * xg(3) + 11 * xg(1):
asr(1, 2) = -4 * (xg(3) + 3 * xg(1)): asr(1, 3) = xg(3) + xg(1):
asr(2, 2) = 16 * asr(1, 3): asr(2, 3) = -(12 * xg(3) + 4 * xg(1)):
asr(3, 3) = 11 * xg(3) + 3 * xg(1): asr(2, 1) = asr(1, 2):
asr(3, 1) = asr(1, 3): asr(3, 2) = asr(2, 3): csr(1, 1) = xg(3) + 7 * xg(1):
csr(1, 2) = 4 * xg(1): csr(1, 3) = -xg(3) - xg(1): csr(2, 2) = -16 * csr(1, 3):
csr(2, 3) = 4 * xg(3): csr(3, 3) = xg(1) + 7 * xg(3):
csr(2, 1) = csr(1, 2): csr(3, 1) = csr(1, 3): csr(3, 2) = csr(2, 3)
sr(1) = xg(1): sr(3) = xg(3): sr(2) = 2 * (sr(1) + sr(3))
FOR i = 1 TO 3: ia = lg(i): IF ia > lb THEN GOTO 451
br(ia) = br(ia) + b1 * sr(i)
451 FOR j = 1 TO 3: ja = lg(j): sij = 0: cij = 0: sij = a1 * asr(i, j)
IF ja > lb THEN br(ia) = br(ia) - sij * (tg - t0)
cij = c1 * csr(i, j): IF ja > ia THEN GOTO 452
IF ja > lb THEN GOTO 452
a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij:
c(ia, ja - ia + nb) = c(ia, ja - ia + nb) + cij
452 NEXT j: NEXT i: NEXT k
RETURN

```

```

550 REM Формування матриць для кулі.
nb = 3: lb = nx * 2 + 1: IF id > 0 THEN lb = nx * 2
PRINT "nb ="; nb, "lb ="; lb, "id ="; id: FOR i = 1 TO lb: br(i) = 0: NEXT i:
FOR i = 1 TO lb: FOR j = 1 TO nb: a(i, j) = 0: c(i, j) = 0: NEXT j, i
FOR k = 1 TO nx: lg(1) = 2 * k - 1: lg(2) = 2 * k: lg(3) = 2 * k + 1
xg(1) = xb(k): xg(2) = .5 * (xb(k) + xb(k + 1)): xg(3) = xb(k + 1)
xbk = xb(k + 1) * xb(k + 1): xbl = xb(k) * xb(k): xbm = xb(k + 1) * xb(k)
sa = ex(k) / (30 * (xb(k + 1) - xb(k)))
asr(1, 1) = sa * (6 * xbk + 46 * xbl + 18 * xbm)
asr(1, 2) = -sa * (12 * xbk + 52 * xbl + 16 * xbm)
asr(1, 3) = sa * (6 * xbk + 6 * xbl - 2 * xbm)
asr(2, 2) = sa * (64 * xbk + 64 * xbl + 32 * xbm)
asr(2, 3) = -sa * (52 * xbk + 12 * xbl + 16 * xbm)
asr(3, 3) = sa * (46 * xbk + 6 * xbl + 18 * xbm)
asr(2, 1) = asr(1, 2): asr(3, 1) = asr(1, 3): asr(3, 2) = asr(2, 3)
sc = po(k) * co(k) * ((xb(k + 1) - xb(k))) / 3360
csr(1, 1) = sc * (16 * xbk + 352 * xbl + 80 * xbm)
csr(1, 2) = sc * (-32 * xbk + 192 * xbl + 64 * xbm)
csr(1, 3) = -sc * (40 * xbk + 40 * xbl + 32 * xbm)
csr(2, 2) = sc * (128 * xbk + 128 * xbl + 192 * xbm) * 4
csr(2, 3) = sc * (192 * xbk - 32 * xbl + 64 * xbm)
csr(3, 3) = sc * (352 * xbk + 16 * xbl + 80 * xbm)
csr(2, 1) = csr(1, 2): csr(3, 1) = csr(1, 3): csr(3, 2) = csr(2, 3)
sb = qe(k) * (xb(k + 1) - xb(k)) / 60: d(1) = sb * (-xbk + 9 * xbl + 2 * xbm)
d(3) = sb * (9 * xbk - xbl + 2 * xbm):
d(2) = sb * (12 * xbk + 12 * xbl + 16 * xbm)
FOR i = 1 TO 3: ia = lg(i): IF ia > lb THEN GOTO 551
br(ia) = br(ia) + d(i)
551 FOR j = 1 TO 3: ja = lg(j): sij = 0: cij = 0: sij = asr(i, j)
IF ja > lb THEN br(ia) = br(ia) - sij * (tg - t0)
cij = csr(i, j): IF ja > ia THEN GOTO 552
IF ja > lb THEN GOTO 552
a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij
c(ia, ja - ia + nb) = c(ia, ja - ia + nb) + cij
552 NEXT j: NEXT i: NEXT k
RETURN

```

5.7. Текст QBASIC-програми для розрахунків нестационарних температурних режимів в кусочно-однорідних середовищах

```

SCREEN 12
DIM xb(11): DIM qe(10): DIM ex(10): DIM po(10): DIM co(10)
DIM a(213, 30): DIM br(213): DIM ca(213, 30): DIM c(213, 30)
DIM xg(3): DIM lg(3): DIM x(213): DIM q(213): DIM bx(213):
DIM d(3): DIM asr(3, 3): DIM csr(3, 3)
REM: Введення вихідних даних. Початок.
ip = 350: id = 0: nx = 5: dt = 600: ml = 100: al1=0: al2=10:
t0 = 20: tn = 10: tg = 100: q0 = 20000 : ld = .05: ps = 1200: cs = 4200
xb(nx + 1) = .02:xb(1) = 0: dx = xb(nx + 1) / nx
FOR i = 1 TO nx: qe(i)=q0: ex(i)= ld: po(i)= ps: co(i)= cs: xb(i + 1) = xb(i) + dx
NEXT i: IF id = 1 THEN al2 = 0
REM: Введення вихідних даних. Закінчення.
REM: Виведення вихідних даних на екран для контролю. Початок.
PRINT "nx =", nx, "ps =", ps, "cs =", cs, "dt =", dt, "ml =", ml
PRINT " i ", "xb(i)", "qe(i)", "ex(i)", "po(i)", "co(i)"
FOR i = 1 TO nx: PRINT i; xb(i), qe(i), ex(i), po(i), co(i): NEXT i
PRINT nx + 1, xb(nx + 1): WINDOW (0, 0)-(10, 6)
FOR i = 1 TO 11: LINE (i - 1, 0)-(i - 1, 6), 7: NEXT i
FOR i = 1 TO 7: LINE (0, i - 1)-(10, i - 1), 7:NEXT i:
LINE (0, 0)-(0, 6), 1: LINE (0, 1)-(10, 1), 1: FOR k = 1 TO nx
FOR x = xb(k) TO xb(k + 1) STEP .00003: CIRCLE (x / .002, y / .02 + .2), .01, k
NEXT x: NEXT k: FOR i = 1 TO ny + 1:
LINE (0, .2 + 50 * yb(i))-(500 * xb(nx + 1), .2 + 50 * yb(i)), i: NEXT i
FOR i = 1 TO nx + 1
LINE (500 * xb(i), .2 + 0)-(500 * xb(i), .2 + 50 * yb(ny + 1)), i: NEXT i
REM: Виведення вихідних даних на екран. Закінчення.
REM: Формування матриць коефіцієнтів і вільних членів.
IF ip=350 THEN GOSUB 350: REM: Для стрижня.
IF ip=450 THEN GOSUB 450: REM: Для циліндра.
IF ip=550 THEN GOSUB 550: REM: Для кулі
r = xb(nx + 1): REM Крайові умови Ньютона. Початок.
IF ip=350 THEN a(1, 3) = a(1, 3) + al1: REM: Лівий торець стрижня.
IF ip=350 THEN a(lb, 3) = a(lb, 3) + al2: REM: Правий торець стрижня.
IF ip=450 THEN a(1, 3) = a(1, 3) + al1*xb(1): REM Внутр. пов-ть труби.
IF ip=450 THEN a(lb, 3)=a(lb, 3) + al2*r: REM Зовніш. пов-ть труби.
IF ip=550 THEN a(1, 3)=a(1, 3)+al1*xb(1)*xb(1): REM Внутр. пов-ть сфери.
IF ip=550 THEN a(lb, 3) = a(lb, 3) + al2*r*r: REM: Зовніш. пов-ть сфери. REM
Крайові умови Ньютона. Закінчення.
IF id=1 THEN x(lb + 1) = tg - t0: REM Крайові умови Діріхле.
REM Візуалізація початкових умов. Початок.
FOR i = 1 TO lb: x(i) = tn - t0: NEXT i:

```

```

FOR k = 1 TO nx: xg(1)= xb(k): xg(2) = .5 *(xb(k) + xb(k+ 1)): xg(3)= xb(k + 1)
lg(1) = 2 * k - 1: lg(2) = 2 * k: lg(3) = 2 * k + 1
FOR xl = -1 TO 1 STEP .001: snp(1) = .5 * (1 - xl) * (-1 * xl)
snp(2) = (1 - xl * xl): snp(3) = .5 * (1 + xl) * xl: z = 0: tt = 0
FOR i = 1 TO 3: z = z + snp(i) * xg(i): tt = tt + snp(i) * x(lg(i)): NEXT i
IF ip = 1 THEN CIRCLE (500 * z, 1 + (tt) / 40), .01, 1
NEXT xl: NEXT k
REM Візуалізація початкових умов Закінчення.
REM Формування матриць Кранка-Ніколсона. Початок.
FOR i = 1 TO lb: bx(i) = br(i)
FOR j = 1 TO nb: ca(i, j) = .5 * a(i, j) - c(i, j) / dt: c(i, j) = .5 * a(i, j) + c(i, j) / dt
NEXT j: NEXT i
REM Формування матриць Кранка-Ніколсона. Закінчення.
REM Стаціонарний режим. Початок.
GOSUB 100
FOR k = 1 TO nx: xg(1)= xb(k): xg(2)= .5*(xb(k) + xb(k + 1)): xg(3) = xb(k + 1)
lg(1) = 2 * k - 1: lg(2) = 2 * k: lg(3) = 2 * k + 1
CIRCLE (500 * xg(1), 1 + (x(2 * k - 1) + t0) / 40), .04, 5:
PRINT xg(1), x(2 * k - 1) + t0 : PRINT xg(2), x(2 * k) + t0
CIRCLE (500 * xg(2), 1 + (x(2 * k) + t0) / 40), .04, 5
IF id = 0 THEN PRINT xb(nx + 1), x(lb) + t0
IF id = 1 THEN PRINT xb(nx + 1), tg + t0
FOR xl = -1 TO 1 STEP .001: snp(1) = .5 * (1 - xl) * (-1 * xl)
snp(2) = (1 - xl * xl): snp(3) = .5 * (1 + xl) * xl: z = 0: tt = 0
FOR i = 1 TO 3: z = z + snp(i) * xg(i): tt = tt + snp(i) * x(lg(i)): NEXT i
IF ip = 350 THEN CIRCLE (500 * z, 1 + (tt + t0) / 40), .001, 2
IF ip = 450 THEN CIRCLE (500 * z, 1 + (tt + t0) / 40), .001, 3
IF ip = 550 THEN CIRCLE (500 * z, 1 + (tt + t0) / 40), .001, 6
NEXT xl: NEXT k
REM Стаціонарний режим. Закінчення.
STOP
REM Відновлення початкових умов. Початок.
FOR i = 1 TO lb: br(i) = tn - t0: NEXT i: br(lb + 1) = tg - t0
REM Відновлення початкових умов. Закінчення.
GOSUB 200
kt = 1: REM Початок ітераційного процесу нестач. режиму.
10 FOR i = 1 TO lb: FOR j = 1 TO nb: a(i, j) = c(i, j): NEXT j: NEXT i
GOSUB 100
FOR i = 1 TO n: br(i) = x(i): q(i) = x(i): NEXT i: q(lb + 1) = x(lb + 1)
CIRCLE ((kt - 1) * dt / 12000, 1 + (br(1) + t0) / 40), .03, 4
CIRCLE ((kt - 1) * dt / 12000, 1 + (br(lb) + t0) / 40), .03, 2
FOR k = 1 TO nx : lg(1) = 2 * k - 1: lg(2) = 2 * k: lg(3) = 2 * k + 1
xg(1) = xb(k): xg(2) = .5 * (xb(k) + xb(k + 1)): xg(3) = xb(k + 1)
FOR xl = -1 TO 1 STEP .001: snp(1) = .5 * (1 - xl) * (-1 * xl)

```

```

snp(2) = (1 - xl * xl): snp(3) = .5 * (1 + xl) * xl: z = 0: tt = 0
FOR i = 1 TO 3: z = z + snp(i) * xg(i): tt = tt + snp(i) * q(lg(i)): NEXT i
CIRCLE (500 * z, 1 + (tt + t0) / 40), .001, kt: NEXT xl: NEXT k: kt = kt + 1
GOSUB 200
IF kt < ml THEN GOTO 10
REM Закінчення ітераційного процесу нестач. режиму
FOR i = 1 TO lb: q(i) = q(i) + t0: NEXT i
STOP
100 REM Розв'язування системи рівнянь.
В цьому місці необхідно розмістити підпрограму розв'язування системи рівнянь,
наведену в розділі 5.4 на сторінці 129.
200 REM Перемноження матриць.
В цьому місці необхідно розмістити підпрограму перемноження матриць, наведену
в розділі 5.5 на сторінці 131.
350 REM Формування матриць для стрижня.
В цьому місці необхідно розмістити наведену вище підпрограму
SUB 350.
450 REM Формування матриць для циліндра.
В цьому місці необхідно розмістити наведену вище підпрограму
SUB 450.
550 REM Формування матриць для кулі.
В цьому місці необхідно розмістити наведену вище підпрограму
SUB 550.

```

5.8. Нестационарний режим тверднення епоксидного композиту в формі кулі

При твердненні епоксидної композиції нестационарна задача виникає внаслідок зміни в часі потужності виділення тепла. Крім того, $q(r,t)$ є нелінійною функцією від температури композиції. Залежність потужності виділення тепла від температури описується рівнянням Вант-Гоффа [9]:

$$q(r,t) = q_0 \cdot \gamma^{0.1 \cdot (T + T_0)} \quad (4.34)$$

де: T_0 - температура навколишнього середовища, °C;

T - перевищення температури в розрахунковій точці об'єму суміші, що вступає в реакцію, над температурою навколишнього середовища;

q_0 - щільність виділення тепла при $T_0 = 0$ °C;

γ - температурний коефіцієнт (коефіцієнт Вант-Гоффа), незалежна від температури константа для даної реакції [3].

Оскільки, в процесі тверднення епоксидної композиції виділяється тепло, то температура композиції змінюється в часі і тим самим, відповідно рівнянню Вант-Гоффа, змінюється і потужність виділення тепла $q(r,t)$.

В процесі реакції тверднення спостерігається наростання в часі виділення тепла. Проте, після завершення реакції, процес виділення тепла зупиняється. Область тіла, де реакція завершилася, або продовжує нагріватися від виділення тепла в сусідніх областях, або починає охолоджуватися, в залежності від того, які процеси переважають.

Запас енергії, що виділяється в процесі реакції, обмежений. Його значення задається у вихідних даних і може бути визначено експериментально методом калориметрії [9]. Тому, при інтегруванні функції $q(r,t)$ в часі після досягнення цим інтегралом заданої межі, подальші обчислення продовжуються при $q(r,t) = 0$.

Другим важливим фактором для складання математичної моделі розподілу тепла при твердненні композиції в формі сфери є обмеження по максимально допустимій температурі композиту. Якщо температура в будь-якій області, перевищить $110\text{ }^{\circ}\text{C} - 120\text{ }^{\circ}\text{C}$, то настає закипання отверджувача, зразок руйнується і подальші обчислення втрачають сенс.

Саме для оцінки умов сприятливого завершення реакцій формування технічних виробів з епоксидних смол, потрібні розрахунки температурних режимів в проектах їх конструктивних виконань. Особливо це важливо при виготовленні великогабаритних виробів.

В даному розділі розглянемо програму розрахункових досліджень температурних процесів в зразках з епоксидного композита у вигляді кулі, розміщеного в тонкостінній сферичній оболонці. Програму представимо у вигляді окремих блоків.

Читачеві рекомендується набрати на комп'ютері текст передбачуваної програми разом з підпрограмами **SUB 100**, **SUB 200** і самостійно, на практиці, ознайомитися з її роботою.

5.9. Текст QBASIC- програми для розрахунку нестационарного

температурного режиму в нелінійній кулі при квадратичній апроксимації

SCREEN 12

DIM xb(31): DIM xg(31): DIM qe(31): DIM ex(30)

DIM a(213, 30): DIM ca(213, 30): DIM c(213, 30)

DIM x(213): DIM q(213): DIM bx(213): DIM br(213)

DIM lg(3): DIM snp(3): DIM e(3, 3): DIM ec(3, 3)

DIM pe(30): DIM qh(31): DIM ip(30): DIM qt(30, 3)

```

DIM po(30): DIM co(30): DIM qg(30): DIM qw(30): DIM d(31)
REM Введення і друк на екрані вихідних даних.
nx = 11: rh = .021: dh = .001
PRINT " nx ="; nx: PRINT " rh ="; rh: PRINT " dh ="; dh: PRINT
ps = 1200: cs = 4200: al = 10: t0 = 20: q0 = 4860: ld = .35
sk = 1.84: pa = 2700: dt = 120: ml = 82: tw = 175
dx = (rh - dh) / (nx - 1): xb(1) = 0!: PRINT " i ", " xb(i)": PRINT
FOR i = 1 TO nx: xb(i + 1) = xb(i) + dx: PRINT i, xb(i): NEXT i
xb(nx + 1) = rh: FOR k = 1 TO nx
ip(k) = 1: po(k) = ps: co(k) = cs: qe(k) = q0 * sk ^ (.1 * t0): ex(k) = ld
sx = (xb(k + 1) * xb(k + 1) * xb(k + 1) - xb(k) * xb(k) * xb(k))
qg(k) = tw * po(k) * co(k) * 4 * 3.14 * sx / 3: NEXT k
qe(nx) = 0: ex(nx) = 100: qg(nx) = 0: po(nx) = 2700: co(nx) = 400
PRINT nx + 1, xb(nx + 1): STOP: CLS
REM Візуалізація структури кінцевих елементів.
WINDOW (0, 6)-(10, 0): LINE (0, 0)-(0, 6), 1: LINE (0, 1)-(10, 1), 1
LINE (0, 2.75)-(10, 2.75), 4: FOR i = 1 TO nx + 1
CIRCLE (0, 1), 400 * xb(i), i: NEXT i
FOR r = xb(nx) TO xb(nx + 1) STEP .00001
CIRCLE (0, 1), 400 * r, 7: NEXT r
REM Формування матриць кінцевоелементних рівнянь.
nb = 3: lb = 2 * nx + 1: PRINT " nb ="; nb, " lb ="; lb
FOR i = 1 TO lb: br(i) = 0: bx(i) = 0: x(i) = 0: NEXT i:
FOR i = 1 TO lb: FOR j = 1 TO nb: a(i, j) = 0: c(i, j) = 0: NEXT j, i
FOR k = 1 TO nx
xg(1) = xb(k): xg(2) = .5 * (xb(k) + xb(k + 1)): xg(3) = xb(k + 1)
lg(1) = 2 * k - 1: lg(2) = 2 * k: lg(3) = 2 * k + 1
qh(1) = qe(k): qh(2) = qe(k): qh(3) = qe(k)
xbk = xb(k + 1) * xb(k + 1): xbl = xb(k) * xb(k): xbm = xb(k + 1) * xb(k)
REM Базові матриці коефіцієнтів і теплоемностей.
sa = ex(k) / (30 * (xb(k + 1) - xb(k)))
e(1, 1) = sa * (6 * xbk + 46 * xbl + 18 * xbm)
e(1, 2) = -sa * (12 * xbk + 52 * xbl + 16 * xbm)
e(1, 3) = sa * (6 * xbk + 6 * xbl - 2 * xbm)
e(2, 2) = sa * (64 * xbk + 64 * xbl + 32 * xbm)
e(2, 3) = -sa * (52 * xbk + 12 * xbl + 16 * xbm)
e(3, 3) = sa * (46 * xbk + 6 * xbl + 18 * xbm)
e(2, 1) = e(1, 2): e(3, 1) = e(1, 3): e(3, 2) = e(2, 3)
sc = po(k) * co(k) * ((xb(k + 1) - xb(k))) / 3360
ec(1, 1) = sc * (16 * xbk + 352 * xbl + 80 * xbm)
ec(1, 2) = sc * (-32 * xbk + 192 * xbl + 64 * xbm)
ec(1, 3) = -sc * (40 * xbk + 40 * xbl + 32 * xbm)

```

```

ec(2, 2) = sc * (128 * xbk + 128 * xbl + 192 * xbm) * 4
ec(2, 3) = sc * (192 * xbk - 32 * xbl + 64 * xbm)
ec(3, 3) = sc * (352 * xbk + 16 * xbl + 80 * xbm)
ec(2, 1) = ec(1, 2): ec(3, 1) = ec(1, 3): ec(3, 2) = ec(2, 3)
REM Формування матриці вільних членів.
GOSUB 70: FOR i = 1 TO 3: ia = lg(i): br(ia) = br(ia) + d(i)
REM Формування матриць коефіцієнтів і теплоємностей.
FOR j = 1 TO 3: ja = lg(j): IF ja > ia THEN GOTO 6
a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + e(i, j)
c(ia, ja - ia + nb) = c(ia, ja - ia + nb) + ec(i, j)
6 NEXT j: NEXT i: NEXT k
REM Доповнення матриць коефіцієнтів і теплоємностей
REM крайовими умовами.
ia = 2 * nx + 1: a(ia, 3) = a(ia, 3) + al * xb(nx + 1) * xb(nx + 1)
REM Формування матриць в схемі Кранка-Ніколсона.
FOR i = 1 TO lb: bx(i) = br(i): FOR j = 1 TO nb
ca(i, j) = (c(i, j) / dt - .5 * a(i, j))
c(i, j) = (c(i, j) / dt + .5 * a(i, j)): NEXT j: NEXT i: kt = 1
REM Початок нестационарного ітераційного процесу.
10
FOR i = 1 TO lb: FOR j = 1 TO nb: a(i, j) = c(i, j): NEXT j: NEXT i
REM Розв'язування системи кінцевоелементних
REM алгебраїчних рівнянь.
GOSUB 100: FOR i = 1 TO n: br(i) = x(i): q(i) = x(i) + t0: NEXT i
REM Побудова графіків зміни температури в часі.
CIRCLE ((kt - 1) * dt / 2000, (x(1) + t0) / 25), .03, 4
CIRCLE ((kt - 1) * dt / 2000, (x(lb) + t0) / 25), .03, 7
REM Побудова графіків розподілу температури по радіусу.
FOR k = 1 TO nx: lg(1) = 2 * k - 1: lg(2) = 2 * k: lg(3) = 2 * k + 1
xg(1) = xb(k): xg(2) = .5 * (xb(k) + xb(k + 1)): xg(3) = xb(k + 1)
col = kt: IF ip(1) = 10 THEN col = kt - st
id = .05: IF ip(1) = 10 THEN id = .0005
FOR xl = -1 TO 1 STEP id: snp(1) = -.5 * (1 - xl) * xl
snp(2) = (1 - xl * xl): snp(3) = .5 * (1 + xl) * xl: z = 0: tt = 0
FOR i = 1 TO 3: z = z + snp(i) * xg(i): tt = tt + snp(i) * q(lg(i))
NEXT i: CIRCLE (400 * z, (tt) / 40), .0001, col: NEXT xl: NEXT k
IF ip(1) = 1 THEN st = st + 1
REM Перемноження матриць в схемі Кранка-Ніколсона.
GOSUB 200: FOR k = 1 TO nx - 1: lg(1) = 2 * k - 1: lg(2) = 2 * k
xg(1) = xb(k): xg(2) = .5 * (xb(k) + xb(k + 1)): xg(3) = xb(k + 1)
lg(3) = 2 * k + 1: z1 = q(2 * k - 1): s1 = .1 * (z1)
z2 = q(2 * k): s2 = .1 * (z2): z3 = q(2 * k + 1): s3 = .1 * (z3)

```

```

REM Контроль обмеження процесу полімеризації
REM по максимально допустимій температурі.
IF z1 > 110 THEN PRINT " wskipelo "; " k ="; k; " T1max= "; z1
IF z2 > 110 THEN PRINT " wskipelo "; " k ="; k; " T2max= "; z2
IF z3 > 110 THEN PRINT " wskipelo "; " k ="; k; " T3max= "; z3
REM Контроль обмеження процесу полімеризації
REM по максимальному запасу енергії.
tqw1 = q0 * sk ^ s1: tqw2 = q0 * sk ^ s2: tqw3 = q0 * sk ^ s3
vs = (xb(k + 1) * xb(k + 1) * xb(k + 1) - xb(k) * xb(k) * xb(k)) / 3
IF ip(k) < 10 THEN qw(k) = qw(k) + ip(k) * tqw1 * dt * 4 * 3.14 * vs
IF qw(k) > qg(k) THEN tqw1 = 0
IF qw(k) > qg(k) THEN tqw2 = 0
IF qw(k) > qg(k) THEN tqw3 = 0
IF qw(k) > qg(k) THEN ip(k) = 0
IF ip(1) = 0 THEN ip(1) = 10
qt(k, 1) = tqw1: qt(k, 2) = tqw2: qt(k, 3) = tqw3: NEXT k
FOR i = 1 TO lb: bx(i) = 0: NEXT i: FOR k = 1 TO nx
xg(1) = xb(k): xg(2) = .5 * (xb(k) + xb(k + 1)): xg(3) = xb(k + 1)
lg(1) = 2 * k - 1: lg(2) = 2 * k: lg(3) = 2 * k + 1
qh(1) = qt(k, 1): qh(2) = qt(k, 2): qh(3) = qt(k, 3)
xbk = xb(k + 1) * xb(k + 1): xbl = xb(k) * xb(k): xbm = xb(k + 1) * xb(k)
GOSUB 70: FOR i = 1 TO 3: ia = lg(i): bx(ia) = bx(ia) + d(i): NEXT i
NEXT k: kt = kt + 1: IF kt < ml THEN GOTO 10
REM Друкування результатів розрахунків.
PRINT " ": PRINT " kt ="; kt; " st ="; st, st * dt / 3600; "tshasov"
LINE (0, 2.75)-(10, 2.75), 4: STOP:
PRINT " i "; " T(i)", " qw(i)", " qg(i)"
FOR i = 1 TO nx - 1: COLOR i
IF qw(i) > qg(i) THEN PRINT " i ="; i; "wse wygorelo"; q(2* i+1), qw(i), qg(i)
NEXT i: STOP
70
sb = (xb(k + 1) - xb(k)) / 1680
sr1 = (-40 * xbk + 40 * xbl + 32 * xbm) :sr2 = (16 * xbk + 352 * xbl + 80 * xbm)
sr3 = (-16 * xbk + 96 * xbl + 32 * xbm)
d(1) = .5 * sb * (qh(3) * sr1 + qh(1) * sr2 + 2 * qh(2) * sr3)
sr1 = (96 * xbk - 16 * xbl + 32 * xbm) :sr2 = (-16 * xbk + 96 * xbl + 32 * xbm)
sr3 = (128 * xbk + 128 * xbl + 192 * xbm)
d(2) = sb * (qh(3) * sr1 + qh(1) * sr2 + 2 * qh(2) * sr3)
sr1 = (352 * xbk + 16 * xbl + 80 * xbm) :sr2 = (-40 * xbk - 40 * xbl - 32 * xbm)
sr3 = (96 * xbk - 16 * xbl + 32 * xbm)
d(3) = .5 * sb * (qh(3) * sr1 + qh(1) * sr2 + 2 * qh(2) * sr3)
RETURN

```

100 REM Розв'язування системи рівнянь.

В цьому місці необхідно розмістити підпрограму розв'язування системи рівнянь, наведену в розділі 5.4 на сторінці 129.

200 REM Перемноження матриць.

В цьому місці необхідно розмістити підпрограму перемноження матриць, наведену в розділі 5.5 на сторінці 131.

Як приклад для ілюстрації структури і функціонування програми розрахунків розподілу температури при твердненні епоксидного композиту, задамо наступні розміри і теплофізичні характеристики сферичної конструкції.

Блок введення вихідних даних (всі величини в одиницях СИ).

rh = 0,021 - зовнішній радіус конструкції;

dh = 0,001 - товщина алюмінієвої оболонки;

ps = 1200 - щільність композиту;

cs = 4200 - теплоємність композиту;

al = 10 - коефіцієнт конвекції на поверхні оболонки;

t0 = 20 - температура навколишнього середовища;

q0 = 4860 - потужність виділення тепла при $T_0 = 0$ °C;

ld = 0,35 - теплопровідність композиту;

sk = 1,84 - коефіцієнт Вант-Гоффа, γ ;

pa = 2700 - щільність алюмінію; ca1 = 4200 - теплоємність алюмінія;

tw = 175 - об'ємна щільність енергії реакції полімеризації;

dt = 120 - крок в часі в ітераційній схемі Кранка-Ніколсона;

ml = 82 - число ітераційних кроків в часі;

nx = 11 - число кінцевих елементів при розділенні конструкції на сфери.

Після введення вихідних даних, на екран монітора виводяться значення радіусів кулі і алюмінієвої оболонки, число кінцевих елементів, на які розділяється конструкція, радіуси кінцевоелементних сфер і маси матеріалів конструкції. Геометричні розміри є тими параметрами, які можна змінювати при дослідженні температурних режимів в подібних задачах. Ціль розрахункових досліджень температурних режимів передбачуваної конструкції є підготування технічного завдання на проектування її конструктивного виконання. Ця конструкція, при заданих умовах нагрівання і охолодження, повинна витримати допустимий температурний режим її виготовлення.

Далі необхідно очистити екран і вивести інформацію по візуалізації температурних режимів в досліджуваній конструкції.

В процесі візуалізації синіми лініями позначені осі координат. Сітка кінцевих елементів зображена концентричними колами. Кожна сфера позначена колом відповідного кольору.

Алюмінієва оболонка зафарбована білим кольором. Червона горизонтальна лінія відповідає максимально допустимій температурі $T_{\max} = 110^{\circ}\text{C}$, після перевищення якої настає руйнування зразка і подальші розрахунки втрачають сенс.

Наступний блок програми забезпечує формування матриць коефіцієнтів $[A]$, теплоємностей $[C]$ і вільних членів $\{B\}$. Окремою строкою матриця коефіцієнтів $[A]$ доповнюється крайовими умовами теплообміну на поверхні алюмінієвої оболонки кулі.

Міткою номер **10** позначається початок ітераційного циклу Кранка-Ніколсона. Після звертання до підпрограми **SUB 100** отримуємо значення температури в вузлах кінцевих елементів на початку розрахунків. Отримані значення вектора $\{T_i\}$, що зберігаються в матриці $\{X\}$, є початковими умовами для наступних ітерацій процесу Кранка-Ніколсона.

При візуалізації ітераційного процесу на кожному кроці на екран виводяться графіки розподілу температури вздовж радіуса кулі (білі криві лінії). Після вичерпання в об'ємі кінцевого елемента запасу енергії, що виділяється в процесі полімеризації, графіки розподілу температури вздовж радіуса кулі виділяються кольоровими кривими (рис. 5.1).

Обчислювальний процес продовжується до тих пір, поки число ітерацій kt не досягне заданого значення $ml = 82$. Після цього процес завершується і візуалізація призупиняється.

На рис. 5.2 показані графіки змінення температури в центрі кулі і на поверхні алюмінієвої оболонки. Тут ця оболонка показана чорним кольором. Значення температури показані окремими кружочками голубого і чорного кольору. При роботі програми вони виводяться на екран одночасно з графіками розподілу температури вздовж радіуса кулі, що зображені на рис. 5.1. Всі ці графіки мають чисто ілюстративне значення. Вони демонструють протікання процесів полімеризації по об'єму кулі. Щоб не нагромаджувати все на один малюнок, автор виділив змінення температури в часі кружочками окремим рис. 5.2. залишаючи масштаб осі абсцис в метрах, а не в годинах, так як на рис. 5.1. основною інформацією є розподіл температури вздовж радіуса кулі.

В кінці роботи програми на екран дисплея комп'ютера виводяться:

kt – загальне число ітерацій; **st** - число ітерацій, після досягнення якого, настає завершення реакції полімеризації в окремих кінцевих елементах;

st * dt - часу процесу полімеризації епоксидного композита.

У вигляді окремої таблиці виводяться значення температури в центрі кожного кінцевого елемента $T(i)$, розрахункова енергія тепловиділення $qw(i)$, задане значення запасу енергії тепловиділення $qg(i)$. Різниця розрахункового і заданого значень енергій

тепловиділення $q_w(i) - q_g(i)$ дозволяє оцінити, чи допустимо незначне перевищення максимального значення температури в центрі 6-го, 8-го і 10-го кінцевих елементів. Якщо таке перевищення настає в момент завершення реакції полімеризації, то це допустимо, так як, не розрахункове значення енергії тепловиділення $q_w(i)$ визначає температуру, а задане $q_g(i)$, яке по величині менше розрахункового.

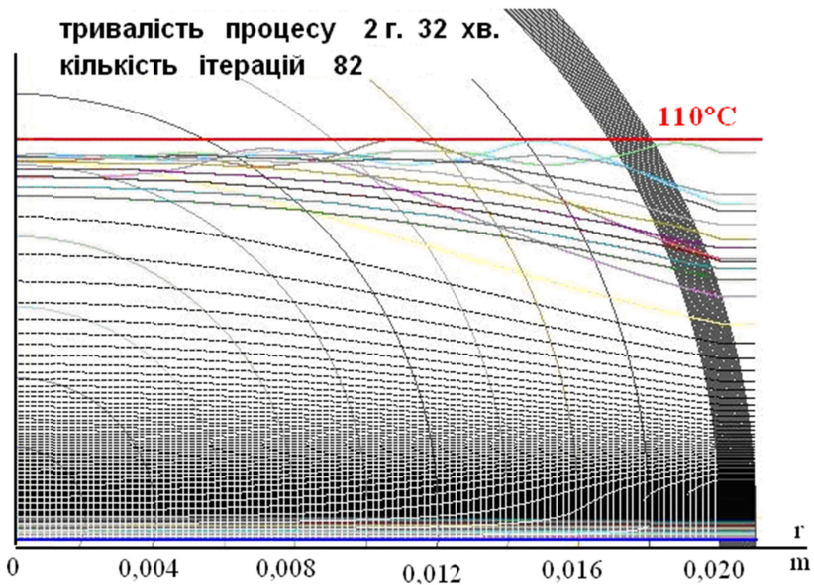


Рис. 5.1. Графіки наростання температури під час тверднення епоксиду сферичної форми

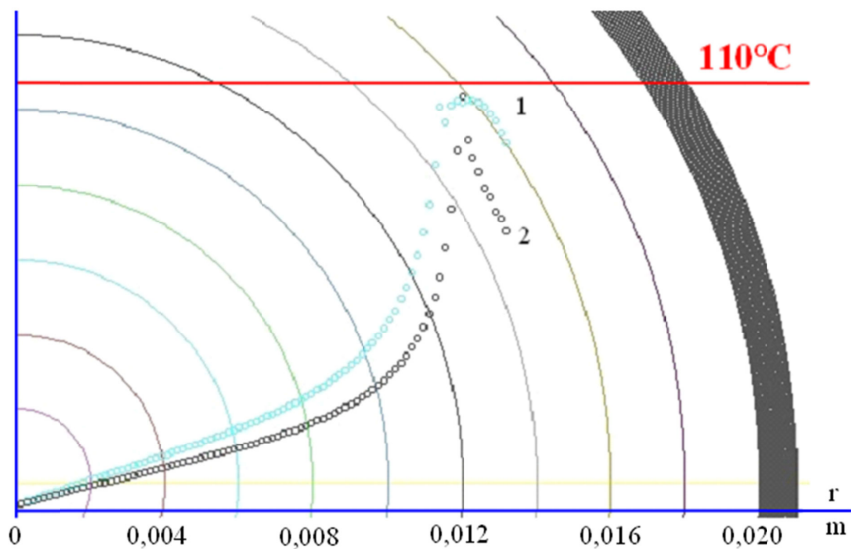


Рис. 5.2. Графіки зміння температури в центрі (1) і на поверхні (2) алюмінієвої оболонки при твердненні епоксидної композиції

Глава 6. ДВОМІРНІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

6.1. Плоскопаралельне температурне поле.

Двомірними процесами теплопровідності в декартових координатах можна вважати теплові процеси в тонких пластинах, наприклад, в друкованих платах електротехнічної апаратури. Теплообмін з навколишнім середовищем протікає в них через поверхні пластин, а теплопередача по внутрішньому об'єму плати. Так як розподіл тепла по товщині плати можна вважати постійним, то температурне поле всередині плати буде плоскопаралельним.

Другу групу двомірних задач об'єднують моделі протяжних конструкцій, в яких розподіл тепла відбувається тільки в двох напрямках, наприклад, електричні кабельні мережі.

Застосування метода кінцевих елементів для розрахунків двомірних температурних полів проілюструємо на прямокутній кусочно-однорідній модельній області, що складається з однорідних підобластей.

На першому етапі підготовки задачі до розрахунку температурного поля методом кінцевих елементів необхідно розглянути структуру неоднорідної прямокутної модельної задачі і розділити її на однорідні прямокутні елементи (рис. 6.1).

По x -координаті розділення виконується аналогічно розділенню стрижня (рис.1.13). При цьому необхідно визначити по осі x n_x - число кінцевих елементів і базові координати сітки кінцевих елементів $x_{b_1} x_{b_2} \dots x_{b_k} \dots x_{b_{n_x+1}}$. Точно так визначаються по осі y n_y – число кінцевих елементів і базові координати сітки кінцевих елементів $y_{b_1} y_{b_2} \dots y_{b_1} \dots y_{b_{n_y+1}}$. Кожен кінцевий елемент характеризується теплопровідністю λ_{kl} і потужністю тепловиділення q_{kl} . Тут, k – номер елемента по осі x , а l – номер елемента по осі y . Задані величини є вихідними даними для подальшого розв'язування задачі методом кінцевих елементів.

Далі розглянемо координатні функції, локальну і глобальну нумерацію вузлів при лінійній апроксимації невідомої функції $T(x,y)$.

Координатні функції будуються для чотирьох вузлів, розташованих в вершинах квадрата в локальних координатах (ξ, η) (рис. 6.2). Тут же наведено і локальну нумерацію вузлів 1, 2, 3, 4 в локальних координатах (ξ, η) і глобальну нумерацію вузлів 10, 11, 14, 15 в координатах (x, y) для одного з кінцевих елементів.

Побудову координатних функцій виконуємо з єдиною вимогою:

в i -тому вузлі значення $N_i(\xi_i, \eta_i) = 1$; в усіх інших вузлах $N_i(\xi, \eta) = 0$. При цьому отримуємо:

$$N_1 = 0,25 \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta); \quad N_2 = 0,25 \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta);$$

$$N_3 = 0,25 \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta); \quad N_4 = 0,25 \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta).$$

На рис. 6.3 показані графіки розподілу координатних функцій в межах квадратного кінцевого елемента.

Похідні координатних функцій в локальних координатах.

$$\frac{dN_1}{d\xi} = -0,25 \cdot (1 - \eta); \quad \frac{dN_2}{d\xi} = 0,25 \cdot (1 - \eta); \quad \frac{dN_3}{d\xi} = 0,25 \cdot (1 + \eta); \quad \frac{dN_4}{d\xi} = -0,25 \cdot (1 + \eta);$$

$$\frac{dN_1}{d\eta} = -0,25 \cdot (1 - \xi); \quad \frac{dN_2}{d\eta} = -0,25 \cdot (1 + \xi); \quad \frac{dN_3}{d\eta} = 0,25 \cdot (1 + \xi); \quad \frac{dN_4}{d\eta} = 0,25 \cdot (1 - \xi).$$

Номера вузлів в глобальних координатах вираховуються по номерах кінцевих елементів. Позначимо через k - поточний номер кінцевого елемента по осі x , а через l - поточний номер по осі y . Тоді, глобальний номер першого вузла, згідно локальній нумерації, вираховується по формулі: $ng1 = l + (k - 1) \cdot (ny + 1)$. Далі, глобальні номери інших вузлів:

$ng2 = l + k \cdot (ny + 1)$, $ng3 = ng2 + 1$, $ng4 = ng1 + 1$. Наприклад, при $l = 2$ і $k = 3$ отримаємо:

$$ng1 = l + (k - 1) \cdot (ny + 1) = 2 + (3 - 1) \cdot (3 + 1) = 10; \quad ng2 = l + k \cdot (ny + 1) = 2 + 3 \cdot (3 + 1) = 14;$$

$$ng3 = ng2 + 1 = 14 + 1 = 15; \quad ng4 = ng1 + 1 = 10 + 1 = 11.$$

Наведені формули дійсні тільки для прямокутної області (рис. 6.1) при нумерації вузлів знизу вверху і зліва направо.

Якщо змінити порядок нумерації, наприклад, спочатку зліва направо і далі знизу вверху (рис. 6.4), то формули зміняться:

$$ng1 = k + (l - 1) \cdot (nx + 1), \quad ng2 = ng1 + 1, \quad ng4 = k + l \cdot (nx + 1), \quad ng3 = ng4 + 1.$$

Порядок нумерації вузлів впливає на структуру матриці коефіцієнтів системи кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь. Порядок системи не зміниться і в даному випадку буде дорівнювати $lb = nx \cdot ny + nx + ny + 1 = 5 \cdot 3 + 5 + 3 + 1 = 24$. Від порядку нумерації залежить ширина стрічки, в якій розміщені ненульові коефіцієнти вздовж головної діагоналі матриці коефіцієнтів. Вона дорівнює максимальній різниці номерів вузлів в межах кожного кінцевого елемента, збільшеною на одиницю. При першому варіанті ширина стрічкової матриці $nb = ny + 3 = 3 + 3 = 6$. В другому варіанті $nb = nx + 3 = 5 + 3 = 8$. Тому перший варіант в даному випадку пріоритетний.

Рівняння теплопровідності в декартових координатах згідно [1., С.409], [2., С.164] і [2., С.135] можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y}) = -q(x,y,t) + \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (6.1)$$

Виходячи з теорії метода кінцевих елементів, компоненти матриць коефіцієнтів і вільних членів системи кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь вираховуються за формулами:

$$a_{ij}^3 = \lambda_x \cdot \iint_{y \ x} \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} \cdot dx \cdot dy + \lambda_y \cdot \iint_{y \ x} \frac{dN_i}{dy} \cdot \frac{dN_j}{dy} \cdot dx \cdot dy; \quad b_i^3 = \iint_{y \ x} N_i \cdot q(x,y) \cdot dx \cdot dy. \quad (6.2)$$

Інтегрування виконується по площі прямокутного кінцевого елемента.

Для врахування крайових умов матрицю $[A]$ слід доповнити матрицею компонентів конвективного теплообміну, які при теплообміні з бічних поверхонь вираховуються через інтеграли:

$$h_{ij}^3 = \int_x N_i \cdot N_j \cdot \alpha_y(x) \cdot dx + \int_y N_i \cdot N_j \cdot \alpha_x(y) \cdot dy. \quad (6.3)$$

Інтегрування тут виконується по осі x вздовж горизонтальних границь (перший доданок) і по осі y вздовж вертикальних границь (другий доданок).

Для тонких пластин, де теплообмін протікає через поверхні цих пластин:

$$h_{ij}^3 = \iint_{y \ x} N_i \cdot N_j \cdot \alpha(x,y) \cdot dx \cdot dy. \quad (6.4)$$

Інтегрування виконується по площі прямокутного кінцевого елемента. Якщо охолодження протікає з двох боків тонкої пластини, то:

$$h_{ij}^3 = 2 \cdot \iint_{y \ x} N_i \cdot N_j \cdot \alpha(x,y) \cdot dx \cdot dy.$$

Повна система кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь в матричній формі:

$$[A + H] \cdot \{T\} = \{B\}.$$

Для прямокутних кінцевих елементів при $q(x,y) = q_0 = const$ наведені вище інтеграли можна вирахувати аналітично. В локальних координатах елемент довжини по осі x $dx = 0,5 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot d\xi$ і по осі y $dy = 0,5 \cdot (y_{l+1} - y_l) \cdot d\eta$.

Отже, в локальних координатах:

$$a_{ij}^3 = \left\{ \lambda_x \cdot \frac{y_{l+1} - y_l}{x_{k+1} - x_k} \cdot \iint_{-1 \ -1}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{dN_j}{d\xi} \cdot d\xi \cdot d\eta + \lambda_x \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{l+1} - y_l} \cdot \iint_{-1 \ -1}^1 \frac{dN_i}{d\eta} \cdot \frac{dN_j}{d\eta} \cdot d\xi \cdot d\eta \right\}; \quad (6.5)$$

$$b_i^3 = 0,25 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (y_{l+1} - y_l) \cdot q_0 \cdot \iint_{-1 \ -1}^1 N_i \cdot d\xi \cdot d\eta. \quad (6.6)$$

Компоненти матриці $[H]$ при $\alpha_x = const$, $\alpha_y = const$, $\alpha_0 = const$

$$h_{ij}^3 = 0,5 \cdot \{ (x_{k+1} - x_k) \cdot \alpha_x \cdot \int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot d\xi \} \quad - \text{ для горизонтальних границь;} \quad (6.7)$$

$$h_{ij}^3 = 0,5 \cdot \{ (y_{l+1} - y_l) \cdot \alpha_y \cdot \int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot d\eta \} \quad - \text{ для вертикальних границь;} \quad (6.8.)$$

$$h_{ij}^3 = 0,25 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (y_{l+1} - y_l) \cdot \alpha_0 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot d\xi \cdot d\eta \} \quad - \text{ для поверхонь.} \quad (6.9)$$

Інтегрування в локальних координатах доцільно виконати один раз і отримані інтеграли записати у вигляді базових матриць. Позначимо їх як:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{dN}{d\xi} \cdot \frac{dN}{d\xi} \cdot d\xi \cdot d\eta = [E] = \frac{1}{6} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & -2 & -1 & 1 \\ \hline -2 & 2 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 2 & -2 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dN}{d\eta} \cdot \frac{dN}{d\eta} \cdot d\xi \cdot d\eta = [D] = \frac{1}{6} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & -1 & -2 \\ \hline 1 & 2 & -2 & -1 \\ \hline -1 & -2 & 2 & 1 \\ \hline -2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i \cdot d\xi \cdot d\eta = [G] = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

Розрахункові формулі набудуть вигляду:

$$a_{ij}^3 = \{ \lambda_x \cdot \frac{y_{l+1} - y_l}{x_{k+1} - x_k} \cdot [E] + \lambda_x \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{l+1} - y_l} \cdot [D] \}; \quad b_i^3 = 0,25 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (y_{l+1} - y_l) \cdot q_0 \cdot [G]. \quad (6.10)$$

Крайові умови на границях розрахункової області.

Нижня і верхня границі.

Права і ліва границі.

$$\int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot d\xi = [U] = \frac{1}{3} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & & \\ \hline 1 & 2 & & \\ \hline & & 2 & 1 \\ \hline & & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot d\eta = [V] = \frac{1}{3} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & & 1 \\ \hline & 2 & 1 & \\ \hline & 1 & 2 & \\ \hline 1 & & & 2 \\ \hline \end{array}$$

Матриці розподілені на нижню і верхню, на праву і ліву, так як границі можуть мати різні значення коефіцієнтів конвекції. При комп'ютерній реалізації алгоритма базових матриць їх можна об'єднати і зберігати в пам'яті комп'ютера суму матриць $[[U] + [V]]$.

При обчисленні компонентів матриці $[H]$ необхідні доданки із суми матриць $[[U] + [V]]$ будуть використовуватися автоматично по номерам вузлів.

$$h_{ij}^3 = 0,5 \cdot \{ (x_{k+1} - x_k) \cdot \alpha_x \cdot [[U] + [V]] \} \quad - \text{ для горизонтальних границь,} \quad (6.11)$$

$$h_{ij}^3 = 0,5 \cdot \{ (y_{i+1} - y_i) \cdot \alpha_y \cdot [[U] + [V]] \} - \text{для вертикальних границь.} \quad (6.12)$$

Поверхня пластини.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot d\xi \cdot d\eta = [S] = \frac{1}{9} \cdot$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 4 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 4 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 4 |

$$h_{ij}^3 = 0,25 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (y_{i+1} - y_i) \cdot \alpha_0 \cdot [S] \} - \text{для поверхнь.} \quad (6.13)$$

Базові матриці замінюють операції інтегрування виключно арифметичними діями - множенням і додаванням. Всього цього вдається досягти завдяки координатним функціям. Більш того, при обчисленні компонентів кінцевоелементних матриць відпадає необхідність вираховувати координатні функції і їх похідні. Вони вже проінтегровані і розташовані в базових матрицях.

6.2. Квадратична апроксимація в двомірній постановці задачі

Квадратична апроксимація в двомірній постановці задачі для чотирикутного кінцевого елемента виконується на восьми вузлах, розташованих в вершинах і на серединах сторін чотирикутника. В локальних координатах нумерація вузлів виконується проти часової стрілки, починаючи з лівого нижнього кута (рис. 6.5).

Дотримуючись правила: в i -тому вузлі значення $N_i(\xi, \eta) = 1$; в усіх інших вузлах $N_i(\xi, \eta) = 0$, запишемо формули для координатних функцій в локальних координатах.

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot (-\xi - \eta - 1), \quad N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \eta) \cdot (1 - \xi^2),$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot (\xi - \eta - 1), \quad N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \eta^2) \cdot (1 + \xi),$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot (\xi + \eta - 1), \quad N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \eta) \cdot (1 - \xi^2),$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot (-\xi + \eta - 1), \quad N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \eta^2) \cdot (1 - \xi).$$

На рис. 6.6 показані в локальних координатах графіки координатних функцій квадратичного чотирикутного кінцевого елемента.

Похідні координатних функцій.

$$\frac{dN_1}{d\xi} = -\frac{1}{4} \cdot (1 - \eta) \cdot (-2 \cdot \xi - \eta), \quad \frac{dN_2}{d\xi} = -\xi \cdot (1 - \eta), \quad \frac{dN_3}{d\xi} = \frac{1}{4} \cdot (1 - \eta) \cdot (2 \cdot \xi - \eta),$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_4}{d\xi} &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \eta^2), & \frac{dN_5}{d\xi} &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \eta) \cdot (2 \cdot \xi + \eta), & \frac{dN_6}{d\xi} &= -\xi \cdot (1 + \eta), \\ \frac{dN_7}{d\xi} &= -\frac{1}{4} \cdot (1 + \eta) \cdot (-2 \cdot \xi + \eta), & \frac{dN_8}{d\xi} &= -\frac{1}{2} \cdot (1 - \eta^2), & \frac{dN_1}{d\eta} &= -\frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (-2 \cdot \eta - \xi), \\ \frac{dN_2}{d\eta} &= -\frac{1}{2} \cdot (1 - \xi^2), & \frac{dN_3}{d\eta} &= -\frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (-2 \cdot \eta + \xi), & \frac{dN_4}{d\eta} &= -\eta \cdot (1 + \xi), \\ & \frac{dN_5}{d\eta} &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (2 \cdot \eta + \xi), & \frac{dN_6}{d\eta} &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi^2), \\ & \frac{dN_7}{d\eta} &= \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (2 \cdot \eta - \xi), & \frac{dN_8}{d\eta} &= -\eta \cdot (1 - \xi). \end{aligned}$$

Далі перейдемо до визначення номерів вузлів в глобальних координатах по номерах кінцевих елементів. Як і при лінійній апроксимації, позначимо через k поточний номер кінцевого елемента по осі x і через l поточний номер по осі y . Тоді глобальний номер першого вузла, згідно нумерації на рис. 6.7, вираховується по формулі:

$$ng1 = 2 \cdot l - 1 + (k - 1) \cdot (3 \cdot ny + 2),$$

$$ng8 = ng1 + 1, \quad ng7 = ng1 + 2.$$

Глобальні номери інших вузлів: $ng2 = l + k \cdot (2 \cdot ny + 1) + (k - 1) \cdot (ny + 1)$, $ng6 = ng2 + 1$;

$$ng3 = 2 \cdot l - 1 + k \cdot (3 \cdot ny + 2); \quad ng4 = ng3 + 1; \quad ng5 = ng3 + 2.$$

Наприклад, при $l = 2$ і $k = 3$ отримуємо:

$$ng1 = 2 \cdot l - 1 + (k - 1) \cdot (3 \cdot ny + 2) = 2 \cdot 2 - 1 + (3 - 1) \cdot (3 \cdot 3 + 2) = 4 - 1 + 22 = 25;$$

$$ng8 = ng1 + 1 = 25 + 1 = 26; \quad ng6 = ng2 + 1 = 31 + 1 = 32; \quad ng7 = ng1 + 2 = 25 + 2 = 27;$$

$$ng2 = l + k \cdot (2 \cdot ny + 1) + (k - 1) \cdot (ny + 1) = 2 + 3 \cdot (2 \cdot 3 + 1) + (3 - 1) \cdot (3 + 1) = 2 + 21 + 8 = 31;$$

$$ng3 = 2 \cdot l - 1 + k \cdot (3 \cdot ny + 2) = 2 \cdot 2 - 1 + 3 \cdot (3 \cdot 3 + 2) = 4 - 1 + 33 = 36;$$

$$ng4 = ng3 + 1 = 36 + 1 = 37; \quad ng5 = ng3 + 2 = 36 + 2 = 38.$$

Наведені формули дійсні тільки для прямокутної області (рис. 6.7) при нумерації вузлів знизу вгору і зліва направо. Якщо змінити порядок нумерації, наприклад, спочатку зліва направо і далі знизу вгору, то формули зміняться:

$$ng1 = 2 \cdot k - 1 + (l - 1) \cdot (3 \cdot nx + 2); \quad ng2 = ng1 + 1; \quad ng3 = ng1 + 2;$$

$$ng8 = k + l \cdot (2 \cdot nx + 1) + (l - 1) \cdot (nx + 1); \quad ng4 = ng8 + 1;$$

$$ng7 = 2 \cdot k - 1 + l \cdot (3 \cdot nx + 2), \quad ng6 = ng7 + 1; \quad ng5 = ng7 + 2.$$

Порядок системи рівнянь в даному випадку буде дорівнювати $lb = 3 \cdot nx \cdot ny + 2 \cdot (nx + ny) + 1 = 3 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot (5 + 3) + 1 = 45 + 16 + 1 = 62$. Він не залежить від послідовності нумерації. Від послідовності нумерації залежить ширина стрічки, в якій розміщуються ненульові коефіцієнти вздовж головної діагоналі матриці коефіцієнтів. Вона

дорівнює максимальній різниці номерів вузлів в межах кожного кінцевого елемента, збільшеній на одиницю. При першому варіанті ширина стрічки $nb = 3 \cdot (ny + 1) + 2 = 3 \cdot (3 + 1) + 2 = 3 \cdot 4 + 2 = 12 + 2 = 14$.

В другому варіанті $nb = 3 \cdot (nx + 1) + 2 = 3 \cdot (5 + 1) + 2 = 3 \cdot 6 + 2 = 18 + 2 = 20$.

Тому, перший варіант в даному випадку пріоритетний.

Розрахункові формули для обчислення компонентів матриць коефіцієнтів залишаються без змін - це вирази (6.10) - (6.13). Змінюються тільки координатні функції і їх похідні. Тому, вирази для базових матриць будуть мати наступний вигляд :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{dN}{d\xi} \cdot \frac{dN}{d\eta} \cdot d\xi \cdot d\eta = [E] = \frac{1}{90} \cdot$$

| | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 52 | - 80 | 28 | - 6 | 23 | - 40 | 17 | 6 |
| - 80 | 160 | - 80 | | - 40 | 80 | - 40 | |
| 28 | - 80 | 52 | 6 | 17 | - 40 | 23 | - 6 |
| - 6 | | 6 | 48 | 6 | | - 6 | - 48 |
| 23 | - 40 | 17 | 6 | 52 | - 80 | 28 | - 6 |
| - 40 | 80 | - 40 | | - 80 | 160 | - 80 | |
| 17 | - 40 | 23 | - 6 | 28 | - 80 | 52 | 6 |
| 6 | | - 6 | - 48 | - 6 | | 6 | 48 |

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{dN}{d\eta} \cdot \frac{dN}{d\eta} \cdot d\xi \cdot d\eta = [D] = \frac{1}{90} \cdot$$

| | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 52 | 6 | 17 | - 40 | 23 | - 6 | 28 | - 80 |
| 6 | 48 | 6 | | - 6 | - 48 | - 6 | |
| 17 | 6 | 52 | - 80 | 28 | - 6 | 23 | - 40 |
| - 40 | | - 80 | 160 | - 80 | | - 40 | 80 |
| 23 | - 6 | 28 | - 80 | 52 | 6 | 17 | - 40 |
| - 6 | - 48 | - 6 | | 6 | 48 | 6 | |
| 28 | - 6 | 23 | - 40 | 17 | 6 | 52 | - 80 |
| - 80 | | - 40 | 80 | - 40 | | - 80 | 160 |

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N \cdot d\xi \cdot d\eta = [G] = \frac{1}{3} \cdot$$

| | | | | | | | |
|---|----|---|----|---|----|---|----|
| 1 | -4 | 1 | -4 | 1 | -4 | 1 | -4 |
|---|----|---|----|---|----|---|----|

В обчислювальних формулах (6.10), змінюються тільки базові матриці:

$$a_{ij}^0 = \left\{ \lambda_x \cdot \frac{y_{l+1} - y_l}{x_{k+1} - x_k} \cdot [E] + \lambda_x \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{l+1} - y_l} \cdot [D] \right\}; \quad b_i^0 = 0,25 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (y_{l+1} - y_l) \cdot q_0 \cdot [G].$$

Крайові умови на границях розрахункової області.

Нижня і верхня границі.

$$\int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot d\xi = [U] = \frac{1}{15}$$

| | | | | | | | |
|----|----|----|--|----|----|----|--|
| 4 | 2 | -1 | | | | | |
| 2 | 16 | 2 | | | | | |
| -1 | 2 | 4 | | | | | |
| | | | | 4 | 2 | -1 | |
| | | | | 2 | 16 | 2 | |
| | | | | -1 | 2 | 4 | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

Права і ліва границі.

$$\int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot d\eta = [V] = \frac{1}{15}$$

| | | | | | | | |
|----|--|----|----|----|--|----|----|
| 4 | | | | | | -1 | 2 |
| | | | | | | | |
| | | 4 | 2 | -1 | | | |
| | | 2 | 16 | 2 | | | |
| | | -1 | 2 | 4 | | | |
| | | | | | | | |
| -1 | | | | | | 4 | 2 |
| 2 | | | | | | 2 | 16 |

Поверхня пластини.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot d\xi \cdot d\eta = [S] = \frac{1}{45}$$

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 6 | -6 | 2 | -8 | 3 | -8 | 2 | -6 |
| -6 | 32 | -6 | 20 | -8 | 16 | -8 | 20 |
| 2 | -6 | 6 | -6 | 2 | -8 | 3 | -8 |
| -8 | 20 | -6 | 32 | -6 | 20 | -8 | 16 |
| 3 | -8 | 2 | -6 | 6 | -6 | 2 | -8 |
| -8 | 16 | -8 | 20 | -6 | 32 | -6 | 20 |
| 2 | -8 | 3 | -8 | 2 | -6 | 6 | -6 |
| -6 | 20 | -8 | 16 | -8 | 20 | -6 | 32 |

Компоненти матриць $[H]$ обчислюються по формулах (6.11) – (6.13), але з використанням базових матриць для квадратичної апроксимації. Матриці на границях $[U]$ і $[V]$ можна об'єднати в їх суму $[[U] + [V]]$.

6.3. Приклад розрахунку плоскопаралельного температурного поля в декартових координатах

Для ілюстрації роботи QBASIC-програми розрахунків плоскопаралельного температурного поля, розглянемо температурне поле теплої підлоги. Конструкція теплої підлоги складається з системи прямолінійних провідників (електрокабелі, або трубки з теплою водою), розташованих під керамічною плиткою. Схематично розташування конструктивних елементів теплої підлоги показано на рис. 6.8.

Оскільки фрагменти конструкції теплої підлоги періодично повторюються, то для розрахунку температурного поля достатньо виділити один з таких фрагментів, як показано на рис. 6.8. Виділений на рис. 6.8 фрагмент повернемо на 90 градусів і розташуємо його в декартових координатах, як показано на рис. 6.9. Там же вказані геометричні розміри фрагмента і розділення розрахункової моделі на прямокутні кінцеві елементи. Геометричні розміри сітки кінцевих елементів і заповнення їх теплофізичними характеристиками є вихідними даними для QBASIC-програми.

Після введення вихідних даних заповнення сітки кінцевих елементів ілюструється поелементним виводом структури на екран дисплея комп'ютера.

Крайові умови на поверхні конвективної передачі тепла від підлоги в навколишнє середовище задаються коефіцієнтом конвекції α . На нижній і верхній поверхнях розрахункового фрагмента (рис. 6.9), згідно умовам симетрії, задані нульові крайові умови Ньютона ($\alpha = 0$). Також нульові крайові умови задані і на крайній границі термоізоляції підлоги. Термоізоляція чинить опір проникненню теплового потоку в глибину настільки, що ним можна знехтувати і вважати рівним нулю.

В результаті розрахунків на екран дисплея комп'ютера виводяться графіки розподілу температури на границях кінцевих елементів вздовж осей координат і числові значення температури в вузлах кінцевих елементів на поверхні підлоги (рис.6.10). Після очищення екрана малюється картина розподілу ізотерм температурного поля, виводяться максимальне і мінімальне значення температури (рис. 6.11). Нижче наведено повний текст програми.

SCREEN 12

```
DIM xb(21):DIM yb(9):DIM qe(20, 9):DIM ex(20, 9):DIM ey(20, 9):DIM cc(21)
DIM a(233, 30):DIM c(233, 30): DIM ca(233, 30): DIM br(233):DIM ww(20, 9)
DIM xg(8): DIM yg(8): DIM lg(8): DIM ip(20, 9): DIM snp(8), dxp(8), dyp(8): DIM r(21): DIM
dnx(3, 3, 8): DIM dny(3, 3, 8): DIM rr(3, 3)
DIM x(233): DIM q(233): DIM bx(233): DIM qt(20, 9)
DIM po(20, 9): DIM co(20, 9): DIM qg(20, 9): DIM qv(20, 9): DIM qw(20, 9)
DIM e(8, 8): DIM d(8, 8): DIM g(8): DIM w(8, 8)
REM Введення вихідних даних.
nx = 8: ny = 6: nx1 = 3: nx2 = 4: ny1 = 2: ny2 = 3: ab = 0: ah = 0:
ap = 10: al = 0: q0 = 250000: dt = 200: t0 = 15: ml = 45: n = nx
r(1) = 0: r(2) = .005: r(3) = .006: r(4) = .008: r(5) = .01
```

```

r(6) = .011: r(7) = .012: r(8) = .017: r(9) = .022:
yb(1) = 0: yb(2) = .001: yb(3) = .003: yb(4) = .005:
yb(5) = .007: yb(6) = .01: yb(7) = .015
REM Базові матриці.
e(1, 1) = 52: e(1, 2) = -80: e(1, 3) = 28: e(1, 4) = -6:
e(1, 5) = 23: e(1, 6) = -40: e(1, 7) = 17: e(1, 8) = 6:
e(2, 2) = 160: e(2, 3) = -80: e(2, 4) = 0: e(2, 5) = -40:
e(2, 6) = 80: e(2, 7) = -40: e(2, 8) = 0: e(4, 8) = -48:
e(3, 3) = 52: e(3, 4) = 6: e(3, 5) = 17: e(3, 6) = -40:
e(3, 7) = 23: e(3, 8) = -6: e(7, 7) = 52: e(7, 8) = 6:
e(4, 4) = 48: e(4, 5) = 6: e(4, 6) = 0: e(4, 7) = -6:
e(5, 5) = 52: e(5, 6) = -80: e(5, 7) = 28: e(5, 8) = -6:
e(6, 6) = 160: e(6, 7) = -80: e(6, 8) = 0: e(8, 8) = 48:
d(1, 1) = 52: d(1, 2) = 6: d(1, 3) = 17: d(1, 4) = -40:
d(1, 5) = 23: d(1, 6) = -6: d(1, 7) = 28: d(1, 8) = -80:
d(2, 2) = 48: d(2, 3) = 6: d(2, 4) = 0: d(2, 5) = -6:
d(2, 6) = -48: d(2, 7) = -6: d(2, 8) = 0: d(4, 8) = 80:
d(3, 3) = 52: d(3, 4) = -80: d(3, 5) = 28: d(3, 6) = -6:
d(3, 7) = 23: d(3, 8) = -40: d(7, 7) = 52: d(7, 8) = -80:
d(4, 4) = 160: d(4, 5) = -80: d(4, 6) = 0: d(4, 7) = -40:
d(5, 5) = 52: d(5, 6) = 6: d(5, 7) = 17: d(5, 8) = -40:
d(6, 6) = 48: d(6, 7) = 6: d(6, 8) = 0: d(8, 8) = 160:
g(1) = -1: g(2) = 4: g(3) = -1: g(4) = 4: g(5) = -1:
g(6) = 4: g(7) = -1: g(8) = 4:
w(1, 1) = 4: w(1, 2) = 2: w(1, 3) = -1: w(1, 4) = 0: w(1, 5) = 0:
w(1, 6) = 0: w(1, 7) = -1: w(1, 8) = 2:
w(2, 2) = 16: w(2, 3) = 2: w(2, 4) = 0: w(2, 5) = 0: w(2, 6) = 0:
w(2, 7) = 0: w(2, 8) = 0: w(7, 7) = 4: w(7, 8) = 2:
w(3, 3) = 4: w(3, 4) = 2: w(3, 5) = -1: w(3, 6) = 0: w(3, 7) = 0:
w(3, 8) = 0: w(6, 6) = 16: w(6, 7) = 2: w(6, 8) = 0:
w(4, 4) = 16: w(4, 5) = 2: w(4, 6) = 0: w(4, 7) = 0: w(4, 8) = 0:
w(5, 5) = 4: w(5, 6) = 2: w(5, 7) = -1: w(5, 8) = 0: w(8, 8) = 16:
FOR i = 1 TO 8: g(i) = g(i) / 3: FOR j = 1 TO 8
e(j, i) = e(i, j): d(j, i) = d(i, j): w(j, i) = w(i, j): NEXT j: NEXT i
FOR i = 1 TO 8: FOR j = 1 TO 8: e(i, j) = e(i, j) / 90: d(i, j) = d(i, j) / 90
w(i, j) = w(i, j) / 3: NEXT j: NEXT i
REM Візуалізація конструкції.
WINDOW (0, 0)-(12, 8): FOR i = 1 TO ny + 1
LINE (0, 500 * yb(i))-(500 * xb(nx + 1), 500 * yb(i)), i : NEXT i
FOR i = 1 TO nx + 1
LINE (500 * (xb(i)), 0)-(500 * (xb(i)), 500 * yb(ny + 1)), i : NEXT i
FOR k = nx1 TO nx2: FOR l = ny1 TO ny2
ex(k, l) = 100: ey(k, l) = 100: po(k, l) = 8200: co(k, l) = 400: qe(k, l) = q0
NEXT l: NEXT k
LINE (500*xb(nx1), 500*yb(ny1))-(500*xb(nx2 + 1), 500*yb(ny2 + 1)), 6, BF
l = 1: FOR k = nx1 TO nx2
ex(k, l) = .05: ey(k, l) = .05: po(k, l) = 800: co(k, l) = 2400: qe(k, l) = 0
FOR x = xb(k) TO xb(k + 1) STEP .0001
FOR y = 0 TO yb(l + 1) STEP .0001
CIRCLE (500 * x, 500 * y), .0001, 1 : NEXT y : NEXT x : NEXT k
FOR k = nx1 TO nx2 : FOR l = ny2 + 1 TO ny
ex(k, l) = .05: ey(k, l) = .05: po(k, l) = 800: co(k, l) = 2400: qe(k, l) = 0

```

```

FOR x = xb(k) TO xb(k + 1) STEP .0001
FOR y = yb(l) TO yb(l + 1) STEP .0001
CIRCLE (500 * x, 500 * y), .0001, 1: NEXT y: NEXT x: NEXT l: NEXT k
FOR k = 1 TO 2: FOR l = 1 TO ny
ex(k, l) = .05: ey(k, l) = .05: po(k, l) = 800: co(k, l) = 2400: qe(k, l) = 0
FOR x = xb(k) TO xb(k + 1) STEP .0001
FOR y = yb(l) TO yb(l + 1) STEP .0001
CIRCLE (500 * x, 500 * y), .0001, 1: NEXT y: NEXT x: NEXT l: NEXT k
k = nx2 + 1: FOR l = 1 TO ny
ex(k, l) = .05: ey(k, l) = .05: po(k, l) = 800: co(k, l) = 2400: qe(k, l) = 0
FOR x = xb(k) TO xb(k + 1) STEP .0001
FOR y = yb(l) TO yb(l + 1) STEP .0001
CIRCLE (500 * x, 500 * y), .0001, 1: NEXT y: NEXT x: NEXT l
k = nx2 + 2: FOR l = 1 TO ny
ex(k, l) = 100: ey(k, l) = 100: po(k, l) = 2700: co(k, l) = 400: qe(k, l) = 0
FOR x = xb(k) TO xb(k + 1) STEP .0001
FOR y = yb(l) TO yb(l + 1) STEP .0001
CIRCLE (500 * x, 500 * y), .0001, 7: NEXT y: NEXT x: NEXT l
k = nx - 1: FOR l = 1 TO ny
ex(k, l) = .3: ey(k, l) = .3: po(k, l) = 2800: co(k, l) = 2400: qe(k, l) = 0
FOR x = xb(k) TO xb(k + 1) STEP .0001
FOR y = yb(l) TO yb(l + 1) STEP .0001
CIRCLE (500 * x, 500 * y), .0001, 5: NEXT y: NEXT x: NEXT l
k = nx: FOR l = 1 TO ny
ex(k, l) = 1: ey(k, l) = 1: po(k, l) = 5000: co(k, l) = 2400: qe(k, l) = 0
FOR x = xb(k) TO xb(k + 1) STEP .0001
FOR y = yb(l) TO yb(l + 1) STEP .0001
CIRCLE (500 * x, 500 * y), .0001, 6: NEXT y: NEXT x: NEXT l
REM Формування матриці коефіцієнтів.
nb = 3 * ny + 5: lb = nx * (3 * ny + 2) + 2 * ny + 1: kt = 1
PRINT "nb =", nb, "lb =", lb
FOR i = 1 TO lb: bx(i) = 0: x(i) = 0: NEXT i:
FOR i = 1 TO lb: FOR j = 1 TO nb: a(i, j) = 0: NEXT j, i
FOR i = 1 TO lb: br(i) = 0: bx(i) = 0: NEXT i:
FOR i = 1 TO lb: FOR j = 1 TO nb: a(i, j) = 0: c(i, j) = 0: NEXT j, i
FOR k = 1 TO nx: FOR l = 1 TO ny:
FOR i = 1 TO 8: CIRCLE (500 * (xg(i)), 500 * yg(i)), .05, 7: NEXT i:
GOSUB 60
FOR i = 1 TO 8: ia = lg(i): sxx = (xb(k + 1) - xb(k)):
ssy = (yb(l + 1) - yb(l)): br(ia) = br(ia) + .25 * qe(k, l) * g(i) * sxx * ssy
FOR j = 1 TO 8: ja = lg(j):
sij = (ey(k, l) * d(i, j) * sxx / ssy + ex(k, l) * e(i, j) * ssy / sxx)
IF ja > ia THEN GOTO 6
a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij
c(ia, ja - ia + nb) = c(ia, ja - ia + nb) + cij
6 NEXT j: NEXT i: ip(k, l) = 1: NEXT l: NEXT k
REM Крайові умови Ньютона на поверхні підлоги.
PRINT "ab=", ab
l = ny: FOR k = 1 TO nx: GOSUB 60
c1 = .5 * (xg(5) - xg(7)): FOR i = 5 TO 7: ia = lg(i): FOR j = 5 TO 7: ja = lg(j)
IF ja <= ia THEN a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + c1 * w(i, j) * ab
NEXT j: NEXT i: NEXT k

```

```

PRINT "ah=", ah
I = 1: FOR k = 1 TO nx: GOSUB 60
c1 = .5 * (xg(3) - xg(1)): FOR i = 1 TO 3: ia = lg(i): FOR j = 1 TO 3: ja = lg(j)
IF ja <= ia THEN a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + w(i, j) * ah
NEXT j: NEXT i: NEXT k
PRINT "ap=", ap
k = nx: FOR I = 1 TO ny: GOSUB 60
c4 = .5 * (yg(5) - yg(3)): FOR i = 3 TO 5: ia = lg(i): FOR j = 3 TO 5: ja = lg(j)
IF ja <= ia THEN a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + c4 * w(i, j) * ap
NEXT j: NEXT i: NEXT I
PRINT "al=", al
k = 1: FOR I = 1 TO ny: GOSUB 60
c4 = .5 * (yg(7) - yg(1)): FOR i = 7 TO 9: ii = i:
IF i = 9 THEN ii = 1
ia = lg(ii):
FOR j = 7 TO 9: jj = j:
IF j = 9 THEN jj = 1
ja = lg(jj)
REM IF ja <= ia THEN a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + c4 * w(i, j) * al
NEXT j: NEXT i: NEXT I
REM Рішення системи рівнянь.
FOR i = 1 TO lb: bx(i) = br(i): q(i) = br(i): NEXT i: GOSUB 100
FOR i = 1 TO n: br(i) = x(i): q(i) = br(i): NEXT i
REM Побудова графіків вздовж осі x.
I = ny1: FOR I = 1 TO ny: FOR k = 1 TO nx: GOSUB 60
yl = 1: FOR xl = -1 TO 1 STEP .005: GOSUB 90
z = 0: tt = 0: FOR i = 1 TO 8: z = z + snp(i) * xg(i):
tt = tt + snp(i) * q(lg(i)): NEXT i
CIRCLE (500 * z, (tt + t0) * .15), .01, I + 1: NEXT xl: NEXT k: NEXT I
REM Побудова графіків вздовж осі y.
FOR k = 1 TO nx: FOR I = 1 TO ny: GOSUB 60
xl = 1: FOR yl = -1 TO 1 STEP .005: GOSUB 90
z = 0: tt = 0: FOR i = 1 TO 8: z = z + snp(i) * yg(i):
tt = tt + snp(i) * q(lg(i)): NEXT i
CIRCLE ((tt + t0) * .3, 500 * z), .01, k + 1: NEXT yl: NEXT I: NEXT k
STOP: PRINT "lg()", "yg()", "T()"
REM Виведення на екран значень температури на поверхні підлоги.
k = nx: FOR I = 1 TO ny: GOSUB 60
PRINT lg(3), yg(3), q(lg(3)) + t0: PRINT lg(4), yg(4), q(lg(4)) + t0: NEXT I
PRINT lg(5), yg(5), q(lg(5)) + t0: ss = 0: FOR i = 1 TO ny
ss = ss + .25 * ap * (yg(3) + yg(5)) * (q(lg(3)) + q(lg(5))): NEXT i
sv = 0: FOR k = nx1 TO nx2: FOR I = ny1 TO ny2:
sv = sv + q0 * (xb(k + 1) - xb(k)) * (yb(I + 1) - yb(I)): NEXT I: NEXT k
PRINT "ss=", ss, "sv=", sv
STOP: CLS: FOR i = 1 TO ny + 1
LINE (0, 500 * yb(i))-(500 * xb(nx + 1), 500 * yb(i)), i: NEXT i
i = ny + 1: LINE (0, 500 * yb(i))-(500 * xb(nx + 1), 500 * yb(i)), 7
FOR i = 1 TO nx + 1
LINE (500 * (xb(i)), 0)-(500 * (xb(i)), 500 * yb(ny + 1)), i: NEXT i
i = nx + 1: LINE (500 * (xb(i)), 0)-(500 * (xb(i)), 500 * yb(ny + 1)), 7
LINE (500 * xb(nx1), 500 * yb(ny1))-(500 * xb(nx2+1), 500 * yb(ny2+1)), 6, BF
REM Побудова ізотерм.

```

```

FOR i = 1 TO lb: bx(i) = q(i): NEXT i
ml = 10: t1 = 10000000: t2 = 0: FOR i = 1 TO lb
IF t1 > bx(i) THEN i1 = i
IF t2 < bx(i) THEN i2 = i
IF t1 > bx(i) THEN t1 = bx(i)
IF t2 < bx(i) THEN t2 = bx(i)
NEXT i: td = (t2 - t1) / ml: PRINT "    ": PRINT "Tmax ="; t2 + t0
PRINT "Tmin ="; t1 + t0: PRINT "Tokr ="; t0: x(1) = t1
FOR i = 1 TO ml: x(i + 1) = x(i) + td: NEXT i
FOR l = 1 TO ny: FOR k = 1 TO nx: GOSUB 60
FOR yl = -1 TO 1 STEP .001: xl = -1: GOSUB 90
z = 0: tt = 0: FOR i = 1 TO 8: z = z + snp(i) * xg(i)
tt = tt + snp(i) * bx(lg(i)): NEXT i: r(1) = tt: v(1) = z: xl = 1: GOSUB 90
z = 0: tt = 0: FOR i = 1 TO 8: z = z + snp(i) * xg(i):
tt = tt + snp(i) * bx(lg(i)): NEXT i: r(3) = tt: v(3) = z: xl = 0: GOSUB 90
f = 0: z = 0: tt = 0: FOR i = 1 TO 8: f = f + snp(i) * yg(i):
z = z + snp(i) * xg(i): tt = tt + snp(i) * bx(lg(i)): NEXT i
r(2) = tt: v(2) = z: r1 = v(2) * v(2) - v(1) * v(1):
r2 = v(3) * v(3) - v(1) * v(1): p1 = v(3) - v(1): p2 = v(2) - v(1):
f1 = r(2) - r(1): f2 = r(3) - r(1): det = r1 * p1 - r2 * p2
dea = f1 * p1 - f2 * p2: deb = r1 * f2 - r2 * f1: ad = dea / det:
bd = deb / det: cd = r(1) - ad * v(1) * v(1) - bd * v(1)
FOR j = 1 TO ml: sq = (bd * bd - 4 * ad * (cd - x(j))): IF sq < 0 THEN 33
sq = SQR(sq): IF ABS(ad) > 0 THEN x11 = .5 * (-bd - sq) / ad
IF ABS(ad) > 0 THEN x22 = .5 * (-bd + sq) / ad
IF v(1) < x11 AND v(3) > x11 THEN CIRCLE (500 * x11, 500 * f), .006, ml - j + 1
IF v(1) < x22 AND v(3) > x22 THEN CIRCLE (500 * x22, 500 * f), .006, ml - j + 1
33 NEXT j: NEXT yl: NEXT k: NEXT l:
STOP
60 REM Глобальні координати і номери вузлів.
xg(1) = xb(k): xg(2) = .5 * (xb(k) + xb(k + 1)): xg(3) = xb(k + 1):
xg(4) = xg(3): xg(5) = xg(3): xg(6) = xg(2): xg(7) = xg(1): xg(8) = xg(1)
yg(1) = yb(l): yg(2) = yg(1): yg(3) = yg(1): yg(4) = .5 * (yb(l) + yb(l + 1))
yg(5) = yb(l + 1): yg(6) = yg(5): yg(7) = yg(5): yg(8) = yg(4)
ns = (2 * ny + 1) * (k - 1) + (ny + 1) * (k - 1) + 2 * l - 1
lg(1) = ns: lg(8) = ns + 1: lg(7) = ns + 2
ns = (2 * ny + 1) * k + l + (ny + 1) * (k - 1)
lg(2) = ns: lg(6) = ns + 1: ns = (2 * ny + 1) * k + (ny + 1) * k + 2 * l - 1
lg(3) = ns: lg(4) = ns + 1: lg(5) = ns + 2
RETURN
90 REM Координатні функції і їх похідні.
snp(1) = .25 * (1 - xl) * (1 - yl) * (-1 * xl - yl - 1)
dxp(1) = -.25 * (1 - yl) * (-2 * xl - yl): dyp(1) = -.25 * (1 - xl) * (-2 * yl - xl)
snp(2) = .5 * (1 - xl * xl) * (1 - yl)
dxp(2) = -xl * (1 - yl): dyp(2) = -.5 * (1 - xl * xl)
snp(3) = .25 * (1 + xl) * (1 - yl) * (xl - yl - 1)
dxp(3) = .25 * (1 - yl) * (2 * xl - yl): dyp(3) = -.25 * (1 + xl) * (-2 * yl + xl)
snp(4) = .5 * (1 + xl) * (1 - yl * yl)
dxp(4) = .5 * (1 - yl * yl): dyp(4) = -1 * yl * (1 + xl)
snp(5) = .25 * (1 + xl) * (1 + yl) * (xl + yl - 1)
dxp(5) = .25 * (1 + yl) * (2 * xl + yl): dyp(5) = .25 * (1 + xl) * (2 * yl + xl)
snp(6) = .5 * (1 - xl * xl) * (1 + yl)

```

$dxp(6) = -1 * xl * (1 + yl) : dyp(6) = .5 * (1 - xl * xl)$
 $snp(7) = .25 * (1 - xl) * (1 + yl) * (yl - xl - 1)$
 $dxp(7) = -.25 * (1 + yl) * (-2 * xl + yl) : dyp(7) = .25 * (1 - xl) * (2 * yl - xl)$
 $snp(8) = .5 * (1 - xl) * (1 - yl * yl)$
 $dxp(8) = -.5 * (1 - yl * yl) : dyp(8) = -1 * yl * (1 - xl)$
 RETURN

100 REM Розв'язування системи рівнянь.

В цьому місці необхідно розмістити підпрограму розв'язування системи рівнянь, наведену в розділі 5.4 на сторінці 129.

В наведеному прикладі не розглядається нестационарний режим.

Нестационарні і нелінійні режими будуть розглянуті в розділі 6.6, де вони мають принципове практичне значення.

6.4. Осесиметричне температурне поле в циліндричних координатах

Диференційне рівняння теплопровідності в циліндричних координатах може бути записано [3, С.18] як:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\lambda_r \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z}) = -q(r, z). \quad (6.22)$$

Після перемноження лівої і правої частин на радіус r , перетворимо його до вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial r} (\lambda_r \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_z \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial z}) = -q(r, z). \quad (6.23)$$

Рівняння (6.23) повторює рівняння (6.1) для плоскопаралельного температурного поля в декартових координатах, всі доданки якого помножені на радіус r . Тому, щоб отримати розрахункові формули для обчислення компонентів матриць кінцевоелементних рівнянь в циліндричних координатах, достатньо взяти розрахункові формули для обчислення цих компонентів в декартових координатах і виконати відповідні підстановки, а саме, замість λ_x підставляємо $\lambda_r \cdot r$, замість λ_y підставляємо $\lambda_y \cdot r$, і замість $q(x, y)$, підставляємо $q(x, y) \cdot r$. При цьому отримаємо розрахункові вирази:

$$a_{ij}^3 = \lambda_r \cdot \int_z \int_r \frac{dN_i}{dr} \cdot \frac{dN_j}{dr} \cdot r \cdot dr \cdot dz + \lambda_z \cdot \int_z \int_r \frac{dN_i}{dz} \cdot \frac{dN_j}{dz} \cdot r \cdot dr \cdot dz; \quad (6.24)$$

$$b_i^3 = \int_z \int_r N_i \cdot q(r, z) \cdot r \cdot dr \cdot dz. \quad (6.25)$$

В локальних координатах:

$$a_{ij}^3 = \lambda_r \cdot \frac{z_{i+1} - z_i}{r_{k+1} - r_k} \cdot \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{dN_j}{d\xi} \cdot r \cdot d\xi \cdot d\eta + \lambda_z \cdot \frac{r_{k+1} - r_k}{z_{i+1} - z_i} \cdot \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\eta} \cdot \frac{dN_j}{d\eta} \cdot r \cdot d\xi \cdot d\eta; \quad (6.26)$$

$$b_i^3 = 0,25 \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot (z_{i+1} - z_i) \cdot q_0 \cdot \int_{-1}^1 N_i \cdot r \cdot d\xi \cdot d\eta. \quad (6.27)$$

Компоненти матриць $[H]$ при $\alpha_r = const$, $\alpha_z = const$.

$$h_{ij}^3 = 0,5 \cdot \{ (r_{k+1} - r_k) \cdot \alpha_z \cdot \int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot r \cdot d\xi \} - \text{для радіальних границь}, \quad (6.28)$$

$$h_{ij}^3 = 0,5 \cdot \{ (z_{i+1} - z_i) \cdot \alpha_r \cdot \int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot r \cdot d\eta \} - \text{для осевих границь}. \quad (6.29)$$

Виведення формул для компонентів матриць кінцевоелементних рівнянь в циліндричних координатах можна виконати дещо іншим шляхом. Осесиметричні конструкції утворюються обертанням плоскопаралельних конструкцій навколо вертикальної осі. Тому розрахункові формули для компонентів матриць кінцевоелементних рівнянь в циліндричних координатах можна отримати при інтегруванні по об'єму кінцевого елемента, утвореного обертанням прямокутного розтину навколо вертикальної осі. Елемент об'єму в циліндричних координатах $dv = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot dz$. Таким чином, заміна елемента об'єму $ds = dx \cdot dy$ в розрахункових формулах для обчислення компонентів матриць кінцевоелементних рівнянь в декартових координатах на елемент об'єму $dv = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot dz$, після скорочення на $2 \cdot \pi$, дає нам вирази (6.24) – (6.29) для компонентів матриць кінцевоелементних рівнянь в циліндричних координатах.

6.5. Інтегрування компонентів матриць кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь в циліндричних координатах

В декартових координатах для прямокутних кінцевих елементів підінтегральні вирази в локальних координатах ξ, η не залежали від положення прямокутника в системі глобальних координат. Таким чином, при обчисленні компонентів матриць кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь, підінтегральні вирази повністю виражалися тільки через локальні координати і могли бути позначені в загальному випадку функцією $f(\xi, \eta)$.

Для числового інтегрування в локальних координатах скористаємося квадратурними формулами Гауса [12., С.699], [4., С.305], [10., С.106]. Для двократного інтеграла ці формули мають вигляд:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k w_m \cdot w_n \cdot f(\xi_m, \eta_n), \quad (6.30)$$

де k – порядок квадратури Гауса;

ξ_m, η_n - вузли квадратур Гауса;

w_m, w_n - ваги квадратур Гауса.

З врахуванням (6.30) запишемо розрахункові вирази для компонентів матриць кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь в квадратурах Гауса.

$$\begin{aligned} a_{ij}^3 = & \lambda_r \cdot \frac{z_{l+1} - z_l}{r_{k+1} - r_k} \cdot \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{dN_j}{d\xi} \cdot r(\xi_n, \eta_m) \cdot w_n \cdot w_m + \\ & + \lambda_z \cdot \frac{r_{k+1} - r_k}{z_{l+1} - z_l} \cdot \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \frac{dN_i}{d\eta} \cdot \frac{dN_j}{d\eta} \cdot r(\xi_n, \eta_m) \cdot w_n \cdot w_m ; \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$b_i^3 = 0,25 \cdot (r_{k+1} - r_k) \cdot (z_{l+1} - z_l) \cdot q_0 \cdot \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 N_i(\xi_n, \eta_m) \cdot r(\xi_n, \eta_m) \cdot w_n \cdot w_m ; \quad (6.32)$$

для нижніх радіальних границь:

$$h_{ij}^3 = 0,5 \cdot \{ (r_{k+1} - r_k) \cdot \alpha_z \cdot \sum_{n=1}^3 N_i(\xi_n, -1) \cdot N_j(\xi_n, -1) \cdot r(\xi_n) \cdot w_n \} \quad (6.33)$$

для верхніх радіальних границь:

$$h_{ij}^3 = 0,5 \cdot \{ (r_{k+1} - r_k) \cdot \alpha_z \cdot \sum_{n=1}^3 N_i(\xi_n, +1) \cdot N_j(\xi_n, +1) \cdot r(\xi_n) \cdot w_n \} \quad (6.34)$$

для внутрішніх осевих границь

$$h_{ij}^3 = 0,5 \cdot \{ (z_{l+1} - z_l) \cdot \alpha_r \cdot r_l \cdot \sum_{m=1}^3 N_i(-1, \eta_m) \cdot N_j(-1, \eta_m) \cdot w_m \} \quad (6.35)$$

для зовнішніх осевих границь:

$$h_{ij}^3 = 0,5 \cdot \{ (z_{l+1} - z_l) \cdot \alpha_r \cdot r_{ny+1} \cdot \sum_{m=1}^3 N_i(+1, \eta_m) \cdot N_j(+1, \eta_m) \cdot w_m \} \quad (6.36)$$

Досвід практичного використання метода кінцевих елементів показує, що задовільні результати вже дають квадратури Гауса третього порядку

($m = n = 3$). Вузли, яких ($\xi_1 = -0,7746$; $\xi_2 = 0$; $\xi_3 = 0,7746$) і ваги ($w_1 = 0,55556$;

$w_2 = 0,88889$; $w_3 = 0,55556$).

Квадратурні формули Гауса дозволяють замінити операцію інтегрування невідомої функції операціями множення і додавання.

6.6. Математична модель нестационарного температурного поля в нелінійному циліндрі при квадратичній апроксимації

Як приклад для ілюстрації рішення задачі розрахунку температурного поля в циліндричних координатах, розглянемо конструкцію для виготовлення з епоксидної смоли втулки на металевій трубі (рис. 6.10).

Конструкція складається зі сталюгого стакану на теплоізоляційній підкладці. В стакані симетрично розміщується металева труба з системою ЭД-20 - ПЭПА. Труба обгорнута тонкою фольгою, щоб відділити втулку від труби і розташована симетрично в другому тонкостінному алюмінієвому стаканчику. На рис. 6.10 фольга і алюмінієвий стаканчик не показані і при розрахунках температурного поля не враховуються. Простір між стінками стакану і алюмінієвим стаканчиком заповнений водою. Основне призначення води - забезпечити інтенсивне відведення тепла від реакційної суміші до зовнішньої поверхні охолодження конструкції. З внутрішньої поверхні труби охолодження забезпечується проточною водою, яка також інтенсивно відводить тепло.

В якості фізичної моделі для розрахунку температурного поля розглядається кусочно-однорідна осесиметрична конструкція. Конструкція, конвективно охолоджується з бічної і з верхньої торцевої поверхні. Джерелом виділення тепла є область, заповнена епоксидною смолою. Процес тепловиділення нелінійно залежить від температури смоли згідно рівняння Вант-Гоффа [2]:

$$q(r,t) = q_0 \cdot \gamma^{0.1 \cdot (T + T_0)} \quad (6.37)$$

де T_0 - температура навколишнього середовища, °С;

T - перевищення температури в розрахунковій точці об'єму епоксидної смоли над температурою навколишнього середовища, °С;

q_0 - щільність потужності тепловиділення при $(T+T_0) = 0$ °С;

γ - коефіцієнт Вант-Гоффа, константа для даної реакції [3].

Особливістю епоксидних смол є їх низька теплопровідність. Так, для системи ЭД-20 + 16% ПЭПА, коефіцієнт теплопровідності знаходиться в межах від $\lambda = 0,7$ Вт/(м·°С) в зрідженому стані і до $\lambda = 0,345$ Вт/(м·°С) - в твердому стані [4].

Розподіл нестационарного температурного поля в осесиметричній моделі описується рівнянням теплопровідності в циліндричних координатах [5-7]:

$$\lambda_r \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} + \lambda_r \cdot \frac{d^2T}{dr^2} + \lambda_z \cdot \frac{d^2T}{dz^2} = -q(r,z) + \rho \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} \quad (6.38)$$

доповненим нелінійною функцією (6.37) і умовами обмеження запасів енергії для реакції тверднення по об'єму смоли.

Після завершення реакції тверднення епоксидного композиту, процес тепловиділення закінчується. Повна енергія, що виділяється в процесі реакції,

$$W = \int_0^t T(t) \cdot \rho \cdot c \cdot V \cdot dt \text{ [Дж]}, \quad (6.39)$$

де ρ - щільність матеріалу;

c - теплоємність матеріалу;

V - об'єм суміші;

t - тривалість реакції;

$T(t)$ - температура системи, що твердне з часом.

При досягненні температури 110-125 °С система ЕД-20 – ПЭПА вспінюється, зразок деформується і руйнується. Достатня глибина тверднення і міцнісні характеристики зразка досягаються при температурі формування полімерів не нижче 50-60°С. Таким чином, найкращим є такий режим тверднення, при якому температура в об'ємі зразка буде знаходитися в межах від 50 до 100°С. Умови, що забезпечують такий режим тверднення, можна визначити з допомогою розглянутої математичної моделі.

Початковими умовами для нестационарного процесу є початкові умови Коші. В момент часу $t = 0$, температура в усіх точках розрахункової області приймається як температура навколишнього середовища T_0 . На осі симетрії задаються нульові крайові умови Неймана, так як тепловий потік в радіальному напрямку на осі симетрії відсутній. На циліндричній бічній і верхній торцевій поверхнях протікає конвективне охолодження. Ці умови реалізують задані значення коефіцієнтів конвекції на поверхнях (крайові умови Ньютона). Від точності задання коефіцієнтів конвекції залежить точність рішення всієї задачі. Тому коефіцієнт конвекції α було визначено експериментально [4].

З допомогою координатних функцій, рівняння теплопровідності в циліндричних координатах (6.36) відносно функції $T(r, z, t)$ перетворюється в систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень цієї функції в вузлах апроксимації:

$$[K + H] \cdot \{T\} = \{F\} + [C] \cdot \left\{ \frac{dT}{dt} \right\}. \quad (6.40)$$

Компоненти матриць в системі рівнянь (6.40) вираховуються через координатні функції:

- для матриць коефіцієнтів по формулах (6.31) і (6.33) – (6.36);

- для матриці вільних членів по формулі (6.32);

- для матриці теплоємностей:
$$c_{ij} = \rho \cdot c \cdot \int_z^r N_i \cdot N_j \cdot r \cdot dr \cdot dz$$

При розв'язуванні нелінійної нестационарної задачі застосовується ітераційна схема Кранка-Ніколсона, яку детально розглянуто в розділі 4.6.

$$\left[\frac{1}{2} \cdot [A+H] + \frac{1}{\Delta t} \cdot [C] \right] \cdot \{T_{j+1}\} = \{F_j\} + \left[\frac{1}{\Delta t} \cdot [C] - \frac{1}{2} \cdot [A+H] \right] \cdot \{T_j\}. \quad (6.41)$$

Тут, на відміну від рівняння (4.27), на кожному кроці ітераційного процесу уточнюються і компоненти матриці вільних членів $\{F_j\}$. Цим самим враховується нелінійність задачі:

$$f_j = - \int\limits_{z=r} \int\limits_r N_i \cdot q_i(r, z) \cdot r \cdot dr \cdot dz. \quad (6.42)$$

Розмір кроку інтегрування уточнюється з допомогою комп'ютера. Для першого розрахунку, крок інтегрування вибирається з досвіду розрахунків для аналогічних конструкцій, виконаних раніше.

Для кожного кінцевого елемента враховується також енергія тепловиділення:

$$W = \int\limits_0^t \sum_{i=1}^8 \int\limits_z^r N_i \cdot q_0 \cdot \gamma^{0,1(T+T_0)} \cdot r \cdot dr \cdot dz \cdot dt. \quad (6.43)$$

Ітераційний процес зупиняється при виконанні однієї з двох умов. Перше: в об'ємі кінцевого елемента кількість виділеної теплової енергії досягає значення $W = \Delta T_m \cdot c \cdot \rho$. При цьому реакція тверднення закінчується, виділення тепла зупиняється. Контроль умови завершення реакції виконується по запасу енергії в межах кожного кінцевого елемента, згідно (6.39). Друге: в деяких точках температура досягає критичного значення $T_j = 120^\circ\text{C}$. При цьому зразок руйнується і подальші розрахунки втрачають сенс.

В результаті ітераційного рішення системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (6.41) визначається температура T_i в вузлах сітки кінцевих елементів. За допомогою координатних функцій, враховуються значення температури в заданих точках розрахункової моделі:

$$T(r, z) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot T_i. \quad (6.44)$$

Запропонована математична модель реалізована на комп'ютері як **QBASIC** - програма для виконання розрахункових досліджень з розподілу температурних полів в осесиметричних пристроях. Як приклад для ілюстрації можливостей запропонованої математичної моделі, розглянемо результати розрахункових досліджень по розподілу температурного поля в конструкції пристрою, показаного на рис. 6.10.

Для підготовки вихідних даних були використані експериментально визначені в роботі [4] константи для системи 84% ЭД-20 + 16% ПЭПА:

$q_0 = 19440 \text{ Вт/м}^3$ - потужність тепловиділення в системі при температурі 20°C ;

$\gamma = 1,96$ - коефіцієнт Вант-Гоффа.

Додаткові обчислювальні характеристики:

$\Delta t = 30$ с - крок інтегрування в часі;

$T_0 = 20^\circ\text{C}$ - температура навколишнього простору;

$\Delta T_m = 120^\circ\text{C}$ - максимально допустима температура нагрівання системи.

Коефіцієнти конвекції на поверхні охолодження пристрою:

проточною водою $\alpha = 105$ Вт/(м²·°C),

на верхній торцевій поверхні $\alpha = 13$ Вт/(м²·°C)

на зовнішній бічній поверхні $\alpha = 10$ Вт/(м²·°C).

В табл. 1 наведені теплофізичні характеристики конструктивних матеріалів пристрою [4,6].

Таблиця 1.

Теплофізичні характеристики матеріалів.

| Матеріал | Теплопровідність λ , Вт/(м·°C) | Теплоємність c , Дж/(кг·°C) | Щільність ρ , кг/м ³ |
|--------------------|---|----------------------------------|---|
| Сталь | 46,0 | 494 | 7650 |
| Епоксидний полімер | 0,345 | 2436 | 1100 |
| Пенопласт | 0,1 | 2400 | 90 |

В результаті ітераційного процесу розв'язування задачі розрахунків температурного поля, після 280 ітерацій, розрахунки були завершені по обмеженню запасів енергії (6.43). В точці з координатами $r = 0,0375$ м і

$z = 0,0625$ м максимальна температура досягла значення $T_m = 115^\circ\text{C}$. Ця точка є центром прямокутного кінцевого елемента, в якому вона розташована. Запас енергії в об'ємі кінцевого елемента був заданий $W = 13409$ Дж. Після досягнення температури $T_m = 115^\circ\text{C}$, в об'ємі цього кінцевого елемента, згідно розрахункам, повинно виділитися 14036 Дж, що перевищує наявний запас енергії і призводить до завершення роботи програми по обмеженню (6.43). Час досягнення максимальної температури, в процесі реакції, становить 135 хвилин. За цей час процес тверднення в більшості кінцевих елементів центральної зони епоксидного композита вже завершиться, збільшення температури в центральній зоні зупиниться і почнеться процес охолодження. На рис. 6.11 показані графіки розподілу температури в центрі трьох кінцевих елементів. Точки перелома графіків відповідають моменту завершення реакції тверднення в цих кінцевих елементах. Кольоровими кільцями на рис. 6.11 показані всі кінцеві елементи, в яких за 135 хвилин процес тверднення завершився. В інших кінцевих елементах процес тверднення буде продовжуватися, проте

умови інтенсивного відведення тепла для цих кінцевих елементів вже не допустят їх перегріву.

Графіки розподілу температури в радіальному напрямку для середини кожного горизонтального шару кінцевих елементів показані на рис. 6.12. Кольори графіків відповідають кольорам нижніх границь шарів кінцевих елементів. На рис.6.13 зображена картина ізотерм температурного поля заданої конструкції. Як видно на цій картині, все тепло зосереджено в області тверднення композита. Найбільш нагрітою точкою на момент завершення розрахунків виявився центр верхнього шару кінцевих елементів.

Це місце знаходиться в самих неблагоприємних умовах температурного режиму. Центральна зона шару, розташована нижче і знаходиться в гірших умовах для відведення тепла. Тому в цій зоні, завдяки більш інтенсивному виділенню тепла, швидше завершуються процеси тверднення і виділення тепла. В сусідніх зонах умови відведення тепла дещо кращі, що затримує процеси виділення тепла в порівнянні з центральною зоною. Проте відведення тепла не настільки інтенсивне, щоб відводити тепло швидше, чим воно виділяється в процесі реакції. Центральна зона в цей час вже застигає і додатково віддає частину свого тепла в сусідні зони. Нижче наводиться текст QBASIC-програми, з допомогою якої були отримані результати розрахунків.

6.7. Текст QBASIC-програми розрахунку нестационарного температурного поля в нелінійному циліндрі при квадратичній апроксимації

SCREEN 12

DIM xb(11): DIM yb(10): DIM qe(10, 10): DIM ex(10, 10): DIM ey(10, 10)

DIM a(283, 30): DIM c(283, 30): DIM ca(283, 30): DIM br(283)

DIM v(3): DIM w(3): DIM xg(8): DIM yg(8): DIM lg(8)

DIM snp(8), dxp(8), dyp(8): DIM qhp(3, 3, 8): DIM ip(10, 10)

DIM det(3, 3): DIM shp(3, 3, 8): DIM dxi(3, 3, 8): DIM dyl(3, 3, 8)

DIM a1(3, 3): DIM a2(3, 3): DIM a3(3, 3): DIM a4(3, 3)

DIM dnx(3, 3, 8): DIM dny(3, 3, 8): DIM rr(3, 3): DIM qw(10, 10)

DIM x(283): DIM q(283): DIM bx(283): DIM qt(283)

DIM po(10, 10): DIM co(10, 10): DIM qg(10, 10): DIM qv(10, 10)

REM Введення вихідних даних.

nx = 8: ny = 6: ab = 13: ah = 0: ap = 12: al = 105

nx1 = 2: nx2 = 6: ny1 = 3: ny2 = ny:

dt = 30: q0 = 19440: t0 = 20: tw = 250: ml = 280: gam = 1.96

xb(1) = .025: xb(2) = .03: xb(3) = .035: xb(4) = .04: xb(5) = .045:

xb(6) = .05: : xb(7) = .055: xb(8) = .069: xb(9) = .07: yb(1) = 0: yb(2) = .01

yb(3) = .011: yb(4) = .025: yb(5) = .04: yb(6) = .055: yb(7) = .07:

REM Побудова сітки кінцевих елементів.

```

WINDOW (0, 0)-(10, 8)
FOR i = 1 TO ny + 1
LINE (0, 100 * yb(i))-(100 * xb(nx + 1), 100 * yb(i)), i: NEXT i
FOR i = 1 TO nx + 1
LINE (100 * xb(i), 0)-(100 * xb(i), 100 * yb(ny + 1)), i: NEXT i
FOR x = 0 TO 10 STEP .001: CIRCLE (x, .05 * 120), .01, 4: NEXT x
REM Наповнення кінцевих елементів теплофізичними
REM параметрами. Візуалізація цього процесу.
FOR k = nx1 TO nx2: FOR l = ny1 TO ny2
ex(k, l) = .345: ey(k, l) = .345: po(k, l) = 1100: co(k, l) = 2436: qe(k, l) = q0
s = tw * po(k, l) * co(k, l) * 3.14
qq(k, l) = s * (xb(k + 1) * xb(k + 1) - xb(k) * xb(k)) * (yb(l + 1) - yb(l))
FOR x=xb(k) TO xb(k+1) STEP .001: FOR y = yb(l) TO yb(l + 1) STEP .001
CIRCLE (100 * x, 100 * y), .0001, 6: NEXT y, x: NEXT l, k
FOR k = 2 TO nx: FOR l = 1 TO 1
ex(k, l) = .1: ey(k, l) = .1: po(k, l) = 90: co(k, l) = 2400: qe(k, l) = 0
FOR x=xb(k) TO xb(k+1) STEP .0001: FOR y = yb(l) TO yb(l+1) STEP .0001
CIRCLE (100 * x, 100 * y), .0001, 10: NEXT y: NEXT x: NEXT l: NEXT k:
FOR k = 2 TO nx: FOR l = 2 TO 2
ex(k, l) = 46: ey(k, l) = 46: po(k, l) = 7650: co(k, l) = 494: qe(k, l) = 0
FOR x=xb(k) TO xb(k+1) STEP .0001: FOR y = yb(l) TO yb(l+1) STEP .0001
CIRCLE (100 * x, 100 * y), .0001, 1: NEXT y: NEXT x: NEXT l: NEXT k
k = nx: FOR l = 3 TO ny
ex(k, l) = 46: ey(k, l) = 46: po(k, l) = 7650: co(k, l) = 494: qe(k, l) = 0
FOR x=xb(k) TO xb(k+1) STEP .0001: FOR y = yb(l) TO yb(l+1) STEP .0001
CIRCLE (100 * x, 100 * y), .0001, 1: NEXT y: NEXT x: NEXT l
k = 1: FOR l = 1 TO ny
ex(k, l) = 46: ey(k, l) = 46: po(k, l) = 7650: co(k, l) = 494: qe(k, l) = 0
FOR x=xb(k) TO xb(k+1) STEP .0001: FOR y = yb(l) TO yb(l+1) STEP .0001
CIRCLE (100 * x, 100 * y), .0001, 8: NEXT y: NEXT x: NEXT l:
k = nx - 1: FOR l = 3 TO ny
ex(k, l) = 100: ey(k, l) = 100: po(k, l) = 1000: co(k, l) = 4185: qe(k, l) = 0
FOR x=xb(k) TO xb(k + 1) STEP .001: FOR y = yb(l) TO yb(l + 1) STEP .001
CIRCLE (100 * x, 100 * y), .0001, 3: NEXT y: NEXT x: NEXT l:
FOR x = 0 TO xb(1) STEP .001: FOR y = yb(1) TO yb(ny + 1) STEP .001
CIRCLE (100 * x, 100 * y), .0001, 3: NEXT y: NEXT x
REM Формування матриць коефіцієнтів і вільних членів
REM кінцевоелементної системи алгебраїчних рівнянь.
nb = 3 * ny + 5: lb = nx * (3 * ny + 2) + 2 * ny + 1: PRINT "nb="; nb, "lb="; lb
FOR i = 1 TO lb: bx(i) = 0: x(i) = 0: NEXT i:
FOR i = 1 TO lb: FOR j = 1 TO nb: a(i, j) = 0: NEXT j, i
v(1) = -.7746: v(2) = 0: v(3) = -v(1): w(1) = 5 / 9: w(2) = 8 / 9: w(3) = w(1)

```

```

ks = 1: kt = 1: FOR i = 1 TO lb: br(i) = 0: NEXT i
FOR i = 1 TO lb: FOR j = 1 TO nb: a(i, j) = 0: c(i, j) = 0: NEXT j, i
FOR k = 1 TO nx: FOR l = 1 TO ny: ip(k, l) = 0
GOSUB 60
FOR i = 1 TO 8: CIRCLE (100 * xg(i), 100 * yg(i)), .02, 7: NEXT i
FOR m = 1 TO 3: xl = v(m): FOR n = 1 TO 3: yl = v(n)
GOSUB 90: c1 = 0: c4 = 0: FOR i = 1 TO 8
shp(m, n, i) = snp(i): dxl(m, n, i) = dxp(i): dyl(m, n, i) = dyp(i)
c1 = c1 + dxl(m, n, i) * xg(i): c4 = c4 + dyl(m, n, i) * yg(i): NEXT i
det(m, n) = c1 * c4: din = 1 / det(m, n)
a1(m, n) = c4 * din: a4(m, n) = c1 * din: NEXT n: NEXT m
FOR m = 1 TO 3: FOR n = 1 TO 3: rr(m, n) = 0: FOR i = 1 TO 8:
dnx(m, n, i) = a1(m, n) * dxl(m, n, i)
dny(m, n, i) = a4(m, n) * dyl(m, n, i)
rr(m, n) = rr(m, n) + shp(m, n, i) * xg(i): NEXT i: NEXT n, m
FOR i = 1 TO 8: ia = lg(i): ri = 0: FOR m = 1 TO 3: FOR n = 1 TO 3
ri = ri + w(m) * w(n) * det(m, n) * shp(m, n, i) * rr(m, n): NEXT n, m
br(ia) = br(ia) + qe(k, l) * ri: FOR j = 1 TO 8: ja = lg(j): sij = 0: cij = 0
FOR m = 1 TO 3: FOR n = 1 TO 3: sc = rr(m, n) * w(m) * w(n) * det(m, n)
sx= ex(k, l) * dnx(m, n, i) * dnx(m, n, j): sy= ey(k, l) * dny(m, n, i) * dny(m, n, j)
sij = sij + sc * (sx+sy)
cij = cij + sc * po(k, l) * shp(m, n, i) * co(k, l) * shp(m, n, j)
NEXT n, m: IF ja > ia THEN GOTO 6
a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij
c(ia, ja - ia + nb) = c(ia, ja - ia + nb) + cij
6 NEXT j: NEXT i: NEXT l: NEXT k
REM Доповнення матриці коефіцієнтів крайовими умовами
REM Ньютона на верхній границі розрахункової області.
l = ny: FOR k = 1 TO nx: GOSUB 60
c1 = .5 * (xg(5) - xg(7)): FOR m = 1 TO 3: yl = 1: xl = v(m): GOSUB 90
d1 = 0: rr(m, 1) = 0: FOR i = 5 TO 7: shp(m, 1, i) = snp(i): dxl(m, 1, i) = dxp(i)
d1 = d1 + dxl(m, 1, i) * xg(i): rr(m, 1) = rr(m, 1) + shp(m, 1, i) * xg(i)
NEXT i: det(m, 1) = c1: NEXT m: FOR i = 5 TO 7: ia = lg(i)
FOR j = 5 TO 7: ja = lg(j): sij = 0: FOR m = 1 TO 3
sij = sij + rr(m, 1) * w(m) * det(m, 1) * shp(m, 1, i) * shp(m, 1, j): NEXT m
IF ja <= ia THEN a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij * ab
NEXT j: NEXT i: NEXT k
REM Доповнення матриці коефіцієнтів крайовими умовами
REM Ньютона на нижній границі розрахункової області.
l = 1: FOR k = 1 TO nx: GOSUB 60
c1 = .5 * (xg(3) - xg(1)): FOR m = 1 TO 3: yl = -1: xl = v(m): GOSUB 90
d1 = 0: rr(m, 1) = 0: FOR i = 1 TO 3: shp(m, 1, i) = snp(i): dxl(m, 1, i) = dxp(i)

```

```

d1 = d1 + dxl(m, 1, i) * xg(i): rr(m, 1) = rr(m, 1) + shp(m, 1, i) * xg(i)
NEXT i: det(m, 1) = c1: NEXT m: FOR i = 1 TO 3: ia = lg(i)
FOR j = 1 TO 3: ja = lg(j): sij = 0: FOR m = 1 TO 3
sij = sij + rr(m, 1) * w(m) * det(m, 1) * shp(m, 1, i) * shp(m, 1, j): NEXT m
IF ja <= ia THEN a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij * ah
NEXT j: NEXT i: NEXT k
REM Доповнення матриці коефіцієнтів крайовими умовами
REM Ньютона на правій границі розрахункової області.
k = nx: FOR I = 1 TO ny: GOSUB 60
c4 = .5 * (yg(5) - yg(3)): FOR n = 1 TO 3: yl = v(n): xl = 1: GOSUB 90
d4 = 0: FOR i = 3 TO 5: shp(1, n, i) = snp(i): dyl(1, n, i) = dyp(i)
d4 = d4 + dyl(1, n, i) * yg(i): NEXT i: det(1, n) = c4: NEXT n
FOR i = 3 TO 5: ia = lg(i): FOR j = 3 TO 5: ja = lg(j): sij = 0: FOR n = 1 TO 3
sij = sij + xg(3) * w(n) * det(1, n) * shp(1, n, i) * shp(1, n, j): NEXT n
IF ja <= ia THEN a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij * ap
NEXT j: NEXT i: NEXT I
REM Доповнення матриці коефіцієнтів крайовими умовами
REM Ньютона на лівій границі розрахункової області.
k = 1: FOR I = 1 TO ny: GOSUB 60
c4 = .5 * (yg(7) - yg(1)): FOR n = 1 TO 3: yl = v(n): xl = -1: GOSUB 90
d4 = 0: FOR i = 7 TO 9: ii = i: IF i = 9 THEN ii = 1
shp(1, n, ii) = snp(ii): dyl(1, n, ii) = dyp(ii): d4 = d4 + dyl(1, n, ii) * yg(ii)
NEXT i: det(1, n) = c4: NEXT n: FOR i = 7 TO 9: ii = i: IF i = 9 THEN ii = 1
ia = lg(ii): FOR j = 7 TO 9: jj = j: IF j = 9 THEN jj = 1
ja = lg(jj): sij = 0: FOR n = 1 TO 3
sij = sij + xg(1) * w(n) * det(1, n) * shp(1, n, ii) * shp(1, n, jj): NEXT n
IF ja <= ia THEN a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij * al
NEXT j: NEXT i: NEXT I
REM Обчислення компонентів матриць схеми Кранка-Ніколсона.
FOR i = 1 TO lb: bx(i) = br(i): q(i) = br(i): NEXT i
FOR i = 1 TO lb: FOR j = 1 TO nb: ca(i, j) = (c(i, j) / dt - .5 * a(i, j))
c(i, j) = (c(i, j) / dt + .5 * a(i, j)): NEXT j: NEXT i
REM Початок ітераційного процесу.
kt = 1
10
FOR i = 1 TO lb: FOR j = 1 TO nb: a(i, j) = c(i, j): NEXT j: NEXT i
GOSUB 100: REM Розв'язування системи рівнянь.
FOR i = 1 TO n: br(i) = x(i): q(i) = br(i): NEXT i
REM Побудова графіків змінення температури з часом
REM в процесі тверднення епоксидного композиту.
nz = 3: k = nx1 + 2: FOR I = ny1 + 1 TO ny: GOSUB 60
tz = 0: FOR i = 1 TO 8: tz = tz + .125 * (t0 + br(lg(i))): NEXT i

```

```

nz = nz + 1: CIRCLE (kt * dt / 1000, .05 * tz), .01, nz: NEXT I
GOSUB 200: REM Перемноження матриць в схемі Кранка-Ніколсона.
FOR i = 1 TO lb: bx(i) = 0: NEXT i
FOR k = nx1 TO nx2: FOR l = ny1 TO ny: GOSUB 60
REM Обмеження обчислень за макс. допустимої температури.
s = 0: FOR i = 1 TO 8: s = s + .125 * (q(lg(i)) + t0): NEXT i
IF s > 120 THEN PRINT k; l; s, qw(k, l), qg(k, l); " wskipelo "
REM Обмеження обчислень по запасу енергії тепловідлення.
tqw = q0 * gam ^ (.1 * (s - 20)): IF qw(k, l) > qg(k, l) THEN tqw = 0
vv = (xb(k + 1) * xb(k + 1) - xb(k) * xb(k)) * (yb(l + 1) - yb(l))
qw(k, l) = qw(k, l) + tqw * dt * 3.14 * vv
xm = .5 * (xb(k) + xb(k + 1)): ym = .5 * (yb(l) + yb(l + 1)):
IF qw(k, l) > qg(k, l) AND ip(k, l) = 0 THEN CIRCLE (100 * xm, 100 * ym), .1, ks
ip(k, l) = 1: ks = ks + 1
FOR i = 1 TO 8: qt(lg(i)) = tqw: NEXT i
REM Доповнення добутку матриць в схемі
REM Кранка-Ніколсона вектором тепловідлення.
FOR m = 1 TO 3: xl = v(m): FOR n = 1 TO 3: yl = v(n): GOSUB 90
c1 = 0: c4 = 0: FOR i = 1 TO 8: qhp(m, n, i) = snp(i) * qt(lg(i))
shp(m, n, i) = snp(i): dxl(m, n, i) = dxp(i): dyl(m, n, i) = dyp(i)
c1 = c1 + dxl(m, n, i) * xg(i): c4 = c4 + dyl(m, n, i) * yg(i): NEXT i
det(m, n) = c1 * c4: NEXT n, m: FOR m = 1 TO 3: FOR n = 1 TO 3: rr(m, n) = 0
FOR i = 1 TO 8: rr(m, n) = rr(m, n) + shp(m, n, i) * xg(i): NEXT i: NEXT n, m
FOR i = 1 TO 8: ia = lg(i): ri = 0: FOR m = 1 TO 3: FOR n = 1 TO 3
ri = ri + w(m) * w(n) * det(m, n) * qhp(m, n, i) * rr(m, n): NEXT n, m
bx(ia) = bx(ia) + ri: NEXT i: NEXT l: NEXT k
kt = kt + 1
IF kt < ml THEN GOTO 10
REM Закінчення ітераційного процесу.
STOP: CLS
REM Побудова графіків розподілу температури по радіусу.
FOR i = 1 TO ny + 1
LINE (0, 100 * yb(i))-(100 * xb(nx + 1), 100 * yb(i)), i: NEXT i
FOR x = 0 TO 10 STEP .001: CIRCLE (x, .05 * 120), .01, 4
CIRCLE (x, .05 * t0), .01, 7: NEXT x: FOR i = 1 TO nx + 1
LINE (100 * xb(i), 0)-(100 * xb(i), 100 * yb(ny + 1)), i: NEXT i
FOR l = 1 TO ny: FOR k = 1 TO nx: GOSUB 60
yl = 0: FOR xl = -1 TO 1 STEP .001: GOSUB 90
z = 0: tt = 0: FOR i = 1 TO 8: z = z + snp(i) * xg(i): tt = tt + snp(i) * q(lg(i))
NEXT i: CIRCLE (100 * z, .05 * (tt + t0)), .00001, l: NEXT xl: NEXT k: NEXT l
STOP: CLS
IF kt < ml THEN GOTO 10

```

```

REM Відновлення сітки кінцевих елементів.
FOR i = 1 TO ny + 1
LINE (0, 100 * yb(i))-(100 * xb(nx + 1), 100 * yb(i)), i: NEXT i
FOR i = 1 TO nx + 1
LINE (100 * xb(i), 0)-(100 * xb(i), 100 * yb(ny + 1)), i: NEXT i
REM Побудова ізотерм.
FOR i = 1 TO lb: bx(i) = q(i): NEXT i: ml = 10: t1 = 10000000: t2 = 0
FOR i = 1 TO lb: IF t1 > bx(i) THEN i1 = i
IF t2 < bx(i) THEN i2 = i
IF t1 > bx(i) THEN t1 = bx(i)
IF t2 < bx(i) THEN t2 = bx(i)
NEXT i: td = (t2 - t1) / ml: PRINT "Tmax ="; t2 + t0: PRINT "Tmin ="; t1 + t0
PRINT "Tokr ="; t0: PRINT "t ="; kt * (dt - 1); "sec"; kt * (dt - 1) / 60; "min";
x(1) = t1: FOR i = 1 TO ml: x(i + 1) = x(i) + td: NEXT i
FOR l = 1 TO ny: FOR k = 1 TO nx: GOSUB 60
FOR yl = -1 TO 1 STEP .01: xl = -1: GOSUB 90
z = 0: tt = 0: FOR i = 1 TO 8: z = z + snp(i) * xg(i): tt = tt + snp(i) * bx(lg(i))
NEXT i: w(1) = tt: v(1) = z: xl = 1: GOSUB 90:
z = 0: tt = 0: FOR i = 1 TO 8: z = z + snp(i) * xg(i): tt = tt + snp(i) * bx(lg(i)):
NEXT i: w(3) = tt: v(3) = z: xl = 0: GOSUB 90
f = 0: z = 0: tt = 0: FOR i = 1 TO 8: f = f + snp(i) * yg(i): z = z + snp(i) * xg(i)
tt = tt + snp(i) * bx(lg(i)): NEXT i: w(2) = tt: v(2) = z
r1 = v(2) * v(2) - v(1) * v(1): r2 = v(3) * v(3) - v(1) * v(1)
p1 = v(3) - v(1): p2 = v(2) - v(1): f1 = w(2) - w(1): f2 = w(3) - w(1)
det = r1 * p1 - r2 * p2: dea = f1 * p1 - f2 * p2: deb = r1 * f2 - r2 * f1
ad = dea / det: bd = deb / det: cd = w(1) - ad * v(1) * v(1) - bd * v(1)
FOR j = 1 TO ml: sq = (bd * bd - 4 * ad * (cd - x(j))): IF sq < 0 THEN 33
sq = SQR(sq): IF ABS(ad) > 0 THEN x11 = .5 * (-bd - sq) / ad
IF ABS(ad) > 0 THEN x22 = .5 * (-bd + sq) / ad
IF v(1) < x11 AND v(3) > x11 THEN CIRCLE (100*x11,100*f), .00001, ml - j + 1
IF v(1) < x22 AND v(3) > x22 THEN CIRCLE (100*x22,100*f), .00001, ml - j + 1
33 NEXT j: NEXT yl: NEXT k: NEXT l: STOP

```

60 REM Глобальні координати і номери вузлів.

В цьому місці необхідно розмістити підпрограму обчислення координат і номерів вузлів, наведену в розділі 6.3 на сторінці 164.

90 REM Координатні функції і їх похідні.

В цьому місці необхідно розмістити підпрограму обчислення координатних функцій і їх похідних, наведену в розділі 6.3 на сторінці 164.

100 REM Розв'язування системи рівнянь.

В цьому місці необхідно розмістити підпрограму розв'язування системи рівнянь, наведену в розділі 5.4 на сторінці 129.

200 REM Перемноження матриць.

В цьому місці необхідно розмістити підпрограму перемноження матриць, наведену в розділі 5.5 на сторінці 131.

6.8. Розв'язування практичних задач при формуванні полімерних блоків

Наведена вище, в розділі 6.7, програма дозволяє прогнозувати розподіл температури по об'єму циліндричного блоку при різних геометричних розмірах і початкових умовах полімеризації. Це можуть бути вироби порівняно не важкі, 20-30 г, або трохи важчі, якщо додати наповнювачі. Наприклад, при фарбуванні корпусу корабля готується суміш зразу двох тон епоксидної композиції з 50% вмістом пігменту. Розрахунки показують, що для циліндра об'ємом 2 м^3 , діаметром і висотою 1,32 м, наповненого такою сумішшю, при температурі навколишнього середовища $20 \text{ }^\circ\text{C}$, критична температура становить $100 \text{ }^\circ\text{C}$ і буде досягнена за 77 хвилин. Це означає, що протягом однієї години краска повинна бути вичерпана. На практиці, такі питання вирішуються набутим досвідом. Доки зовнішні обставини не змінюються, технологічних проблем не виникає.

Допустимо, що температура в доці, де фарбують кораблі, підвищилася до $30 \text{ }^\circ\text{C}$. При цьому, згідно комп'ютерним розрахункам, критична температура буде досягнена через 44 хвилини. Якщо за такий час неможливо витратити 80% фарби, то готувати зразу 2 тони суміші неможна. Якщо вміст пігмента буде не 50%, а 30%, то залежність часу на фарбування від температури навколишнього середовища стає ще більш критичною.

Розглянемо варіанти інших прикладів, аналогічних наведеним вище.

Приклад 6.1.

Визначити об'єм циліндра, у якого висота дорівнює радіусу, щоб в ньому було можливо відлити зразок з композиції ЕД-20 + 16% ПЕПА при температурі навколишнього середовища $20 \text{ }^\circ\text{C}$. Композиція після перемішування заливається в тонкостінну форму і охолоджується конвективно ($\alpha=10 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{C}$). Допустимий рівень максимальної температури становить $100 \text{ }^\circ\text{C}$. Для виконання розрахунків в програмі необхідно замінити блок введення вихідних даних для прикладу 6.1 на наступний.

REM Введення вихідних даних.

nx = 8: ny = 7: ab = 10: ah = 0: ap = 10: al = 0

nx1 = 1: nx2 = 8: ny1 = 1: ny2 = ny:

dt = 30: q0 = 19440: t0 = 20: tw = 250: gam = 1.96

```

R=0.0116: ml = 325
xb(1) = 0: FOR k = 1 TO nx: xb(k + 1) = xb(k) + R/ nx: NEXT k
yb(1) = 0: FOR l = 1 TO ny: yb(l + 1) = yb(l) + 0.5 * R/ ny: NEXT l
REM Побудова сітки кінцевих елементів.
WINDOW (0, 0)-(10, 8)
FOR i = 1 TO ny + 1
LINE (0, 100 * yb(i))-(100 * xb(nx + 1), 100 * yb(i)), i: NEXT i
FOR i = 1 TO nx + 1
LINE (100 * xb(i), 0)-(100 * xb(i), 100 * yb(ny + 1)), i: NEXT i
FOR x = 0 TO 10 STEP .001: CIRCLE (x, .05 * 100), .01, 4: NEXT x
REM Наповнення кінцевих елементів теплофізичними
REM параметрами. Візуалізація цього процесу.
FOR k = nx1 TO nx2: FOR l = ny1 TO ny2
ex(k, l) = .345: ey(k, l) = .345: po(k, l) = 1100: co(k, l) = 2436: qe(k, l) = q0
s = tw * po(k, l) * co(k, l) * 3.14
qq(k, l) = s * (xb(k + 1) * xb(k + 1) - xb(k) * xb(k)) * (yb(l + 1) - yb(l))
FOR x=xb(k) TO xb(k+1) STEP .001: FOR y = yb(l) TO yb(l + 1) STEP .001
CIRCLE (100 * x, 100 * y), .0001, 6: NEXT y, x: NEXT l, k
REM Формування матриць коефіцієнтів і вільних членів.

```

Шляхом підбору розмірів при введенні вихідних даних, знаходимо об'єм суміші: $V = 4,9 \text{ см}^3$ і час її тверднення $t = 157$ хвилин. Як бачимо, об'єм не такий вже й значний, проте його перевищення лише на 5% приводить до закипання системи і руйнування полімерного блока. Ці розрахунки були співставлені автором з експериментальними даними. Розбіжність результатів по температурі тверднення не перевищила 2%.

Для вимірювання температури був застосований електротермометер. Дротик з термопарою в центрі зразка забезпечив додаткове відведення тепла з найбільш нагрітої зони, що продовжило час для досягнення максимальної температури на дві хвилини.

Для досягнення більших об'ємів, необхідно знижувати швидкість реакції, або збільшувати інтенсивність відведення тепла.

Приклад 6.2.

Розглянемо задачу на умовах прикладу 6.1., тільки герметично закриту форму розмістимо в термостаті з водою ($\alpha=40$, $T=20^\circ\text{C}$).

В стрічці вихідних даних змінюємо коефіцієнт конвекції.

$nx = 8$: $ny = 7$: $ab = 40$: $ah = 0$: $ap = 40$: $al = 0$

Далі, підбираємо значення радіуса і число ітерацій в часі:

$R=0.02785$: $ml = 302$.

Знаходимо значення $V = 67,8 \text{ см}^3$ і $t = 146$ хвилин, при яких завершується реакція тверднення, але максимальна температура системи не перевищує 100°C .

Приклад 6.3.

Форму помістимо в термостат з крижаною водою ($\alpha=40$, $T=4$ ·C).

Після розрахунків, отримуємо: $V=539,7$ см³ і $t=393$ хвилин.

У випадку, коли кількість суміші для виготовлення виробів невеликих розмірів, не дуже велика, можна обійтися без попередніх розрахунків, розпочинаючи з невеликого об'єму. Поступово збільшуючи об'єм і контролюючи температуру в центрі ємності, експериментально досягнемо оптимального результату.

Для виготовлення цільного полімерного блоку, такий спосіб не годиться. В процесі тверднення суміші бульбашки повітря і залишки пластифікатора виділяються на поверхню виробу. При цьому поверхня покривається шаром дефектного олігомера товщиною 0,1-0,2 мм. У цільного готового блока цей шар знімається шліфуванням. Але, якщо доливати суміш в кілька етапів, то для трьохмірних полімерів, якими є і епоксидні, в місцях з'єднання міцність буде значно нижча, чим в цільному об'ємі. Такий вироб дає тріщини, руйнується навіть при незначних навантаженнях. Тому, формування потрібно виконати за один раз без перерви.

Приклад 6.4.

Який найбільший об'єм циліндра висотою, що дорівнює радіусу, можливо виготовити при початковій температурі суміші 20·C? Форма герметично закрита, розміщена осесиметрично і обертається зі швидкістю 10 об/с ($\alpha=30$).

Об'єм блока буде незначним, якщо об'єм циліндра буде дорівнювати об'єму композиції. Але, при обертанні центр виявиться пустим і суміш буде нагріватися не так швидко. Крім того, не потрібно попередньо центрифугувати систему. Необхідно тільки встановити час, на протязі якого реакція пройде на 50%. Тоді, після зупинки обертання, в вертикальному положенні форми композиція стече зі стінок циліндра вниз.

Для даного прикладу візьмемо діаметр форми 160 мм, і висоту 400 мм. Рішенням задачі буде: $V=1350$ см³; час напівтверднення: $t=152$ хв. Максимальна температура, при обертанні становитиме 56·C, але після стікання вниз, суміш перемішується і середня температура стане 35·C. Після дотверднення при кімнатній температурі, блок слід прогріти при температурі 80-100·C. На практиці, при діаметрі форми 100 мм, висоті 80 мм і об'ємі суміші 350 см³ відхилення розрахункових даних від експериментальних не перевищувало 10%. Після затвердіння і прогрівання блока в ньому не було помітно ніяких дефектів (тріщин, або бульбашок). Така, на перший погляд проста методика, може бути використана тільки в тому випадку, коли можна визначити час 50% протікання

реакції. Якщо зупинити обертання і встановити форму вертикально на 10-15 хв, раніше, то запас енергії буде достатнім, щоб після стікання зі стінок, композиція перегрілася і закипіла. Якщо на 10-15 хв пізніше, то в'язкість буде вже настільки велика, що половина суміші застигне на стінках циліндра. Наведена вище програма дозволяє вирахувати на комп'ютері час до 50% протікання реакції.

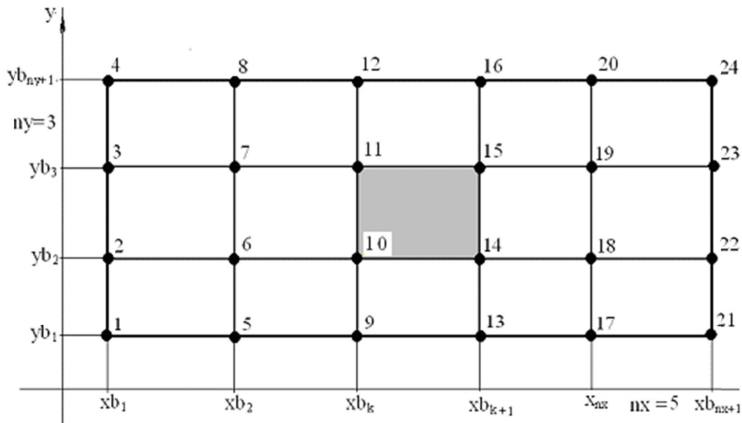


Рис. 6.1. Розділення прямокутної області на прямокутні кінцеві елементи

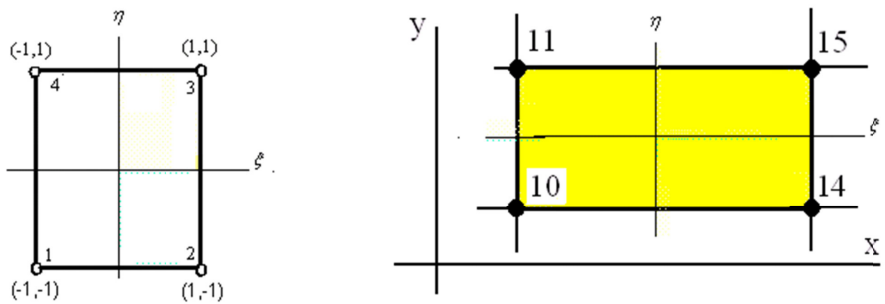


Рис. 6.2. Локальна нумерація вузлів кінцевого елемента при лінійній апроксимації

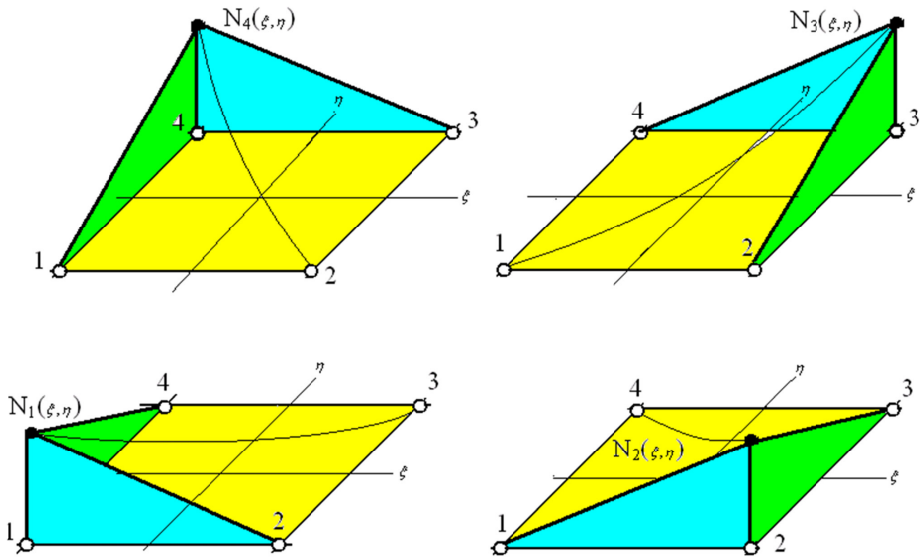


Рис. 6.3. Графіки лінійних координатних функцій в локальних координатах

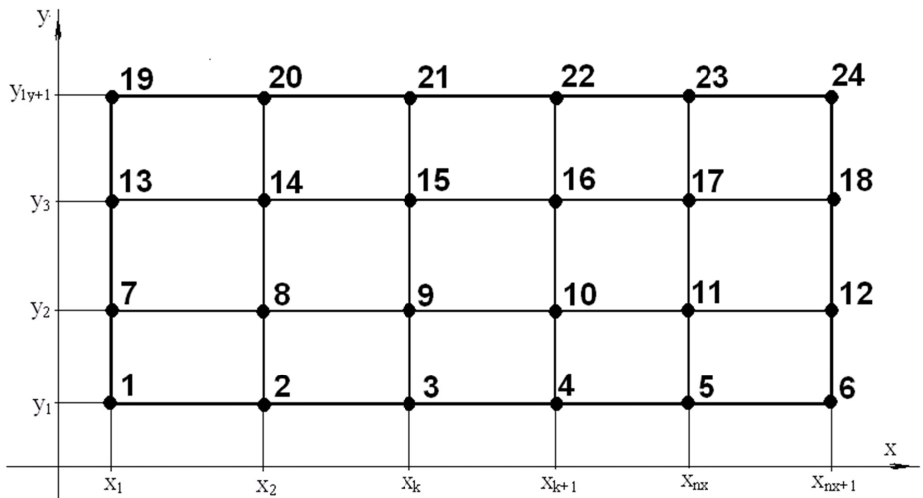


Рис. 6.4. Другий порядок нумерації вузлів

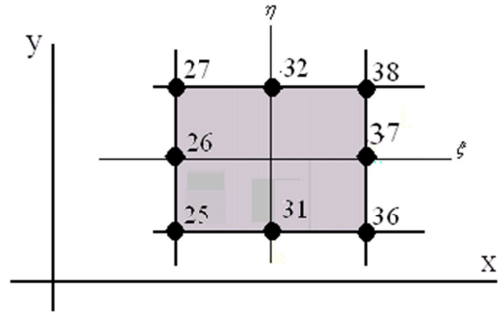
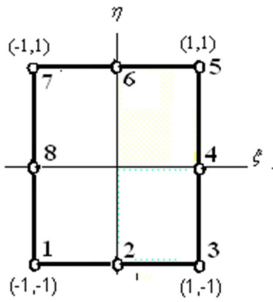


Рис. 6.5. Локальна нумерація вузлів при квадратичній апроксимації

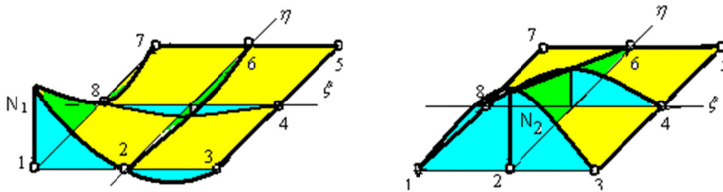


Рис. 6.6. Графіки координатних функцій квадратичного чотирикутного кінцевого елемента

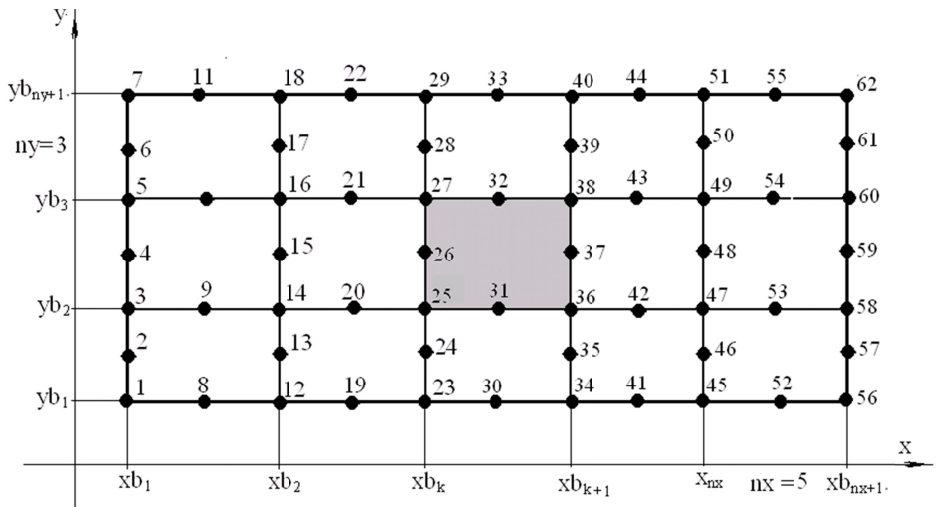


Рис. 6.7. Глобальна нумерація вузлів при квадратичній апроксимації

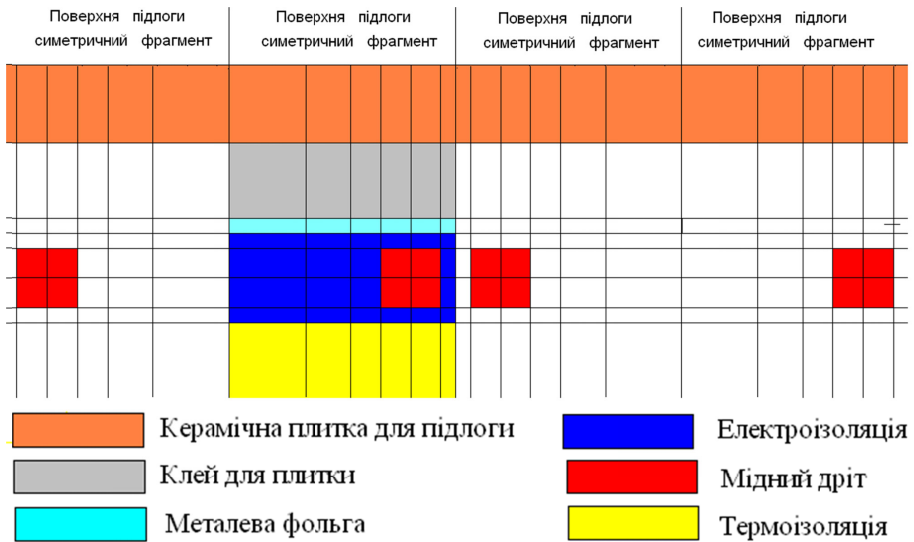


Рис.6.8. Схематичне розміщення конструктивних елементів теплої підлоги

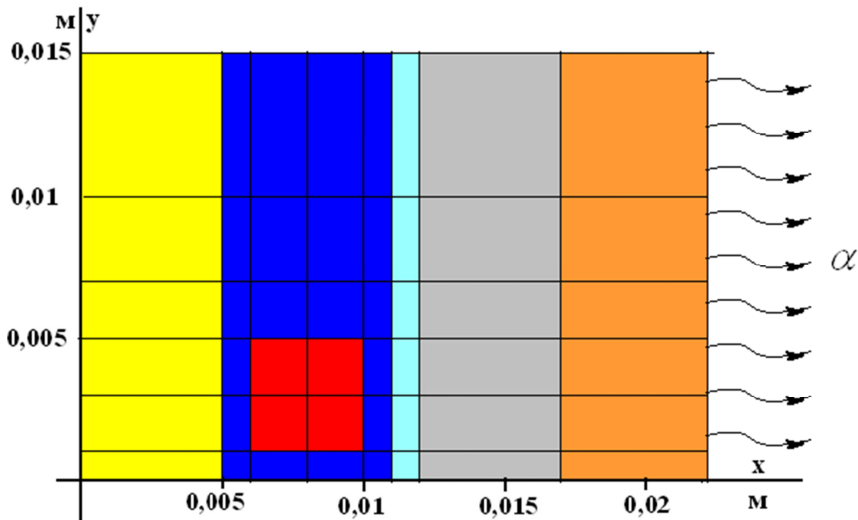


Рис. 6.9. Виділення розрахункової області і розділення її на прямокутні кінцеві елементи

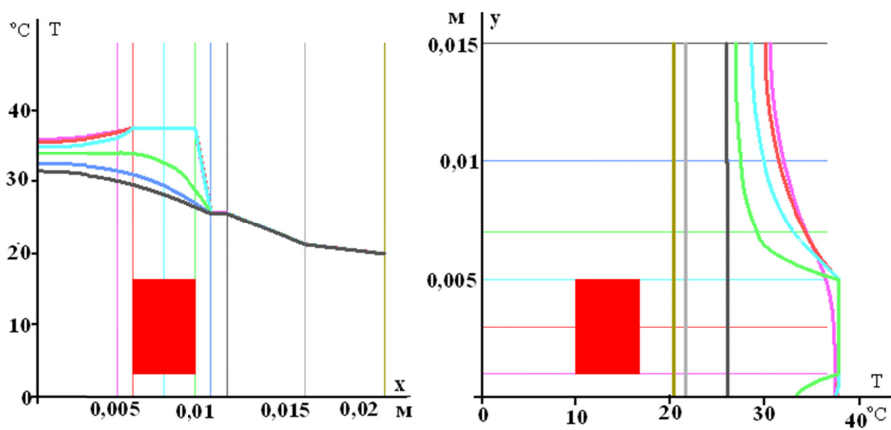


Рис. 6.10. Графіки розподілу температури теплої підлоги

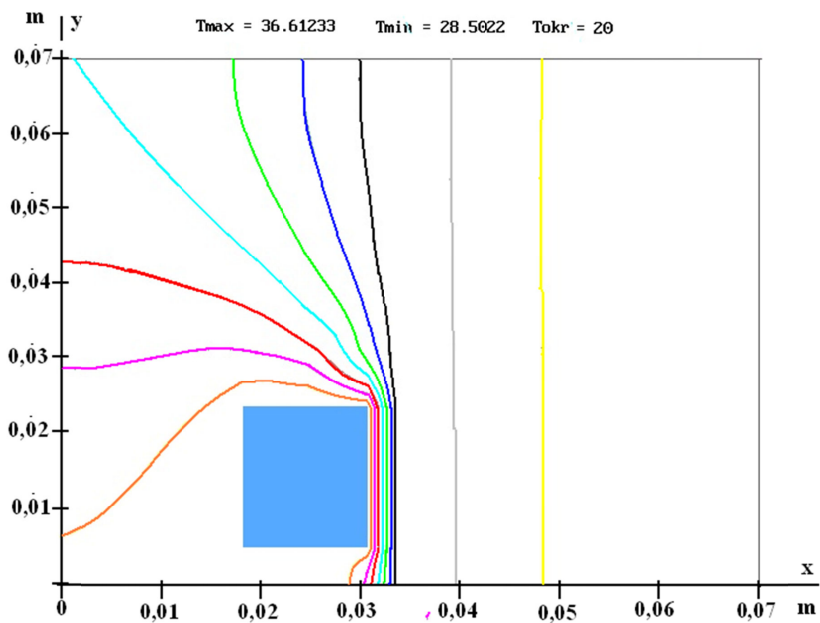


Рис. 6.11. Розподіл ізотерм температурного поля теплої підлоги

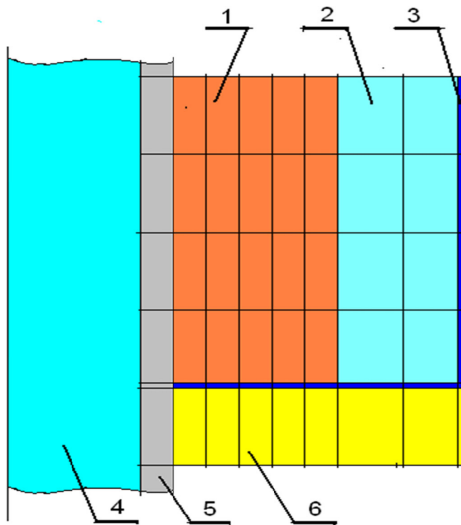


Рис.6.12. Конструкція пристрою для виготовлення втулки на металевій трубі і структура сітки кінцевих елементів:
 1 – ЭД-20 з ПЭПА; 2 – вода; 3 – сталевий стакан; 4 – проточна вода; 5 – сталевна труба; 6 – теплоізоляційна підкладка.

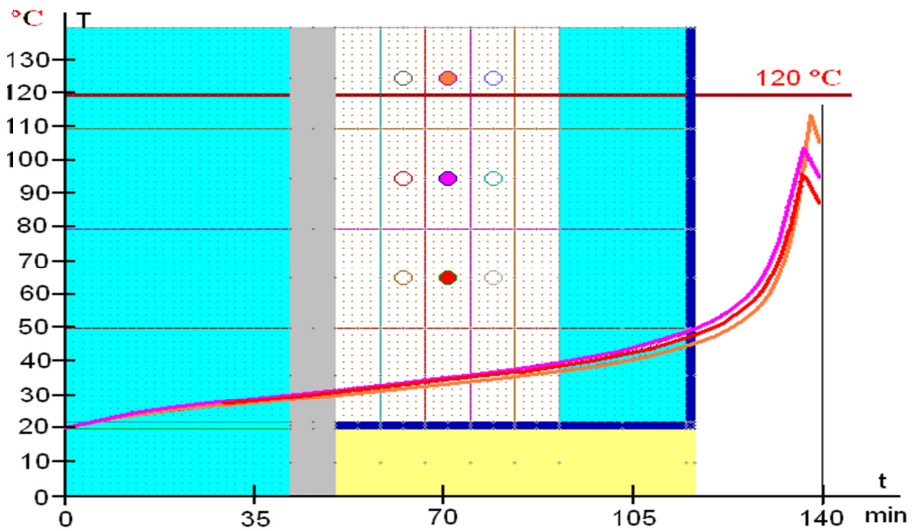


Рис. 6.13. Графіки змінення в часі температури в найбільш нагрітих зонах епоксидного композиту

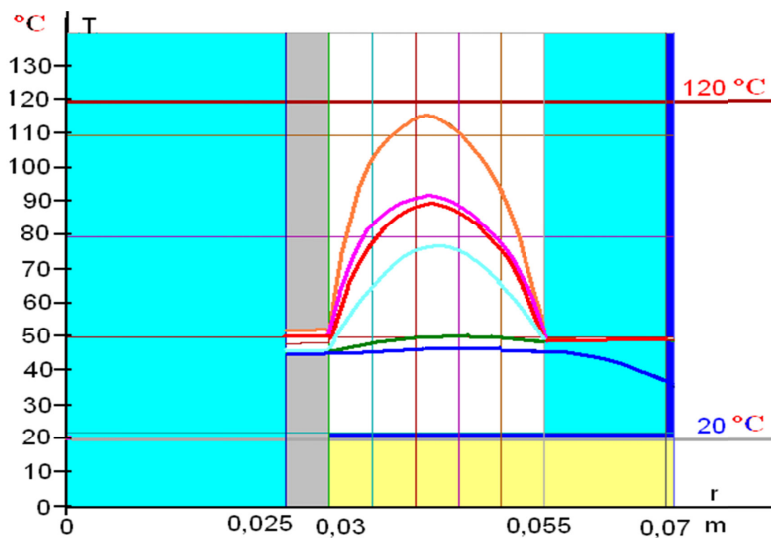


Рис. 6.14. Графіки розподілу температури вздовж радіуса

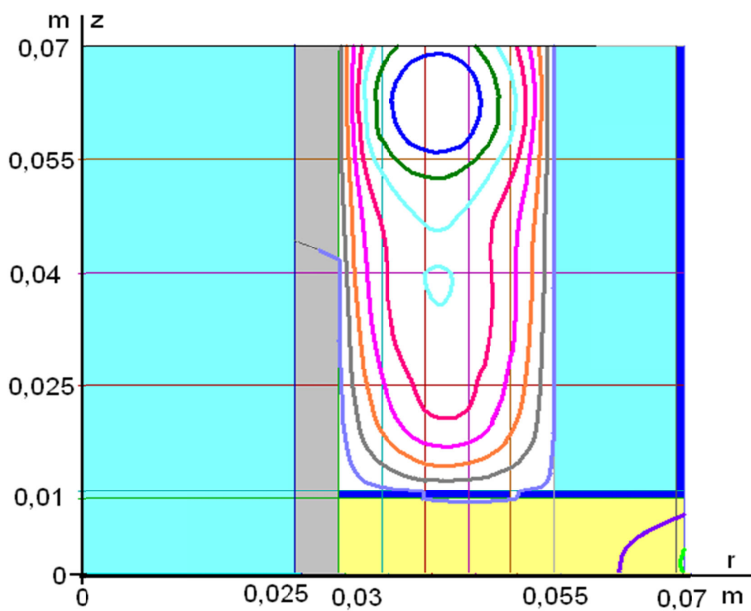


Рис. 6.15. Розподіл ізотерм в циліндричній конструкції

Глава 7. СПЕЦІАЛЬНІ ПИТАННЯ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДА КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ

7.1. Трикутні кінцеві елементи.

Розвиток теорії метода кінцевих елементів починався з кінцевих елементів трикутної форми. Фундаментальні монографії Зенкевича О.С. і Сегерлінда Л. по теорії і практичному застосуванню метода кінцевих елементів повністю написані на основі трикутних кінцевих елементів [3,4]. Зенкевич О.С. відмічає можливість використання чотирикутних кінцевих елементів тільки в главі 10 [4, С.186], яка називається “Изгиб пластины”. Проте, при викладенні змісту цієї глави використовуються трикутні елементи.

В монографії Зенкевича О.С. метод кінцевих елементів розглядається стосовно розв’язування задач теорії пружності, механіки і будівництва. Конструкція будівельного піднімального крана складається з трикутних ферм. Ця конструкція вже “розділена” на трикутні кінцеві елементи, вона просто складається з них. Трикутний конструктивний елемент є абсолютно жстким. При будь-якому навантаженні механічні напруження в ньому розподілюються на всі три сторони трикутника. Можливо, необхідність розв’язування задач в складних проектах будівельної механіки і теорії пружності, визначила вибір саме трикутних кінцевих елементів як математичної моделі.

Сегерлінд Л. присв’ятив всю главу 15 [3., С.289] викладу тільки теорії чотирикутних кінцевих елементів. Варто зазначити, що зміст цієї глави викладено настільки чітко, детально, ясно і вдало, що в значній мірі допомагає розумінню окремих складних питань всієї монографії.

Геометричні форми зразків, що розглядаються автором, виявилися найбільш зручними для розділення їх на чотирикутні кінцеві елементи. Проте, в деяких конструктивних видах дослідних зразків, які мають гострі кути, розрахункову область неможливо розділити на чотирикутники. Тому, стосовно розв’язуванню таких задач, розглянемо застосування трикутних кінцевих елементів.

Для спрощення, почнемо з областей, що розділені на прямокутні трикутники. На рис. 7.1 показано перетин зрізаного конуса з отвором в центрі. При побудові сітки кінцевих елементів тут зручно виділити дві області. Одна з них, показана жовтим кольором, розділена на прямокутні чотирикутники, а друга – на прямокутні трикутники.

Далі, формуємо матриці коефіцієнтів і правих частин системи кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь. Для прямокутної області рішення цієї задачі викладено вище.

Пошук рішення задачі для трикутників почнемо з побудови координатних функцій в локальних координатах. На рис. 7.2 показано чотири види прямокутних трикутників в локальних координатах (ξ, η) . Один из них з лівим нижнім прямим кутом (розовий колір) ми бачимо при побудові сітки кінцевих елементів на рис. 7.1. Позначимо його як трикутник першого виду. Згідно з обраною на рис. 7.2 нумерацією вузлів в локальних координатах, запишемо вирази для координатних функцій трикутника з лівим нижнім прямим кутом (розовий колір).

$$N_1 = -0,5 \cdot (\xi + \eta); \quad N_2 = 0,5 \cdot (1 + \xi); \quad N_3 = 0,5 \cdot (1 + \eta); \quad (7.1)$$

$$\frac{dN_1}{d\xi} = -0,5; \quad \frac{dN_2}{d\xi} = 0,5; \quad \frac{dN_3}{d\xi} = 0; \quad \frac{dN_1}{d\eta} = -0,5; \quad \frac{dN_2}{d\eta} = 0; \quad \frac{dN_3}{d\eta} = 0,5. \quad (7.2)$$

Вирази для обчислення компонентів матриць коефіцієнтів і вільних членів трикутних кінцевих елементів залишаються ті самі, що і для чотирикутних кінцевих елементів, тільки інтегрувати їх необхідно по площам відповідних трикутників. Так, в декартових координатах, це будуть вирази (6.2), (6.3) і (6.4), а в циліндричних - (6.24) і (6.25).

В локальних координатах для плоскопаралельного температурного поля інтеграли по площі трикутника з лівим нижнім прямим кутом (розовий колір) набудуть наступного вигляду.

$$a_{ij}^3 = \lambda_x \cdot \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{k+1} - x_k} \cdot \int_{-1}^{1-\xi} \int_{-1}^{-\xi} \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{dN_j}{d\xi} \cdot d\eta \cdot d\xi + \lambda_x \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{i+1} - y_i} \cdot \int_{-1}^{1-\xi} \int_{-1}^{-\xi} \frac{dN_i}{d\eta} \cdot \frac{dN_j}{d\eta} \cdot d\eta \cdot d\xi. \quad (7.3)$$

$$b_i^3 = 0,25 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (y_{i+1} - y_i) \cdot q_0 \cdot \int_{-1}^{1-\xi} \int_{-1}^{-\xi} N_i \cdot d\eta \cdot d\xi. \quad (7.4)$$

Після інтегрування, отримуємо відповідні базові матриці.

$$[E]_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 1 & \\ & & \end{bmatrix} \quad [D]_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & -1 \\ & & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix} \quad [G] = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & & \\ 2 & & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

Розрахунки компонентів матриць кінцевоелементних рівнянь виконуються по формулах (6.10), з підстановкою вищевказаних базових матриць.

$$a_{ij}^3 = \lambda_x \cdot \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{k+1} - x_k} \cdot [E]_1 + \lambda_x \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{i+1} - y_i} \cdot [D]_1; \quad b_i^3 = 0,25 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (y_{i+1} - y_i) \cdot q_0 \cdot [G]. \quad (7.5)$$

Компоненти матриці $[H]$ при $\alpha_x = const$, $\alpha_y = const$, $\alpha_0 = const$ обчислюються по формулах (6.7), (6.8) і (6.9), але з підстановкою координатних функцій (7.1).

$$h_{ij}^3 = 0,5 \cdot \{ (x_{k+1} - x_k) \cdot \alpha_y \cdot \int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot d\xi \} \quad - \text{ для горизонтального катета,} \quad (7.6)$$

$$h_{ij}^3 = 0,5 \cdot \{ (y_{i+1} - y_i) \cdot \alpha_x \cdot \int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot d\eta \} \quad - \text{ для вертикального катета,} \quad (7.7)$$

$$h_{23}^3 = 0,5 \cdot \{ \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \cdot \alpha_{xy} \cdot \int_{-1}^1 N_2(\xi) \cdot N_3(\xi) \cdot d\xi \} \quad - \text{ для гіпотенузи.} \quad (7.8)$$

Після інтегрування, отримуємо базові матриці для крайових умов.

$$\int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot d\xi = [V] = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ 1 & 2 & \\ & & \end{bmatrix} \quad \int_{-1}^1 N_i \cdot N_j \cdot d\eta = [V] = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & & 1 \\ & & \\ 1 & & 2 \end{bmatrix} \quad \int_{-1}^1 N_2(\xi) \cdot N_3(\xi) \cdot d\xi = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}$$

Як і для чотирикутних кінцевих елементів, при комп'ютерній реалізації алгоритму базових матриць прямокутних кінцевих елементів, в пам'яті комп'ютера можна зберігати сумму матриць $[U] + [V]$ разом з підматрицею для гіпотенузи. При обчисленні компонентів матриці $[H]$ необхідні доданки із суми матриць $[U] + [V]$ будуть вибиратися автоматично, відповідно до номерів вузлів.

$$[U] + [V] + \int_{-1}^1 N_2(\xi) \cdot N_3(\xi) \cdot d\xi = \frac{1}{3} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Для поверхні трикутника.

$$h_{ij}^3 = 0,25 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (y_{l+1} - y_l) \cdot \alpha_0 \cdot \int_{-1}^{1-\xi} \int_{-1}^{-\xi} N_i \cdot N_j \cdot d\eta \cdot d\xi \quad (7.9)$$

$$\int_{-1}^{1-\xi} \int_{-1}^{-\xi} N_i \cdot N_j \cdot d\eta \cdot d\xi = [S] = \frac{1}{12} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$h_{ij}^3 = 0,25 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (y_{l+1} - y_l) \cdot \alpha_0 \cdot [S]. \quad (7.10)$$

Проте, можуть бути інші конструкції, тому розглянемо ще три можливі варіанти розміщення прямого кута трикутника в локальних координатах. Для трикутника з правим верхнім прямим кутом (голубий колір).

$$N_1 = 0,5 \cdot (1 - \eta); \quad N_2 = 0,5 \cdot (\eta + \xi); \quad N_3 = 0,5 \cdot (1 - \xi); \quad (7.11)$$

$$\frac{dN_1}{d\xi} = 0; \quad \frac{dN_2}{d\xi} = 0,5; \quad \frac{dN_3}{d\xi} = -0,5; \quad \frac{dN_1}{d\eta} = -0,5; \quad \frac{dN_2}{d\eta} = 0,5; \quad \frac{dN_3}{d\eta} = 0. \quad (7.12)$$

Далі будемо називати його трикутником другого виду.

Інтеграли по площі трикутника з правим верхнім прямим кутом (голубий колір) мають другі межі інтегрування. Тому,

$$a_{ij}^3 = \lambda_x \cdot \frac{y_{l+1} - y_l}{x_{k+1} - x_k} \cdot \int_{-1}^1 \int_{-\xi}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{dN_j}{d\xi} \cdot d\xi \cdot d\xi + \lambda_x \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{l+1} - y_l} \cdot \int_{-1}^1 \int_{-\xi}^1 \frac{dN_i}{d\eta} \cdot \frac{dN_j}{d\eta} \cdot d\xi \cdot d\xi. \quad (7.13)$$

$$b_i^3 = 0,25 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (y_{l+1} - y_l) \cdot \alpha_0 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-\xi}^1 N_i \cdot d\xi \cdot d\xi. \quad (7.14)$$

$$[E]_2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & 1 & -1 \\ \hline & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad [D]_2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & \\ \hline -1 & 1 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad [G] = \frac{1}{3} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

Розрахунки компонентів матриць кінцевоелементних рівнянь виконуються по формулах (7.5), але з підстановкою отриманих вище базових матриць.

$$a_{ij}^3 = \lambda_x \cdot \frac{y_{l+1} - y_l}{x_{k+1} - x_k} \cdot [E]_2 + \lambda_x \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{l+1} - y_l} \cdot [D]_2; \quad b_i^3 = 0,25 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (y_{l+1} - y_l) \cdot q_0 \cdot [G]. \quad (7.15)$$

Компоненти матриць $[H]$ при $\alpha_x = const, \alpha_y = const, \alpha_0 = const$ обчислюються по формулах (7.6) – (7.8) з підстановкою координатних функцій (7.11). При цьому в пам'яті комп'ютера можна зберігати суму матриць $[U] + [V]$ разом з підматрицею для гіпотенузи. Необхідні доданки із суми матриць $[U] + [V]$ будуть вибиратися автоматично по номерах вузлів. До того ж сумарна матриця для трикутника з правим верхнім прямим кутом залишиться такою, як і для трикутника з лівим нижнім прямим кутом.

$$[U] + [V] + \int_{-1}^1 N_2(\xi) \cdot N_3(\xi) \cdot d\xi = \frac{1}{3} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Для поверхні трикутника.

$$h_{ij}^3 = 0,25 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (y_{l+1} - y_l) \cdot \alpha_0 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1-\xi}^1 N_i \cdot N_j \cdot d\eta \cdot d\xi, \quad (7.16)$$

Базова матриця $[S]$ при цьому не зміниться, тому формула (7.10) залишається справедливою і для трикутника з правим верхнім прямим кутом (рис.7.2).

Аналогічно запишемо координатні функції і базові матриці для трикутника з правим нижнім прямим кутом (зелений колір), або трикутника третього виду.

$$N_1 = 0,5 \cdot (1 - \xi); \quad N_2 = 0,5 \cdot (\xi - \eta); \quad N_3 = 0,5 \cdot (1 + \eta); \quad (7.17)$$

$$[D]_3 = \frac{1}{2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & 1 & -1 \\ \hline & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad [E]_3 = \frac{1}{2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & \\ \hline -1 & 1 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad [G] = \frac{1}{3} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$a_{ij}^3 = \lambda_x \cdot \frac{y_{l+1} - y_l}{x_{k+1} - x_k} \cdot [E]_3 + \lambda_x \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{l+1} - y_l} \cdot [D]_3; \quad b_i^3 = 0,25 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (y_{l+1} - y_l) \cdot q_0 \cdot [G]. \quad (7.18)$$

Для трикутника з лівим верхнім прямим кутом (жовтий колір), трикутник четвертого виду.

$$N_1 = -0,5 \cdot (1 - \eta); \quad N_2 = 0,5 \cdot (1 + \xi); \quad N_3 = 0,5 \cdot (\eta - \xi); \quad (7.19)$$

$$[E]_4 = \frac{1}{2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & 1 & -1 \\ \hline & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad [D]_4 = \frac{1}{2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & -1 \\ \hline & & \\ \hline -1 & & 1 \\ \hline \end{array} \quad [G] = \frac{1}{3} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$a_{ij}^3 = \lambda_x \cdot \frac{y_{l+1} - y_l}{x_{k+1} - x_k} \cdot [E]_4 + \lambda_x \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{l+1} - y_l} \cdot [D]_4; \quad b_i^3 = 0,25 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (y_{l+1} - y_l) \cdot q_0 \cdot [G]. \quad (7.20)$$

Всі інші базові матриці і розрахункові формули для цих трикутників залишаються без змін.

7.2. Загальна формула побудови координатних функцій кінцевих елементів

В попередньому розділі було розглянуто чотири варіанти розміщення трикутника і вузлів апроксимації в локальних координатах (рис.7.2). Проте можуть бути і інші варіанти, як розміщення самого трикутника, так і розподілу і нумерації вузлів апроксимації. Наприклад, на рис.7.3 показано рівнобедрений трикутник з лінійною апроксимацією.

Для чотирикутників варіант розміщення в локальних координатах тільки один. Чотирикутник - він всюди чотирикутник, і в абсолютних і в локальних координатах. При відображенні чотирикутників змінюються тільки розміри, а геометрична форма залишається без змін. Це є ще одна перевага чотирикутних кінцевих елементів, що спрощують алгоритмізацію обчислювальних операцій.

Для кожного варіанта розміщення кінцевого елемента, трикутника чи чотирикутника, і вузлів апроксимації в локальних координатах необхідно скласти вирази для координатних функцій. Загальна формула для побудови координатних функцій в локальних координатах має вигляд [4, С.271]:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{\prod_{j=1}^i F_j(\xi, \eta)}{\prod_{j=1}^3 F_j(\xi_i, \eta_i)}, \quad (7.21)$$

де $F_j(\xi, \eta) = 0$ - рівняння сторін трикутника чи чотирикутника і інших прямих ліній, що з'єднують всі вузли, крім і-того. Тут ξ_i, η_i - локальні координати і-того вузла.

Формула (7.21) дає можливість побудувати координатні функції при використанні апроксимацій вищих порядків, наприклад кубічної апроксимації. Для трикутника кубічні параболи будуються на 9 вузлах, а для чотирикутника - на 12 вузлах [4, С.271]

З допомогою формули (7.21) можуть бути побудовані і координатні функції для кінцевих елементів в абсолютних координатах. При цьому слід використовувати рівняння прямих ліній в абсолютних координатах.

Критеріями контролю достовірності побудованого по формулі (7.21) сімейства координатних функцій для обраного кінцевого елемента є їх основні властивості:

значення координатних функцій дорівнюють одиниці у власних вузлах і дорівнюють нулю в усіх інших вузлах;

алгебраїчна сума всього набору координатних функцій дорівнює одиниці;

алгебраїчна сума всіх похідних координатних функцій по всім координатам дорівнює нулю.

Останню властивість зручно використовувати для перевірки достовірності диференцювання координатних функцій.

Побудову координатних функцій з допомогою формули (7.21) продемонструємо на прикладі трикутника, виділеного на рис.7.3 зеленим кольором. Такий трикутник дозволяє переходити від областей з густою сіткою кінцевих елементів до областей з розрідженою сіткою, як показано на рис.7.3.

Прямі лінії, що з'єднують вузли апроксимації, це сторони трикутника. Для вузла номер 1 маємо одну вертикальну лінію $1 - \xi = 0$, яка не проходить через вузол під номером 1. У вузлі 1 $\xi_1 = -1$, тому $F_1 = 1 - \xi_1 = 2$. Таким чином, $N_1 = \frac{(1 - \xi)}{2}$. Для вузла номер 2 – це сторона трикутника, що з'єднує вузли під номерами 1 і 3 $\eta - \frac{\xi}{2} - \frac{1}{2} = 0$. У вузлі 2 $\xi_2 = 1$; $\eta_2 = -1$. Підставляючи в формулу (7.21) отримуємо вираз для координатної функції другого вузла. Аналогічно і для вузла номер 3.

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{\eta - \frac{\xi}{2} - \frac{1}{2}}{-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{1 + \xi - 2 \cdot \eta}{4}. \quad N_3(\xi, \eta) = \frac{\eta + \frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1 + \xi + 2 \cdot \eta}{4}.$$

Легко впевнитися, що набір цих функцій задовольняє вказаним критеріям контролю їх достовірності.

Для інтегрування компонентів базових матриць трикутника ще раз запишемо координатні функції і їх похідні.

$$N_1 = 0,5 \cdot (1 - \xi); \quad N_2 = 0,25 \cdot (1 + \xi - 2 \cdot \eta); \quad N_3 = 0,25 \cdot (1 + \xi + 2 \cdot \eta); \quad (7.22)$$

$$\frac{dN_1}{d\xi} = -0,5; \quad \frac{dN_2}{d\xi} = 0,25; \quad \frac{dN_3}{d\xi} = 0,25; \quad \frac{dN_1}{d\eta} = 0; \quad \frac{dN_2}{d\eta} = -0,5; \quad \frac{dN_3}{d\eta} = 0,5. \quad (7.23)$$

Для плоскопаралельного температурного поля інтегрування по площі трикутника (рис.7.3)

вздовж вертикальної осі по змінній η слід виконувати в межах від $-\frac{1+\xi}{2}$ до $\frac{1+\xi}{2}$.

$$a_{ij}^3 = \lambda_x \cdot \frac{y_{l+1} - y_l}{x_{k+1} - x_k} \cdot \int_{-1}^1 \int_{\frac{1+\xi}{2}}^{\frac{1+\xi}{2}} \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{dN_j}{d\xi} \cdot d\eta \cdot d\xi + \lambda_x \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{l+1} - y_l} \cdot \int_{-1}^1 \int_{\frac{1+\xi}{2}}^{\frac{1+\xi}{2}} \frac{dN_i}{d\eta} \cdot \frac{dN_j}{d\eta} \cdot d\eta \cdot d\xi. \quad (7.24)$$

$$b_i^3 = 0,25 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (y_{l+1} - y_l) \cdot q_0 \cdot \int_{-1-\frac{1+\xi}{2}}^1 \int_{-\frac{1+\xi}{2}}^2 N_i \cdot d\eta \cdot d\xi. \quad (7.25)$$

Після інтегрування отримуємо базові матриці.

$$[E]_{\Delta} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & 0,5 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & 0,125 \end{bmatrix} \quad [D]_{\Delta} = \begin{bmatrix} & & \\ & 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & & 0,5 \end{bmatrix} \quad [G]_{\Delta} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Розрахунки компонентів матриць кінцевоелементних рівнянь виконуються по формулах (6.10), з підстановкою отриманих базових матриць.

$$a_{ij}^3 = \lambda_x \cdot \frac{y_{l+1} - y_l}{x_{k+1} - x_k} \cdot [E]_{\Delta} + \lambda_x \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{l+1} - y_l} \cdot [D]_{\Delta}; \quad b_i^3 = 0,25 \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (y_{l+1} - y_l) \cdot q_0 \cdot [G]. \quad (7.26)$$

7.3. Комп'ютерна реалізація моделей конструкцій з використанням трикутних кінцевих елементів

Дуже простою конструкцією, сітка кінцевих елементів якої містить всі чотири види розглянутих вище трикутних кінцевих елементів, може бути довгий однорідний бетонний блок квадратного перетину з параметрами:

- розміри перетину блока $2 \times 2 \text{ м} \cdot \text{м}$;
- теплопровідність матеріалу $\lambda = 1,5 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$;
- потужність виділення тепла $q_0 = 4,5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$.

Блок конвективно охолоджується з одного боку, як показано на рис. 7.4, з коефіцієнтом конвекції $\alpha = 3 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$. Інші три сторони термоізовані.

Температура навколишнього середовища $T_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$.

Розглянемо рішення задачі розподілу температурного поля в перетині блока, з допомогою чотирикутних кінцевих елементів з лінійною апроксимацією. Квадратний перетин розділяємо на чотири кінцевих елемента (рис. 7.4). Нумерацію вузлів виконуємо в напрямку осей координат, знизу вверху і зліва направо. Доповнюючи текст QBASIC - програми (розділ 6.3) базовими матрицями чотирикутних кінцевих елементів (розділ 6.1) складаємо QBASIC - програму для рішення тільки цієї конкретної задачі.

SCREEN 12

```
DIM xb(3): DIM yb(3): DIM xg(4): DIM yg(4): DIM lag(4) : DIM x(9)
DIM g(4): DIM uv(4, 4): DIM e(4, 4): DIM d(4, 4) : DIM a(9, 5): DIM br(9)
nx = 2: ny = 2: ap = 3: q0 = 4.5: ld = 1.5: t0 = 0:
xb(1) = -2: xb(2) = 0: xb(3) = 2: yb(1) = -2: yb(2) = 0: yb(3) = 2:
e(1, 1) = 2: e(1, 2) = -2: e(1, 3) = -1: e(1, 4) = 1: e(4, 4) = 2:
```

```

e(2, 2) = 2: e(2, 3) = 1: e(2, 4) = -1: e(3, 3) = 2: e(3, 4) = -2:
d(1, 1) = 2: d(1, 2) = 1: d(1, 3) = -1: d(1, 4) = -2: d(4, 4) = 2:
d(2, 2) = 2: d(2, 3) = -2: d(2, 4) = -1: d(3, 3) = 2: d(3, 4) = 1:
g(1) = 1: g(2) = 1: g(3) = 1: g(4) = 1: uv(4, 4) = 2:
uv(1, 1) = 2: uv(1, 2) = 1: uv(1, 3) = 0: uv(1, 4) = 1:
uv(2, 2) = 2: uv(2, 3) = 1: uv(2, 4) = 0: uv(3, 3) = 2: uv(3, 4) = 1:
FOR i = 1 TO 4: FOR j = 1 TO 4: e(j, i) = e(i, j): d(j, i) = d(i, j):
uv(j, i) = uv(i, j): NEXT j: NEXT i: FOR i = 1 TO 4: FOR j = 1 TO 4
e(i, j) = e(i, j) / 6: d(i, j) = d(i, j) / 6: uv(i, j) = uv(i, j) / 3:
NEXT j: NEXT i: WINDOW (0, 0)-(12, 10): LINE (6, 0)-(6, 10), 7:
LINE (0, 5)-(12, 5), 7: FOR k = 1 TO nx: FOR l = 1 TO ny:
FOR x = xb(k) TO xb(k + 1) STEP .05
FOR y = yb(l) TO yb(l + 1) STEP .05
CIRCLE (x + 6, y + 5), .01, 1: NEXT y: NEXT x: NEXT l: NEXT k
nb = ny + 3: lb = nx * ny + nx + ny + 1: PRINT "nb =": nb, "lb =": lb
v(1) = -.7746: v(2) = 0: v(3) = -v(1): w(1) = 5 / 9: w(2) = 8 / 9: w(3) = w(1):
FOR i = 1 TO lb: br(i) = 0: NEXT i: FOR i = 1 TO lb:
FOR j = 1 TO nb: a(i, j) = 0: NEXT j, i: FOR k = 1 TO nx: xg(1) = xb(k):
xg(2) = xb(k + 1): xg(3) = xg(2): xg(4) = xg(1): FOR l = 1 TO ny:
yg(1) = yb(l): yg(2) = yg(1): yg(3) = yb(l + 1): yg(4) = yg(3):
FOR i = 1 TO 4: CIRCLE ((6 + xg(i)), 5 + yg(i)), .05, 7: NEXT i
lg(1) = (k - 1) * (ny + 1) + l: lg(2) = k * (ny + 1) + l:
lg(3) = lg(2) + 1: lg(4) = lg(1) + 1: FOR i = 1 TO 4: ia = lg(i):
br(ia) = br(ia) + .25 * q0 * g(i) * (xb(k + 1) - xb(k)) * (yb(l + 1) - yb(l))
FOR j = 1 TO 4: ja = lg(j): sij = ld * e(i, j) + ld * d(i, j):
IF ja > ia THEN GOTO 6
a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij
6 NEXT j: NEXT i: NEXT l: NEXT k: FOR i = 1 TO lb
PRINT i; a(i, 1); a(i, 2); a(i, 3); a(i, 4); a(i, 5), br(ia): NEXT i
k = nx: FOR l = 1 TO ny: lg(1) = (k - 1) * (ny + 1) + l:
xg(1) = xb(k): xg(2) = xb(k + 1): xg(3) = xg(2): xg(4) = xg(1):
yg(1) = yb(l): yg(2) = yg(1): yg(3) = yb(l + 1): yg(4) = yg(3):
lg(2) = k * (ny + 1) + l: lg(3) = lg(2) + 1: lg(4) = lg(1) + 1:
c4 = .5 * (yg(3) - yg(2)): FOR i = 2 TO 3: ia = lg(i): FOR j = 2 TO 3
ja = lg(j): sij = c4 * uv(i, j) * ap
IF ja <= ia THEN a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij
NEXT j: NEXT i: NEXT l: GOSUB 100:
FOR i = 1 TO n: PRINT i, x(i): NEXT i
PRINT : k = nx: ss = 0: FOR l = 1 TO ny: lg(1) = (k - 1) * (ny + 1) + l
xg(1) = xb(k): xg(2) = xb(k + 1): xg(3) = xg(2): xg(4) = xg(1):
yg(1) = yb(l): yg(2) = yg(1): yg(3) = yb(l + 1): yg(4) = yg(3):
lg(2) = k * (ny + 1) + l: lg(3) = lg(2) + 1: lg(4) = lg(1) + 1: c4 = .5

```

```

ss = ss + (yg(3) - yg(2)) * (x(lg(3)) + x(lg(2))) * .5 * ap
PRINT x(lg(2)), x(lg(3)): NEXT l: sv = 0: FOR k = 1 TO nx: FOR l = 1 TO ny
sv = sv + q0 * (xb(k + 1) - xb(k)) * (yb(l + 1) - yb(l)): NEXT l: NEXT k:
PRINT "ss="; ss, "sv="; sv: STOP
100 REM Розв'язування системи рівнянь.

```

В цьому місці необхідно розмістити підпрограму розв'язування системи рівнянь, наведену в розділі 5.4 на сторінці 129.

Далі, розглянемо рішення цієї ж задачі з допомогою трикутних кінцевих елементів при тій же нумерації вузлів (рис. 7.4). Для цього складемо **QBASIC** – програму на основі розглянутих вище базових матриць трикутних кінцевих елементів.

```

SCREEN 12
DIM xb(3): DIM yb(3): DIM xg(4): DIM yg(4): DIM lg(4): DIM x(9)
DIM g(4): DIM uv(4, 4): DIM e(4, 4): DIM d(4, 4): DIM a(9, 5): DIM br(9)
nx = 1: ny = 1: ap = 3: q0 = 4.5: ld = 1.5: t0 = 0:
g(1) = 2: g(2) = 2: g(3) = 2: uv(3, 3) = 2: uv(2, 3) = 1:
uv(1, 1) = 2: uv(1, 2) = 1: uv(1, 3) = 1: uv(2, 2) = 2:
FOR i = 1 TO 3: g(i) = g(i) / 3: FOR j = 1 TO 3: uv(j, i) = uv(i, j): NEXT j:
NEXT i: FOR i = 1 TO 3: FOR j = 1 TO 3: uv(i, j) = uv(i, j) / 3: NEXT j
NEXT i: nb = 5: lb = 9: PRINT "nb="; nb, "lb ="; lb
v(1) = -.7746: v(2) = 0: v(3) = -v(1): w(1) = 5 / 9: w(2) = 8 / 9: w(3) = w(1):
FOR i = 1 TO lb: br(i) = 0: bx(i) = 0: NEXT i:
FOR i = 1 TO lb: FOR j = 1 TO nb: a(i, j) = 0: c(i, j) = 0: NEXT j, i
k = 1: l = 1: ex(k, l) = ld: ey(k, l) = ld: qe(k, l) = q0
WINDOW (0, 0)-(12, 10): LINE (6, 0)-(6, 10), 7: LINE (0, 5)-(12, 5), 7
e(1, 1) = 1: e(1, 2) = -1: e(1, 3) = 0: e(2, 2) = 1: e(2, 3) = 0: e(3, 3) = 0:
d(1, 1) = 1: d(1, 2) = 0: d(1, 3) = -1: d(2, 2) = 0: d(2, 3) = 0: d(3, 3) = 1
FOR i = 1 TO 3: FOR j = i TO 3: e(j, i) = e(i, j): d(j, i) = d(i, j): NEXT j:
NEXT i: FOR i = 1 TO 3: FOR j = 1 TO 3: d(i, j) = .5 * d(i, j):
e(i, j) = .5 * e(i, j): NEXT j: NEXT i:
lg(1) = 2: lg(2) = 5: lg(3) = 3: xg(1) = -2: xg(2) = 0: xg(3) = xg(1):
yg(1) = 0: yg(2) = 0: yg(3) = 2
FOR i = 1 TO 3: CIRCLE ((6 + xg(i)), 5 + yg(i)), .05, 7: NEXT i
FOR x = xg(1) TO xg(2) STEP .05: FOR y = 0 TO -x STEP .05:
CIRCLE (x + 6, y + 5), .01, 5: NEXT y: NEXT x:
FOR i = 1 TO 3: ia = lg(i): br(ia) = br(ia) + qe(k, l) * g(i): FOR j = 1 TO 3:
ja = lg(j): sij = ey(k, l) * d(i, j) + ex(k, l) * e(i, j):
IF ja > ia THEN GOTO 61
a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij
61 NEXT j: NEXT i
lg(1) = 4: lg(2) = 7: lg(3) = 5: xg(1) = 0: xg(2) = 2: xg(3) = 0:
yg(1) = -2: yg(2) = -2: yg(3) = 0:

```

```

FOR i = 1 TO 3: CIRCLE ((6 + xg(i)), 5 + yg(i)), .05, 7: NEXT i
FOR x = 0 TO 2 STEP .05: FOR y = -2 TO -x STEP .05:
CIRCLE (x + 6, y + 5), .01, 5: NEXT y: NEXT x
FOR i = 1 TO 3: ia = lg(i): br(ia) = br(ia) + qe(k, l) * g(i): FOR j = 1 TO 3:
ja = lg(j): sij = ey(k, l) * d(i, j) + ex(k, l) * e(i, j):
IF ja > ia THEN GOTO 611:
a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij:
611 NEXT j: NEXT i
e(1, 1) = 0: e(1, 2) = 0: e(1, 3) = 0: e(2, 2) = 1: e(2, 3) = -1: e(3, 3) = 1:
d(1, 1) = 1: d(1, 2) = -1: d(1, 3) = 0: d(2, 2) = 1: d(2, 3) = 0: d(3, 3) = 0
FOR i = 1 TO 3: FOR j = i TO 3: e(j, i) = e(i, j): d(j, i) = d(i, j): NEXT j:
NEXT i: FOR i = 1 TO 3: FOR j = 1 TO 3: d(i, j) = .5 * d(i, j):
e(i, j) = .5 * e(i, j): NEXT j: NEXT i
lg(1) = 5: lg(2) = 6: lg(3) = 3: xg(1) = 0: xg(2) = 0: xg(3) = -2:
yg(1) = 0: yg(2) = 2: yg(3) = 2:
FOR i = 1 TO 3: CIRCLE ((6 + xg(i)), 5 + yg(i)), .05, 7: NEXT i
FOR x = -2 TO 0 STEP .05: FOR y = -x TO 2 STEP .05:
CIRCLE (x + 6, y + 5), .01, 3: NEXT y: NEXT x
FOR i = 1 TO 3: ia = lg(i): br(ia) = br(ia) + qe(k, l) * g(i):
FOR j = 1 TO 3: ja = lg(j): sij = ey(k, l) * d(i, j) + ex(k, l) * e(i, j):
IF ja > ia THEN GOTO 62
a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij:
62 NEXT j: NEXT i
lg(1) = 7: lg(2) = 8: lg(3) = 5: xg(1) = 2: xg(2) = 2: xg(3) = 0:
yg(1) = -2: yg(2) = 0: yg(3) = 0:
FOR i = 1 TO 3: CIRCLE ((6 + xg(i)), 5 + yg(i)), .05, 7: NEXT i
FOR x = 0 TO 2 STEP .05: FOR y = -x TO 0 STEP .05:
CIRCLE (x + 6, y + 5), .01, 3: NEXT y: NEXT x:
FOR i = 1 TO 3: ia = lg(i): br(ia) = br(ia) + qe(k, l) * g(i):
FOR j = 1 TO 3: ja = lg(j): sij = ey(k, l) * d(i, j) + ex(k, l) * e(i, j)
IF ja > ia THEN GOTO 622
a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij
622 NEXT j: NEXT i
e(1, 1) = 1: e(1, 2) = -1: e(1, 3) = 0: e(2, 2) = 1: e(2, 3) = 0: e(3, 3) = 0:
d(1, 1) = 0: d(1, 2) = 0: d(1, 3) = 0: d(2, 2) = 1: d(2, 3) = -1: d(3, 3) = 1
FOR i = 1 TO 3: FOR j = i TO 3: e(j, i) = e(i, j): d(j, i) = d(i, j): NEXT j:
NEXT i: FOR i = 1 TO 3: FOR j = 1 TO 3: d(i, j) = .5 * d(i, j):
e(i, j) = .5 * e(i, j): NEXT j: NEXT i
lg(1) = 5: lg(2) = 8: lg(3) = 9: xg(1) = 0: xg(2) = 2: xg(3) = 2:
yg(1) = 0: yg(2) = 0: yg(3) = 2:
FOR i = 1 TO 3: CIRCLE ((6 + xg(i)), 5 + yg(i)), .05, 7: NEXT i
FOR x = xg(1) TO xg(2) STEP .05: FOR y = 0 TO x STEP .05:

```

```

CIRCLE (x + 6, y + 5), .01, 2: NEXT y: NEXT x
FOR i = 1 TO 3: ia = lg(i): br(ia) = br(ia) + qe(k, l) * g(i):
FOR j = 1 TO 3: ja = lg(j): sij = ey(k, l) * d(i, j) + ex(k, l) * e(i, j)
IF ja > ia THEN GOTO 63
a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij
63 NEXT j: NEXT i
lg(1) = 1: lg(2) = 4: lg(3) = 5: xg(1) = -2: xg(2) = 0: xg(3) = 0:
yg(1) = -2: yg(2) = -2: yg(3) = 0
FOR i = 1 TO 3: CIRCLE ((6 + xg(i)), 5 + yg(i)), .05, 7: NEXT i
FOR x = -2 TO 0 STEP .05: FOR y = -2 TO x STEP .05:
CIRCLE (x + 6, y + 5), .01, 2: NEXT y: NEXT x:
FOR i = 1 TO 3: ia = lg(i): br(ia) = br(ia) + qe(k, l) * g(i):
FOR j = 1 TO 3: ja = lg(j): sij = ey(k, l) * d(i, j) + ex(k, l) * e(i, j)
IF ja > ia THEN GOTO 633
a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij
633 NEXT j: NEXT i:
e(1, 1) = 0: e(1, 2) = 0: e(1, 3) = 0: e(2, 2) = 1: e(2, 3) = -1: e(3, 3) = 1:
d(1, 1) = 1: d(1, 2) = 0: d(1, 3) = -1: d(2, 2) = 0: d(2, 3) = 0: d(3, 3) = 1
FOR i = 1 TO 3: FOR j = i TO 3: e(j, i) = e(i, j): d(j, i) = d(i, j): NEXT j:
NEXT i: FOR i = 1 TO 3: FOR j = 1 TO 3: d(i, j) = .5 * d(i, j):
e(i, j) = .5 * e(i, j): NEXT j: NEXT i
lg(1) = 1: lg(2) = 5: lg(3) = 2: xg(1) = -2: xg(2) = 0: xg(3) = -2:
yg(1) = -2: yg(2) = 0: yg(3) = 0:
FOR i = 1 TO 3: CIRCLE ((6 + xg(i)), 5 + yg(i)), .05, 7: NEXT i
FOR x = -2 TO 0 STEP .05: FOR y = x TO 0 STEP .05:
CIRCLE (x + 6, y + 5), .01, 10: NEXT y: NEXT x
FOR i = 1 TO 3: ia = lg(i): br(ia) = br(ia) + qe(k, l) * g(i):
FOR j = 1 TO 3: ja = lg(j): sij = ey(k, l) * d(i, j) + ex(k, l) * e(i, j)
IF ja > ia THEN GOTO 64
a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij
64 NEXT j: NEXT i
lg(1) = 5: lg(2) = 9: lg(3) = 6: xg(1) = 0: xg(2) = 2: xg(3) = 0:
yg(1) = 0: yg(2) = 2: yg(3) = 2:
FOR i = 1 TO 3: CIRCLE ((6 + xg(i)), 5 + yg(i)), .05, 7: NEXT i
FOR x = 0 TO 2 STEP .05: FOR y = x TO 2 STEP .05:
CIRCLE (x + 6, y + 5), .01, 10: NEXT y: NEXT x
FOR i = 1 TO 3: ia = lg(i): br(ia) = br(ia) + qe(k, l) * g(i):
FOR j = 1 TO 3: ja = lg(j): sij = ey(k, l) * d(i, j) + ex(k, l) * e(i, j)
IF ja > ia THEN GOTO 644
a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij
644 NEXT j: NEXT i: FOR i = 1 TO 1b
PRINT i; a(i, 1); a(i, 2); a(i, 3); a(i, 4); a(i, 5), br(i): NEXT i

```

```

yg(1) = -2: yg(2) = 0: lg(1) = 7: lg(2) = 8: c4 = .5 * (yg(2) - yg(1))
FOR i = 1 TO 2: ia = lg(i): FOR j = 1 TO 2: ja = lg(j):
IF ja <= ia THEN a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + c4 * uv(i, j) * ap
NEXT j: NEXT i: yg(2) = 0: yg(3) = 2: lg(2) = 8: lg(3) = 9
c4 = .5 * (yg(3) - yg(2)): FOR i = 2 TO 3: ia = lg(i): FOR j = 2 TO 3: ja = lg(j):
IF ja <= ia THEN a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + c4 * uv(i, j) * ap
NEXT j: NEXT i: FOR i = 1 TO lb: bx(i) = br(i): q(i) = br(i): NEXT i
GOSUB 100:
FOR i = 1 TO n: br(i) = x(i): q(i) = br(i): PRINT i, x(i): NEXT i: STOP
100 REM Розв'язування системи рівнянь.

```

В цьому місці необхідно розмістити підпрограму розв'язування системи рівнянь, наведену в розділі 5.4 на сторінці 129.

В кінці роботи кожної програми друкуються значення температури в вузлах сітки кінцевих елементів. Для порівняння в табл. 7.1 наведені результати розрахунків.

Таблиця 7.1

| № Вузла | Трикутні елементи | Чотирикутні елементи | Аналітичне рішення |
|------------|----------------------|-------------------------|-----------------------|
| 1 | 30,49 | 30 | 30 |
| 2 | 29,51 | 30 | 30 |
| 3 | 30,49 | 30 | 30 |
| 4 | 23.47 | 24 | 24 |
| 5 | 24.53 | 24 | 24 |
| 6 | 23.47 | 24 | 24 |
| 7 | 6.34 | 6 | 6 |
| 8 | 5.66 | 6 | 6 |
| 9 | 6.34 | 6 | 6 |

Обидві програми складені тільки для рішення однієї конкретної задачі, тому пояснення до них не надаються.

7.4. Трикутні кінцеві елементи з квадратичною апроксимацією

При квадратичній апроксимації невідомої функції в межах трикутних кінцевих елементів вузлові точки розміщуються на вершинах трикутників і на серединах їх сторін (рис. 7.5). На основі загальної формули (7.21), запишемо вирази для координатних функцій трикутного кінцевого елемента при квадратичній апроксимації.

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{(\xi-1) \cdot \xi}{2}; & N_3 &= \frac{(2 \cdot \eta - \xi)^2 - 1}{8}; & N_5 &= \frac{(2 \cdot \eta + \xi)^2 - 1}{8}; \\
 N_4 &= \frac{(1 + \xi)^2 - 4 \cdot \eta^2}{4}; & N_2 &= \frac{(1 - 2 \cdot \eta + \xi) \cdot (1 - \xi)}{2}; & N_6 &= \frac{(1 + 2 \cdot \eta + \xi) \cdot (1 - \xi)}{2}.
 \end{aligned} \tag{7.27}$$

Підстановкою числових значень локальних координат у вузлових точках, підтверджуємо, що отримані координатні функції дорівнюють одиниці у власних вузлах і дорівнюють нулю у всіх інших вузлах.

Похідні координатних функцій по локальним координатам.

$$\frac{dN_1}{d\xi} = \frac{2 \cdot \xi - 1}{2}; \quad \frac{dN_3}{d\xi} = \frac{\xi - 2 \cdot \eta}{4}; \quad \frac{dN_5}{d\xi} = \frac{2 \cdot \eta + \xi}{4}; \quad \frac{dN_4}{d\xi} = \frac{1 + \xi}{2}; \quad \frac{dN_2}{d\xi} = \eta - \xi; \quad \frac{dN_6}{d\xi} = -(\eta + \xi);$$

$$\frac{dN_1}{d\eta} = 0; \quad \frac{dN_3}{d\eta} = \frac{2 \cdot \eta - \xi}{2}; \quad \frac{dN_5}{d\eta} = \frac{2 \cdot \eta + \xi}{2}; \quad \frac{dN_4}{d\eta} = -2 \cdot \eta; \quad \frac{dN_2}{d\eta} = \xi - 1; \quad \frac{dN_6}{d\eta} = 1 - \xi. \quad (7.28)$$

Алгебраїчна сума всіх цих похідних дорівнює нулю. Тим самим задовільнюється критерій їх достовірності.

Трикутні кінцеві елементи не знайшли застосування в розрахунках температурних режимів досліджуваних автором конструктивних зразків. Тому програми на їх основі автором не розроблялися. Для рішення задач в конструкціях з гострими кутами і криволінійними границями застосовувалися чотирикутні криволінійні кінцеві елементи.

7.5. Криволінійні кінцеві елементи

До цього часу ми розглядали чотирикутні кінцеві елементи тільки зі сторонами паралельними осям координат. Для конструкцій, що мають гострі кути, пропонувалися трикутні кінцеві елементи, але тільки з прямим кутом і розміщенням катетів паралельно осям координат. Такі структури сітки кінцевих елементів значно спрощують інтегрування по площі і по сторонах перетинів конструкцій. Більшість інтегралів мають чисто аналітичне рішення.

В даному розділі розглянемо загальний випадок, коли форма криволінійних кінцевих елементів задається конструктивними формами, які неможливо описати аналітично. Для описання таких конструкцій зручно скористатися квадратичною апроксимацією. Тоді криволінійні сторони чотирикутників будуть апроксимовані квадратичними параболою, що проходять через три вузли невідомої функції. Це точки вершин чотирикутників і точки середини їх сторін. Координати цих точок, при описанні конструкції виробу, повинні бути задані як вихідні дані.

Координатні функції в локальних координатах є універсальною математичною формою описання аналітичних властивостей апроксимацій. Ці функції відображують базові елементи (квадрата чи прямокутного трикутника) в локальних координатах на кінцеві елементи в абсолютних координатах. Після розв'язування системи кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь і визначення температури у вузлах апроксимації з допомогою координатних функцій в локальних координатах вираховуються абсолютні координати і значення температури в точках, що відповідають цим координатам.

Проте, кінцевоелементні вирази для компонентів матриць системи алгебраїчних рівнянь вимагають виконання операцій диференцювання і інтегрування координатних функцій в абсолютних координатах.

Для цього виразимо похідні координатних функцій по абсолютним координатам через похідні цих функцій по локальним координатам в двомірній постановці задачі. Згідно правил диференцювання складної функції виду $N_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ [14., С.129] складемо наступну систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dN_i}{d\xi} &= \frac{dN_i}{dx} \frac{dx}{d\xi} + \frac{dN_i}{dy} \frac{dy}{d\xi}; \\ \frac{dN_i}{d\eta} &= \frac{dN_i}{dx} \frac{dx}{d\eta} + \frac{dN_i}{dy} \frac{dy}{d\eta}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Отриману систему рівнянь (7.28) розв'язуємо відносно похідних по абсолютним координатам методом визначників. Головний визначник системи рівнянь (7.28)

$$\det[J] = \frac{dx}{d\xi} \cdot \frac{dy}{d\eta} - \frac{dx}{d\eta} \cdot \frac{dy}{d\xi}.$$

$$\det[J_x] = \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{dy}{d\eta} - \frac{dN_i}{d\eta} \cdot \frac{dy}{d\xi}; \quad \det[J_y] = \frac{dN_i}{d\eta} \cdot \frac{dx}{d\xi} - \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{dx}{d\eta}.$$

Побічні визначники

$$\text{Рішення системи рівнянь (7.22)} \quad \frac{dN_i}{dx} = \frac{\det[J_x]}{\det[J]}; \quad \frac{dN_i}{dy} = \frac{\det[J_y]}{\det[J]}.$$

Похідні координатних функцій в локальних координатах вираховуються простим диференцюванням їх по локальним координатам.

Операції диференцювання координатних функцій по абсолютним координатам значно спрощуються для прямокутних кінцевих елементів, що досить часто зустрічаються в практиці розрахунків температурних полів. В цьому випадку похідні координатних функцій вздовж взаємно перпендикулярних осей відповідно дорівнюють нулю:

$\frac{dy}{d\xi} = 0$ і $\frac{dx}{d\eta} = 0$. Інші похідні залишаються постійними для всіх точок кінцевого елемента, тому можуть бути вираховані для кожного елемента тільки один раз. Для прямокутного елемента зі сторонами a вздовж осі x і b вздовж осі y

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{a}{2} \quad \text{і} \quad \frac{dy}{d\eta} = \frac{b}{2}. \quad \text{Звідки,} \quad \frac{dN_i}{dx} = \frac{2}{a} \frac{dN_i}{d\xi}; \quad \frac{dN_i}{dy} = \frac{2}{b} \frac{dN_i}{d\eta}.$$

Наступним принциповим питанням при формуванні матриць кінцевоеlementних алгебраїчних рівнянь є інтегрування компонентів цих матриць. Як правило, аналітичні вирази для інтегралів криволінійних кінцевих елементів дуже громіздкі, тому їх доцільно вираховувати чисельно.

Чисельне інтегрування раціонально виконувати в локальних координатах. Так як координатні функції кінцевих елементів і їх похідні виражаються через локальні координати, то залишається записати тільки диференціали сторін.

На рис.7.9 зображені геометричні співвідношення між диференціалами в локальних і абсолютних координатах.

Диференціал поверхні в абсолютних координатах буде дорівнювати скалярному добутку векторів $d\eta$ і $d\xi$.

$dS = \det [J]^* d\xi d\eta$, де $[J]$ - якобіан системи рівнянь (7.22).

Обчислення контурних інтегралів вздовж участків границь із заданими крайовими умовами потребує вираження лінійних диференціалів через локальні координати. З врахуванням взаємної орієнтації векторів $d\eta$ і $d\xi$ згідно рис.7.5 отримуємо:

$$\begin{aligned} \text{- для горизонтальних сторін} \quad dl &= \sqrt{\left(\sum_j \frac{dN_j}{d\xi} x_j\right)^2 + \left(\sum_j \frac{dN_j}{d\xi} y_j\right)^2} \cdot d\xi; \\ \text{- для вертикальних сторін} \quad dl &= \sqrt{\left(\sum_j \frac{dN_j}{d\eta} x_j\right)^2 + \left(\sum_j \frac{dN_j}{d\eta} y_j\right)^2} \cdot d\eta. \end{aligned}$$

Криволінійні чотирикутні кінцеві елементи дозволяють охопити різні конструктивні витвори без застосування трикутників. Операції інтегрування по площах трикутників показалися автору більш громіздкими, чим по площах чотирикутників.

При побудові сітки кінцевих елементів рекомендується вибирати трикутники близькі по формі до рівносторонніх трикутників. Такий трикутник легко розділити на два прямокутних і тим самим спростити інтегрування, але розгляд таких питань потребує окремої книги.

7.6. Програма розрахунків температурного поля в конструкціях складних геометричних форм

При побудові програми розрахунків температурного поля в конструкціях з криволінійними границями, основною задачею є формування сітки криволінійних кінцевих елементів. Подальші процедури обчислень компонентів матриць системи кінцевоелементних алгебраїчних рівнянь стандартні і не залежать від форми кінцевих елементів.

Проілюструємо такі особливості на прикладі циліндричної конструкції у вигляді втулки конічної форми (рис. 7.6).

Найзручнішою для програмування на комп'ютері є регулярна сітка кінцевих елементів, як показано в главі 6 на (рис.6.1, 6.4, 6.7, 6.10). Области з криволінійними границями накриваються криволінійною сіткою. В прикладі на (рис.7.7) розрахункову область розділяємо горизонтальними лініями на nu шарів. Вихідними даними задаються базові координати шарів по висоті конструкції: $y_b(1); y_b(2); \dots; y_b(nu+1)$.

По радіусу всі горизонтальні шари розділяємо на lx вертикальних трубок у вигляді зрізаного конуса (рис.7.7). Аналогічно задаються базові координати по радіусу для нижньої сторони першого горизонтального шару: $x_b(1); x_b(2); \dots; x_b(nx+1)$. У випадку прямокутної сітки ці координати дійсні для всіх шарів по висоті конструкції. В даному

випадку їх необхідно вирахувати для кожного шару з врахуванням кінчної форми конструкції.

Нижче наводимо текст програми для розрахунків температурного поля в заданій конструкції.

SCREEN 12

```
DIM xb(11): DIM yb(10): DIM qe(10, 10): DIM ex(10, 10): DIM ey(10, 10)
DIM a(283, 30): DIM c(283, 30): DIM ca(283, 30): DIM br(283): DIM zb(11)
DIM v(3): DIM w(3): DIM xg(8): DIM yg(8): DIM lg(8)
DIM snp(8), dxp(8), dyp(8): DIM qhp(3, 3, 8): DIM ip(10, 10)
DIM det(3, 3): DIM shp(3, 3, 8): DIM dxl(3, 3, 8): DIM dyl(3, 3, 8)
DIM a1(3, 3): DIM a2(3, 3): DIM a3(3, 3): DIM a4(3, 3): DIM vb(11):
DIM dnx(3, 3, 8): DIM dny(3, 3, 8): DIM rr(3, 3): DIM qw(10, 10)
DIM x(283): DIM q(283): DIM bx(283): DIM qt(283): DIM ub(11)
DIM po(10, 10): DIM co(10, 10): DIM qg(10, 10): DIM qv(10, 10)
REM Введення вихідних даних.
nx = 7: ny = 6: ab = 10: ah = 0: ap = 12: al = 50
nx1 = 5: nx2 = nx - nx1: r1 = .05: r2 = .06: rd = .08
dt = 60: q0 = 19440: t0 = 15: tw = 220: ml = 240: gam = 1.55
xb(1) = .02: zb(1) = .02: du1 = (r2 - xb(1)) / nx1: dx1 = (r1 - xb(1)) / nx1
FOR i = 1 TO nx1: xb(i + 1) = xb(i) + dx1: zb(i + 1) = zb(i) + du1: NEXT i
xb(nx + 1) = rd: dx2 = (rd - r1) / nx2: zb(nx + 1) = rd: dz2 = (rd - r2) / nx2
FOR i = nx1 + 1 TO nx: xb(i + 1) = xb(i) + dx2: zb(i + 1) = zb(i) + dz2
NEXT i: yb(1) = 0: yb(2) = .01: yb(3) = .02: yb(4) = .03:
yb(5) = .04: yb(6) = .05: yb(7) = .06
REM Побудова сітки кінцевих елементів.
WINDOW (0, 0)-(10, 8): FOR i = 1 TO ny + 1
  LINE (0, 100 * yb(i))-(100 * xb(nx + 1), 100 * yb(i)), i: NEXT i
FOR i = 1 TO nx + 1
  LINE (100 * xb(i), 0)-(100 * zb(i), 100 * yb(ny + 1)), i: NEXT i
FOR x = 0 TO 10 STEP .001: CIRCLE (x, .05 * 125), .01, 4: NEXT x
REM Наповнення кінцевих елементів теплофізичними
REM параметрами. Візуалізація цього процесу.
FOR k = 1 TO nx1: FOR l = 1 TO ny
  tg1 = (zb(k) - xb(k)) / (yb(ny + 1) - yb(1))
  tg2 = (zb(k + 1) - xb(k + 1)) / (yb(ny + 1) - yb(1))
  vb(k) = xb(k) + tg1 * (yb(l) - yb(1)): vb(k + 1) = xb(k + 1) + tg2 * (yb(l) - yb(1))
  ub(k) = xb(k) + tg1 * (yb(l + 1) - yb(1)): ub(k + 1) = xb(k + 1) + tg2 * (yb(l + 1) - yb(1))
  wb(k) = .5 * (ub(k) + vb(k)): wb(k + 1) = .5 * (ub(k + 1) + vb(k + 1))
  ex(k, l) = .345: ey(k, l) = .345: po(k, l) = 1100: co(k, l) = 2436: qe(k, l) = q0
  s = tw * po(k, l) * co(k, l) * 3.14
  qg(k, l) = s * (wb(k + 1) * wb(k + 1) - wb(k) * wb(k)) * (yb(l + 1) - yb(l))
```

```

FOR y = yb(l) TO yb(l + 1) STEP .001
x1 = xb(k) + tg1 * (y - yb(1)): x2 = xb(k + 1) + tg2 * (y - yb(1))
FOR x = x1 TO x2 STEP .001
CIRCLE (100 * x, 100 * y), .0001, 6: NEXT x, y: NEXT l, k
FOR k = nx1 + 1 TO nx: FOR l = 1 TO ny
tg1 = (zb(k) - xb(k)) / (yb(ny + 1) - yb(1))
tg2 = (zb(k + 1) - xb(k + 1)) / (yb(ny + 1) - yb(1))
vb(k) = xb(k) + tg1 * (yb(l) - yb(1)): vb(k+1) = xb(k+1) + tg2 * (yb(l) - yb(1))
ub(k)=xb(k)+tg1*(yb(l+1) - yb(1)): ub(k+1) = xb(k+1) + tg2 * (yb(l+1) - yb(1))
wb(k) = .5 * (ub(k) + vb(k)): wb(k + 1) = .5 * (ub(k + 1) + vb(k + 1))
ex(k, l) = 100: ey(k, l) = 100: po(k, l) = 1000: co(k, l) = 4185: qe(k, l) = 0
FOR y = yb(l) TO yb(l + 1) STEP .0001
x1 = xb(k) + tg1 * (y - yb(1)): x2 = xb(k + 1) + tg2 * (y - yb(1)):
FOR x = x1 TO x2 STEP .0001
CIRCLE (100 * x, 100 * y), .0001, 3: NEXT x, y: NEXT l, k
REM Формування матриць коефіцієнтів і вільних членів
REM7 кінцевоелементної системи алгебраїчних рівнянь.
nb = 3 * ny + 5: lb = nx * (3 * ny + 2) + 2 * ny + 1: PRINT "nb="; nb, "lb="; lb
FOR i = 1 TO lb: bx(i) = 0: x(i) = 0: NEXT i
FOR i = 1 TO lb: FOR j = 1 TO nb: a(i, j) = 0: NEXT j, i
v(1) = -.7746: v(2) = 0: v(3) = -v(1): w(1) = 5 / 9: w(2) = 8 / 9: w(3) = w(1)
ks = 1: kt = 1: FOR i = 1 TO lb: br(i) = 0: NEXT i
FOR i = 1 TO lb: FOR j = 1 TO nb: a(i, j) = 0: c(i, j) = 0: NEXT j, i
FOR k = 1 TO nx: FOR l = 1 TO ny: GOSUB 65 : ip(k, l) = 0:
FOR i = 1 TO 8: CIRCLE (100 * xg(i), 100 * yg(i)), .03, 7: NEXT i
FOR m = 1 TO 3: xl = v(m): FOR n = 1 TO 3: yl = v(n): GOSUB 90
c1 = 0: c4 = 0: c2 = 0: c3 = 0: FOR i = 1 TO 8
shp(m, n, i) = snp(i): dxl(m, n, i) = dxp(i): dyl(m, n, i) = dyp(i)
c1 = c1 + dxl(m, n, i) * xg(i): c4 = c4 + dyl(m, n, i) * yg(i)
c2 = c2 + dxl(m, n, i) * yg(i): c3 = c3 + dyl(m, n, i) * xg(i): NEXT i
det(m, n) = c1 * c4 - c2 * c3: din = 1 / det(m, n)
a1(m, n) = c4 * din: a4(m, n) = c1 * din: a2(m, n) = -c2 * din
a3(m, n) = -c3 * din: NEXT n: NEXT m
FOR m = 1 TO 3: FOR n = 1 TO 3: rr(m, n) = 0: FOR i = 1 TO 8:
dnx(m, n, i) = a1(m, n) * dxl(m, n, i) + a2(m, n) * dyl(m, n, i)
dny(m, n, i) = a3(m, n) * dxl(m, n, i) + a4(m, n) * dyl(m, n, i)
rr(m, n) = rr(m, n) + shp(m, n, i) * xg(i): NEXT i: NEXT n, m
FOR i = 1 TO 8: ia = lg(i): ri = 0: FOR m = 1 TO 3: FOR n = 1 TO 3
ri = ri + w(m) * w(n) * det(m, n) * shp(m, n, i) * rr(m, n): NEXT n, m
br(ia) = br(ia) + qe(k, l) * ri: FOR j = 1 TO 8: ja = lg(j): sij = 0: cij = 0
FOR m = 1 TO 3: FOR n = 1 TO 3
sx = ex(k, l) * dnx(m, n, i) * dnx(m, n, j) :

```

```

sy = ey(k, l) * dny(m, n, i) * dny(m, n, j)
sc = rr(m, n) * w(m) * w(n) * det(m, n): sij = sij + sc * (sx + sy)
cij = cij + sc * po(k, l) * shp(m, n, i) * co(k, l) * shp(m, n, j): NEXT n, m
IF ja > ia THEN GOTO 6
a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij:
c(ia, ja - ia + nb) = c(ia, ja - ia + nb) + cij
6 NEXT j: NEXT i: NEXT l: NEXT k
REM Доповнення матриць коефіцієнтів крайовими умовами
REM Ньютона на верхній границі розрахункової області.
l = ny: FOR k = 1 TO nx: GOSUB 65
c1 = .5 * (xg(5) - xg(7)): FOR m = 1 TO 3: yl = 1: xl = v(m): GOSUB 90
d1 = 0: rr(m, 1) = 0: FOR i = 5 TO 7:
  shp(m, 1, i) = snp(i): dxl(m, 1, i) = dxp(i)
d1 = d1 + dxl(m, 1, i) * xg(i): rr(m, 1) = rr(m, 1) + shp(m, 1, i) * xg(i): NEXT i
det(m, 1) = c1: NEXT m: FOR i = 5 TO 7: ia = lg(i): FOR j = 5 TO 7
  ja = lg(j): sij = 0: FOR m = 1 TO 3
    sij = sij + rr(m, 1) * w(m) * det(m, 1) * shp(m, 1, i) * shp(m, 1, j): NEXT m
  IF ja <= ia THEN a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij * ab
  NEXT j: NEXT i: NEXT k:
REM Доповнення матриць коефіцієнтів крайовими умовами
REM Ньютона на нижній границі розрахункової області.
l = 1: FOR k = 1 TO nx: GOSUB 65
c1 = .5 * (xg(3) - xg(1)): FOR m = 1 TO 3: yl = -1: xl = v(m): GOSUB 90
d1 = 0: rr(m, 1) = 0: FOR i = 1 TO 3:
  shp(m, 1, i) = snp(i): dxl(m, 1, i) = dxp(i)
d1 = d1 + dxl(m, 1, i) * xg(i): rr(m, 1) = rr(m, 1) + shp(m, 1, i) * xg(i):
NEXT i: det(m, 1) = c1: NEXT m: FOR i = 1 TO 3: ia = lg(i):
  FOR j = 1 TO 3: ja = lg(j): sij = 0: FOR m = 1 TO 3:
    sij = sij + rr(m, 1) * w(m) * det(m, 1) * shp(m, 1, i) * shp(m, 1, j): NEXT m
  IF ja <= ia THEN a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij * ah
  NEXT j: NEXT i: NEXT k:
REM Доповнення матриць коефіцієнтів крайовими умовами
REM Ньютона на правій границі розрахункової області.
k = nx: FOR l = 1 TO ny: GOSUB 65
c4 = .5 * (yg(5) - yg(3)): FOR n = 1 TO 3: yl = v(n): xl = 1: GOSUB 90
d4 = 0: FOR i = 3 TO 5: shp(1, n, i) = snp(i): dyl(1, n, i) = dyp(i):
d4 = d4 + dyl(1, n, i) * yg(i): NEXT i: det(1, n) = c4: NEXT n:
FOR i = 3 TO 5: ia = lg(i): FOR j = 3 TO 5: ja = lg(j): sij = 0: FOR n=1 TO 3
  sij = sij + xg(3) * w(n) * det(1, n) * shp(1, n, i) * shp(1, n, j): NEXT n
  IF ja <= ia THEN a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij * ap
  NEXT j: NEXT i: NEXT l
REM Доповнення матриць коефіцієнтів крайовими умовами

```

```

REM Ньютона на лівій границі розрахункової області.
k = 1: FOR I = 1 TO ny: GOSUB 65
c4 = .5 * (yg(7) - yg(1)): FOR n = 1 TO 3: yl = v(n): xl = -1: GOSUB 90
d4 = 0: FOR i = 7 TO 9: ii = i: IF i = 9 THEN ii = 1
shp(1, n, ii) = snp(ii): dyl(1, n, ii) = dyp(ii):
d4 = d4 + dyl(1, n, ii) * yg(ii): NEXT i: det(1, n) = c4: NEXT n
FOR i = 7 TO 9: ii = i: IF i = 9 THEN ii = 1
ia = lg(ii): FOR j = 7 TO 9: jj = j: IF j = 9 THEN jj = 1
ja = lg(jj): sij = 0: FOR n = 1 TO 3:
sij = sij + xg(1) * w(n) * det(1, n) * shp(1, n, ii) * shp(1, n, jj): NEXT n
IF ja <= ia THEN a(ia, ja - ia + nb) = a(ia, ja - ia + nb) + sij * al
NEXT j: NEXT i: NEXT i:
REM Обчислення компонентів матриць схеми Кранка-Ніколсона.
FOR i = 1 TO lb: bx(i) = br(i): q(i) = br(i): NEXT i
FOR i = 1 TO lb: FOR j = 1 TO nb: ca(i, j) = (c(i, j) / dt - .5 * a(i, j))
c(i, j) = (c(i, j) / dt + .5 * a(i, j)): NEXT j: NEXT i: kt = 1
REM Початок ітераційного процесу.
10
FOR i = 1 TO lb: FOR j = 1 TO nb: a(i, j) = c(i, j): NEXT j: NEXT i
GOSUB 100: REM Розв'язування системи алгебраїчних рівнянь
FOR i = 1 TO n: br(i) = x(i): q(i) = br(i): NEXT i
REM Побудова графіків залежності температури від часу
REM в процесі тверднення епоксидного композиту.
nz = 1: FOR k = 1 TO nx1: FOR I = 1 TO ny: GOSUB 65
tz = 0: FOR i = 1 TO 8: tz = tz + .125 * (t0 + br(lg(ii))): NEXT i
IF k = 3 THEN CIRCLE (kt * dt / 1600, .05 * tz), .01, nz: nz = nz + 1:
NEXT I: NEXT k
GOSUB 200: REM Перемноження матриць в схемі Кранка-Ніколсона.
FOR i = 1 TO lb: bx(i) = 0: NEXT i: sm = 0
FOR k = 1 TO nx1: FOR I = 1 TO ny
tg1 = (zb(k) - xb(k)) / (yb(ny + 1) - yb(1))
tg2 = (zb(k + 1) - xb(k + 1)) / (yb(ny + 1) - yb(1))
vb(k) = xb(k) + tg1 * (yb(l) - yb(1)): vb(k + 1) = xb(k + 1) + tg2 * (yb(l) - yb(1))
ub(k) = xb(k) + tg1 * (yb(l + 1) - yb(1))
ub(k + 1) = xb(k + 1) + tg2 * (yb(l + 1) - yb(1)): wb(k) = .5 * (ub(k) + vb(k)) :
wb(k + 1) = .5 * (ub(k + 1) + vb(k + 1)): GOSUB 65
REM Обмеження розрахунків по допустимій температурі.
s = 0: FOR i = 1 TO 8: s = s + .125 * (q(lg(i)) + t0): NEXT i
IF s > 125 THEN PRINT k; I; s, qw(k, I), qg(k, I); " wskipelo "
REM Завершення обчислень по запасу енергії тепловиділення.
tqw = q0 * gam ^ (.1 * (s - 20)): IF qw(k, I) > qg(k, I) THEN tqw = 0
qw(k, I) = qw(k, I) + tqw * dt * 3.14 * (xb(k + 1) * xb(k + 1) - xb(k) * xb(k)) * (yb(l + 1) - yb(l))

```

```

xm = .5 * (wb(k) + wb(k + 1)): ym = .5 * (yb(l) + yb(l + 1))
IF qw(k, l) > qg(k, l) AND ip(k, l)=0 THEN CIRCLE (100*xm, 100*y), .1, ks
IF qw(k, l) > qg(k, l) AND ip(k, l)=0 THEN ks = ks + 1: ip(k, l)=1
REM IF qw(k, l) > qg(k, l) THEN PRINT " wse wigorelo", k, l
FOR i = 1 TO 8: qt(lg(i)) = tqw: NEXT i
REM Доповнення перемноження матриць в схемі
REM Кранка-Ніколсона вектором тепловиділення.
FOR m = 1 TO 3: xl = v(m): FOR n = 1 TO 3: yl = v(n): GOSUB 90
c1 = 0: c4 = 0: c2 = 0: c3 = 0: FOR i = 1 TO 8
qhp(m, n, i) = snp(i) * qt(lg(i))
shp(m, n, i) = snp(i): dxl(m, n, i) = dxp(i): dyl(m, n, i) = dyp(i)
c1 = c1 + dxl(m, n, i) * xg(i): c4 = c4 + dyl(m, n, i) * yg(i):
c2 = c2 + dxl(m, n, i) * yg(i): c3 = c3 + dyl(m, n, i) * xg(i): NEXT i
det(m, n) = c1 * c4 - c2 * c3: NEXT n, m: FOR m=1 TO 3: FOR n = 1 TO 3
rr(m, n) = 0: FOR i = 1 TO 8: rr(m, n) = rr(m, n) + shp(m, n, i) * xg(i)
NEXT i: NEXT n, m: FOR i = 1 TO 8: ia = lg(i): ri = 0: FOR m = 1 TO 3:
FOR n = 1 TO 3: ri = ri + w(m) * w(n) * det(m, n) * qhp(m, n, i) * rr(m, n)
NEXT n, m: bx(ia) = bx(ia) + ri: NEXT i: NEXT l: NEXT k: kt = kt + 1
IF kt < ml THEN GOTO 10
REM Завершення ітераційного процесу.
STOP: CLS
REM Побудова графіків розподілу температури вздовж радіуса.
FOR i = 1 TO ny + 1
LINE (0, 100 * yb(i))-(100 * xb(nx + 1), 100 * yb(i)), i: NEXT i
FOR x = 0 TO 10 STEP .001: CIRCLE (x, .05 * 125), .01, 4
CIRCLE (x, .05 * t0), .01, 7: NEXT x: FOR i = 1 TO ny + 1
LINE (0, 100 * yb(i))-(100 * xb(nx + 1), 100 * yb(i)), i: NEXT i
FOR i = 1 TO nx + 1
LINE (100 * xb(i), 0)-(100 * zb(i), 100 * yb(ny + 1)), i: NEXT i
FOR x = 0 TO 10 STEP .001: CIRCLE (x, .05 * 125), .01, 4: NEXT x
FOR l = 1 TO ny: FOR k = 1 TO nx: GOSUB 65
yl = 0: FOR xl = -1 TO 1 STEP .001: GOSUB 90
z = 0: tt = 0: FOR i = 1 TO 8: z = z + snp(i) * xg(i): tt = tt + snp(i) * q(lg(i))
NEXT i: CIRCLE (100 * z, .05 * (tt + t0)), .00001, l: NEXT xl: NEXT k
NEXT l: STOP: CLS
REM Відновлення сітки кінцевих елементів.
FOR i = 1 TO ny + 1
LINE (0, 100 * yb(i))-(100 * xb(nx + 1), 100 * yb(i)), i: NEXT i
FOR i = 1 TO nx + 1:
LINE (100 * xb(i), 0)-(100 * zb(i), 100 * yb(ny + 1)), i: NEXT i
REM Побудова ізотерм.
FOR i = 1 TO lb: bx(i) = q(i): NEXT i: ml = 15: t1 = 10000000: t2 = 0

```

```

FOR i = 1 TO lb: IF t1 > bx(i) THEN i1 = i
IF t2 < bx(i) THEN i2 = i
IF t1 > bx(i) THEN t1 = bx(i)
IF t2 < bx(i) THEN t2 = bx(i)
NEXT i: td = (t2 - t1) / ml: PRINT "Tmax ="; t2+ t0: PRINT "Tmin ="; t1 + t0
PRINT "Tokr ="; t0: PRINT "t ="; kt * (dt - 1); "sec"; kt * (dt - 1) / 60; "min";
x(1) = t1: FOR i = 1 TO ml: x(i + 1) = x(i) + td: NEXT i:
FOR l = 1 TO ny: FOR k = 1 TO nx: GOSUB 65
FOR yl = -1 TO 1 STEP .01: xl = -1: GOSUB 90: z = 0
tt = 0: FOR i = 1 TO 8: z = z + snp(i) * xg(i): tt = tt + snp(i) * bx(lg(i))
NEXT i: w(1) = tt: v(1) = z: xl = 1: GOSUB 90: z = 0
tt = 0: FOR i = 1 TO 8: z = z + snp(i) * xg(i): tt = tt + snp(i) * bx(lg(i))
NEXT i: w(3) = tt: v(3) = z: xl = 0: GOSUB 90: f = 0
z = 0: tt = 0: FOR i = 1 TO 8: f = f + snp(i) * yg(i): z = z + snp(i) * xg(i)
tt = tt + snp(i) * bx(lg(i)): NEXT i: w(2) = tt: v(2) = z
r1 = v(2) * v(2) - v(1) * v(1): r2 = v(3) * v(3) - v(1) * v(1)
p1 = v(3) - v(1): p2 = v(2) - v(1): f1 = w(2) - w(1): f2 = w(3) - w(1)
det = r1 * p1 - r2 * p2: dea = f1 * p1 - f2 * p2: deb = r1 * f2 - r2 * f1
ad = dea / det: bd = deb / det: cd = w(1) - ad * v(1) * v(1) - bd * v(1)
FOR j = 1 TO ml: sq = (bd * bd - 4 * ad * (cd - x(j))): IF sq < 0 THEN 33
sq = SQR(sq): IF ABS(ad) > 0 THEN x11 = .5 * (-bd - sq) / ad
IF ABS(ad) > 0 THEN x22 = .5 * (-bd + sq) / ad
IF v(1)<x11 AND v(3)>x11 THEN CIRCLE (100*x11, 100*f), .00001, ml-j+1
IF v(1)<x22 AND v(3)>x22 THEN CIRCLE (100*x22, 100*f), .00001, ml-j+1
33 NEXT j: NEXT yl: NEXT k: NEXT l: STOP
65 REM Глобальні координати і номери вузлів.
tg1 = (zb(k) - xb(k)) / (yb(ny + 1) - yb(1))
tg2 = (zb(k + 1) - xb(k + 1)) / (yb(ny + 1) - yb(1))
vb(k) = xb(k) + tg1 * (yb(l) - yb(1)):vb(k+1) = xb(k + 1) + tg2 * (yb(l) - yb(1))
ub(k) = xb(k)+tg1 * (yb(l+1) - yb(1)):ub(k+1)= xb(k+1)+tg2 * (yb(l+1) - yb(1))
wb(k) = .5 * (ub(k) + vb(k)): wb(k+1) = .5 * (ub(k + 1) + vb(k + 1)):
xg(1) = vb(k): xg(3) = vb(k+1): xg(2) = .5 * (vb(k)+vb(k+1)): xg(4) = wb(k+1)
xg(5) = ub(k+1): xg(7) = ub(k): xg(6) = .5 * (ub(k) + ub(k+1)): xg(8) = wb(k)
yg(1) = yb(l): yg(2) = yg(1): yg(3) = yg(1): yg(4) = .5 * (yb(l) + yb(l + 1))
yg(5) = yb(l + 1): yg(6) = yg(5): yg(7) = yg(5): yg(8) = yg(4)
ns = (2 * ny + 1) * (k - 1) + (ny + 1) * (k - 1) + 2 * l - 1
lg(1) = ns: lg(8) = ns + 1: lg(7) = ns + 2: ns = (2 * ny + 1) * k + (ny + 1) * (k - 1)
lg(2) = ns: lg(6) = ns + 1: ns = (2 * ny + 1) * k + (ny + 1) * k + 2 * l - 1
lg(3) = ns: lg(4) = ns + 1: lg(5) = ns + 2
RETURN

```

Підпрограми

90 REM Координатні функції і їх похідні.

В цьому місці необхідно розмістити підпрограму обчислення координатних функцій і їх похідних, наведену в розділі 6.3 на сторінці 164.

100 REM Розв'язування системи рівнянь.

В цьому місці необхідно розмістити підпрограму розв'язування системи рівнянь, наведену в розділі 5.4 на сторінці 129.

200 REM Перемноження матриць.

В цьому місці необхідно розмістити підпрограму перемноження матриць, наведену в розділі 5.5 на сторінці 131.

В процесі ітераційного розрахунку нестационарного режиму на екран виводяться графіки залежності від часу температури в найбільш нагрітих зонах епоксидного композиту (рис.7.8). Ітераційний процес зупиняється після досягнення заданного числа ітерацій ($m1 = 240$).

Після завершення ітераційного процесу виводяться графіки розподілу температури вздовж радіуса конструкції (рис.7.9) і картина ізотерм (рис. 7.10).

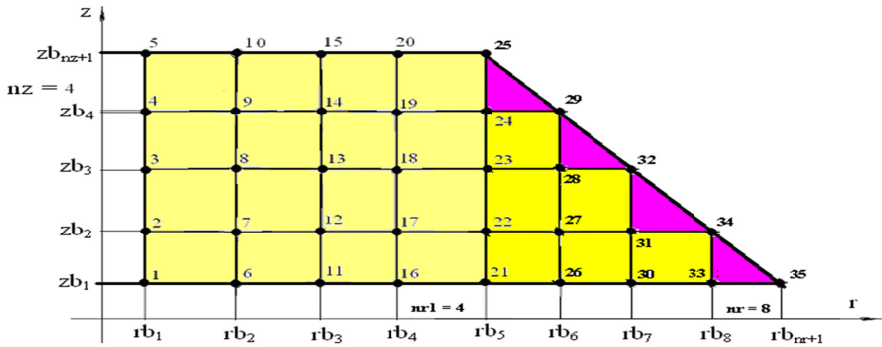


Рис. 7.1. Структура сітки кінцевих елементів і нумерація вузлів.
зрізаного конуса при лінійній апроксимації

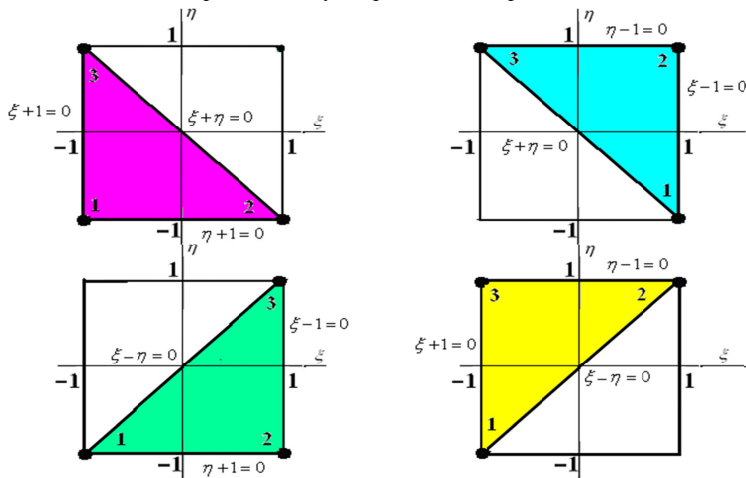


Рис. 7.2. Розміщення прямокутних трикутників
в локальних координатах

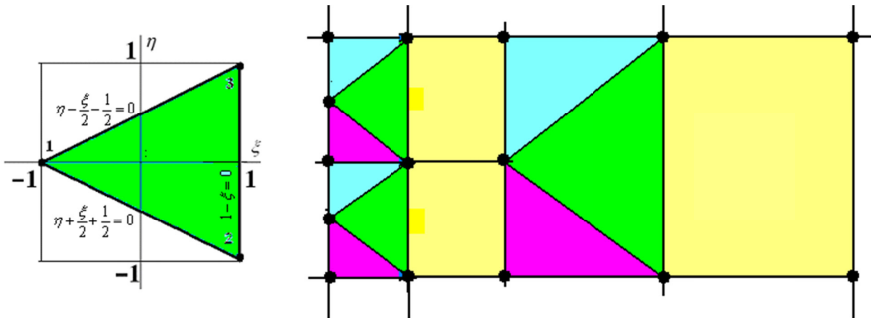


Рис. 7.3. Неоднорідна сітка кінцевих елементів

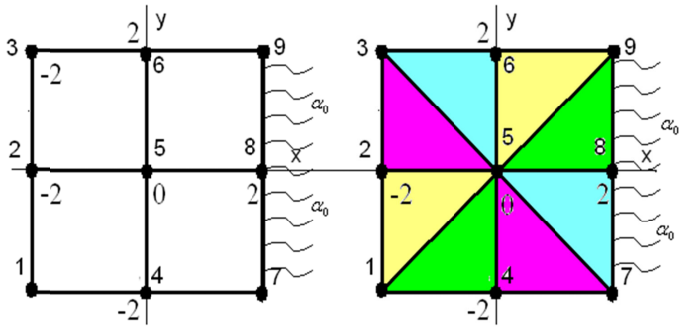


Рис. 7.4. Структура сітки кінцевих елементів із чотирьох квадратів і восьми трикутників при однаковій нумерації вузлів

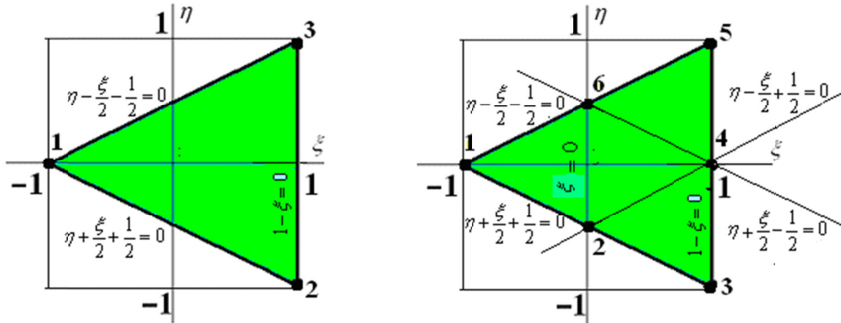


Рис. 7.5. Розміщення вузлів і рівняння прямих, що їх з'єднують у трикутників з лінійною і з квадратичною апроксимаціями

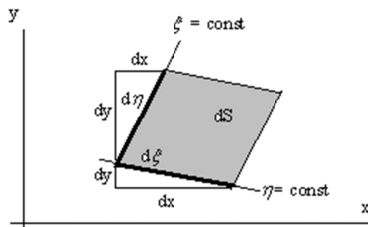
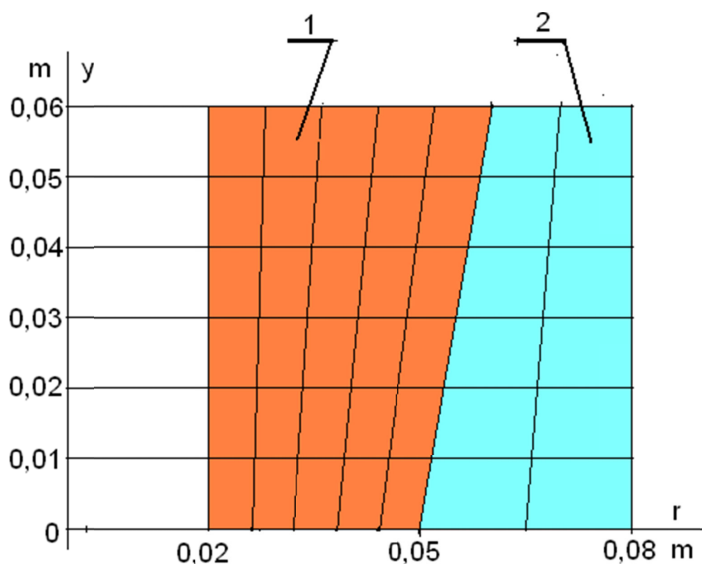


Рис. 7.6. Геометричні співвідношення між диференціалами в локальних і абсолютних координатах



7.7. Конструкція для виготовлення втулки кінцевої форми і структура сітки кінцевих елементів: 1 – ЭД-20 з ПЭПА; 2 – вода

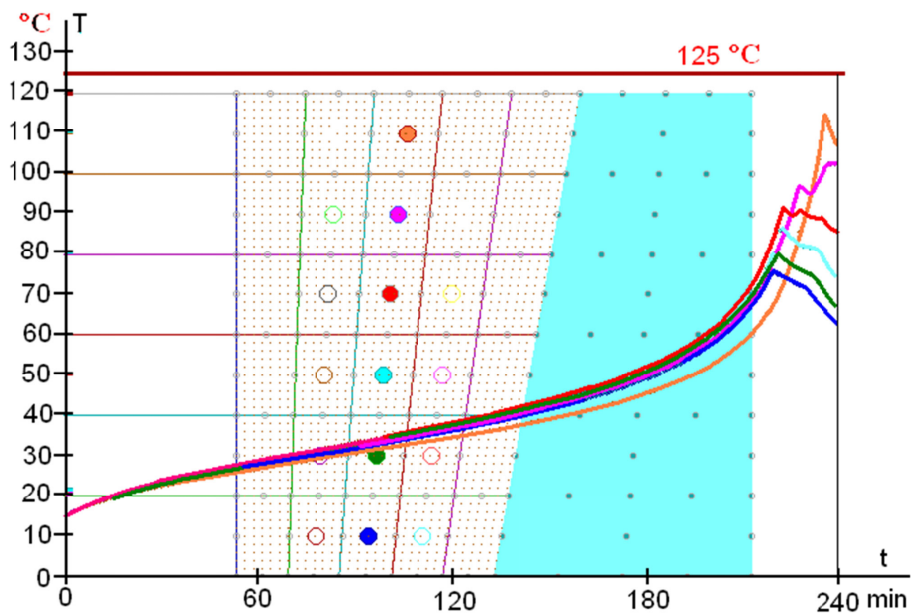


Рис. 7.8. Графіки наростання в часі температури в найбільш нагрітих зонах епоксидного композиту

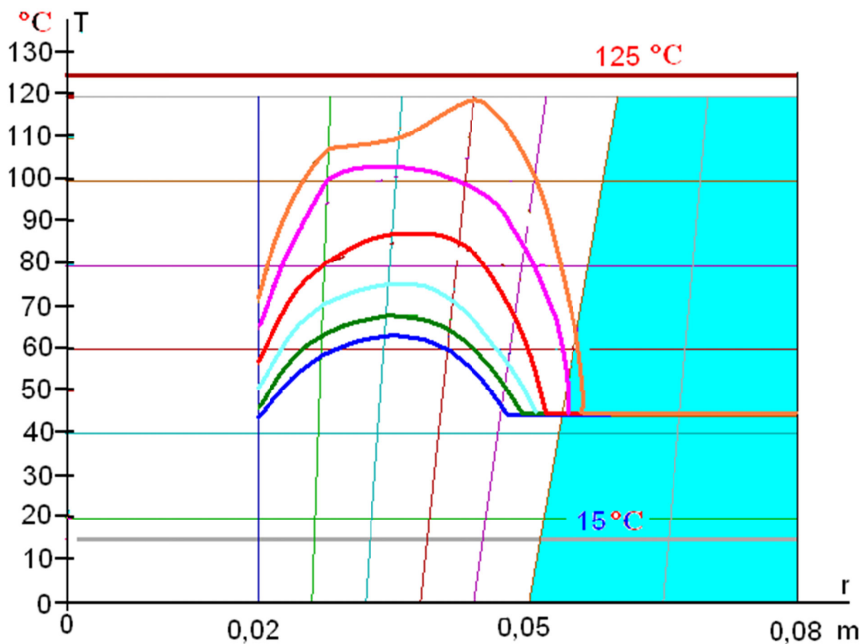


Рис. 7.9. Графіки розподілу температури вздовж радіуса конструкції

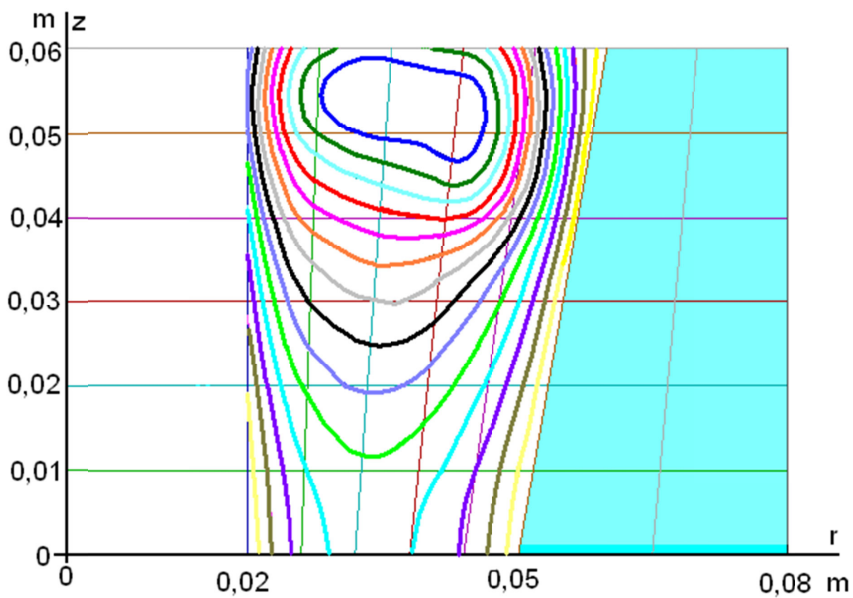


Рис. 7.10. Картина ізотерм в конструкції кінчної форми

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М. : Высшая школа, 1967. 600 с.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М. : Наука, 1964. 488 с.
3. Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике. М. : Мир, 1975.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М. : Мир, 1979. 392 с.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы. М. : Наука, 1975. Т. 1.
6. Э. Грей и Г.Б. Мэтьюз. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М. : Издательство Иностранной литературы, 1953. 372 с.
7. Левицкий В. Л. Решение нестационарных задач теплопроводности с помощью четырехугольных конечных элементов. *Электромеханика. Известия высших учебных заведений*. 1988. № 8. С. 5–10.
8. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М. : Наука, 1977. 456 с.
9. Корн. Г. и Корн Т. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. М. : Наука, 1974. 832 с.
10. Походун А.И., Шарков А.В. Экспериментальные методы исследований. Измерение теплофизических величин. СПб. : ГУ ИТМО, 2006.
11. Савин С.Н. Кинетика полимеризации олигомерных систем с повышенной вязкостью. *Вісник ОНУ*. 2013. Т. 18, №1. С. 71–81.
12. Савин С.Н. Моделирование процессов отверждения эпоксидных смол в сферических слоях. *Вісник ОНУ*. 2013. Т. 18, №4 (48). С. 38–45.
13. Савин С.Н. Математическое моделирование процессов тепловыделения при отверждении эпоксидных смол. *Вісник ОНУ*. 2014. Хімія. Т. 19. № 4 (52). С. 70–79.
14. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа для вузов. М. : Наука, 1966. 736 с.

ДЛЯ ПОДАТК

Наукове видання

САВІН С.М.

**МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРИ
В ПРОЦЕСАХ ПОЛІМЕРИЗАЦІЇ МЕТОДОМ
КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Монографія

Підписано до друку 21.10.2022 р. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times. Цифровий друк.
Ум. друк. арк. 11,27. Наклад 300. Замовлення № 1022-068.
Віддруковано з готового оригінал-макета.

Видавництво та друк: ОЛДІ+
65101, Україна, м. Одеса, вул. Інглєзі, 6/1
Свідоцтво ДК № 7642 від 29.07.2022 р.

Тел.: +38 (098) 559-45-45,
+38 (095) 559-45-45, +38 (093) 559-45-45
Для листування: 65101, Україна, м. Одеса, вул. Інглєзі, 6/1
E-mail: office@oldiplus.ua