

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра математичного аналізу

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Узагальнена задача теорії ризику»

«Generalized risk theory problem»

Виконала: здобувачка заочної форми навчання
спеціальності 111 Математика

Освітня програма «Математика»

Юрковська Яна Іванівна

Керівник: ст. викл. Кольцова Л.Л. _____

Рецензент: д. ф.-м. н., проф. Кореновський А.О.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ _____ від _____ 2024 р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № _____ від _____ 2024 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

Одеса – 2024 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
1. ЕЛЕМЕНТАРНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є	8
2. ЗАДАЧА РИМАНА НА ДІЙСНІЙ ВІСІ	13
2.1. Задача Римана на дійсній вісі в просторі L_2	13
2.2. Крайова задача Римана в просторі узагальнених функцій	23
2.3. Особливий випадок однорідної задачі Римана на дійсній вісі в узагальнених функціях	29
3. ПОСТАНОВКА УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ РИЗИКУ	32
3.1. Методи розв'язку узагальненої задачі теорії ризику	32
3.2. Приклади точних розв'язків	34
ВИСНОВКИ	42
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	43

ВСТУП

У цій роботі основним математичним знаряддям є дискретне і інтегральне перетворення Фур'є. Вони стали потужним засобом в дослідженні математичної фізики та теорії інтегральних рівнянь. Перетворення Фур'є з'явилися вже на початку 19-го століття в роботах класиків математичного аналізу: Лейбніца, Д. Бернуллі, Лагранжа, Лапласа, Ейлера, Фур'є, Пуассона, Коши, Даламбера.

Найбільш вагомий внесок в розвиток інтегральних перетворень з точки зору теорії і застосування внесли Фур'є і Лаплас. Їх іменами по справедливості названі відомі інтегральні перетворення.

Інженер О. Г. Хевісайд* почав застосовувати символічне числення при розв'язанні електротехнічних задач у кінці 19-го століття. Його підхід дозволяв ефективно розв'язувати лінійні диференціальні рівняння, але обґрунтування цього числення з'явилося значно пізніше. Виявилося, що в основі символічного числення лежать інтегральні перетворення Фур'є. Це відкриття стало поштовхом до широкого застосування цих перетворень у математичній фізиці. Перші результати використання цих перетворень отримані в дослідженнях теплопровідності.

Термінологія щодо перетворень Фур'є може бути різноманітною у літературі, але їх важливість та застосування залишаються незмінними. Це різноманіття пов'язане з різними підходами до інтегральних перетворень та операційного числення у різних галузях науки, таких як математична фізика, інтегральні рівняння, теорія спеціальних функцій, автоматика, електро-радіотехніка, теорія регулювання, теорія ризику та інші. В цій роботі

* Слід визнати вклад Хевісайда, але важливо відзначити, що основні результати були отримані професором Київського університету М. Е. Ващенко-Захарченко. На жаль, його відкриття не отримали великої уваги того часу, можливо, через відсутність практичного застосування.

«перетворенням Фур'є» називається оператор, що ставить у відповідність «Фур'є-оригіналу» – функції $f(x)$ – її «Фур'є образ» $F(x)$.

У теорії інтегральних рівнянь важливу роль відіграють інтегральні рівняння з різницевиими ядрами, що відомі як інтегральні рівняння типу згортка. Для їх вирішення застосовується інтегральне перетворення Фур'є. Перш за все, інтегральне рівняння має бути визначене на всій дійсній вісі та містити тільки різницеві ядра. Крім того, межі інтегрування повинні бути від $-\infty$ до ∞ . Після застосування інтегрального перетворення Фур'є відповідне рівняння може бути перетворено до простого алгебраїчного рівняння відносно образу Фур'є шуканої функції. Далі вивчаються умови вирішуваності рівняння в різних просторах.

Однак, якщо хоча б одна з умов, описаних вище, не виконується, виникають проблеми принципового характеру при розв'язанні рівняння. До таких рівнянь, передусім, відносяться наступні:

$$\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} k(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x > 0. \quad (1)$$

$$\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x > 0,$$

$$\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x < 0 \quad (2)$$

$$\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} k_1(x-t)\varphi(t)dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 k_2(x-t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (3)$$

Однорідне рівняння (1) в окремому випадку було вивчене в 1931 році Вінером і Хопфом. Згідно з вищеописаними вимогами застосувати безпосередньо інтегральне перетворення Фур'є до рівняння (1) не можна. Тому при побудові розв'язання рівняння виду (1) авторами була запропонована принципово нова схема: введення нових невідомих функцій, рівних нулю при $x < 0$ (вони позначаються+внизу), наприклад $\varphi_+(x)$ і

функцій $\varphi_-(x)$, рівних нулю при $x > 0$. Оскільки було відомо, що образи Фур'є $\Phi^\pm(x)$ є аналітичними функціями у верхній і нижній напівплощині відповідно, то застосування інтегрального перетворення Фур'є до рівняння (1) ще не розв'язувало рівняння, а лише зводило його до рішення одного рівняння з двома невідомими функціями, що мають чудові властивості аналітичної. Подальший розв'язок пов'язаний з методом факторизації, який на ранніх етапах свого розвитку полягав в зображенні довільною аналітичною в смузі $a < |\operatorname{Im} z| < b$ функції $A(z)$ у виді $A(z) = A^+(z)A^-(z)$, де функції $A^\pm(z)$ відповідно аналітично продовжені в напівплощині $|\operatorname{Im} z| > a$ і $|\operatorname{Im} z| < b$. Необхідна умова аналітичної функції $A(z)$ у смузі $a < |\operatorname{Im} z| < b$ було забезпечено розглядом ядер спеціального класу - що убивають, як показова функція (таке припущення пов'язане з конкретним практичним завданням променистої рівноваги). Ці припущення дозволили Вінеру і Хопфу отримати точний розв'язок окремого випадку рівняння (1). При цьому слід зазначити, що незважаючи на недосконалість цитованої роботи, вона зіграла велику роль в розвитку запропонованого дослідниками прийому, причому у різних напрямках. Відмітимо основні: 1) застосування методу для розв'язку змішаних завдань математичної фізики шляхом зведення до інтегральних рівнянь типу згортки (1) (2); 2) дослідження відповідних інтегральних рівнянь в різноманітних просторах.

Новизну в теорії інтегральних рівнянь, яку внесли автори роботи певним чином відмічено математиками: до теперішнього часу рівняння (1) називається рівнянням Вінера-Хопфа. Більше того, метод факторизації іноді називають методом Вінера-Хопфа.

Рівняння (2) називають парним рівнянням. Метод розв'язку парного рівняння пов'язаний також з методом факторизації.

В процесі розвитку першого напрямку стали виникати випадки, коли відсутня смуга аналітичної факторизованої функції. Розгляд таких випадків привів до того, що проблема факторизації звелася до проблеми розв'язку задачі Римана (завдання сполучення кусочно-аналітичної функції), добре розробленої на той час.

Прорив в методах розв'язання відбувся завдяки праці Ф. Д. Гахова, який ввів поняття індексу функції. Це дозволило розв'язати крайову задачу Римана в замкнутому вигляді. Повний розв'язок задачі для однозв'язної області був отриманий Гаховим у 1936 році. Після цього задачу почали вивчати у різних напрямках, включаючи функціонально-теоретичні, конструктивні та прикладні. Слід особливо відмітити роботу Рапопорта, який ще в 1948 році вказав на еквівалентність інтегральних рівнянь і відповідної задачі Римана.

Наступним кроком для розвитку теорії рівнянь типу згортки була робота Ю. И. Черського. У ній уперше введено рівняння з двома ядрами (3). Це рівняння також зводиться до задачі Римана.

Дослідження рівнянь (1) - (3) за допомогою задачі Римана виявилось дуже плідним не лише з точки зору побудови рішення, але і строгого введення просторів розв'язків аж до простору узагальнених функцій.

З одного боку можна застосовувати потужний апарат інтегрального перетворення Фур'є (аж до його застосування в просторі узагальнених функцій). З іншого боку можна користуватися широко розробленим методом задачі Римана в просторі узагальнених функцій).

Подальший розвиток теорії інтегральних рівнянь, які по своїй структурі близькі до рівнянь типу згортки пов'язані з роботами Раковщика Л.С., у яких розглянуто інтегральне рівняння виду

$$\lambda \varphi - \sum_{j=1}^n b_j(x) \int_{-\infty}^{\infty} k_j(x-t) c_j(t) \varphi(t) dt = f(x), x \in R. \quad (4)$$

Рівняння (4) автор назвав інтегральним рівнянням з майже різницеви́ми ядрами.

Відразу відмітимо, що доки ще не існує конструктивного методу розв'язку рівняння в загальному вигляді. Відомі тільки окремі випадки, у яких отримано в квадратурі розв'язки рівняння (4). Рівняння (1) - (3) також є окремими випадками інтегральних рівнянь з майже різницеви́ми ядрами.

Інтегральні рівняння з майже різницеви́ми ядрами останніми роками мають численні застосування. Зокрема, при дослідженні стохастичних процесів в теорії ризику і у фінансовій математиці.

Ще один частковий випадок рівняння (4), який дозволяє побудувати його розв'язок. Це рівняння виду

$$e^{-x}\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt = f(x), x > 0. \quad (5)$$

За допомогою інтегрального перетворення Фур'є воно зводиться до задачі Карлемана для смуги з аналітичним продовженням в напівплощину.

Дані дослідження зафіксовані в роботах Карапетянца Н. К., Самко С. Г., Керекеші П. В., Керекеші Д. П., Песчанського А. І., Шевчика В. А. і Черського Ю. І.

1. ЕЛЕМЕНТАРНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Відмітимо найбільш вживані властивості інтегрального перетворення Фур'є.

1.1. Зсув в оригіналі. Якщо λ - позитивне дійсне число, то

$$V\varphi(x \pm \lambda) = e^{\pm i\lambda x} \Phi(x) \text{ или } V^{-1}[e^{\pm i\lambda x} \Phi] = \varphi(x \pm \lambda), \quad (1.1)$$

$$V\varphi(x \pm i\lambda) = e^{-\lambda x} \Phi(x) \text{ или } V^{-1}[e^{\pm \lambda x} \Phi] = \varphi(x \pm i\lambda). \quad (1.2)$$

1.2. Зсув в зображенні. Якщо λ - відмінне від нуля дійсне число, то

$$V[e^{\pm \lambda x} \varphi(x)] = \Phi(x \mp i\lambda) \text{ или } V^{-1}[\Phi(x \mp i\lambda)] = e^{\pm \lambda x} \varphi(x), \quad (1.3)$$

$$V[e^{\pm i\lambda x} \varphi(x)] = \Phi(x \pm \lambda) \text{ или } V^{-1}[\Phi(x \pm \lambda)] = e^{\pm i\lambda x} \varphi(x). \quad (1.4)$$

1.3. Формули подібності. Якщо λ - відмінне від нуля дійсне число, то

$$V\varphi(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|} \Phi\left(\frac{x}{\lambda}\right). \quad (1.5)$$

1.4. Образ Фур'є від зображення

$$V\Phi(x) = \varphi(-x), \quad (V^2\varphi(x)) = \varphi(-x). \quad (1.6)$$

З а у в а ж е н н я . Властивості 1.1, 1.4 досить прості. Для їх встановлення використовуються елементарні властивості певних інтегралів. При цьому передбачається, що образи відповідних оригіналів існують.

Відмітимо, що при строгому обґрунтуванні наступних властивостей необхідно накладати істотні обмеження на оригінали. Зокрема, одна з формул (1.1) справедлива лише за умови, що разом з образом Фур'є функції $\varphi(x)$ існує образ Фур'є функції $\varphi(x) \cdot e^{-\lambda x}$. Ці умови призводять до того, що образ Фур'є функції $\varphi(x)$ аналітичний в смугі $0 < \text{Im} z < \lambda$. Про це детальніше буде викладено в гл. V [1].

1.5. Перетворення похідної оригіналу з L_1 .

1.5.1. Нехай $f(t), f'(t)$ належать L_1 і $f(t)$ абсолютно неперервна на кожному кінцевому інтервалі. Тоді справедлива формула

$$(Vf')(x) = -ixF(x), \quad (1.7)$$

де $F(x) = (Vf)(x)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки функція абсолютно неперервна, то її можна представити у виді

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\xi) d\xi. \quad (1.8)$$

З того, що $f'(t) \in L_1$ слідує: права частина рівності (1.8) має межу при $|t| \rightarrow \infty$. Очевидно, що ця межа обов'язково дорівнює нулю, інакше функція $f(t)$ не належала б простору L_1 . Враховуючи цей факт, за допомогою інтегрування по частинах легко встановлюється рівність (1.7). Дійсно

$$\begin{aligned} (Vf')(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(t) e^{ixt} \Big|_{-\infty}^{\infty} - ix \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ixt} dt \right] = \\ &= -ixF(x), F(x) = (Vf)(x). \end{aligned}$$

Отже, при наведених вище обмеженнях встановлена формула (1.7).

Узагальненням її є така

$$(Vf^{(n)})(x) = (-ix)^n F(x). \quad (1.9)$$

При її встановленні природно передбачається, що $f^{(k)}(t) \in L_1, k = \overline{0, n}$ і $f^{(n-1)}(t)$ абсолютно неперервна.

1.5.2. Якщо $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ неперервні, прямують до нуля при $|t| \rightarrow \infty$ а $f^{(n)}(t)$ належить L_1 , то шляхом n -кратного інтегрування по частинах встановлюється формула (1.9). При цьому, згідно з теоремою Римана-Лебега має місце асимптотика $x^n F(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Існує також зв'язок між убуттям функції $f(t)$ при $|t| \rightarrow \infty$ і гладкістю її образу, а саме: чим швидше убиває $f(t)$ на нескінченності, тим гладшим виходить її образ Фур'є.

1.6. Множення оригіналу на t^k , $k \in \mathbb{N}$. Нехай спочатку функції $f(t), tf(t)$ належать L_1 . Тоді $F(x) = (Vf)(x)$ диференційована і справедлива формула

$$F'(x) = (V(-itf(t)))(x). \quad (1.10)$$

Д о в е д е н н я. В силу інтегрованості функції $tf(t)$ інтеграл $\frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{ixt} dt$ сходиться рівномірно по змінній x , тому згідно п.1.1.3 [1] функцію $F(x) = (Vf)(x)$ можна диференціювати по x звідки слідує рівність (1.10).

Нехай тепер функція $f(t)$ така, що $t^k f(t) \in L_1, k = \overline{0, n}$. Тоді функція $F(x) = (Vf)(x)$ має n безперервних похідних, причому справедлива формула

$$(-i)^k \cdot F^{(k)}(x) = (V(t^k f(t)))(x), k = \overline{0, n}. \quad (1.11)$$

1.7. Перетворення похідної оригіналу з L_2 . Якщо одночасно $f(t)$ і $f'(t)$ належать простору L_2 , то одночасно $F(x)$ і $x F(x)$ належать тому ж простору L_2 . Тут $F(x) = (Vf)(x)$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо вірну рівність

$$[f(t)]^2 - [f(0)]^2 = 2 \int_0^x f(\xi) f'(\xi) d\xi. \quad (1.12)$$

В силу заданих умов права частина рівності (1.12) прямує до кінцевої межі при $|t| \rightarrow \infty$. Отже і ліва частина рівності (1.12) також прямує до кінцевої межі при $f(t)$. Але оскільки функція $[f(t)]^2$ належить простору L_1 , то вона не може прямувати до межі, відмінної від нуля. Таким чином $f(t)$ прямує до нуля при $|t| \rightarrow \infty$.

Тепер, використовуючи інтегрування по частинах, отримаємо, що

$$\int_{-N}^N f'(t)e^{ixt} dt = \left[f(t)e^{ixt} \right]_{-N}^N - ix \int_{-N}^N f(t)e^{ixt} dt. \quad (1.13)$$

При $N \rightarrow \infty$ ліва частина рівності (1.13) сходиться в середньому квадратичному до $\sqrt{2\pi}\Phi(x)$, де $\Phi(x)$ – образ Фур'є функції $\varphi(t) = f'(t)$. Що ж до правої частини рівності (1.13), то по раніше доведеному перший член рівномірно прямує до нуля, а другий член прямує в середньому квадратичному до $-\sqrt{2\pi} \cdot ix F(x)$. Таким чином $\Phi(x) = -ix F(x)$ і необхідний результат виходить тепер з того, що по теоремі Планшереля $\Phi(x)$ належить простору L_2 .

Назад, нехай функція $x F(x)$ належить L_2 і $\varphi(x)$ – її образ. Тоді, оскільки $F(x)$ і $x F(x)$ належать L_2 , то функція $F(x)$ належить не лише простору L_2 , але і простору L_1 . Дійсно, згідно з нерівністю Коши-Буняковського матимемо

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{F(x)(x+i)}{x+i} \right| dx \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)(x+i)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi} \|F(x)(x+i)\|_2.$$

Далі, використовуючи наступний ланцюжок рівності, ми отримаємо, що майже усюди

$$\int_0^x \varphi(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u F(u) \frac{e^{-ixu} - 1}{-iu} du - C = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-ixu} du = if(x) - C.$$

У цьому ланцюжку рівності ми послідовно використали формулу $(V^{-1}F)(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\sigma} - 1}{(-i\sigma)} F(\sigma) d\sigma$ і те, що в просторі L_2 зворотне перетворення Фур'є функції $F(x)$ майже усюди визначає оригінал $f(x)$. Цей оригінал також визначається із зворотного перетворення функції $F(x)$, що

належить простору L_1 . По теоремі Римана-Лебега він неперервний на усій дійсній вісі. Це дозволяє нам записати остаточно рівність у виді

$$\int_0^x \varphi(u) du = if(x) - C,$$

яке буде справедливим для усіх x .

Нарешті, з останньої рівності отримуємо, що $\varphi(x) = if'(x)$. Цей факт і завершує доказ властивості 1.7.

1.8. Перетворення похідної по параметру. Нехай оригінал залежить від параметра λ , $f = f(t, \lambda)$. Тоді зображення також буде функцією двох змінних: $F = F(x, \lambda)$. При дотриманні умов, вказаних в п.1.1.3 [1], має місце формула

$$\left(V \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda) \right) \right) = \frac{\partial}{\partial \lambda} F(x, \lambda)$$

чи в загальнішому вигляді

$$\left(V \left(\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} f(t, \lambda) \right) \right) = \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} F(x, \lambda).$$

На закінчення глави відмітимо, що властивості, розглянуті вище, поширюються (безпосередньо або з деякими обмеженнями) на ширші простори - аж до простору узагальнених функцій.

2. ЗАДАЧА РИМАНА НА ДІЙСНІЙ ВІСІ

2.1. Задача Римана на дійсній вісі в просторі L_2

У цьому пункті центральне місце займає викладання важливої для багатьох застосувань теорії крайової задачі Римана. Ця задача полягає в побудуванні двох функцій, одна з яких аналітична в заданій області, а інша - аналітична в іншій області, доповнююча першу область до усієї комплексної площини. На загальній межі областей шукані аналітичні функції повинні задовольняти лінійному рівнянню, яке називають «крайовою умовою» [3].

У цьому пункті областями аналітичної будуть напівплощини $\text{Im} z > 0$ і $\text{Im} z < 0$, так що крайова умова буде записана на усій дійсній вісі. Буде доцільно записати цю умову для функцій належних L_2 .

2.1.1. Окремі випадки задачі Римана в просторі L_2 . Нехай дана крайова умова

$$F^+(x) = A(x)F^-(x) + G(x), -\infty < x < +\infty, \quad (2.1.1)$$

де функції $A(x)$ і $G(x)$ - відомі. При цьому функцію $A(x)$ називають коефіцієнтом задачі Римана. Припустимо, що $G(x) \in L_2$, а $A(x) = I + K(x)$, де

$$K(x) \in L_2. \quad (2.1.2)$$

Крім того, припустимо також, що на усій зімкнутій вісі функція $K(x)$ задовольняє умові Гельдера і що

$$A(x) = 1 + K(x) \neq 0. \quad (2.1.3)$$

Розв'язок F^+ і F^- задачі Римана (2.1.1) - (2.1.3) шукатимемо в просторах L_2^+ і L_2^- , тобто припускатимемо, що

$$F^+(x) \in L_2^+, F^-(x) \in L_2^-. \quad (2.1.4)$$

Конструктивна побудова розв'язку задачі (2.1.1) - (2.1.4) розпочнемо з простих випадків:

Випадок 1. $A(x) \equiv 1, G(x) = 0$. Таким чином, пропонується розв'язати просте завдання

$$F^+(x) = F^-(x). \quad (2.1.5)$$

Застосовуючи до рівності (2.1.5) оператор V^{-1} і враховуючи (2.1.2) - (2.1.3) отримаємо $f_+(x) \equiv f_-(x) \equiv 0$ при $x > 0$ і при $x < 0$. Звідси

$$F^+(x) = F^-(x) \equiv 0. \quad (2.1.6)$$

Отже, має місце наступний результат: якщо функція одночасно належить просторам L_2^+ і L_2^- то вона тотожно дорівнює 0.

Випадок 2. $A(x) = 1$, функція $G(x) \in L_2$ і відмінна від нуля. Тоді крайова умова (2.1.1) набуває вигляду

$$F^+(x) = F^-(x) + G(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2.1.7)$$

Ця ж умова є завданням про "стрибок", тобто ми повинні знайти функції $F^+(z)$ і $F^-(z)$, які під час переходу через дійсну вісь мають стрибок, рівний $G(x)$.

Завдання (2.1.7), (2.1.4) розв'язуються без зусиль. Дійсно, застосовуючи оператор V^{-1} до обох частин рівності (2.1.7) отримаємо:

$$f_+(x) = f_-(x) + g(x) \quad (2.1.8)$$

де $g(x) \in L_2$, $f_+(x) \in L_{2+}$, а $f_-(x) \in L_{2-}$.

З властивостей функцій $f_{\pm}(x)$ і (2.1.8) витікає, що

$$f_+(x) = \begin{cases} g(x), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = g_+(x); \quad f_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ -g(x), & x < 0 \end{cases} = g_-(x). \quad (2.1.9)$$

Отже, завдання про "скачку" при будь-якій функції $G(x)$ з L_2 має єдиний розв'язок

$$F^+(x) = (Vg_+)(x), \quad F^-(x) = (Vg_-)(x), \quad (2.1.10)$$

де функції $g(x)$ визначені рівністю (2.1.9). Іншими словами, отриманий результат можна сформулювати так: всяку функцію $G(x)$ з L_2 можна єдиним чином представити у вигляді різниці:

$$G(x) = G^+(x) - G^-(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2.1.11)$$

де $G^+(x) \in L_2^+$, а $G^-(x) \in L_2^-$. При цьому функції $G^\pm(x)$ визначається рівністю (2.1.10) або що те ж

$$G^+(x) = \left(V \left\{ \frac{\operatorname{sign} x + 1}{2} V^{-1} G \right\} \right)(x), \quad G^-(x) = \left(V \left\{ \frac{\operatorname{sign} x - 1}{2} V^{-1} G \right\} \right)(x). \quad (2.1.12)$$

Рівність (2.1.12) називатимемо формулами Ю.В.Сохоцького.

З а у в а ж е н н я . У разі, коли $G(x)$ має громіздкий вигляд, замість позначень $G^+(x)$ і $G^-(x)$ користуватимемося такими: $[G(x)]^+$ і $[G(x)]^-$, де

$$[G(x)]^\pm = \left(V \left\{ \frac{\operatorname{sign} x \pm 1}{2} V^{-1} G \right\} \right)(x). \quad (2.1.13)$$

Випадок 3. $A(x) = \frac{x-i}{x+i}$, $G(x) \equiv 0$. Маємо завдання:

$$F^+(x) = \left(\frac{x-i}{x+i} \right) F^-(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.1.14)$$

Один розв'язок цієї задачі очевидний:

$$F_1^+(x) = \frac{1}{x+i} \in L_2^+, \quad F_1^-(x) = \frac{1}{x-i} \in L_2^-. \quad (2.1.15)$$

Покажемо, що будь-яке інший розв'язок $F^+(x)$ $F^-(x)$ завдання (2.1.14), (2.1.4) відрізняється від розв'язку (2.1.15) лише постійним множником. Дійсно, при будь-якій постійній C маємо тотожність:

$$\left(F^+(x) + \frac{C}{x+i} \right) \equiv \left(\frac{x-i}{x+i} \right) \left(F^-(x) + \frac{C}{x-i} \right). \quad (2.1.16)$$

Твердження буде доведено, якщо нам вдасться знайти таку постійну C при якій обидві частини рівності (2.1.16) перетворяться на тотожний нуль.

Покладемо $C = 2iF^-(-i)$ (при цьому значенні C у правій частині рівності (2.1.16) ліквідуємо полюс в точці $z = -i$). Очевидно, що

$$F^+(x) + \frac{C}{x+i} \in L_2^+ . \quad (2.1.17)$$

Крім того

$$\Omega(x) \equiv \left(\frac{x-i}{x+i} \right) \left(F^-(x) + \frac{C}{x-i} \right) \in L_2^- . \quad (2.1.18)$$

У силу (2.1.16)-(2.1.18) функція $\Omega(x)$ належить одночасно просторам L_2^- і L_2^+ отже $\Omega(x) \equiv 0$ (див. (2.1.5)-(2.1.6.)). Твердження доведене.

Випадок 4. $A(x) = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^\chi$, де χ - ціле число, більше нуля $G(x) \equiv 0$.

Покажемо, що однорідне завдання

$$F^+(x) = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^\chi F^-(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (2.1.19)$$

має в класах (2.1.4) рівно χ незалежних розв'язків. Загальний розв'язок має вигляд:

$$F^+(x) = \sum_{k=0}^{\chi-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^\chi \frac{1}{x+i}, \quad F^-(x) = \sum_{k=0}^{\chi-1} C_k \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^{\chi-k} \frac{1}{x+i}, \quad (2.1.20)$$

де C_k - постійні. Випадок $\chi=1$ розглянутий вище. Застосовуючи метод математичної індукції, припускаємо, що твердження справедливе при $\chi = n-1$ і доведемо його для $\chi = n$ ($n > 1$). Підставимо в (2.1.19) $\chi = n$. В результаті матимемо рівність

$$\frac{x+i}{x-i} F^+(x) = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^{n-1} F^-(x) . \quad (2.1.21)$$

Далі, згідно з формулами Ю.В. Сохоцького (2.1.13) ліву частину рівності (2.1.21) представимо у виді

$$\frac{x+i}{x-i} F^+(x) = \Psi^+(x) - \Psi^-(x). \quad (2.1.22)$$

При цьому представлення (2.1.22) дозволяє надати рівності (2.1.21) форми (2.1.19)

$$\Psi^+(x) = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^{n-1} \left[F^-(x) + \Psi^-(x) \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^{n-1} \right]. \quad (2.1.23)$$

У рівності (2.1.23) ліва частина належить простору L_2^+ , а квадратна дужка - L_2^- . Згідно з припущенням $\Psi^+(x) = \sum_{k=1}^{n-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^{k-1} \frac{1}{x+i}$, де C_k - постійні.

Підставляємо $\Psi^+(x)$ у (2.1.22). В результаті матимемо рівність

$$\frac{x+i}{x-i} F^+(x) = \sum_{k=1}^{n-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^{k-1} \frac{1}{x+i} - \Psi^-(x)$$

чи

$$F^+(x) - \sum_{k=1}^{n-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^k \cdot \frac{1}{x+i} = - \left(\frac{x-i}{x+i} \right) \Psi^-(x). \quad (2.1.24)$$

Рівність (2.1.24) є завданням (2.1.14). Як було доведено $\Psi^-(x) = \frac{C_0}{x-i}$, де C_0 - постійна. Отже, формула (2.1.24) встановлена при $\chi = n$, що і вимагалось довести.

2.1.2. Індекс. Основна схема рішення задачі Римана. При дослідженні завдання Римана дуже важливу роль грає індекс коефіцієнта завдання Римана. Визначення індексу відоме [1]. Але зважаючи на специфіку розв'язку задачі Римана для напівплощини в просторах $L_2^\pm$ ми ще раз зупинимося на питанні визначення індексу коефіцієнта $A(x)$. При фіксованому x величина $A(x)$ є комплексним числом, зображеним точкою на комплексній площині. При зміні x від $-\infty$ до $+\infty$ вказана точка опише на комплексній площині криву, яка в силу зроблених раніше припущень буде неперервною і замкнутою.

Крім того, ця крива проходить через точку 1, коли $x = \pm\infty$ і не проходить через початок координат (в силу умови (2.1.3)).

Визначення 2.1.1. Число χ завиток вказаної вище кривої навколо початку координат, відлічуваних проти годинникової стрілки, називається індексом функції $A(x)$ і позначається $\chi = \text{Ind}A(x)$.

$$\text{Відомі формули: } \chi = \text{Ind}A(x) = \frac{1}{2\pi} [\arg A(x)] \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d \ln A(x).$$

Вирішування задачі Римана і безліч її розв'язків залежить від індексу. Основна схема розв'язку не складна. Проілюструємо цю схему на найпростішому випадку - випадку нульового індексу.

Нехай $\chi = 0$. Приведемо крайову умову (2.1.1) до виду (2.1.11). Припустимо, що нам відоме представлення

$$A(x) = X^+(x) [X^-(x)]^{-1}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.1.25)$$

де функції $X^\pm(x)$ аналітично подовжені відповідно у верхню і нижню напівплощині і не мають там нулів.

Тоді (2.1.1) набуває вигляду:

$$\frac{F^+(x)}{X^+(x)} = \frac{F^-(x)}{X^-(x)} + \frac{G(x)}{X^+(x)}, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2.1.26)$$

Введемо позначення

$$F^+(x) [X^+(x)]^{-1} = F_1^+(x),$$

$$F^-(x) [X^-(x)]^{-1} = F_1^-(x),$$

$$G_1(x) = G(x) [X^+(x)]^{-1}$$

і приходимо до завдання про "стрибок": $F_1^+(x) = F_1^-(x) + G_1(x)$.

Отже, залишилося розв'язати завдання (2.1.14) про "факторизацію" функції $A(x)$. Порівнюючи (2.1.7) і (2.1.25) неважко здогадатися, що для визначення функції $X^+(x)$ і $X^-(x)$ треба прологарифмувати рівність (2.1.25) і розв'язати отримане завдання про "стрибок"

$$\ln X^+(x) = \ln X^-(x) + \ln A(x).$$

З а у в а ж е н н я . У випадку $\chi \neq 0$ реалізація кінцевої схеми виявляється не такою гладкою, оскільки функції $X^+(z)$ і $X(z)$ матимуть нулі.

2.1.3. Факторизація функції $A(x)$ у загальному випадку. Нехай функція $A(x) = 1 + K(x)$ задовольняє умовам попереднього пункту. Потрібно її представлення у виді (2.1.25.). Нехай $\chi = \text{Ind}A(x)$. Тоді індекс функції

$$A(x) \cdot \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi \equiv 1 + C(x) \quad (2.1.30)$$

дорівнює нулю. Очевидно, що функція $C(x)$ належить простору L_2 і задовольняє умові Гельдера. Далі, можна вибрати гілку логарифма так, що функція

$$B(x) = \ln[1 + C(x)] \quad (2.1.31)$$

буде неперервною, причому $B(\pm\infty) = 0$. Більше того, неважко перевірити, що $B(x)$ задовольняє умові Гельдера і належить простору L_2 .

Для функції $B(x)$ застосуємо формулу Ю.В. Сохоцького (2.1.12.)

$$B(x) = B^+(x) - B^-(x) \quad (2.1.32)$$

$$B^+(x) = V \left\{ \frac{\text{sgn } x + 1}{2} V^{-1} B \right\}, \quad B^-(x) = V \left\{ \frac{\text{sgn } x - 1}{2} V^{-1} B \right\}. \quad (2.1.33)$$

Тут $B^+(x) \in L_2^+$ і $B^-(x) \in L_2^-$. Відомо, крім того, що ці функції задовольняють умові Гельдера.

Отримані формули (2.1.19)-(2.1.22) дають шукану факторизацію:

$$A(x) = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^\chi e^{B^+(x)} e^{-B^-(x)}. \quad (2.1.34)$$

Доведемо тепер, що функція, визначена рівністю (2.1.31) належить простору L_2 . В силу неперервності функції $C(x)$ і прямуванні її до нуля на

нескінченності, по заданому числу q , $0 < q < 1$ знайдеться число N таке, що $|C(x)| \leq q$ при $|x| \geq N$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |B(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^N |B(x)|^2 dx + \int_{-N}^N |B(x)|^2 dx + \int_N^{+\infty} |\ln(1 + C(x))|^2 dx$$

Інтеграл в межах $(-N, N)$ очевидно існує. Покажемо, що існують і два інших. Використовуючи нерівність

$$|\ln(1 + C(x))| = \left| C - \frac{C^2}{2} + \frac{C^3}{3} - \dots \right| \leq |C| + |C^2| + \dots \leq \frac{|C|}{1-q},$$

отримаємо, наприклад, для інтервалу в межах (N, ∞)

$$\int_N^{\infty} |\ln(1 + C(x))|^2 dx \leq \frac{1}{(1-q)^2} \int_N^{\infty} |C(x)|^2 dx < \infty.$$

Функції $\exp B^+(x)$ і $\exp B^-(x)$ аналітично подовжені на верхню і нижню напівплощину відповідно і не мають в цих областях нулів, також мають місце властивості:

$$e^{B^+(x)} F^+(x) \in L_2^+, \quad e^{-B^+(x)} F^+(x) \in L_2^+, \quad \text{якщо } F^+(x) \in L_2^+, \quad (2.1.35)$$

$$e^{B^-(x)} F^-(x) \in L_2^-, \quad e^{-B^-(x)} F^-(x) \in L_2^-, \quad \text{якщо } F^-(x) \in L_2^-. \quad (2.1.36)$$

Крім того

$$e^{B^+(\pm\infty)} = 1, \quad e^{B^-(\pm\infty)} = 1. \quad (2.1.37)$$

Отже, факторизація функції $A(x)$ можлива за умов (2.1.24)-(2.1.26) і вона єдина.

2.1.4. Розв'язок задачі Римана в загальному випадку. Тепер ми в змозі розв'язати задачу Римана в загальній постановці, даний в підрозділі 2.1.

Нехай $\chi = \text{Ind} A(x)$. Підставляємо в (2.1.1) замість функції $A(x)$ її факторизацію (2.1.13), отримаємо

$$F^+(x) e^{-B^+(x)} = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^{\chi} F^-(x) e^{-B^-(x)} + G(x) e^{-B^+(x)} \quad (2.1.38)$$

Тут $G(x)e^{-B^+(x)}$ - відома функція, що належить простору L_2 . Представимо її у вигляді різниці (див. (2.1.11.)-(2.1.13.)) :

$$G(x)e^{-B^+(x)} = \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^+ - \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^- \quad (2.1.39)$$

Крайова умова (2.1.1) набере вигляду:

$$F^+(x)e^{-B^+(x)} - \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^+ = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^\chi F^-(x)e^{-B^-(x)} - \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^- \quad (2.1.40)$$

Випадок $\chi = 0$. Ліва частина рівності (2.1.40) належить L_2^+ (див. (2.1.14)) а права - простору L_2^- . Відповідно до (2.1.4) маємо:

$$F^+(x)e^{-B^+(x)} - \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^+ = F^-(x)e^{-B^-(x)} - \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^- \equiv 0.$$

Отже, у разі нульового індексу задача Римана (2.1.1), (2.1.4) має єдиний розв'язок:

$$F^+(x) = e^{B^+(x)} \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^+, \quad F^-(x) = e^{B^-(x)} \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^- . \quad (2.1.41)$$

Випадок $\chi > 0$. Надамо рівності (2.1.40) вигляду (2.1.19)

$$F^+(x)e^{-B^+(x)} - \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^+ = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^\chi \left\{ F^-(x)e^{-B^-(x)} - \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi \left[G(x)e^{-B^-(x)} \right]^- \right\} \quad (2.1.42)$$

(Тут фігурна дужка належить простору L_2^-).

Відповідно до (2.1.20)

$$F^+(x)e^{-B^+(x)} - \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^+ = \sum_{k=0}^{\chi-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^k \frac{1}{x+i} \quad (2.1.43)$$

З (2.1.43) і (2.1.42) можна знайти функції $F^+(x)$ і $F^-(x)$

$$F^+(x) = e^{B^+(x)} \left\{ \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^+ + \sum_{k=0}^{\chi-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^k \frac{1}{x+i} \right\} \quad (2.1.44)$$

$$F^-(x) = \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi e^{B^-(x)} \left\{ \left[G(x)e^{-B^-(x)} \right]^- + \sum_{k=0}^{\chi-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^k \frac{1}{x+i} \right\} \quad (2.1.45)$$

Неважко переконатися, що формули (2.1.44) і (2.1.45) дають нам розв'язок задачі Римана при будь-яких (комплексних) постійних C_k . Отже, у разі позитивного індексу задача Римана (2.1.1), (2.1.4) безумовно вирішувана і однорідна задача має χ лінійно незалежних розв'язків.

Випадок $\chi < 0$. Як і у випадку $\chi = 0$, ліва частина рівності (2.1.40) належить L_2^+ , а права - L_2^- . Прирівнюючи обидві частини рівності (2.1.40) тотожно нулю, знайдемо

$$F^+(x) = e^{B^+(x)} [G(x)e^{-B^+(x)}]^+, \quad F^-(x) = \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi e^{+B^-(x)} [G(x)e^{-B^+(x)}] \quad (2.1.46)$$

Отже, у разі негативного індексу задача Римана (2.1.1), (2.1.4) може мати лише єдиний розв'язок (2.1.46). Функція $F^+(x)$ належить простору L_2^+ . Проте Функція $F^-(x)$ взагалі кажучи, не належить простору L_2^- оскільки множник $\left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi$ має полюс порядку $|\chi|$ у точці $z = i$. Для компенсації цього полюса будемо вимагати, щоб аналітично подовжена в нижню напівплощину функція $[G(x)e^{-B^+(x)}] \equiv N^-(x)$ мала в точці $z = i$ нуль порядку $|\chi|$:

$$\frac{d^k}{dz^k} N^-(x) \Big|_{z=i} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, |\chi| - 1. \quad (2.1.47)$$

Умови (2.1.47) потрібні і достатні для розв'язку задачі.

Отримані в останніх трьох випадках результати про залежність від індексу χ вирішуваності задачі Римана і числа її лінійно незалежних розв'язків складає зміст теореми Гахова.

Теорема 2.1.1 (теорема Ф. Д. Гахова). Якщо індекс задачі $\chi > 0$, то однорідна задача Римана безумовно вирішувана і її розв'язок (2.1.44)-(2.1.45) залежать від χ довільних комплексних постійних. Якщо $\chi \leq 0$, то однорідна

задача має лише тривіальний нульовий розв'язок, а неоднорідна задача при дотриманні $|\chi|$ умов вирішуваної (2.1.47) має єдиний розв'язок (2.1.48).

2.2. Крайова задача Римана в просторі узагальнених функцій.

2.2.1. Постановка. Викладений вище спосіб розв'язування задачі Римана виявляється в основному, придатним для розв'язування цього завдання в ширшому просторі $L_2^+\{0, m\}$, де m - ціле позитивне число.

Тепер задача Римана ставиться таким чином. Нехай $A(x)$ - задана функція, що m раз диференціюється, представляється, у виді

$$A(x) = 1 + K(x), \quad K(x) \in L_2^+\{0, -m\}. \quad (2.2.1)$$

Припустимо також, що на зімкнутій вісі x похідна $\frac{d^m}{dx^m} K(x)$ задовольняє умові Гельдера і $A(x) = 1 + K(x) \neq 0$.

Нехай G - задана о.ф. в просторі $L_2^+\{0, m\}$. Знайти о.ф. F^+ і F^- , що задовольняють, умовам

$$F^+ = A(x)F^- + G, \quad (2.2.2)$$

$$F^+ \in L_2^+\{0, m\}, \quad F^- \in L_2^-\{0, m\}. \quad (2.2.3)$$

Простий за формою запис (2.2.2) потрібно розуміти в наступному сенсі: для будь-яких (основних) функцій $\Phi(x)$ з $L_2^+\{0, -m\}$ повинно мати місце рівність

$$(F^+, \Phi(x)) = (F^-(x), A(x)\Phi(x)) + (G, \Phi(x)).$$

(Неважко перевірити, що $A(x)\Phi(x) \in L_2^+\{0, -m\}$).

2.2.2. Окремі випадки. Як і в п. 2.1, рішення задачі (2.2.2), (2.2.3) розпочнемо з розгляду окремих випадків.

$$\text{Випадок 1. } F^+ = F^-. \quad (2.2.4)$$

Також як і в п.2.1 встановлюємо, що задача (2.2.2), (2.2.3) має єдиний розв'язок:

$$F^+ = F^- = 0. \quad (2.2.5)$$

Випадок 2. $F^+ = F^- + G.$ (2.2.6)

Задача про стрибок (2.2.6), (2.2.3) розв'язується так само як і в п.2.1. Ця задача при будь-якій функції $G \in L_2^+\{0, m\}$ має єдиний розв'язок

$$F^+ = V \left\{ \frac{\operatorname{sgn} x + 1}{2} V^{-1} G \right\} \in L_2^+\{0, m\}, \quad (2.2.7)$$

$$F^- = V \left\{ \frac{\operatorname{sgn} x - 1}{2} V^{-1} G \right\} \in L_2^-\{0, m\}. \quad (2.2.8)$$

Для функції G з $L_2^+\{0, m\}$ збережемо позначення:

$$\begin{aligned} [G]^+ &= V \left\{ \frac{\operatorname{sgn} x + 1}{2} V^{-1} G \right\} \in L_2^+\{0, m\}, \\ [G]^- &= V \left\{ \frac{\operatorname{sgn} x - 1}{2} V^{-1} G \right\} \in L_2^-\{0, m\}. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Звідси, зокрема

$$[G]^+ - [G]^- = G. \quad (2.2.10)$$

Випадок 3. $F^+ = \left(\frac{x-i}{x+i} \right) F^-.$ (2.2.11)

Це завдання в просторах L_2^+, L_2^- було розв'язане в п. 2.1 (формула 2.1.15)

$$F^+ = \frac{1}{x+i}, \quad F^- = \frac{1}{x-i}. \quad (2.2.12)$$

Покажемо, що в ширших просторах завдання (2.2.11) не має інших розв'язків: будь-який інший розв'язок F^+, F^- завдання (2.2.11), (2.2.3) відрізняється від (2.2.12) лише постійним множником.

Доказ аналогічно проведеному в п. 2.1. При будь-якій постійній C маємо тотожність

$$\left(F^+ + \frac{C}{x+i}\right) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right) \left(F^- + \frac{C}{x-i}\right). \quad (2.2.13)$$

Очевидно, що

$$F^+ + \frac{C}{x+i} \in L_2^+\{0, m\}. \quad (2.2.14)$$

Крім того, при

$$C = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f_-(t) e^t dt \quad (2.2.15)$$

матимемо

$$\left(\frac{x-i}{x+i}\right) \left(F^+ + \frac{C}{x+i}\right) \in L_2^-\{0, m\}. \quad (2.2.16)$$

$$\text{З (2.2.14), (2.2.13), (2.2.16) слідує } F^+ + \frac{1}{x+i} = F^- + \frac{1}{x-i} \equiv 0.$$

Твердження доведене.

$$\text{Випадок 4. } F^+ = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^\chi F^- \quad (2.2.17)$$

Тут χ - ціле позитивне число. Завдання має рівно χ лінійно незалежних розв'язків. Загальний розв'язок має вигляд (2.1.20).

$$F^+ = \sum_{k=0}^{\chi} C_k \left(\frac{x-i}{x+i}\right) \frac{1}{x+i}, \quad F^- = \sum_{k=0}^{\chi} C_k \left(\frac{x+i}{x-i}\right) \frac{1}{x+i}.$$

Д о в е д е н н я цього твердження проводиться так само, як у відповідному випадку, в.п. 2.1.

$$\text{Дійсно, } \left(\frac{x-i}{x+i}\right) \left(F^+ + \frac{C}{x+i}\right) = F^- - \frac{2i}{x+i} F^- + \frac{C}{x+i}. \text{ Залишилося показати,}$$

$$\text{що } F^- - \frac{2i}{x+i} F^- + \frac{C}{x+i} \in L_2^-\{0, m\}. \quad \text{Далі, вважаючи } K(x) = -\frac{2i}{x+i} \quad \text{і}$$

застосовуючи формулу згортки

$$V^{-1}\left\{F^{-} - \frac{2i}{x+i}F^{-} + \frac{C}{x+i}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)f_{-}(t)dt - c \begin{cases} -i\sqrt{2\pi}e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

з обліком (2.2.15) отримаємо при $x > 0$ $2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x+t} f_{-}(t)dt + iC\sqrt{2\pi}e^{-x} \equiv 0$.

Необхідне твердження доведене.

2.2.3. Крайова задача Римана. Загальний випадок. Розглянемо тепер завдання (2.2.2) - (2.2.3) при довільній функції $A(x)$, що задовольняє умовам, сформульованим на початку п.2.2.1. З цих умов зокрема, витікає існування індексу функції $A(x)$ (формула (2.1.24)).

$$\chi = \text{Ind}A(x). \quad (2.2.22)$$

Далі до функції $A(x)$ застосовуємо результати п. 2.1, а саме, цю функцію можна представити у виді (2.1.38).

$$A(x) = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^{\chi} e^{B^{+}(x)} e^{-B^{-}(x)},$$

при цьому, зважаючи на сильніші обмеження, накладені на $A(x)$ можна встановити, що функції $B^{+}(x)$ і $B^{-}(x)$ належать не лише просторам L_2^{+} і L_2^{-} , але і вужчим просторам $L_2^{+}\{0, -m\}$ і $L_2^{-}\{0, -m\}$. У зв'язку з цим матимемо сильніші результати.

$$\text{Саме } \exp\{\pm B^{\pm}(x)\}\Phi(x) \in L_2\{0, -m\}, \text{ якщо } \Phi(x) \in L_2\{0, -m\}. \quad (2.2.23)$$

Властивість (2.2.23) дозволяє множити о.ф. з простору $L_2\{0, m\}$ на функції типу $\exp(B^{\mp}(x))$. При цьому $\exp\{\pm B^{\pm}(x)\}F^{+} \in L_2^{+}\{0, m\}$, якщо $F^{+} \in L_2^{+}\{0, m\}$

$$\exp\{\pm B^{\pm}(x)\}F^{-} \in L_2^{-}\{0, m\}, \text{ якщо } F^{-} \in L_2^{-}\{0, m\}.$$

Після зроблених зауважень можна прийти до висновку, що увесь хід розв'язку задачі Римана (2.2.2)-(2.2.3) за формою співпадає з процедурою вказаною в пунктах 2.1.1-2.1.3. При цьому замість просторів L_2 , L_2^{+} і L_2^{-} тепер

будуть $L_2\{0, m\}$, $L_2\{0, m\}$ і $L_2\{0, m\}$. Зараз ми не повторюватимемо міркування з п.2.1, а обмежимося формулюванням результатів.

Випадок $\chi = 0$. Задача Римана (2.2.2), (2.2.3) має безумовний і єдиний розв'язок

$$F^+ = e^{B^+(x)}[e^{-B^+(x)}G]^+; F^- = e^{B^-(x)}[e^{-B^-(x)}G]^-. \quad (2.2.24)$$

Випадок $\chi > 0$. Завдання (2.2.2), (2.2.3) безумовно вирішується. Однорідне завдання має χ лінійно незалежних розв'язків. Загальний розв'язок знаходиться по формулах:

$$F^+ = e^{B^+(x)}[e^{-B^+(x)}G]^+ + \sum_{k=0}^{\chi-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^k \frac{1}{x+i}, \quad (2.2.25)$$

$$F^- = \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi e^{B^-(x)}[e^{-B^-(x)}G]^- + \sum_{k=0}^{\chi-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^k \frac{1}{x+i}. \quad (2.2.26)$$

Випадок $\chi < 0$. Задача Римана (2.2.2), (2.2.3) може мати лише єдиний розв'язок

$$F^+ = e^{B^+(x)}[e^{-B^+(x)}G]^+, F^- = e^{B^-(x)} \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi [e^{-B^-(x)}G]^-. \quad (2.2.27)$$

Формули (2.2.27) будуть розв'язком задачі Римана тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi [e^{-B^+(x)}G]^+ \in L_2\{0, m\}. \quad (2.2.28)$$

Надамо умові вирішуваної (2.2.28) простішому вигляду. На основі $(F^-, \Phi^-(x)) = 0$ і правила множення узагальненої функції на звичайну функцію маємо

$$0 = \left(\left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi [e^{-B^+(x)}G]^+, \Phi^-(x) \right) = \left([e^{-B^+(x)}G]^+, \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi \Phi^-(x) \right).$$

Тут $\Phi^-(x) \in L_2^-\{0, -m\}$. Виділимо головну частину функції $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^\chi \Phi^-(z)$,

що має при $z = -i$ полюс порядку $|\chi|$:

$$\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^\chi \Phi(x) = \frac{C_1}{x+i} + \dots + \frac{C_{-\chi}}{(x+i)^{-\chi}} + \Omega^-(x).$$

Тут C_k - постійні, а $\Omega^-(x) \in L_2^-\{0, m\}$. У силу $(F^-, \Phi^-(x)) = 0$ умова (2.2.28)

$$\text{рівносильно наступному} \left(\left[e^{-B^+(x)} \Gamma \right], \frac{C_1}{x+i} + \dots + \frac{C_{-\chi}}{(x+i)^{-\chi}} \right) = 0$$

$$\text{чи, що те ж} \left(\left[e^{-B^+(x)} \Gamma \right], \frac{1}{(x+i)^k} \right) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, |\chi|,$$

Але в силу $\left(V \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(x-t) f dt, \Phi(x) \right) = (K(x)F, \Phi(x))$ завжди маємо

$$\left(\left[e^{-B^+(x)} G \right]^+, \frac{1}{(x+i)^k} \right) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, |\chi|. \text{ Тому на основі правила (2.2.5) і формули (2.2.10)}$$

$$0 = \left(\left(\left[e^{-B^+(x)} G \right]^+ - \left[e^{-B^+(x)} G \right]^- \right), \frac{1}{(x+i)^k} \right) = \left(e^{-B^+(x)} G, \frac{1}{(x+i)^k} \right) = \left(\Gamma g, e^{-B^+(x)} \frac{1}{(x+i)^k} \right), k = 1, 2, \dots, |\chi|$$

Отже, для вирішуваної задачі Римана (2.2.2), (2.2.3) у разі негативного індексу потрібні і достатні умови:

$$(G, e^{-B^+(x)} (x+i)^{-k}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, |\chi|. \quad (2.2.29)$$

Отриманий розв'язок задачі Римана неперервно залежить від G . Дійсно, має місце Теорема:

Теорема 2.2.1. Рішення F^+, F^- задачі Римана неперервно залежить від G . Саме, мають місце оцінки

$$\left\| e^{B^+(x)} \left[e^{-B^+(x)} G \right]^+ \right\|^{0,m} \leq C^+ \|G\|^{0,m}, \quad (2.2.30)$$

$$\left\| \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^N e^{B^-(x)} \left[e^{-B^+(x)} G \right] \right\|^{0,m} \leq C^- \|G\|^{0,m}. \quad (2.2.31)$$

Тут постійні C^+ і C^- не залежать від G .

Д о в е д е н н я. Узагальнені функції, що стоять під знаком норм в лівих частинах нерівностей (2.4.30) - (2.4.31) є результатом дії на узагальнену функцію G операторів множення і операторів типу $[..]^{\pm}$. Усі вказані оператори обмежені. Їх добуток, як відомо, також обмежений, що вимагається довести.

2.3. Особливий випадок однорідної задачі Римана на дійсній вісі в узагальнених функціях.

Розглянемо однорідну задачу Римана виду

$$F^+ D(x) = F^-(x), \quad (2.3.1)$$

де $D(x) = x D_1(x)$, а функція $D_1(x) = \frac{x+i}{x} D(x) \neq 0$ на усій дійсній вісі задовольняє умові Гельдера, причому $\chi = \text{Ind}(D_1(x))^{-1} = n$. При цьому припустимо, що

$$\frac{x}{x+i} F^+ \in L_2^+, \quad (2.3.2)$$

а

$$F^- \in L_2^-. \quad (2.3.3)$$

Запишемо задачу Римана (2.3.1)-(2.3.3) у виді $F^+ \frac{x}{x+i} = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^n D_2(x) F^-$,

де функція $D_2(x) = \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^n \cdot D_1^{-1}(x)$ має нульовий індекс. Тоді згідно п. 2.1.4

матимемо

$$F^+ \cdot \frac{x}{x+i} = X^+(x) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^k \frac{1}{x+i},$$

$$F^-(x) = X^-(x) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_k \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^{n-k} \frac{1}{x+i},$$

$$X^\pm(x) = \exp \left\{ V \left(\frac{\operatorname{sgn} t \pm 1}{2} \right) (V^{-1} D_2)(t) \right\} (x).$$

При цьому узагальнена функція F^+ визначається так:

$$F^+ = X^+(x) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^\chi \frac{1}{x} + C_n \delta(x).$$

Далі ми обмежимося випадком, коли $\chi = 1$. Саме цей випадок буде надалі затребуваний. Отже, при $\chi = 1$ маємо

$$F^+ = C_0 X^+(x) \cdot \frac{1}{x} + C_1 \delta(x),$$

де функція F^+ знаходиться з факторизації функції $D_2(x) = \left(\frac{x+i}{x-i} \right) \cdot D_1(x)$, а $\delta(x)$ – функція Дираку. При цьому постійні C_0 , C_1 вибираються так, щоб оригінал функції F^+ звернувся при $x < 0$ у нуль.

Визначимо структуру отриманого розв'язку. З цією метою функцію $F^+(x)$ представимо у виді.

$$F^+(x) = C_0 E^+(x) + \frac{C_0 X^+(0)}{x} + C_1 \delta(x), \quad (2.3.4)$$

де

$$E^+(x) = \frac{(X^+(x) - X^+(0))}{x}. \quad (2.3.5)$$

Застосуємо тепер до обох частин рівності (2.3.5) зворотне перетворення Фур'є. в результаті матимемо

$$f_+(t) = \begin{cases} C_0 X^+(0) \cdot i \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{C_1}{\sqrt{2\pi}}, & t < 0 \\ -C_0 \cdot e_+(u) - C_0 X^+(0) \cdot i \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{C_1}{\sqrt{2\pi}}, & t > 0 \end{cases}, \quad (2.3.6)$$

де

$$e_+(u) = (V^{-1}E^+)(u). \quad (2.3.7)$$

Оскільки функція $f_+(t)$ повинна перетворюватися на нуль при $t < 0$, то з рівності (2.3.6) негайно витікає, що постійні C_0 і C_1 пов'язані між собою таким чином

$$C_1 = -\pi i C_0 X^+(0). \quad (2.3.8)$$

Цей факт дозволяє стверджувати, що однорідна задача Римана (2.3.1) - (2.3.3) при $\chi = 1$ має одне лінійно незалежний розв'язок. При цьому функція F^+ визначається з (2.3.4) з урахуванням співвідношення, а функція F^- через крайову умову (2.3.1). З обліком (2.3.8) остаточний розв'язок буде такий:

$$F^+(x) = C_0 \cdot \left(E^+(x) + \frac{X^+(0)}{x^+} \right), F^-(x) = \frac{C_0 X^+(0) \cdot X^-(x)}{x - i},$$

де C_0 – довільна комплексна постійна. При цьому відмітимо, що знайдені функції дійсно задовольняють умовам (2.3.2)-(2.3.3). Цей факт встановлюється безпосередньо.

3. ПОСТАНОВКА УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ РИЗИКУ

Нехай u - початковий капітал страхової компанії; $T_i, U_i, i \geq 1$ - послідовність моментів і розмірів виплат відповідно; N_t - число страхових виплат за проміжок часу $[0, t]$.

Визначимо процес ризику $R_t, t \geq 0$, рівнянням балансу

$$R_t = u + S(t) - \sum_{i=1}^{N_t} U_i,$$

де U_i послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $B(t) = P(U_1 < t)$. При цьому в моделі, яку ми розглядаємо, передбачається, що випадкові величини $\theta_i = T_i - T_{i-1}, i \geq 1$ також незалежні, однаково розподілені величини з функцією розподілу $K(t) = P(\theta_1 < t)$, $S(t) \geq 0$ - зростаюча неперервна функція.

Передбачається також, що два набори випадкових величин $\{U_1, U_2, \dots, U_n, \dots\}$ і $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots\}$ взаємно незалежні; N_t і $\{U_1, U_2, \dots, U_n, \dots\}$ також взаємно незалежні.

Ймовірність не банкрутства страхової компанії визначається так:

$$\varphi(u) = P\left(\inf_{t \geq 0} R_t > 0 \mid R_0 = u\right). \quad (3.1)$$

3.1. Методи розв'язку узагальненої задачі теорії ризику.

Теорема 3.1. Нехай рівняння балансу має вигляд

$R_t = u + S(t) - A_t \left(A_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i \right)$, де $S(t) \geq 0 (S(0) = 0, S(\infty) = \infty)$ - зростаюча неперервна функція. Тоді ця функція задовольняє рівнянню

$$\varphi(u) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{u+S(\tau)} \varphi(u + S(\tau) - x) dB(x) dK(\tau). \quad (3.2)$$

Теорема 3.2. Рівняння (3.2) еквівалентно задачі сполучення, яке представляє собою однорідну задачу Римана для напівплощини

$$\Phi^+(x)D(x)=\Phi^-(x) \quad (3.4)$$

де $D(x)=1-R(x)\cdot\varphi_B(x)$, $R(x)=\int_0^\infty e^{-ixS(t)}dK(t)$,

$$\varphi_B(x)=\int_0^\infty e^{ixt}dB(t), \quad (3.5)$$

а шукані функції $\Phi^\pm(x)$ належать відповідно до просторів узагальнених функцій, а саме

$$\Phi^\pm(x)\in L_2^\pm\{0,1\} \quad (3.6)$$

Теорема 3.3. (про структуру розв'язку узагальненого рівняння теорії ризику).

Нехай виконується такі умови:

1) $\tilde{K}$ має щільність розподілу; 2) $\nu > \mu$; 3) $\chi = \text{Ind}(D_1^{-1}(x)) = 1$, де функція $D_1(x) = \frac{x+i}{x}D(x)$. Тоді рівняння (3.2) має єдиний розв'язок і його структура така

$$\varphi(u)=1-\frac{i}{\sqrt{2\pi}X^+(0)}e_+(u). \quad (3.7)$$

Тут функція $e_+(x)$ послідовно будується по формулах

$$X^+(x)=\exp\left\{V\left(\frac{\text{sgnt}+1}{2}\right)(V^{-1}D_1^{-1}\left(\frac{x+i}{x-i}\right))(t)\right\}(x),$$

$$E^+(x)=-\frac{(X^+(x)-X^+(0))}{x}, e_+(u)=(V^{-1}E^+)(u).$$

3.2. Приклади точних розв'язків

Розглянемо конкретні приклади розв'язків рівняння (3.2) у разі, коли U_i послідовність однаково розподілених ненегативних випадкових функцій.

Приклад 3.1. Нехай $S(t)=ct$, $k(t)=\beta^2 te^{-\beta t}$, $b(t)=\mu e^{-\mu t}$ і $\beta_0 = \frac{\beta}{c}$, причому виконується нерівність

$$\frac{2}{\beta_0} > \frac{1}{\mu}. \quad (3.8)$$

Треба знайти розв'язок рівняння (3.2).

Р о з в ' я з о к. Згідно з умовами 2) - 3) теореми 3.3. і умовами теореми 3.2. рівняння балансу (3.2) еквівалентне задачі Римана

$$\Phi^+(x) \frac{x}{x+i} = \frac{(x+i\mu)(x-i\beta_0)^2}{(x-i\delta_1)(x+i\delta_2)(x+i)} \Phi^-(x), \quad (3.9)$$

де

$$\delta_2 = \frac{\mu - 2\beta_0 + \sqrt{(2\beta_0 - \mu)^2 + 4(2\beta_0\mu - \beta_0^2)}}{2} > 0.$$

Умова (3.9) дозволяє стверджувати, що введені постійні $\delta_{1,2}$ (3.9) задовольняють нерівностям: $\delta_{1,2} > 0$, а індекс коефіцієнта задачі Римана (3.9) дорівнює 1.

Далі, відповідно до теореми 3.3. отримаємо розв'язок рівняння (3.2) :

$$\varphi(u) = 1 - \frac{(\mu - \delta_2)}{\mu} e^{-\delta_2 u}.$$

Приклад 3.2. Нехай $S(t)=ct$, $b(t)=\mu e^{-\mu t}$, $k(t)=\beta e^{-\beta t}$ і $\beta_0 = \frac{\beta}{c}$. Треба знайти розв'язок рівняння (3.2).

Р о з в ' я з о к. Згідно з умовами 2) - 3) теореми 3.3. і умовами теореми 3.2. рівняння (3.2) еквівалентно задачі Римана

$$\Phi^+(x) \frac{x}{x+i} = \frac{(x+i\mu)(x-i\beta_0)}{(x+i\mu-i\beta_0)(x+i)} \Phi^-(x) \quad (3.10)$$

у якої індекс коефіцієнта дорівнює 1, а постійні μ і β_0 такі, що виконується нерівність $\frac{1}{\beta_0} > \frac{1}{\mu}$.

Розв'язуючи задачу Римана (3.10) за схемою, вказаною при доведенні теореми 3.3 і застосовуючи зворотне перетворення Фур'є для функції $\Phi^+(x)$ матимемо

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\beta_0}{\mu} e^{-(\mu-\beta_0)u}.$$

Приклад 3.3. Нехай $S(t) = ct$, $b(t) = \mu^2 t e^{-\mu t}$, $k(t) = \beta e^{-\beta t}$ і $\beta_0 = \frac{\beta}{c}$, причому виконується нерівність

$$\frac{1}{\beta_0} > \frac{2}{\mu}. \quad (3.11)$$

Треба знайти розв'язок рівняння (3.2).

Р о з в ' я з о к . Згідно з умовами 2) - 3) теореми 3.3. і умовами теореми 3.2. рівняння (3.2) еквівалентно задачі Римана

$$\Phi^+(x) \frac{x}{x+i} = \frac{(x+i\mu)^2 (x-i\beta_0)}{(x+i\delta_1)(x+i\delta_2)(x+i)} \Phi^-(x), \quad (3.12)$$

де

$$\delta_{1,2} = \frac{2\mu - \beta_0 \pm \sqrt{(2\mu - \beta_0)^2 + 4(2\beta_0\mu - \mu^2)}}{2}.$$

Як і раніше, можна показати, що введені постійні $\delta_{1,2}$ задовільняють нерівності: $\delta_{1,2} > 0$, а індекс коефіцієнта задачі Римана дорівнює 1. Ці факти витікають з нерівності (3.11).

Далі, відповідно до теореми 3.3 отримаємо розв'язок рівняння (3.2) :

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\delta_2}{\mu^2} \frac{(\delta_1 - \mu)^2}{\delta_2 - \delta_1} e^{-\delta_1 u} - \frac{\delta_1}{\mu^2} \frac{(\delta_2 - \mu)^2}{\delta_1 - \delta_2} e^{-\delta_2 u}.$$

Приклад 3.4. Нехай $S(t) = ct$, $b(t) = \mu^2 t e^{-\mu t}$, $k(t) = \beta^2 e^{-\beta t}$ і $\beta_0 = \frac{\beta}{c}$, причому виконується нерівність

$$\frac{2}{\beta_0} > \frac{2}{\mu}. \quad (3.13)$$

Треба знайти розв'язок рівняння (3.2).

Р о з в ' я з о к . Згідно з умовами 2) - 3) теореми 3.3. і умовами теореми 3.2. рівняння балансу (3.2) еквівалентно задачі Римана

$$\Phi^+(x) \frac{x}{x+i} = \frac{(x+i\mu)^2 (x-i\beta_0)^2}{(x-i\delta_1)(x+i\delta_2)(x+i(\mu-\beta_0))(x+i)} \Phi^-(x), \quad (3.14)$$

де

$$\delta_1 = \frac{-\mu + \beta_0 + \sqrt{(\mu - \beta_0)^2 + 8\beta_0\mu}}{2} > 0,$$

$$\delta_2 = \frac{\mu - \beta_0 + \sqrt{(\mu - \beta_0)^2 + 8\beta_0\mu}}{2} > 0.$$

Знову ж таки можна показати, що введені постійні $\delta_{1,2}$ задовольняють нерівностям: $\delta_{1,2} > 0$, а індекс коефіцієнта задачі Римана (3.14) дорівнює 1. Ці твердження витікають з нерівності (3.13).

Далі, відповідно до теореми 3.2 отримаємо розв'язок рівняння (3.2) :

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\delta_2}{\mu^2} \frac{\beta_0^2}{\beta_0 + \delta_2 - \mu} e^{-(\mu-\beta_0)u} - \frac{(\mu-\beta_0)}{\mu^2} \frac{(\delta_2-\mu)^2}{\mu-\beta_0-\delta_2} e^{-\delta_2 u}.$$

Приклад 3.5. Нехай $S(t) = ct$, $b(t) = \alpha p_1 e^{-p_1 t} + (1-\alpha) p_2 e^{-p_2 t}$, $k(t) = \beta e^{-\beta t}$ і $\beta_0 = \frac{\beta}{c}$, причому виконується нерівність

$$\frac{1}{\beta_0} > \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}. \quad (3.15)$$

Треба знайти розв'язок рівняння (3.2).

Р о з в ' я з о к . Відповідно до умов 2) - 3) теореми 3.3. і умовами теореми 3.2. рівняння (3.2) еквівалентно задачі Римана

$$\Phi^+(x) \frac{x}{x+i} = \frac{(x+ip_1)(x+ip_2)(x-i\beta_0)}{(x+i\delta_1)(x+i\delta_2)(x+i)} \Phi^-(x), \quad (3.16)$$

де

$$\delta_{1,2} = \frac{p_1 + p_2 - \beta_0 \pm \sqrt{(p_1 + p_2 - \beta_0)^2 + 4((1-\alpha)\beta_0 p_1 + \alpha\beta_0 p_2 - p_1 p_2)}}{2}.$$

Можна показати, що введені постійні $\delta_{1,2}$ задовольняють нерівностям: $\delta_{1,2} > 0$, а індекс коефіцієнта задачі Римана (3.16) дорівнює 1. Ці факти витікають з нерівності (3.15).

Нарешті, згідно з схемою описаної вище отримаємо шуканий розв'язок

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\delta_2}{p_1 p_2} \frac{(p_1 - \delta_1)(p_2 - \delta_1)}{\delta_2 - \delta_1} e^{-\delta_1 u} - \frac{\delta_1}{p_1 p_2} \frac{(p_1 - \delta_2)(p_2 - \delta_2)}{\delta_1 - \delta_2} e^{-\delta_2 u}. \quad (3.17)$$

Відмітимо, що при $\beta_0 = 3, p_1 = 3, p_2 = 7, \alpha = \frac{1}{2}$ формула (3.17) повністю співпадає з формулою, яка приведена в монографії Асмуссена [стор. 64].

Приклад 3.6. Нехай $S(t) = ct$, $k(t) = \beta e^{-\beta t}$ і $\beta_0 = \frac{\beta}{c}$. Треба знайти розв'язок рівняння (3.2).

Р о з в ' я з о к . Згідно з умовами 2) - 3) теореми 3.3 і умовами теореми 3.2 рівняння (3.2) еквівалентно задачі Римана

$$\Phi^+(x) \frac{x}{x+i} = D_1^{-1} \Phi^-(x) \quad (3.18)$$

де

$$D_1(x) = \frac{(x - i\beta_0 + i\beta_0\sqrt{2\pi\varphi_B})(x+i)}{(x - i\beta_0)x}$$

Коефіцієнт $D_1^{-1}(x)$ можна спростити, а саме

$$D_1^{-1} = \frac{(x - i\beta_0)}{(1 - \beta_0\mu\sqrt{2\pi\varphi_{B_1}})(x+i)} = \frac{(x - i\beta_0)}{D_0^+(x)(x+i)},$$

де
$$\varphi_{B_1} = \frac{1}{\mu_0} \int_0^\infty e^{ixt} (1 - B(x)) dx.$$

Тут постійні μ і β_0 передбачаються такими, що виконується нерівність: $\frac{1}{\beta_0} > \mu$. При цьому очевидно, що функція $D_0^+(x)$ не має нулів у верхній напівплощині, а індекс коефіцієнта задачі Римана (3.18) дорівнює 1. При цих припущеннях рівняння (3.2) має єдиний розв'язок і його структура така:

$$\varphi(u) = 1 - \frac{i}{\sqrt{2\pi}X^+(0)} e_+(u),$$

де функція $e_+(x)$ послідовно будується по формулах

$$X^+(x) = D_0^+, E^+(x) = -\frac{(X^+(x) - X^+(0))}{x}, e_+(u) = (V^{-1}E^+)(u).$$

Приклад 3.7. Нехай $S(t) = ct$, $k(t) = \beta^2 t e^{-\beta t}$ і $\beta_0 = \frac{\beta}{c}$. Треба знайти розв'язок рівняння (3.2).

Р о з в ' я з о к . Згідно з умовами 2) - 3) теореми 3.3. і умовами теореми 3.2. рівняння (3.2) еквівалентно задачі Римана

$$\Phi^+(x) \frac{x}{x+i} = D_1^{-1} \Phi^-(x), \quad (3.19)$$

де

$$D_1(x) = \frac{((x - i\beta_0)^2 + \beta_0^2 \sqrt{2\pi\varphi_B})(x+i)}{(x - i\beta_0)^2 x}$$

Коефіцієнт $D_1^{-1}(x)$ завдання (3.19) можна спростити, а саме

$$D_1^{-1} = \frac{(x - i\beta_0)^2}{(x - is_0)(1 + D_0^+(x)\sqrt{2\pi})(x + i)},$$

де

$$D_0^+(x) = \beta_0^2 \int_0^\infty e^{ixt} G(t) dt, G(x) = \int_x^\infty e^{-s_0(t-x)} (1 - B(t)) dt,$$

s_0 - позитивний корінь трансцендентного рівняння :

$$L(s) = c^2 s - 2\beta c + \beta^2 \int_0^\infty e^{-st} \overline{B}(t) dt = 0, s > 0. \quad \text{Існування кореня виходить з}$$

властивостей функції:

$$1) L(0) = -2\beta c + \beta^2 \mu < 0;$$

$$2) \lim_{s \rightarrow +\infty} L(s) = +\infty.$$

Постійні μ і β_0 такі, що виконується нерівність: $\frac{2}{\beta_0} > \mu$. Очевидно, що

функція $1 + \sqrt{2\pi} D_0^+(x)$ не має нулів у верхній напівплощині, і індекс коефіцієнта задачі Римана (3.19) дорівнює 1.

Тоді рівняння (3.2) має єдиний розв'язок і його структура така:

$$\varphi(u) = 1 - \frac{i}{\sqrt{2\pi} X^+(0)} e_+(u),$$

де функція $e_+(x)$ послідовно будується по формулах

$$X^+(x) = D_0^+, E^+(x) = -\frac{(X^+(x) - X^+(0))}{x}, e_+(u) = (V^{-1} E^+)(u).$$

Приклад 3.8. Нехай $S(t) = ct$, $k(t) = \alpha p_1 e^{-p_1 t} + (1 - \alpha) p_2 e^{-p_2 t}$, $b(t) = \mu e^{-\mu t}$ і

$q_i = \frac{p_i}{c}, i = \overline{1, 2}$. Треба знайти розв'язок рівняння (3.2).

Р о з в ' я з о к. Згідно з умовами 2) - 3) теореми 3.3. і умовами теореми 3.2 рівняння (3.2) еквівалентно задачі Римана

$$\Phi^+(x) \frac{x}{x+i} = D_1^{-1} \Phi^-(x), \quad (3.20)$$

де

$$D_1(x) = \frac{((x-iq_1)(x-iq_2) + (iq_1\alpha(x-iq_2) + iq_2(1-\alpha)(x-iq_1))\sqrt{2\pi}\varphi_B)(x+i)}{(x-iq_1)(x-iq_2)x}$$

Коефіцієнт $D_1^{-1}(x)$ задача Римана (3.20) можна спростити, а саме

$$D_1^{-1} = \frac{(x-iq_1)(x-iq_2)}{(x-is_0)(1+\sqrt{2\pi}D_0^+(x))(x+i)},$$

де

$$D_0^+(x) = \int_0^\infty e^{ixt} G(t) dt, G(x) = q_1 q_2 \int_x^\infty e^{-s_0(t-x)} (1-B(t)) dt + (q_1\alpha + q_2(1-\alpha)) \int_x^\infty e^{-s_0(t-x)} dB, \\ \gamma_1 = c(p_1 + p_2), \gamma_2 = c(p_1\alpha + p_2(1-\alpha)).$$

s_0 - позитивний корінь трансцендентного рівняння:

$$L(s) = c^2 s - \gamma_1 + \gamma_2 \int_0^\infty e^{-st} dB + p_1 p_2 \int_0^\infty e^{-st} \bar{B}(t) dt, s > 0,$$

Існування кореня виходить з властивостей функції:

- 1) $L(0) = -\gamma_1 + \gamma_2 + p_1 p_2 \mu = -c(\alpha_1 p_2 + \alpha_2 p_1) + p_1 p_2 \mu < 0$;
- 2) $\lim_{s \rightarrow +\infty} L(s) = +\infty$.

Тут постійні μ і β_0 такі, що виконується нерівність: $\frac{\alpha}{q_1} + \frac{1-\alpha}{q_2} > \mu$. При

цих припущеннях функція $D_0^+(x)$ не має нулів у верхній напівплощині, а індекс коефіцієнта задачі Римана (3.20) дорівнює 1. Тоді рівняння (3.2) має єдиний розв'язок і його структура така:

$$\varphi(u) = 1 - \frac{i}{\sqrt{2\pi}X^+(0)} e_+(u),$$

де функція $e_+(x)$ послідовно будується по формулах

$$X^+(x) = D_0^+, E^+(x) = -\frac{(X^+(x) - X^+(0))}{x}, e_+(u) = (V^{-1}E^+)(u).$$

З а у в а ж е н н я 1. Якщо ввести ймовірність розорення $\psi(u)$ рівну $1 - \varphi(u)$, то враховуючи останню рівність рівняння (3.2) можна записати у такому вигляді:

$$\psi(u) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{u+S(\tau)} \psi(u + S(\tau) - x) dB(x) dK(\tau) + \int_0^{\infty} (1 - B(u + S(\tau))) dK(\tau). \quad (3.21)$$

З а у в а ж е н н я 2. За допомогою перетворення Фур'є рівняння (3.21) можна звести до неоднорідної задачі Римана.

Враховуючи ймовірнісний сенс функції $\psi(u)$ її потрібно шукати в просторі L_2^+ .

ВИСНОВКИ

Слід зазначити, що в теорії ймовірності, при дослідженні інтегральних рівнянь відновлення, зокрема в теорії ризику плідно використовується метод факторизації.

У теорії ризику застосування перетворення Фур'є (Лапласа) належить Крамеру Г. Досить повна інформація про розвиток класичної теорії ризику і застосування для цієї мети перетворення Фур'є або Лапласа викладено у статті Калашникова В. В., Констандиниса Д.

До 2000 року дослідження по теорії ризику проводилися з використанням інтегральних або інтегро-дифференціальних рівнянь вольтерівського типу з постійними коефіцієнтами. У 2000 році з'явилася стаття Асмунсена, в якій він, при вивченні узагальненої теорії ризику, уперше розглянув рівняння

$$p(x)g(x) = \gamma_0 k(x) + \int_0^x k(x-t)g(t)dt,$$

$$\text{де } \gamma_0 = 1 - \int_0^\infty g(t)dt.$$

Сам Асмунсен, при довільному ядрі, обмежився випадком, коли $p(x) = \begin{cases} p_1 \\ p_2 \end{cases}$.

Подальші дослідження рівняння пов'язані з роботами Керекеші Д.П. Вказані роботи і результати, що відносяться до узагальненої теорії ризику, стали змістом глави 3.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- 1) Довідник по теорії ймовірностей і математичній статистиці. Під ред. акад. АН УРСР В.С. Королюка. Київ: «Наукова думка», 1978. 582 с.
- 2) Керекеша Д.П. Конструктивний розв'язок одного класу операторних рівнянь із застосуваннями. Буковинський математичний журнал, 2006. С. 314.
- 3) Biihlmann, H. Mathematical methods in risk theory. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Springer Verlag, 1970.
- 4) Feller, W. An introduction to probability theory and its applications, Volume 2. Vol. 81. John Wiley & Sons, 1991. 678 p.
- 5) Gakhov, F. D. Boundary value problems. New York: Courier Corporation, 1990. 561 p.
- 6) Kereksha P. V., Khachaturov S. Y. Carleman problem for two pairs of functions in a ring. Ukrainian Mathematical Journal, 49(5), 1997. 735-746 pp.
- 7) Srivastava H. M., Buschman R. G. Theory and applications of convolution integral equations (Vol. 79). Springer Science & Business Media, 2013. 239 pp.