Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
(повне найменування вищого навчального закладу)

Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
(повне найменування інституту/факультету)

кафедра вищої математики
(повна назва кафедри)

Дипломна робота

магістра
(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему: «Дослідження розв’язків, які входять в особливу точку диференціального рівняння 1го порядку»
« Research of solutions that are included in a special point of the 1st order differential equation»

Виконала: студентка заочної форми навчання
спеціальності 111 Математика

Пугачова Катерина Леонідівна ______________________
(прізвище, ім’я, по-батькові)
Керівник професор Щоголев С.А. __________
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)
Рецензент доцент Кореновський А.О.________
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№_____ від ________________ р.

Завідувач кафедри

_________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ЕК №_______
протокол №____ від ____________ р.
Оцінка_____________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

___________ ______________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2021

ЗМІСТ

Вступ ……………………………………………………………………….3

Розділ 1. ………………………………………………………………………5

Існування обмежених в $[T,+\infty)$ і прямуючих до нуля при
$t \to \infty$ розв'язків у квазілінійному диференціальному
рівнянні першого порядку.

Розділ 2……….……………………………………………………………16

Про асимптотичне зображення розв'язків диференціального рівняння першого порядку, який входить в особливу точку вздовж деякого виняткового направлення.

Приклад……………………………………………………………………..34

Висновок……………………………………………………………………36

Література…………………………………………………………………..37

ВСТУП

В дипломній роботі розглядається питання про асимптотичне зображення розв'язків диференціального рівняння першого порядку, які входять в особливу точку вздовж виняткового напряму.

У першому розділі досліджується існування обмежених в [T,+∞) прямуючих до нуля при t→∞ розв'язків у квазілінійному диференціальному рівнянні першого порядку. Також формулюється теорема про існування у рівнянні вигляду

$$y' = q(x) + p(x)y + f(x, y), x \in (0, a]$$

розв'язків що прямують до нуля при x→+0

У другому розділі розглядається рівняння зі збуреннями, тобто

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_m(x, y) + f(x, y)}{Q_m(x, y) + \ \varphi(x, y)} \qquad x \in (0, a) \qquad (*)$$

Точка (0,0) є особливою точкою

$$P_m(0,0) = Q_m(0,0) = f(0,0) = \ \varphi(0,0) = 0$$

Рівняння $(*)$ визначено в області

$$G = \{(x, y):\ x^2 + y^2 \le R_0{}^2\ , R_0 > o\}, x \in (0, a], |y| \le b$$

$P_m(x, y), Q_m(x, y) -$ однорідні многчлени степеня $m,$ а функції

$$f(x, y), \varphi(x, y) \in C^2_{x,y}(G)$$

Передбачається, що

$$f(x, y), \varphi(x, y) = \underline{0}((|x| + |y|)^{m+1})$$

$$f'_y(x, y), \varphi'_y(x, y) = \underline{0}((|x| + |y|)^{m})$$

$$f''_{x^2}(x, y), f''_{xy}(x, y), f''_{y^2}(x, y), \varphi''_{x^2}(x, y), \varphi''_{xy}(x, y), \varphi''_{y^2}(x, y) = \underline{0}((|x| + |y|)^{m-1})$$

Дослідимо, коли у рівнянні $(*)$ існує хоча б один розв'язок, який має асимптотичне зображення

$$y(x) = k_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_s x^s + \overline{0}\,(x^s) \quad (x \to +0),$$

де k_1-простий корінь рівняння

$$kQ_m(1, k) - P_m(1, k) = 0 \qquad (**)$$

за умови $Q_m(1, k) \neq 0$

Рівняння $(**)$ можна отримати із укороченого рівняння

$$y' = \frac{P_m(x, y)}{Q_m(x, y)} \quad (x \neq 0),$$

коли ми шукаємо розв’язок виду $y = kx$. Кожному дійсному кореню k_1 рівняння $(**)$ відповідає пряма $y = k_1 x$, яка називається винятковим напрямом. Нерозглянутим залишився випадок, коли k_1 являється кратним коренем.

Розділ 2 – самостійна частина роботи.

Висновок

В дипломній роботі було розглянуте питання про асимптотичне уявлення розв'язків диференціального рівняння першого порядку, які входять в особливу точку вздовж виняткового направлення. Досліджувалося існування обмежених в [T,+∞) спрямованих до нуля при t→∞ розв'язків у квазілінійному диференціальному рівнянні першого порядку. Також була сформульована теорема про існування у рівнянні виду

$$y' = q(x) + p(x)y + f(x,y), x \in (0,a]$$

розв'язків які прямують до нуля при x→+0

При розгляді рівняння зі збуреннями, тобто

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_m(x,y) + f(x,y)}{Q_m(x,y) + \varphi(x,y)} \qquad x \in (0,a) \qquad (*)$$

де точка (0,0) є особливою точкою

$$P_m(0,0) = Q_m(0,0) = f(0,0) = \varphi(0,0) = 0$$

Рівняння $(*)$ визначено в області

$$G = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \le Ro^2\ , Ro > o\}, x \in (0,a], |y| \le b$$

$P_m(x,y), Q_m(x,y) -$ однорідні многчлени степеня $m,$ а функції

$$f(x,y), \varphi(x,y) \in C^2_{x,y}(G)$$

За умови, що

$$f(x,y), \varphi(x,y) = \underline{0}((|x| + |y|)^{m+1})$$

$$f'_y(x,y), \varphi'_y(x,y) = \underline{0}((|x| + |y|)^{m})$$

$$f''_{x^2}(x,y), f''_{xy}(x,y), f''_{y^2}(x,y), \varphi''_{x^2}(x,y), \varphi''_{xy}(x,y), \varphi''_{y^2}(x,y) = \underline{0}((|x| + |y|)^{m-1})$$

Дослідила, коли у рівнянні $(*)$ існує хоча б один розв'язок, який має асимптотичне зображення і де k_1-простий корінь рівняння

$$kQ_m(1,k) - P_m(1,k) = 0\ , \text{ за умови } Q_m(1,k) \neq 0 \qquad (**)$$

Рівняння $(**)$ можна отримати із укороченого рівняння

$$y' = \frac{P_m(x,y)}{Q_m(x,y)} \quad (x \neq 0)$$

Кожному дійсному кореню k_1 рівняння $(**)$ відповідає пряма $y = k_1 x$, яка називається винятковим направленням. Нерозглянутим залишився випадок, коли k_1 являється кратним коренем.

Література

1. Щоголев С.А., Кореновський Арк.О. «Основи вищої математики» 2018р
2. Щоголев С. А., Дрік Н. Г., Кореновський Арк. О. «Диференціальні та інтегральні рівняння», Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2017р
3. Катин О.В. «Устойчивость и асимптотика квазилинейных неавтономных дифференциальных систем», навчальний посібник.
4. Щоголев С.А. «Вступ до аналізу: навчально-методичний посібник» Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2014р.
5. Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я, Шинкарик М.І. «Вища математика» Тернопіль, 2003р.