

МЕХАНІКА

Mathematical Subject Classification: 74B05, 42A38
УДК 539.3

В. В. Реут, С. Т. Роговский

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ЗАДАЧА О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛОСОВИДНОЙ ПЛАСТИНКЕ, ОСЛАБЛЕННОЙ ТРЕЩИНОЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ БОКОВЫМ ГРАНЯМ

**Реут В. В., Роговський С. Т. Задача про концентрацію напружень у поло-
соподібній пластинці, що ослаблена тріщиною, яка паралельна боковим
граням.** Знайдено наближений розв'язок задачі про полосоподібну шарнірно закрі-
плену пластинку, що ослаблена тріщиною, яка паралельна опорам. Проведено чисельне
дослідження залежності коефіцієнта інтенсивності напружень у вершині тріщини від
розташування тріщини та параметрів пластини.

Ключові слова: полосоподібна пластинка, коефіцієнт інтенсивності напружень, син-
гулярне інтегральне рівняння, тріщина.

**Реут В. В., Роговский С. Т. Задача о концентрации напряжений в поло-
совидной пластинке, ослабленной трещиной, параллельной боковым граням.**
Найдено приближённое решение задачи о шарнирно опёртой полосовидной пластине,
ослабленной трещиной, параллельной опорам. Проведено численное исследование за-
висимости коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины от располо-
жения трещины и параметров пластины.

Ключевые слова: полосовидная пластинка, коэффициент интенсивности напряже-
ний, сингулярное интегральное уравнение, трещина.

**Reut V. V., Rogovskiy S. T. The problem of stress concentration in the
band-shaped plate, weakened by crack, which is parallel to the side edges.** The
solution to the problem about hinged band-shaped plate, weakened by the crack has been
found. The crack is parallel to the bearings. Relation between stress intensity factor at the
crack end and crack's location and plate's parameters has been examined.

Key words: band-shaped plate, stress intensity factor, singular integral equation, crack.

ВВЕДЕНИЕ. Задачи о напряжённом состоянии пластин и пластинчатых обо-
лочек часто возникают в машиностроении, в судостроении, в строительстве, при
проектировании авиационной и космической техники. При наличии дефектов
типа трещин значительным образом снижается несущая способность элементов
конструкций, что обуславливает актуальность таких задач. Решению подобных
задач посвящены работы многих отечественных и зарубежных учёных, их обзор
можно найти в [1]–[8], [16, 17]. В настоящей работе задача о напряжённом со-
стоянии пластины, ослабленной трещиной, была сведена к системе сингулярных
интегральных уравнений относительно скачков прогиба и угла поворота. Полу-
чено эффективное приближённое решение этой системы методом ортогональных
многочленов. Изучены коэффициенты интенсивности нормальных и касательных

напряжений вблизи концов трещины. Получено новое спектральное соотношение для многочленов Якоби $P_n^{(3/2, 3/2)}(x)$ при $|x| > 1$. Показано, что для расчётов коэффициентов интенсивности напряжений достаточно решать не систему, а два раздельно решаемых интегральных уравнения.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Постановка задачи. В литературе часто рассматриваются задачи изгиба пластин, ослабленных трещинами. При этом возможны три постановки задачи. Во-первых, берега трещины могут быть соединены гибким шарниром, который не допускает скачка прогибов при переходе через трещину (рис. 1, а). В такой постановке задача о пластинке, ослабленной трещиной, решалась в [1, 7].

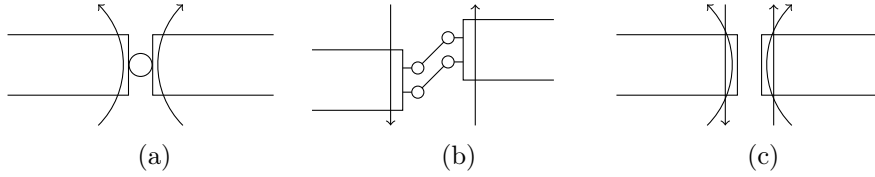


Рис 1. Возможные постановки задачи

Во-вторых, берега трещины могут быть закреплены так, что не допускаются скачки углов поворота при переходе через трещину (рис. 1, б). В такой постановке задача рассматривалась в [7].

Более естественной представляется постановка задачи о трещине, берега которой свободны (рис. 1, в). В этом случае задача усложняется тем, что сводится не к одному интегральному уравнению, а к системе интегральных уравнений. Тем не менее в случае, когда трещина лежит на оси симметрии пластинки, задача сводится к первой или второй постановке.

Возникает вопрос, насколько существенны изменения, вносимые в третью, более общей постановке, и нельзя ли ограничиться первыми двумя. Поэтому в данной работе рассматривается задача о напряжённом состоянии полосовидной пластинки ($a < x < b, -\infty < y < \infty$), шарнирно опёртой по краям ($x = a, x = b$). На интервале $x = 0, y \in (-1; 1)$ пластинка имеет трещину, к берегам которой приложены изгибающий момент интенсивностью $f(y)$ и обобщенная перерезывающая сила интенсивностью $q(y)$.

Такая задача математически эквивалентна задаче отыскания решения бигармонического уравнения Софи Жермен

$$\begin{aligned} \Delta^2 w(x, y) &= 0, \quad a < x < b, \quad -\infty < y < \infty, \\ (x, y) &\notin \{0\} \times (-1; 1), \end{aligned} \quad (1)$$

удовлетворяющего условиям шарнирного опирания по краям пластинки

$$x = a, b: \quad w = M_x w = 0, \quad (2)$$

условиям затухания на бесконечности

$$y \rightarrow \pm\infty: \quad w, \frac{\partial w}{\partial y}, M_y w, V_y w \rightarrow 0 \quad (3)$$

и условию на трещине

$$x = 0, y \in (-1; 1) : \quad \mathbb{M}_x w = f(y), \quad \mathbb{V}_x w = q(y). \quad (4)$$

При этом в (1) – (4) $\mathbb{M}_x, \mathbb{V}_x, \mathbb{M}_y, \mathbb{V}_y$ — дифференциальные операторы вида

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_x &= -D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), & \mathbb{V}_x &= -D \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right), \\ \mathbb{M}_y &= -D \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right), & \mathbb{V}_y &= -D \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} \right), \end{aligned}$$

описывающие после применения к w — прогибу пластинки — соответствующие изгибающие моменты и обобщённые перерезывающие силы, D — цилиндрическая жёсткость пластинки, ν — коэффициент Пуассона.

2. Система сингулярных интегральных уравнений. Введём неизвестные функции

$$x = 0 : \quad \gamma(y) = \langle w \rangle, \quad \chi(y) = \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle, \quad (5)$$

где $\langle \dots \rangle$ — скачки соответствующих величин на указанных линиях.

Очевидно, что $\gamma(y) \equiv 0, \chi(y) \equiv 0$ при $|y| > 1$.

Применим к задаче (1)–(3), (5) преобразование Фурье по переменной y :

$$\begin{aligned} w_\lambda(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{i\lambda y} dy, \\ w(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w_\lambda(x) e^{-i\lambda y} d\lambda. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда, используя обобщённую схему метода интегральных преобразований [1], получим следующую одномерную разрывную краевую задачу относительно трансформанты функции прогиба:

$$\begin{aligned} L^2 w_\lambda(x) &= 0, \quad a < x < b, \quad x \neq 0, \\ x = a, b : \quad w_\lambda &= L w_\lambda = 0, \\ x = 0 : \quad \langle w_\lambda \rangle &= \gamma_\lambda, \quad \langle w'_\lambda \rangle = \chi_\lambda, \quad \langle \widetilde{M}_x w_\lambda \rangle = \langle \widetilde{V}_x w_\lambda \rangle = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda^2, \quad \widetilde{M}_x = L + (1 - \nu)\lambda^2, \quad \widetilde{V}_x = \frac{\partial}{\partial x} (L - (1 + \nu)\lambda^2), \quad (8)$$

$\chi_\lambda, \gamma_\lambda$ — трансформанты неизвестных функций (5).

Функция Грина $G_\lambda(x, \xi)$ задачи (7) имеет вид

$$G_\lambda(x, \xi) = \Phi_\lambda(x, \xi) - \sum_{j=0}^3 c_j(\xi) \psi_j(x), \quad (9)$$

где функции $\Phi(x, \xi)$, $c_j(\xi)$, $\psi_j(x)$, $j = \overline{0, 3}$ определяются так [9]:

$$\begin{aligned}
 \Phi_\lambda(x, \xi) &= \frac{(1 + \lambda |x - \xi|) e^{-\lambda |x - \xi|}}{4\lambda^3}, \\
 c_0(\xi) &= \frac{(1 + \lambda(\xi - a)) e^{-\lambda(\xi - a)}}{4\lambda^3}, \quad c_1(\xi) = -\frac{e^{-\lambda(\xi - a)}}{2\lambda}, \\
 c_2(\xi) &= \frac{(1 + \lambda(b - \xi)) e^{-\lambda(b - \xi)}}{4\lambda^3}, \quad c_3(\xi) = -\frac{e^{-\lambda(b - \xi)}}{2\lambda}, \\
 \psi_0(x) &= \frac{\operatorname{sh} \lambda(b - x)}{\operatorname{sh} \lambda l}, \quad \psi_2(x) = \frac{\operatorname{sh} \lambda(x - a)}{\operatorname{sh} \lambda l}, \\
 \psi_1(x) &= \frac{(b - x) \operatorname{ch} \lambda(b - x) - l \operatorname{cth} \lambda l \operatorname{sh} \lambda(b - x)}{2\lambda \operatorname{sh} \lambda l}, \\
 \psi_3(x) &= \frac{(x - a) \operatorname{ch} \lambda(x - a) - l \operatorname{cth} \lambda l \operatorname{sh} \lambda(x - a)}{2\lambda \operatorname{sh} \lambda l}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Зная функцию Грина задачи (7), решение этой задачи можно [1] записать в виде

$$w_\lambda(x) = \chi_\lambda \left[\widetilde{M}_\xi G_\lambda(x, \xi) \right] \Big|_{\xi=0} - \gamma_\lambda \left[\widetilde{V}_\xi G_\lambda(x, \xi) \right] \Big|_{\xi=0},$$

где

$$\widetilde{M}_\xi = L_\xi + (1 - \nu)\lambda^2, \quad \widetilde{V}_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi} (L_\xi - (1 + \nu)\lambda^2), \quad L_\xi = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \lambda^2. \tag{11}$$

Пользуясь формулой обратного преобразования (6) и теоремой о свёртке, получим, что

$$\begin{aligned}
 w(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \left(\chi(\eta) \left[\widetilde{M}_\xi G(x, \xi) \right] \Big|_{\xi=0} - \right. \\
 &\quad \left. - \gamma(\eta) \left[\widetilde{V}_\xi G(x, \xi) \right] \Big|_{\xi=0} \right) \cos \lambda(y - \eta) d\lambda d\eta.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Требуя выполнения последних двух условий из (4), получим, что данная задача сводится к решению системы интегральных уравнений относительно неизвестных скачков (5)

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow \pm 0} \mathbb{M}_x \left[\int_0^\infty \cos \lambda(y - \eta) \int_{-1}^1 \left(\widetilde{M}_\xi G_\lambda(x, \xi) \Big|_{\xi=0} \chi(\eta) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \widetilde{V}_\xi G_\lambda(x, \xi) \Big|_{\xi=0} \gamma(\eta) \right) d\eta d\lambda \right] = f(y), \\ & \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow \pm 0} \mathbb{V}_x \left[\int_0^\infty \cos \lambda(y - \eta) \int_{-1}^1 \left(\widetilde{M}_\xi G_\lambda(x, \xi) \Big|_{\xi=0} \chi(\eta) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \widetilde{V}_\xi G_\lambda(x, \xi) \Big|_{\xi=0} \gamma(\eta) \right) d\eta d\lambda \right] = q(y). \end{aligned} \right. \quad (-1 < y < 1) \tag{13}$$

Можно показать [1, 7], что система (13) допускает представление

$$\begin{cases} \frac{(3+\nu)(1-\nu)}{4\pi} \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \chi(\eta) \ln \frac{1}{|y-\eta|} d\eta + \\ + \int_{-1}^1 [\chi(\eta) K_{11}(y, \eta) + \gamma(\eta) K_{12}(y, \eta)] d\eta = f(y), \\ \frac{(3+\nu)(1-\nu)}{4\pi} \frac{d^4}{dy^4} \int_{-1}^1 \gamma(\eta) \ln \frac{1}{|y-\eta|} d\eta + \\ + \int_{-1}^1 [\chi(\eta) K_{21}(y, \eta) + \gamma(\eta) K_{22}(y, \eta)] d\eta = q(y), \end{cases} \quad (-1 < y < 1) \quad (14)$$

где $K_{ij}(y, \eta)$, $i, j = \overline{1, 2}$ — бесконечно дифференцируемые функции.

Для определения класса решений системы (14) воспользуемся методом Вильямса [15]. Его идея заключается в том, что асимптотика решения краевой задачи вблизи угловой точки совпадает с асимптотикой решения такой же краевой задачи для бесконечного клина. В данной задаче асимптотика решения вблизи конца трещины совпадает с асимптотикой решения задачи для клиновидной пластинки со свободным краем (угол раствора равен 2π), решение которой известно из [14]. Поэтому

$$\chi(y) = O(\sqrt{1-y^2}), \quad \gamma(y) = O(1-y^2)^{3/2}, \quad |y| \rightarrow 1.$$

Строить приближённое решение системы (13) будем методом ортогональных многочленов путём разложения искомых функций $\chi(y)$ и $\gamma(y)$ в ряд по чётным многочленам Якоби

$$\begin{aligned} \chi(y) &= \sqrt{1-y^2} \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k P_{2k}^{(1/2, 1/2)}(y), \\ \gamma(y) &= (1-y^2)^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k P_{2k}^{(3/2, 3/2)}(y). \end{aligned} \quad (15)$$

где χ_k, γ_k — коэффициенты разложений, подлежащие определению.

Возникает вопрос о том, насколько существенно наличие функций $K_{12}(y, \eta)$ и $K_{21}(y, \eta)$ в системе (14). То есть насколько увеличится погрешность вычислений, если в (14) положить

$$K_{12}(y, \eta) \equiv K_{21}(y, \eta) \equiv 0. \quad (16)$$

Для этого сперва построим приближённое решение (14) методом ортогональных многочленов, а затем сравним с приближённым решением системы (14) при выполнении условий (16).

Для реализации метода ортогональных многочленов нам понадобятся некоторые спектральные соотношения.

3. Вывод спектральных соотношений. Для построения приближённого решения системы интегральных уравнений (13) нам потребуются спектральные соотношения. Для многочленов $P_n^{(1/2, 1/2)}(x)$ они известны [1] —

$$\frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-\xi|} \frac{P_n^{(1/2, 1/2)}(\xi)}{(1-\xi^2)^{-1/2}} d\xi = -(n+1) P_n^{(1/2, 1/2)}(x), \quad |x| < 1, \quad (17)$$

а для многочленов $P_n^{(3/2,3/2)}(x)$ легко вытекают из [1] —

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} \operatorname{sign}(x-t) - \frac{\operatorname{tg} \pi \alpha}{\pi} \ln \frac{1}{|x-t|} \right] \frac{P_n^{(\alpha, k-\alpha)}(t)}{(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{\alpha-k}} dt = \\ = \frac{\Gamma(k+n+1)}{\Gamma(n+1)} \frac{P_n^{(k-\alpha, \alpha)}(x)}{\cos \pi \alpha}, \quad |x| < 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Если обе части (18) умножить на $\cos \pi \alpha$ и после этого положить $\alpha = 3/2, k = 3$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \frac{d^4}{dx^4} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} \frac{P_n^{(3/2,3/2)}(t)}{(1-t^2)^{-3/2}} dt = \\ = (n+1)(n+2)(n+3) P_n^{(3/2,3/2)}(x), \quad |x| < 1. \end{aligned} \quad (19)$$

В дальнейшем нам потребуются значения интегралов (17) и (19) при $|x| > 1$. Для интеграла (17) такое значение известно [1]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi} \ln \frac{1}{|x-\xi|} P_n^{(1/2,1/2)}(\xi) d\xi = \\ = \frac{|x| P_n^{(1/2,1/2)}(x)}{\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1} \frac{d}{dx} \left[P_n^{(1/2,1/2)}(x) \right] \operatorname{sign} x - \\ - 1/2(n+1) P_n^{(1/2,1/2)}(x), \quad |x| > 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Для построения спектрального соотношения для свойства многочленов $P_m^{(3/2,3/2)}(x)$ воспользуемся следующим свойством многочленов Якоби [11]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \frac{\alpha + \beta + n + 1}{2} P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x), \\ \frac{d^k}{dx^k} \left[(1-x^2)^{1/2+k} P_n^{(1/2+k, 1/2+k)}(x) \right] &= \\ = (-1)^k 2^k \frac{(n+k)!}{n!} (1-x^2)^{1/2} P_{n+k}^{(1/2, 1/2)}(x). \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда если проинтегрировать левую часть соотношения (20) k раз по частям и применить формулы из (21), получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \frac{d^{3+k}}{dx^{3+k}} \int_{-1}^1 (1-\xi)^{1/2+k} P_n^{(1/2+k, 1/2+k)}(\xi) \ln |x-\xi| d\xi = \\ = 2^k \frac{(n+k)!}{n!} \frac{1}{(x^2-1)^{3/2}} \left[-x|x| P_{n+k}^{(1/2, 1/2)} + (x^2-1) f_{n,k}(x) \right], \quad |x| > 1, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} f_{n,k}(x) &= \frac{1}{4} (n+k+2)(n+k+3) \operatorname{sign} x (x^2-1) P_{n+k-2}^{(5/2, 5/2)}(x) - \\ &- \frac{1}{4} (n+k+2) P_{n+k-1}^{(3/2, 3/2)}(x) \left[(n+k+1) \sqrt{x^2-1} - 4|x| \right] + \\ &+ \operatorname{sign} x P_{n+k}^{(1/2, 1/2)}(x), \quad n \geq 1, \quad k \geq 1, \\ f_{0,k}(x) &= \operatorname{sign} x P_k^{(1/2, 1/2)}(x) - \frac{1}{4} (k+2) P_{k-1}^{(3/2, 3/2)}(x) \left[(k+1) \sqrt{x^2-1} - 4|x| \right]. \end{aligned}$$

Полагая в последнем равенстве $k = 1$ получим новое спектральное соотношение для многочленов Якоби при $x \rightarrow 1 + 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \frac{d^4}{dx^4} \int_{-1}^1 (1 - \xi)^{3/2} P_n^{(3/2, 3/2)}(\xi) \ln \frac{1}{|x - \xi|} d\xi = \\ & = 2(n + 1) \frac{1}{(x^2 - 1)^{3/2}} \left[-x|x| P_{n+1}^{(1/2, 1/2)}(x) + (x^2 - 1)g_n(x) \right], \quad |x| > 1, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} l g_n(x) &= \frac{1}{4} (n + 3)(n + 4) \operatorname{sign} x (x^2 - 1) P_{n-1}^{(5/2, 5/2)}(x) - \\ & - \frac{1}{4} (n + 3) P_n^{(3/2, 3/2)}(x) \left[(n + 2) \sqrt{x^2 - 1} - 4|x| \right] + \operatorname{sign} x P_{n+1}^{(1/2, 1/2)}(x), \quad n \geq 1, \\ g_0(x) &= -\frac{3}{2} \left[\sqrt{x^2 - 1} - 3|x| \right]. \end{aligned}$$

Полученные спектральные соотношения будут в дальнейшем применены при выводе формул для коэффициентов интенсивности напряжений.

4. Бесконечная система алгебраических уравнений. Подставим представление (15) в (13), поменяв затем порядок суммирования и интегрирования:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\chi_k \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \eta^2} P_{2k}^{(1/2, 1/2)}(\eta) \cos \lambda(y - \eta) d\eta F_{11}(\lambda) - \right. \\ & \left. - \gamma_k \int_{-1}^1 (1 - \eta^2)^{3/2} P_{2k}^{(3/2, 3/2)}(\eta) \cos \lambda(y - \eta) d\eta F_{12}(\lambda) \right) d\lambda = f(y), \\ & \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\chi_k \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \eta^2} P_{2k}^{(1/2, 1/2)}(\eta) \cos \lambda(y - \eta) d\eta F_{21}(\lambda) - \right. \\ & \left. - \gamma_k \int_{-1}^1 (1 - \eta^2)^{3/2} P_{2k}^{(3/2, 3/2)}(\eta) \cos \lambda(y - \eta) d\eta F_{22}(\lambda) \right) d\lambda = q(y). \end{aligned} \right. \quad (-1 < y < 1) \quad (24)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_{11}(\lambda) &= \left[\widetilde{M}_x \widetilde{M}_\xi G_\lambda(x, \xi) \right] \Big|_{\xi=0}^{x=\pm 0} \quad F_{12}(\lambda) = \left[\widetilde{M}_x \widetilde{V}_\xi G_\lambda(x, \xi) \right] \Big|_{\xi=0}^{x=\pm 0}, \\ F_{21}(\lambda) &= \left[\widetilde{V}_x \widetilde{M}_\xi G_\lambda(x, \xi) \right] \Big|_{\xi=0}^{x=\pm 0} \quad F_{22}(\lambda) = \left[\widetilde{V}_x \widetilde{V}_\xi G_\lambda(x, \xi) \right] \Big|_{\xi=0}^{x=\pm 0}. \end{aligned}$$

Приведём значения дифференциальных выражений (8) и (11) на функциях (10):

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_x \widetilde{M}_\xi \Phi_\lambda(x, \xi) &= -\frac{1}{4} ((1 - \nu)(3 + \nu) - \lambda(1 - \nu)^2 |x - \xi|) \lambda e^{-\lambda|x - \xi|} + \delta(x - \xi), \\ \widetilde{M}_x \widetilde{V}_\xi \Phi_\lambda(x, \xi) &= -\frac{1}{4} (1 - \nu)^2 \lambda^3 (x - \xi) e^{-\lambda|x - \xi|} - \delta'(x - \xi), \\ \widetilde{V}_x \widetilde{M}_\xi \Phi_\lambda(x, \xi) &= \frac{1}{4} (1 - \nu)^2 \lambda^3 (x - \xi) e^{-\lambda|x - \xi|} + \delta'(x - \xi), \\ \widetilde{V}_x \widetilde{V}_\xi \Phi_\lambda(x, \xi) &= -\frac{1}{4} ((1 - \nu)(3 + \nu) + \lambda(1 - \nu)^2 |x - \xi|) \lambda^3 e^{-\lambda|x - \xi|} + \\ & + \lambda^2 (1 - 2\nu) \delta(x - \xi) e^{-\lambda|x - \xi|} + 2\lambda \delta'(x - \xi)^2 - \delta''(x - \xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_\xi c_0(\xi) &= -\frac{1}{4\lambda}((1+\nu) - \lambda(1-\nu)(\xi-a))e^{\lambda(a-\xi)}, \\
\widetilde{V}_\xi c_0(\xi) &= -\frac{1}{4}(2 + \lambda(1-\nu)(a-\xi))e^{-\lambda(\xi-a)}, \\
\widetilde{M}_\xi c_1(\xi) &= -\frac{1}{2}\lambda(1-\nu)e^{-\lambda(\xi-a)}, & \widetilde{V}_\xi c_1(\xi) &= -\frac{1}{2}\lambda^2(1-\nu)e^{-\lambda(\xi-a)}, \\
\widetilde{M}_\xi c_2(\xi) &= \frac{1}{4\lambda}((1+\nu) + (1-\nu)\lambda(b-\xi))e^{-\lambda(b-\xi)}, \\
\widetilde{V}_\xi c_2(\xi) &= -\frac{1}{4}(2 + \lambda(1-\nu)(b-\xi))e^{-\lambda(b-\xi)}, \\
\widetilde{M}_\xi c_3(\xi) &= -\frac{1}{2}\lambda(1-\nu)e^{-\lambda(b-\xi)}, & \widetilde{V}_\xi c_3(\xi) &= \frac{1}{2}\lambda^2(1-\nu)e^{-\lambda(b-\xi)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_x \psi_0(x) &= (1-\nu)\lambda^2 \psi_0(x), & \widetilde{V}_x \psi_0(x) &= -(1-\nu)\lambda^2 \psi'_0(x), \\
\widetilde{M}_x \psi_1(x) &= \psi_0(x) + (1-\nu)\lambda^2 \psi_1(x), & \widetilde{V}_x \psi_1(x) &= \psi'_0(x) - (1-\nu)\lambda^2 \psi'_1(x), \\
\widetilde{M}_x \psi_2(x) &= (1-\nu)\lambda^2 \psi_2(x), & \widetilde{V}_x \psi_2(x) &= -(1-\nu)\lambda^2 \psi'_2(x), \\
\widetilde{M}_x \psi_3(x) &= \psi_2(x) + (1-\nu)\lambda^2 \psi_3(x), & \widetilde{V}_x \psi_3(x) &= \psi'_2(x) - (1-\nu)\lambda^2 \psi'_3(x).
\end{aligned}$$

С помощью приведённых значений можно найти выражения для $F_{ij}(\lambda)$, $i, j = \overline{1, 2}$ из (24).

Формулы 7.393.1-2 из [10] можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (1-x^2)^\nu \cos a(x-b) P_n^{(\nu, \nu)}(x) dx &= \\
&= \left(\frac{2}{a}\right)^{\nu+1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{n!} \cos\left(\frac{\pi n}{2} - ab\right) \Gamma(n+\nu+1) J_{n+\nu+1/2}(a),
\end{aligned} \tag{25}$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя.

Используя формулы для разрывного интеграла Вебера—Шафхейтлина из [12], можно получить такое значение следующего интеграла:

$$\int_0^\infty J_\nu(t) J_\mu(t) t^{-1} dt = \begin{cases} \frac{1}{\nu+\mu}, & \nu = \mu, \\ \frac{2 \sin(\frac{\pi}{2}(\nu-\mu))}{\pi(\nu^2-\mu^2)}, & \nu \neq \mu. \end{cases} \tag{26}$$

Умножим обе части первого равенства системы (24) на $\sqrt{1-y^2} P_{2n}^{(1/2, 1/2)}(y)$, а обе части второго равенства — на $(1-y^2)^{3/2} P_{2n}^{(3/2, 3/2)}(y)$. Тогда, проинтегрировав каждое из равенств по y от -1 до 1 , а затем дважды применив формулу (25), получим бесконечную систему алгебраических уравнений, которую с помощью формулы (26) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned}
\sigma_{2n}^{(1)} \chi_n + \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_{2n, 2k}^{(1, 1)} \chi_k + A_{2n, 2k}^{(1, 2)} \gamma_k \right) &= f_{2n} \quad (n = \overline{0, \infty}), \\
\sigma_{2n}^{(2)} \gamma_n + \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_{2n, 2k}^{(2, 1)} \chi_k + A_{2n, 2k}^{(2, 2)} \gamma_k \right) &= q_{2n} \quad (n = \overline{0, \infty}).
\end{aligned} \tag{27}$$

Для коэффициентов этой системы, если принять обозначения

$$\varkappa_1 = \frac{3 + \nu}{1 - \nu}, \quad \varkappa_2 = \frac{1 + \nu}{1 - \nu}, \quad \varkappa_3 = \frac{1}{1 - \nu},$$

получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(1)} &= -2\varkappa_1 \frac{\alpha_{nn}}{(n+1)}, \quad \sigma_n^{(2)} = 8\varkappa_1 \frac{(n+3/2)^2}{(n+2)} \alpha_{nn}, \\ \alpha_{nk} &= (1-\nu)^2 \frac{\Gamma(n+3/2)\Gamma(k+3/2)}{n!k!} \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-k)\right), \\ A_{nk}^{(1,1)} &= \alpha_{nk} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} F_{11}(\lambda) J_{n+1}(\lambda) J_{k+1}(\lambda) d\lambda, \\ A_{nk}^{(1,2)} &= 2(k+3/2)\alpha_{nk} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} F_{12}(\lambda) J_{n+1}(\lambda) J_{k+2}(\lambda) d\lambda, \\ A_{nk}^{(2,1)} &= 2(n+3/2)\alpha_{nk} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} F_{21}(\lambda) J_{n+2}(\lambda) J_{k+1}(\lambda) d\lambda, \\ A_{nk}^{(2,2)} &= -4(n+3/2)(k+3/2)\alpha_{nk} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} F_{22}(\lambda) J_{n+2}(\lambda) J_{k+2}(\lambda) d\lambda, \\ f_n &= \int_{-1}^1 (1-y^2)^{1/2} P_n^{(1/2, 1/2)}(y) f(y) dy, \\ q_n &= \int_{-1}^1 (1-y^2)^{3/2} P_n^{(3/2, 3/2)}(y) q(y) dy. \end{aligned}$$

Можно показать, что при этом коэффициенты A_{nk} убывают экспоненциальным образом, т. е. система (27) является системой линейных алгебраических уравнений типа Пуанкаре–Коха и, следовательно, допускает метод редукции.

Тогда

$$\begin{aligned} F_{11}(\lambda) &= (2a\lambda - \varkappa_1)e^{-2\lambda(b+l)} + e^{2a\lambda}(2a\lambda + \varkappa_1) + e^{-2b\lambda}(\varkappa_1 - 2b\lambda) + \\ &+ (-2b\lambda - \varkappa_1)e^{2\lambda(b-2l)} + 2\varkappa_1 e^{-4\lambda l} + e^{-2\lambda l}(-8\varkappa_3 + 4\lambda l + 2), \\ F_{12}(\lambda) &= F_{21}^{(2)} = -2a\lambda e^{-2\lambda(b+l)} + 2a\lambda e^{2a\lambda} + 2b\lambda e^{-2b\lambda} - 2b\lambda e^{2\lambda(b-2l)}, \\ F_{22}(\lambda) &= (2a\lambda + \varkappa_1)e^{-2\lambda(b+l)} + e^{2a\lambda}(2a\lambda - \varkappa_1) - e^{-2b\lambda}(2b\lambda + \varkappa_1) + \\ &+ (\varkappa_1 - 2b\lambda)e^{2\lambda(b-2l)} + 2\varkappa_1 e^{-4\lambda l} + e^{-2\lambda l}(-8\varkappa_3 - 4\lambda l + 2). \end{aligned}$$

Отыскав приближённое решение системы (27) при помощи метода редукции, получим коэффициенты χ_k, γ_k ($k = 0, \infty$). Их значения будут в дальнейшем использованы для вывода формул для коэффициентов интенсивности нормальных и касательных напряжений.

Определим коэффициент интенсивности напряжений K_I и коэффициент K_{II} следующим образом:

$$K_I = \lim_{y \rightarrow 1+0} \sqrt{y^2 - 1} \sigma_x, \quad K_{II} = \lim_{y \rightarrow 1+0} (y^2 - 1)^{3/2} \tau_{xz}.$$

Известно [13]

$$\sigma_x = \frac{6M_x}{h^2}, \quad \tau_{xz} = \frac{3V_x}{2h}.$$

Рассматривая выражения для M_x и V_x из (13) вместе с представлением (14), с учётом спектральных соотношений (20) и (23) получим следующие формулы для коэффициентов K_I и K_{II} .

$$K_I = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^{(1)} \chi_k, \quad K_{II} = - \sum_{k=0}^{\infty} s_k^{(2)} \gamma_k,$$

где

$$s_k^{(1)} = -\frac{3}{2h^2}(3+\nu)(1-\nu) \binom{k+1/2}{k},$$

$$s_k^{(2)} = \frac{1}{12}(2k+3)(2k+5)s_k^{(1)},$$

$\binom{x}{y}$ — биномиальный коэффициент, который для нецелых значений может быть найден так:

$$\binom{x}{y} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}.$$

5. Численные результаты.

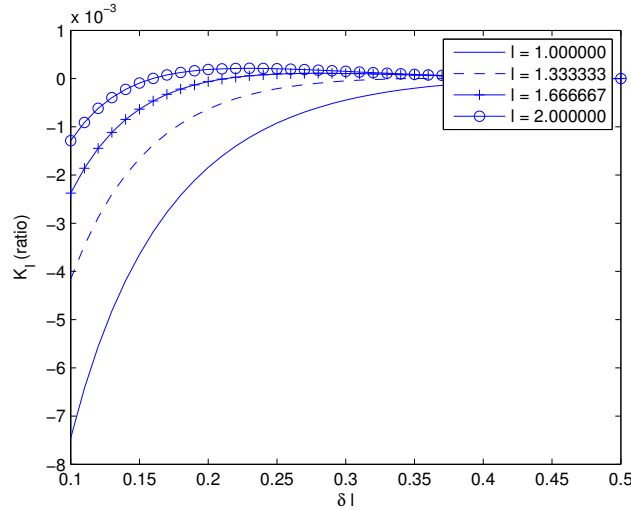
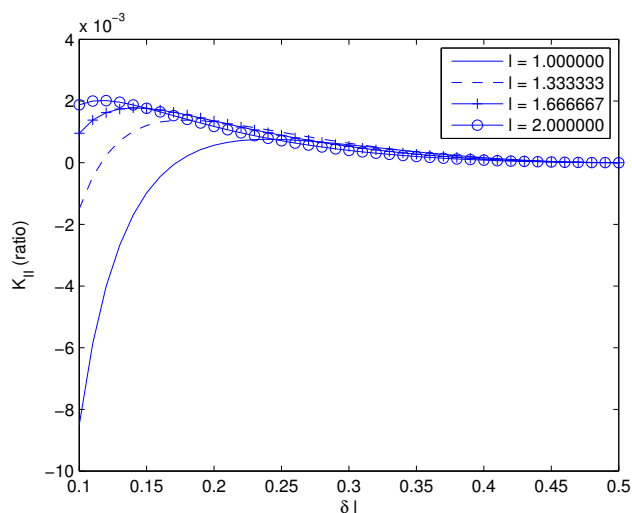


Рис. 2. Относительная разность между коэффициентами K_I и $\tilde{K}_I$

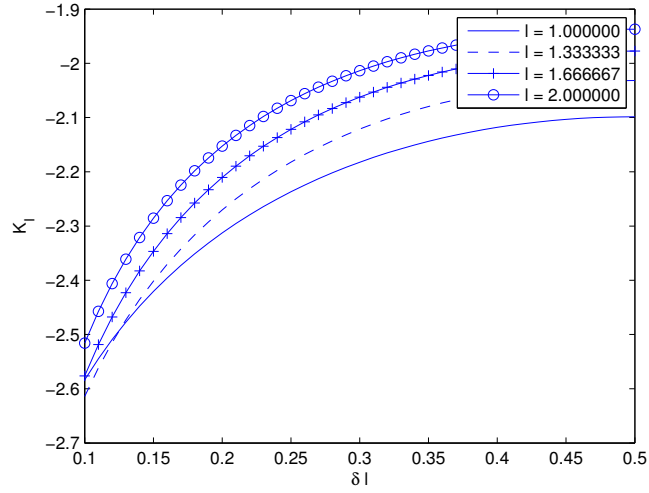
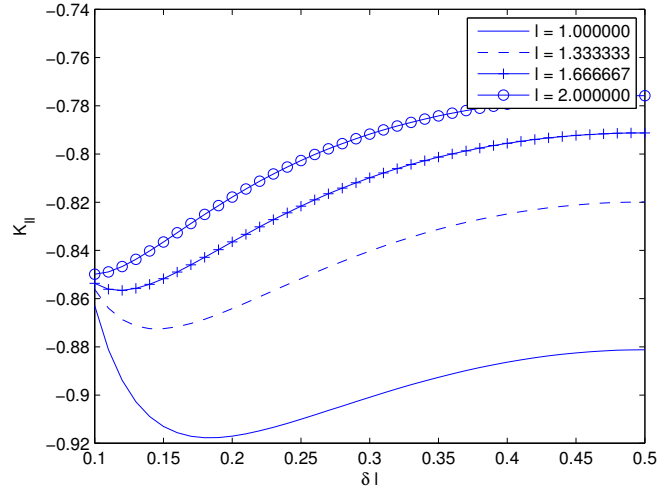
При проведении численного эксперимента были приняты следующие значения параметров: $D = 1$, $\nu = \frac{1}{3}$. Нагрузка $f(y)$ и $q(y)$ на берегах трещины принималась постоянной, т. е. $f(y) \equiv 1$, $q(y) \equiv 1$, $y \in (-1, 1)$. При применении метода редукции в бесконечной системе (27) каждая из подматриц $A^{(i,j)}$, $i, j = \overline{1, 2}$ усекалась до размера 5×5 , таким образом, окончательная система имела размер 10×10 , что обеспечивало точность вычисления коэффициентов K_I и K_{II} до трёх значащих цифр.

Для удобства представления результатов введём новый параметр δl — отношение расстояния от трещины до опоры слева. Таким образом, для известных δl

Рис. 3. Относительная разность между коэффициентами K_{II} и $\tilde{K}_{II}$

$l = 1.00$					
δl	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
K_I	-2.5836	-2.3128	-2.1823	-2.1181	-2.0985
K_{II}	-0.8629	-0.9170	-0.9009	-0.8864	-0.8812
$l = 1.33$					
δl	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
K_I	-2.6141	-2.2703	-2.1213	-2.0522	-2.0317
K_{II}	-0.8562	-0.8642	-0.8402	-0.8249	-0.8199
$l = 1.66$					
δl	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
K_I	-2.5763	-2.2103	-2.0623	-1.9965	-1.9774
K_{II}	-0.8537	-0.8365	-0.8098	-0.7956	-0.7912
$l = 2.00$					
δl	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
K_I	-2.5158	-2.1527	-2.0136	-1.9541	-1.9371
K_{II}	-0.8498	-0.8179	-0.7917	-0.7794	-0.7758

Таблица 1. Значения коэффициентов K_I и K_{II} при различных значениях параметров δl и l .

Рис. 4. Величина коэффициента K_I Рис. 5. Величина коэффициента K_{II}

и l получим, что $a = -\delta l \cdot l$, $b = a + l$. Также рассмотрим коэффициенты $\tilde{K}_I$ и $\tilde{K}_{II}$, посчитанные аналогично рассмотренным ранее, но при выполнении условия (16).

В таблице 1 приведены значения коэффициентов K_I и K_{II} при различных значениях параметров δl и l .

На рисунке 2 отображена относительная разность между коэффициентами K_I и $\tilde{K}_I$, т. е. отношение $\frac{|K_I - \tilde{K}_I|}{|K_I|}$ в зависимости от параметров δl и l .

На рисунке 3 отображена относительная разность между коэффициентами K_{II} и $\tilde{K}_{II}$, т. е. отношение $\frac{|K_{II} - \tilde{K}_{II}|}{|K_{II}|}$ в зависимости от параметров δl и l .

На рисунках 4, 5 отображена зависимость значений коэффициентов K_I и K_{II} от параметров δl и l .

Можно видеть, что при всех значениях параметров δl и l коэффициенты K_I и $\tilde{K}_I$, K_{II} и $\tilde{K}_{II}$ не отличаются друг от друга более, чем на 0,1%, а наибольшее отличие наблюдается при малых значениях параметров.

В обоих случаях рассматриваемые величины при стремлении l к бесконечности асимптотически стремятся к некоторому пределу, который можно получить как коэффициент интенсивности напряжений и коэффициент K_{II} соответственно для бесконечной пластины с трещиной, к которой приложена соответствующая нагрузка.

Установлено, что расчёт данным методом возможен для $\delta l > 0,1$ и $l > 1$, для решения поставленной задачи при $\delta l < 0,1$ или $l < 1$ следует применять иной метод.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

1. Задача сведена к системе двух сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных скачков прогиба и углов поворота при переходе через трещину и построено её приближённое решение.
2. Получено новое спектральное соотношение для многочленов Якоби $P_n^{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})}(x)$ при $|x| > 1$.
3. Получены зависимости коэффициентов интенсивности напряжений σ_x и τ_{xy} вблизи концов трещины от различных параметров задачи. Причём если σ_x имеет интегрируемую особенность при приближении к вершине трещины, то τ_{xy} имеет неинтегрируемую особенность $\tau_{xy} = O((x^2 - 1)^{-3/2})$, $x \rightarrow 1 + 0$.
4. Путём численного эксперимента показано, что вышеуказанную систему двух сингулярных интегральных уравнений можно разбить на два независимо решаемых СИУ.

1. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Попов Г. Я. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 344 с.
2. **Кіт Г. С.** Напружений стан тіл з термічними циліндричними включеннями та тріщинами (плоска деформація) / Кіт Г. С., Черняк М. С. – Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2010. – 46, № 3. – С. 30–37
3. **Панасюк В. В.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
4. **Кушнір Р. М.** Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. – Львів: В-цтво „СПОЛОМ”, 2003. – 320 с.
5. **Кривой А. Ф.** Произвольно ориентированные трещины в неоднородной анизотропной плоскости / А. Ф. Кривой, К. Н. Архипенко // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 29–35.

6. **Вайсфельд Н. Д.** Волновое поле, генерируемое центром вращения, в неограниченной упругой среде с полубесконечной конической трещиной / Н. Д. Вайсфельд, Г. Я. Попов – Прикладная математика и механика. – 2010. – № 2. – С. 336–345.
7. **Онищук О. В.** О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями / Онищук О. В., Попов Г. Я. – Изв. АН СССР, МТТ, 1980, №4.
8. **Зеленцов В. Б.** О решении некоторых интегральных уравнений смешанных задач теории изгиба пластин / Зеленцов В. Б. – Прикл. математика и механика. – 1984. – Т. 48. – Вып. 6. – С. 983–991
9. **В. В. Реут** Функция влияния для неразрезной полосовидной пластинки / В. В. Реут, С. Т. Роговский – Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка – 2012. – Т. 17, випуск 3 (15). – С. 126-133
10. **Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / Градштейн И. С., Рыжик И. М. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
11. **Прудников А. П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. – М.: Наука, 1983 – 771 с.
12. **Бейтмен Г.** Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: НАУКА – ФМЛ, 1974. – 296 с
13. **Тимошенко С. П.** Пластинки и оболочки / Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1966. – 636 с.
14. **Уфлянд, Я. С.** Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. – Л. : Наука, 1968. – 402 с.
15. **Williams, M. L.** The bending stress distribution at the base of a stationary crack / Williams, M. L. – Journal of applied mechanics, 1961, 28.1: 78-82.
16. **Nobili A.** A cracked infinite Kirchhoff plate supported by a two-parameter elastic foundation / Nobili A. – J Eur Ceram Soc (2014).
17. **Zheyuan Hu.** Stress Intensity Factors for Cracked Finite Plates with Mixed Boundary Condition [doi:10.1155/2013/471458] / Zheyuan Hu, Zheming Zhu, Ruoli Feng, Rong Hu – ISRN Mechanical Engineering. – 2013. – Vol. 2013, Article ID 471458. – 11 p.