Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Задача поздовжнього зсуву для складеного двічі усіченого клину з міжфазною тріщиною»

«The antiplane problem of the elasticity theory of elasticity for a composed doubly truncated wedge with an interface crack »

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»

Лавошнікова Марія Сергіївна

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук, доц. Процеров Ю.С
Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук, доц. Фесенко Г.О.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від _____________2024 р.

Захищено на засіданні ЕК №_______
протокол № ____ від ________ 2024 р.
Оцінка_____________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Голова ЕК

_________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Мета дослідження полягає в детальному вивченні задачі поздовжнього зсуву складеного двічі усіченого клину та її розв'язанні. Спочатку розглядалась можливість міжфазної тріщини, але у даній роботі було обрано спрощений варіант без неї для полегшення аналізу.

Об'єкт дослідження

Складений двічі усічений клин з міжфазною тріщиною, що підлягає дії поздовжнього зсуву.

Предмет дослідження

Напружено-деформований стан та критичні умови руйнування складеного двічі усіченого клину.

Актуальність теми

Задача поздовжнього зсуву для складеного двічі усіченого клину з міжфазною тріщиною є актуальною у сучасній механіці деформівних твердих тіл. Це пов'язано з потребою в розробці ефективних методів аналізу та прогнозування поведінки матеріалів та конструкцій, що мають складну геометрію та неоднорідну структуру. Такі задачі мають застосування у галузях машинобудування, будівництва, інженерії та інших сфер, де необхідно аналізувати деформації та напруження в тривимірних тілах. Це дозволяє підвищити надійність та безпеку подібних конструкцій, а також забезпечити їх ефективне використання.

Сучасний стан досліджень

На сьогоднішній день існує значний обсяг наукових робіт, які стосуються дослідження напружено-деформованого стану тіл складної форми з дефектами, такими як тріщини. Методи математичного моделювання та числового аналізу дають змогу проводити такі дослідження з високою точністю. Проте, задача поздовжнього зсуву для двічі усіченого клину з міжфазною тріщиною залишається недостатньо вивченою. Через це є необхідність у розробці нових підходів і методів для більш точного опису поведінки таких систем під дією зовнішніх навантажень.

Коло питань

1. Постановка задачі

2. Зведення задачі до одновимірної розривної крайової
3. Розв’язок отриманої задачі
4. Демонстрація переміщення та напружень

РОЗДІЛ 1

ФОРМУЛЮВАННЯ ТА РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

1.1 Постановка задачі

Розглянемо пружне тіло, яке знаходиться в циліндричній системі координат (r, φ ,z) та займає область a<r<b, 0< φ <α, -∞<z<∞. Нехай φ = 0 та φ = α вільні від напружень. Границя r = a нерухомо закріплена, а до границі r=b прикладене дотичне навантаження p(φ), діюче вздовж осі oz і величина якого не залежить від z.

В цьому випадку тіло буде знаходиться в умовах антиплоської деформації. Тобто будь-який переріз тіла площиною, перпендикулярною до осі oz, знаходиться в однаковому стані. Отже, можемо розглянути переріз, який проходить через початок координат. Крім того припустимо, що розглядаємий переріз a<r<b, 0< φ <α складається з двох частин: a<r<0, 0< φ <α та c< r<b, 0< φ <α, які мають різні механічні властивості та розрізняються модулями зсуву G_1, G_2.

Припустимо далі, що на дузі r = 0 розташована міжфазна тріщина на проміжку β< φ <α, края якої вільні від напружень.

Переміщення w(r, ϕ) має задовольняти рівнянню Ламе:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}=0 \text{ , a<r<b, 0<φ< α, r≠c} \quad (1)$$

та наступним крайовим умовам

$$\tau_{\varphi z}\Big|_{\varphi=0,\alpha} = G\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{\varphi=0,\alpha} = 0, \text{ звідки}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial w}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\alpha} = 0 \text{ , a<r<b} \quad (2)$$

$$w\big|_{r=a} = 0 \text{ та } \tau_{rz} = G_2\frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=b} = P(\varphi),$$

тобто $w|_{r=a} = 0$ та $\frac{\partial w}{\partial r}|_{r=b} = \frac{1}{G_2}P(\varphi), 0 < \varphi < \alpha$ (3)

Умови сполучення:

$< w >= w|_{r=c-0} - w|_{r=c+0} = f(\varphi),\ f(\varphi)\neq 0$ коли $\beta < \varphi < \gamma$

$< \tau_{rz} >= G_1\frac{\partial w}{\partial r}|_{r=c-0} - G_2\frac{\partial w}{\partial r}|_{r=c+0} = 0,$ де $f(\varphi)$ -невідома функція, яка дорівнює переміщенню одного краю тріщини відносно іншого.

Крім того, на тріщині мають виконуватися умови:

$$\tau_{rz}|_{r=c\pm 0} = 0, \beta < \varphi < \gamma$$

$$f(\beta) = f(\gamma) = 0$$

1.2 Зведення задачі до одновимірної розривної крайової задачі

Спочатку підбираємо інтегральне перетворення та зводимо задачу до одновимірної. Застосуємо скінчене косинус перетворення Фур'є за змінною φ відповідно до таблиці:

$$w_k(r)=\int_0^\alpha w(r,\varphi)cos\lambda_k\varphi d\varphi,\ \lambda_k = \frac{\pi_k}{\alpha}, k = 0, 1...$$

Формула оберненого інтегрального перетворення:

$$w(r,\varphi) = \frac{1}{\alpha}[2\sum_{k=1}^{\infty} w_k(r)cos\lambda_k\varphi + w_0(r)]$$

Застосуємо його до рівняння (1) та до крайових умов (3) (при цьому крайові умови (2) будуть виконані).

Отримаємо одновимірну розривну крайову задачу:

$$r\left(r\,w_k^{'}(r)\right)^{'} - \lambda_k^{2}w_k(r) = 0, a < r < b,\ r \neq c$$

$$w_k(a) = 0;\ w_k^{'}(b) = \frac{P_k}{G_2},\ \text{де } P_k = \int_0^\alpha P(\varphi)cos\lambda_k\varphi d\varphi$$

Застосуємо це ж саме перетворення до умов сполучення

$< w_k >= w_k(c - 0) - w_k(c + 0) = f_k$, де $f_k = \int\limits_{\beta}^{\gamma} f(\varphi) cos\lambda_k \varphi d\varphi$

$< \tau_{rz} >= G_1 w_k^{'}(c - 0) - G_2 w_k^{'}(c + 0) = 0$

Перетворимо другу з цих умов

$G_1 w_k^{'}(c - 0) - G_1 w_k^{'}(c + 0) = G_2 w_k^{'}(c + 0) - G_1 w_k^{'}(c + 0)$

$G_1[w_k^{'}(c - 0) - w_k^{'}(c + 0)] = (G_2 - G_1) w_k^{'}(c + 0)$

$G_1 < w_k^{'} >= (G_2 - G_1) w_k^{'}(c + 0)$

$< w_k^{'} >= G^* w_k^{'}(c + 0),\ G^* = \frac{G_2 - G_1}{G_1}$

1.3 Розв’язок отриманої крайової задачі

Розв’язок отриманої крайової задачі будемо шукати у вигляді суми неперервного $u_k(r)$ та розривного $v_k(r)$ розв’язків.

$$w_k(r) = u_k(r) + v_k(r)$$

Неперервний розв’язок:

$$u_0(r) = \frac{bP_0}{G_2} ln\frac{r}{a}$$

$$u_k(r) = \frac{P_k}{G_2 \lambda_k \Delta_k} [(\frac{a}{r})^{\lambda_k} - (\frac{r}{a})^{\lambda_k}],\ \text{де}\ \Delta_k = -\frac{1}{b} [(\frac{a}{b})^{\lambda_k} + (\frac{b}{a})^{\lambda_k}]$$

Розривний розв’язок $v_k(r)$ - розв’язок крайової задачі.

$r(r v_k^{'}(r))^{'} - \lambda_k^2 v_k(r) = 0,\ a < r < b,\ r \neq c$

$v_k(a) = 0;\ v_k^{'}(b) = \frac{P_k}{G_2}$

$< v_k >= v_k(c - 0) - v_k(c + 0) = f_k$

$< v_k^{'} >= G^* v_k^{'}(c + 0)$

Для його побудови треба знайти функцію Гріна $G_k(r,$ р)

1.3.1 Знаходження функції Гріна

$(rv_k^{'}(r))^{'} - \frac{\lambda_k^2}{r} v_k(r) = 0, \ a < r < b$

$v_k(a) = 0; \ v_k^{'}(b) = 0$

ЛНЗ система рішень однорідного рівняння Ейлера

$\varphi_0(r) = r^{\lambda_k}$ та $\varphi_1(r) = r^{-\lambda_k}$

$$G_k(r,\rho) = \begin{cases} a_0 * r^{\lambda k} + a_1 * r^{-\lambda k}, a \le r < \rho < b \\ b_0 * r^{\lambda k} + b_1 * r^{-\lambda k}, a < \rho < r \le b \end{cases}$$

Умова неперервності та стрибки першої похідної дають:

$$\begin{cases} b_0\rho^{\lambda_k} + b_1\rho^{-\lambda_k} - a_0\rho^{\lambda_k} - a_1\rho^{-\lambda_k} = 0 \\ \lambda_k b_0\rho^{\lambda_k-1} - \lambda_k b_1\rho^{-\lambda_k-1} - a_0\lambda_k\rho^{\lambda_k-1} - a_1\lambda_k\rho^{-\lambda_k-1} = \frac{1}{\rho} \end{cases}$$

$C_0 = b_0 - a_0, \ C_1 = b_1 - a_1$

$$\begin{cases} C_0\rho^{\lambda_k} + C_1\rho^{-\lambda_k} = 0 \\ C_0\rho^{\lambda_k} - C_1\rho^{-\lambda_k} = \frac{1}{\lambda_k} \end{cases}$$

$$det = \begin{vmatrix} \rho^{\lambda_k} & \rho^{-\lambda_k} \\ \rho^{\lambda_k} & -\rho^{-\lambda_k} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

$$C_0 = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \Delta & \rho^{-\lambda_k} \\ \frac{1}{\lambda_k} & \rho^{-\lambda_k} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\lambda_k}\rho^{-\lambda_k}$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \rho^{\lambda_k} & 0 \\ \rho^{\lambda_k} & \frac{1}{\lambda_k} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2\lambda_k}\rho^{\lambda_k}$$

З задоволення крайовим умовам:

$$G_k(a,\rho) = a_0 a^{\lambda k} + a_1 a^{-\lambda k} = 0$$

$\frac{\partial G_k}{\partial r}|_{r=b} = \lambda_k b_0 b^{\lambda_k - 1} - \lambda_k b_1 b^{-\lambda_k - 1} = 0$

Звідки

$$a_0 = a_1 * a^{-2\lambda_k};\ b_0 = b_1 * b^{-2\lambda_k}$$

$$c_0 = b_0 - a_0 = b_1 * b^{-2\lambda_k} + a_1 * a^{-2\lambda_k} = \frac{1}{2\lambda_k}p^{\lambda_k}$$

$$c_1 = b_1 - a_1 = -\frac{1}{2\lambda_k}p^{\lambda_k} \Rightarrow a_1 = b_1 + \frac{1}{2\lambda_k}p^{\lambda_k}$$

$$b_1 b^{-2\lambda_k} + (b_1 + \frac{1}{2\lambda_k}p^{\lambda_k})a^{-2\lambda_k} = \frac{1}{2\lambda_k}p^{-\lambda_k}$$

$$b_1(b^{-2\lambda_k} + a^{-2\lambda_k}) = \frac{1}{2\lambda_k}p^{-\lambda_k} - \frac{1}{2\lambda_k}p^{\lambda_k}a^{-2\lambda_k}$$

$$b_1 = \frac{1}{2\lambda_k(b^{-2\lambda_k}+a^{-2\lambda_k})}(p^{-\lambda_k} - p^{\lambda_k} * a^{-2\lambda_k})$$

$$b_0 = \frac{1}{2\lambda_k(b^{-2\lambda_k}+a^{-2\lambda_k})}(p^{-\lambda_k} - p^{\lambda_k} * a^{-2\lambda_k})$$

$$a_1 = \frac{1}{2\lambda_k(b^{-2\lambda_k}+a^{-2\lambda_k})}(p^{-\lambda_k} - p^{\lambda_k} * a^{-2\lambda_k}) + \frac{1}{2\lambda_k} * p^{\lambda_k} =$$

$$= \frac{1}{2\lambda_k(b^{-2\lambda_k}+a^{-2\lambda_k})}(p^{-\lambda_k} - p^{\lambda_k} * a^{-2\lambda_k} + p^{\lambda_k} * b^{-2\lambda_k} + p^{\lambda_k} * a^{-2\lambda_k}) =$$

$$= \frac{1}{2\lambda_k(b^{-2\lambda_k}+a^{-2\lambda_k})}(p^{-\lambda_k} + p^{\lambda_k} * b^{-2\lambda_k})$$

$$a_0 = -\frac{a^{-2\lambda_k}}{2\lambda_k(b^{-2\lambda_k}+a^{-2\lambda_k})}(p^{-\lambda_k} + p^{\lambda_k} * b^{-2\lambda_k})$$

Тоді

$$a_0 r^{\lambda_k} + a_1 r^{-\lambda_k} = \frac{a^{-2\lambda_k}}{2\lambda_k(b^{-2\lambda_k}+a^{-2\lambda_k})}(p^{-\lambda_k} + p^{\lambda_k} * b^{-2\lambda_k})r^{\lambda_k} +$$

$$+ \frac{1}{2\lambda_k(b^{-2\lambda_k}+a^{-2\lambda_k})}(p^{-\lambda_k} + p^{\lambda_k} * b^{-2\lambda_k})r^{-\lambda_k} = \frac{r^{-\lambda_k} - a^{-2\lambda_k} * r^{\lambda_k}}{2\lambda_k(b^{-2\lambda_k}+a^{-2\lambda_k})}(p^{-\lambda_k} + p^{\lambda_k} * b^{-2\lambda_k})$$

$$b_0 r^{\lambda_k} + b_1 r^{-\lambda_k} = \frac{b^{-2\lambda_k}}{2\lambda_k(b^{-2\lambda_k}+a^{-2\lambda_k})}(p^{-\lambda_k} - p^{\lambda_k} * a^{-2\lambda_k})r^{\lambda_k} +$$

$$+ \frac{1}{2\lambda_k(b^{-2\lambda_k}+a^{-2\lambda_k})}(p^{-\lambda_k} - p^{\lambda_k} * a^{-2\lambda_k})r^{-\lambda_k} = \frac{r^{-\lambda_k}b^{-2\lambda_k} * + r^{-\lambda_k}}{2\lambda_k(b^{-2\lambda_k}+a^{-2\lambda_k})}(p^{-\lambda_k} - p^{\lambda_k} * a^{-2\lambda_k}) =$$

$$= \frac{1}{2\lambda_k(b^{-2\lambda_k}+a^{-2\lambda_k})}(r^{\lambda_k}b^{-2\lambda_k}p^{-\lambda_k} - r^{\lambda_k}b^{-2\lambda_k}p^{\lambda_k}a^{-2\lambda_k} + r^{-\lambda_k}p^{-\lambda_k} - r^{-\lambda_k}p^{\lambda_k}a^{-2\lambda_k}) =$$

$$= \frac{1}{2\lambda_k(b^{-2\lambda_k}+a^{-2\lambda_k})}[(\frac{r}{p})^{\lambda_k} * b^{-2\lambda_k} - (rp)^{\lambda_k}(ab)^{-2\lambda_k} + (rp)^{-\lambda_k} - (\frac{p}{r})^{\lambda_k}a^{-2\lambda_k}]$$

$$a_0 r^{\lambda_k} + a_1 r^{-\lambda_k} = \frac{1}{2\lambda_k(b^{-2\lambda_k}+a^{-2\lambda_k})}(r^{-\lambda_k}p^{-\lambda_k} + r^{-\lambda_k}b^{-2\lambda_k}p^{\lambda_k} - a^{-2\lambda_k}r^{\lambda_k}p^{-\lambda_k} -$$

$$- r^{\lambda_k}p^{\lambda_k}a^{-2\lambda_k}b^{-2\lambda_k}) = \frac{1}{2\lambda_k(b^{-2\lambda_k}+a^{-2\lambda_k})}[(rp)^{-\lambda_k} + (\frac{p}{r})^{\lambda_k}b^{-2\lambda_k} - (\frac{r}{p})^{\lambda_k}a^{-2\lambda_k} -$$

$$- (rp)^{-\lambda_k}(ab)^{-2\lambda_k}]$$

Отримаємо симетрію відносно r та р. Можемо помножити чисельник та знаменник на $a^{2\lambda_k}$:

$$a_0 r^{\lambda_k} + a_1 r^{-\lambda_k} = \frac{1}{2\lambda_k[1+(\frac{a}{b})^{2\lambda_k}]} * [(\frac{a^2}{rp})^{\lambda_k} + (\frac{a^2 p}{b^2 r})^{\lambda_k} - (\frac{r}{p})^{\lambda_k} - (\frac{rp}{b^2})^{\lambda_k}]$$

$$b_0 r^{\lambda_k} + b_1 r^{-\lambda_k} = \frac{1}{2\lambda_k[1+(\frac{a}{b})^{2\lambda_k}]} * [(\frac{a^2}{rp})^{\lambda_k} + (\frac{a^2 p}{b^2 r})^{\lambda_k} - (\frac{p}{r})^{\lambda_k} - (\frac{rp}{b^2})^{\lambda_k}]$$

$$G_k(r,\rho) = -\frac{1}{2\lambda_k[1+(\frac{a}{b})^{2\lambda_k}]} * \begin{cases} (\frac{r}{\rho})^{\lambda_k} + (\frac{r\rho}{b^2})^{\lambda_k} - (\frac{a^2}{r\rho})^{\lambda_k} - (\frac{a^2\rho}{b^2 r})^{\lambda_k}, a \le r < \rho < b \\ (\frac{\rho}{r})^{\lambda_k} + (\frac{r\rho}{b^2})^{\lambda_k} - (\frac{a^2}{r\rho})^{\lambda_k} - (\frac{a^2 r}{b^2\rho})^{\lambda_k}, a < \rho < r \le b \end{cases}$$

Тоді розривне рішення має вигляд

$$U_k(r) = c\left[A_0 \frac{\partial G_k(r,\rho)}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=c} - A_1 G_k(r,\rho)\bigg|_{\rho=c}\right],$$

де A_0 − стрибок зміщення при переході крізь лінію $r = c$, а A_1 − стрибок похідної від зміщення при переході крізь цю лінію.

Потрібно також перевірити, що для побудови функції Гріна виконуються умови:

$\frac{\partial G_k(r,\rho)}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=c}$ терпить стрибок при переході через лінію $r = c$,

$G_k(r,\rho)\Big|_{\rho=c}$ терпить стрибок похідної при переході через лінію $r = c$.

Тобто потрібно знайти

$$\left(\frac{\partial G_k(r,\rho)}{\partial \rho}\Bigg|_{\rho=c}\right)\Bigg|_{r=c-0} - \left(\frac{\partial G_k(r,\rho)}{\partial \rho}\Bigg|_{\rho=c}\right)\Bigg|_{r=c+0}$$

$$\left(\frac{\partial G_k(r,\rho)}{\partial r}\Bigg|_{\rho=c}\right)\Bigg|_{r=c-0} - \left(\frac{\partial G_k(r,\rho)}{\partial r}\Bigg|_{\rho=c}\right)\Bigg|_{r=c+0}$$

При $r < \text{р}$:

$$\frac{\partial G_k}{\partial \rho}\Bigg|_{\rho=c} = -\frac{1}{2\lambda_k\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]}\left[-\lambda_k r^{\lambda_k}\rho^{-\lambda_k-1} + \lambda_k\left(\frac{r}{b^2}\right)^{\lambda_k}\rho^{\lambda_k-1} + \lambda_k\left(\frac{a^2}{\rho}\right)^{\lambda_k}\rho^{-\lambda_k-1} - \lambda_k\left(\frac{a}{b^2 r}\right)^{\lambda_k}\rho^{\lambda_k-1}\right]_{\rho=c} =$$

$$= -\frac{1}{\lambda\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]}\left[-r^{\lambda_k} * c^{-\lambda-1} + \left(\frac{r}{b^2}\right)^{\lambda_k} c^{-\lambda_k-1} + \left(\frac{a^2}{r}\right)^{\lambda_k} c^{-\lambda_k-1} - \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{\lambda_k} c^{-\lambda_k-1}\right.$$

При р $< r$:

$$\frac{\partial G_k}{\partial \rho}\Bigg|_{\rho=c} = -\frac{1}{2\lambda_k\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]}\left[\lambda_k\rho^{\lambda_k-1}r^{-\lambda_k} + \left(\frac{r}{b^2}\right)^{\lambda_k}\lambda_k\rho^{\lambda_k-1} + \lambda_k\left(\frac{a^2}{r}\right)^{\lambda_k}\rho^{-\lambda_k-1} + \lambda_k\left(\frac{a^2 r}{b^2}\right)^{\lambda_k}\rho^{-\lambda_k-1}\right]_{\rho=c} =$$

$$= -\frac{1}{2\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]}\left[r^{-\lambda_k}c^{\lambda_k-1} + \left(\frac{r}{b^2}\right)^{\lambda_k} c^{\lambda_k-1} + \left(\frac{a^2}{r}\right)^{\lambda_k} c^{-\lambda_k-1} + \left(\frac{a^2 r}{b^2}\right)^{\lambda_k} c^{-\lambda_k-1}\right]$$

$$\left(\frac{\partial G_k}{\partial \rho}\Bigg|_{\rho=c}\right)\Bigg|_{r=c-0} - \left(\frac{\partial G_k}{\partial \rho}\Bigg|_{\rho=c}\right)\Bigg|_{r=c+0} = -\frac{1}{2\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]}\left[-c^{\lambda_k}\cdot c^{-\lambda_k-1} + \right.$$

$$+\left(\frac{c}{b^2}\right)^{\lambda_k} c^{\lambda_k-1} + \left(\frac{a^2}{c}\right)^{\lambda_k} c^{-\lambda_k-1}\left(\frac{a^2}{b^2 c}\right)^{\lambda_k} c^{\lambda_k-1} - c^{-\lambda_k}c^{\lambda_k-1} - \left(\frac{c}{b^2}\right)^{\lambda_k} c^{\lambda_k-1}$$

$$-\left(\frac{a^2}{c}\right)^{\lambda_k} c^{-\lambda_k-1} - \left(\frac{a^2 c}{b^2}\right)^{\lambda_k} c^{-\lambda_k-1} = -\frac{1}{2\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]}\left[-\frac{1}{c} - \frac{1}{c} - \frac{1}{c} * \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{\lambda_k} - \right.$$

$$-\frac{1}{c}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{\lambda_k} = \frac{2}{2c\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]}\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right] = +\frac{1}{c}$$

При $r <$ р :

$$\left.\frac{\partial G_k}{\partial r}\right|_{\rho=c} = -\frac{1}{2\lambda_k\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]}\left[\lambda_k * r^{\lambda_k-1}\rho^{-\lambda_k} + \lambda_k r^{\lambda_k-1}\left(\frac{\rho}{b^2}\right)^{\lambda_k} + \lambda_k r^{-\lambda_k-1}\left(\frac{a^2}{\rho}\right)^{\lambda_k} + \right.$$

$$\left.+\lambda_k r^{-\lambda_k-1}\left(\frac{a^2\rho}{b^2}\right)^{\lambda_k}\right._{\rho=c} = -\frac{1}{2\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]} *$$

$$* \left[r^{\lambda_k-1}c^{-\lambda_k} + r^{\lambda_k-1}\left(\frac{c}{b^2}\right)^{\lambda_k} + r^{\lambda_k-1}\left(\frac{a^2}{c}\right)^{\lambda_k} + r^{-\lambda_k-1}\left(\frac{a^2c}{b^2}\right)^{\lambda_k}\right]$$

При р $< r$:

$$\left.\frac{\partial G_k}{\partial r}\right|_{\rho=c} = -\frac{1}{2\lambda_k\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]}\left[-\lambda_k r^{-\lambda_k-1}\rho^{\lambda_k} + \lambda_k r^{\lambda_k-1}\left(\frac{\rho}{b^2}\right)^{\lambda_k} + \lambda_k\left(\frac{a^2}{\rho}\right)^{\lambda_k} r^{-\lambda_k-1} - \right.$$

$$\left.-\lambda_k\left(\frac{a^2}{b^2\rho}\right)^{\lambda_k} r^{\lambda_k-1}\right._{\rho=c} = -\frac{1}{2\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]}\left[-r^{-\lambda_k-1}c^{\lambda_k} + r^{\lambda_k-1}\left(\frac{c}{b^2}\right)^{\lambda_k} + r^{-\lambda_k-1}\left(\frac{a^2}{c}\right)^{\lambda_k} - r^{\lambda_k-1}\left(\frac{a^2}{b^2c}\right)^{\lambda_k}\right]$$

$$\left.\left(\left.\frac{\partial G_k}{\partial r}\right|_{\rho=c}\right)\right|_{r=c-0} - \left.\left(\left.\frac{\partial G_k}{\partial r}\right|_{\rho=c}\right)\right|_{r=c+0} = -\frac{1}{2\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]}\left[c^{\lambda_k-1}\cdot c^{-\lambda_k} + \right.$$

$$+\left(\frac{c}{b^2}\right)^{\lambda_k} c^{\lambda_k-1} + \left(\frac{a^2}{c}\right)^{\lambda_k} c^{-\lambda_k-1} + \left(\frac{a^2}{b^2c}\right)^{\lambda_k} c^{-\lambda_k-1} + c^{-\lambda_k-1}c^{\lambda_k} - c^{\lambda_k-1}\left(\frac{c}{b^2}\right)^{\lambda_k} -$$

$$\left.-c^{-\lambda_k-1}\left(\frac{a^2}{c}\right)^{\lambda_k} + \left(\frac{a^2}{b^2c}\right)^{\lambda_k} c^{\lambda_k-1}\right] = -\frac{1}{2\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]}\left[\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{\lambda_k} + \right.$$

$$\left.\frac{1}{c}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{\lambda_k}\right] = \frac{-2}{2c\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]}\left[1+\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{2\lambda_k}\right] = -\frac{1}{c}$$

Отже, рішення задачі складається з суми неперервного та розривного рішення:

$$w_k(r) = u_k(r) + v_k(r) = \frac{P_k}{G_2 \lambda_k \Delta_k}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_k} - \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_k} \right] + c\left[A_0 \frac{\partial G_k(r,\rho)}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=c} - A_1 G_k(r,\rho)\bigg|_{\rho=c} \right]$$

1.3.2 Окремий випадок для k=0

Тепер знайдемо неперервне рішення в випадку, коли k=0:

$$u_0(r) = \frac{bP_0}{G_2} ln\frac{r}{a}$$

Для цього потрібно також побудувати розривне рішення та знайти функцію Гріна крайової задачі:

$$r(rv_0'(r))' = 0,\ a < r < b$$

$$v_0(a) = 0;\ v_0'(b) = 0$$

Рівняння

$$r^2 v_0''(r) + r v_0'(r) = 0 \Rightarrow r v_0''(r) + v_0'(r) = 0$$

буде мати ЛНЗ рішення

$$\varphi_0(r) = 1, \varphi_1(r) = lnr$$

$$G_0(r,\rho) = \begin{cases} a_0 + a_1 lnr, a \le r < \rho < b \\ b_0 + b_1 lnr, a < \rho < r < b \end{cases}$$

Умова неперервності та стрибка першої похідної:

$$\begin{cases} b_0 + b_1 ln\rho - a_0 - a_1 ln\rho = 0 \\ \frac{b_1}{\rho} - \frac{a_1}{\rho} = \frac{1}{\rho} \end{cases}$$

$$c_0 = b_0 - a_0; c_1 = b_1 - a_1$$

$$\begin{cases} c_0 + c_1 ln\rho = 0, c_0 = -ln\rho \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

З крайових умов:

$$v_0(a) = a_0 + a_1 lna = 0$$
$$v_0^{'}(b) : b_1 \frac{1}{b} = 0 \Rightarrow b_1 = 0$$

Тоді $a_1 = b_1 - c_1 = 0 - 1 = -1$

$$a_0 + a_1 lna = 0; a_0 - lna = 0; a_0 = lna$$
$$c_0 = b_0 - a_0 = b_0 - lna = -ln\rho; b_0 = lna - ln\rho = ln\frac{a}{\rho}$$

Таким чином

$$a_0 = lna; b_0 = ln\frac{a}{\rho}; a_1 = -1; b_1 = 0$$
$$G_0(r, \rho) = \begin{cases} lna - lnr = ln\frac{a}{r}, a < r < \rho < b \\ ln\frac{a}{\rho}, a < \rho < r < b \end{cases}$$

Перевіримо розривні властивості:

При $r < \rho : \frac{\partial G_0}{\partial \rho} = 0$

При $r > \rho : \frac{\partial G_0}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}, \left.\frac{\partial G_0}{\partial \rho}\right|_{\rho=c} = -\frac{1}{c}$

$$\left(\left.\frac{\partial G_0}{\partial \rho}\right|_{\rho=c}\right)\Bigg|_{r=c-0} - \left(\left.\frac{\partial G_0}{\partial \rho}\right|_{\rho=c}\right)\Bigg|_{r=c+0} = 0 + \frac{1}{c} = \frac{1}{c}$$

$$r < \rho : \left.\frac{\partial G_0}{\partial r}\right|_{\rho=c} = -\left.\frac{1}{r}\right|_{\rho=c} = -\frac{1}{c}$$
$$r > \rho : \left.\frac{\partial G_0}{\partial r}\right|_{\rho=c} = 0$$

$$\left(\frac{\partial G_0}{\partial r}\bigg|_{\rho=c}\right)\Bigg|_{r=c-0}-\left(\frac{\partial G_0}{\partial r}\bigg|_{\rho=c}\right)\Bigg|_{r=c+0}=-\frac{1}{c}-0=-\frac{1}{c}$$

Розривне рішення для цього випадку має вигляд:

$$v_0(r)=c\left[A_0\frac{\partial G_0(r,\rho)}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=c}-A_1G_0(r,\rho)\bigg|_{\rho=c}\right]$$

Та

$$w_0(r)=u_0(r+)v_0(r)=\frac{bP_0}{G_2}ln\frac{r}{a}+c\left[A_0\frac{\partial G_0(r,\rho)}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=c}-A_1G_0(r,\rho)\bigg|_{\rho=c}\right]$$

З умов сполучення:

$$<w_k(c)>=w_k(c-0)-w_k(c+0)=f_k$$

$$<w_k^{'}(c)>=w_k^{'}(c-0)-w_k^{'}(c+0)=G^*w_k^{'}(c+0),k=0,1$$

Випливає, що

$$A_0=f_k,A_1=G^*w_k^{'}(c+0)A_0=f_k,A_1=G^*w_k^{'}(c+0)$$

Розглянемо простіший випадок, коли міжфазна тріщина відсутня, тобто

$$f(\varphi)=0\Rightarrow f_k=0$$

Тоді умови сполучення будуть

$$<w_k(c)>=0,<w_k^{'}(c)>=G^*w_k^{'}(c+0),$$

тобто $A_0=0,A_1=G^*w_k^{'}(c+0)$

Запишемо рішення у вигляді

$$w_k(r)=\frac{P_k}{G_2\lambda_k\Delta_k}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_k}-\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_k}\right]-cG^*w_k^{'}(c+0)G_k(r,c)$$

при k=1,2…

$$w_0(r) = \frac{bP_0}{G_2} ln\frac{r}{a} - cG^* w_0'(c+0) G_0(r,c)$$

Для знаходження $w_k'(c+0)$ продиференціюємо вираз для $w_k(r)$ та покладемо $r = c + 0$. У результаті отримаємо лінійне рівняння відносно $w_k'(c+0)$.

$$w_k'(r) = \frac{P_k}{G_2 r \Delta_k}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_k} + \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_k}\right] - cG^* w_k'(c+0)\frac{\partial G_k(r,c)}{\partial r}$$

Вже було знайдено

$$\frac{\partial G_k(r,c)}{\partial r} = \frac{-1}{2r\left[a + \left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]}\left[\left(\frac{r}{c}\right)^{\lambda_k} + \left(\frac{cr}{b^2}\right)^{\lambda_k} + \left(\frac{a^2}{cr}\right)^{\lambda_k} + \left(\frac{a^2 c}{b^2 r}\right)^{\lambda_k}\right],$$
$$a < r < \rho < b$$

$$\frac{\partial G_k(r,c)}{\partial r} = \frac{-1}{2r\left[a + \left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]}\left[\left(-\frac{c}{r}\right)^{\lambda_k} + \left(\frac{cr}{b^2}\right)^{\lambda_k} + \left(\frac{a^2}{cr}\right)^{\lambda_k} - \left(\frac{a^2 r}{b^2 c}\right)^{\lambda_k}\right],$$
$$a < \rho < r < b$$

Покладемо $r = c + 0$

$$\left.\frac{\partial G_k(r,c)}{\partial r}\right|_{r=c+0} = \frac{-1}{2c\left[a + \left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]}\left[-1 + \left(\frac{c^2}{b^2}\right)^{\lambda_k} + \left(\frac{a^2}{c^2}\right)^{\lambda_k} - \left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]$$

Тоді

$$w_k'(c+0) = -\frac{P_k}{G_2 c \Delta_k}\left[\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_k} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_k}\right] - cG^* w_k'(c+0) * \frac{1}{2c\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]} *$$
$$* \left[1 - \left(\frac{c^2}{b^2}\right)^{\lambda_k} - \left(\frac{a^2}{c^2}\right)^{\lambda_k} + \left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]$$

$$w_k'(c+0)\left[1 + \frac{G^*}{2\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]}\left[1 - \left(\frac{c^2}{b^2}\right)^{\lambda_k} - \left(\frac{a^2}{c^2}\right)^{\lambda_k} + \left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]\right] =$$
$$= \frac{-P_k}{G_2 c \Delta_k}\left[\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_k} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_k}\right]$$

Позначимо

$$\Delta_k^* = 1 + \frac{G^*}{2\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]}\left[1-\left(\frac{c}{b}\right)^{2\lambda_k}-\left(\frac{a}{c}\right)^{2\lambda_k}+\left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]$$

Тоді

$$w_k^{'}(c+0) = \frac{-P_k}{G_2 c\Delta_k\Delta_k^*}\left[\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_k}+\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_k}\right]$$ для k=1,2…

Для випадку k=0:

$$w_0^{'}(r) = \frac{bP_0}{G_2 r} - cG^* w_0^{'}(c+0)\frac{\partial G_0(r,c)}{\partial r}$$

$$\frac{\partial G_0(r,c)}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{1}{c}, a<r<\rho<b \\ 0, a<\rho<r<b \end{cases}$$

Тоді при $r = c + 0$ отримаємо

$$w_0^{'}(c+0) = \frac{bP_0}{G_2 c}$$

$$w_0(r) = \frac{bP_0}{G_2}ln\frac{r}{a} - cG^*\frac{bP_0}{G_2 c}G_0(r,c)$$

1.4 Знаходження переміщення та напружень

Для того щоб знайти переміщення, використаємо формулу обернення:

$$w(r,\varphi) = \frac{1}{\alpha}w_0(r) + \frac{2}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} w_k(r)cos\lambda_k\varphi = \frac{bP_0}{\alpha G_2}ln\frac{r}{a} - G^*\frac{bP_0}{\alpha G_2}G_0(r,c) + \frac{2}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{P_k}{G_2\lambda_k\Delta_k}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_k}-\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_k}\right] + G^*\frac{P_k}{G_2\lambda_k\Delta_k}\left[\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_k}+\left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_k}\right]G_k(r,c)\right]cos\lambda_k\varphi$$

Для подальших обчислень, запишемо також прикладене навантаження $P(\varphi)$ та P_0, P_k .

Так як $P(\varphi) = \varphi(\alpha - \varphi) = \alpha\varphi - \varphi^2$, тоді

$$P_0 = \int_0^{\alpha} (\alpha\varphi - \varphi^2) d\varphi = \int_0^{\alpha} (\alpha\frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^3}{3})\Big|_0^{\alpha} = \frac{\alpha^3}{6}$$

$P_k = \int_0^{\alpha} P(\varphi) cos\lambda_k \varphi d\varphi$, де $\lambda_k = \frac{\pi_k}{\alpha}, k = 0, 1...$

$$P_k = \int_0^{\alpha} (\alpha\varphi - \varphi^2) cos\lambda_k\varphi d\varphi = \begin{bmatrix} u = \alpha\varphi - \varphi^2 & du = (\alpha - 2\varphi)d\varphi \\ dv = cos\lambda_k\varphi d\varphi & v = \frac{1}{\lambda_k} sin\lambda_k\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\alpha\varphi - \varphi^2}{\lambda_k} sin\lambda_k\alpha\Big|_0^{\alpha} - \frac{1}{\lambda_k}\int_0^{\alpha} (\alpha - 2\varphi) sin\lambda_k\varphi d\varphi =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \alpha - 2\varphi & du = -2d\varphi \\ dv = sin\lambda_k\varphi d\varphi & v = -\frac{1}{\lambda_k} cos\lambda_k\varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_k} * \frac{\alpha - 2\varphi}{\lambda_k} cos\lambda_k\varphi\Big|_0^{\alpha} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_k} * \frac{2}{\lambda_k}\int_0^{\alpha} cos\lambda_k\varphi d\varphi = \frac{1}{{\lambda_k}^2}\left[-\alpha cos\frac{\pi_k\alpha}{\alpha} - \alpha\right] - \frac{2}{{\lambda_k}^2} * \frac{sin\lambda_k\varphi}{\lambda_k}\Big|_0^{\alpha} =$$

$$= -\frac{\alpha}{{\lambda_k}^2}\left[(-1)^k + 1\right]$$

Тепер можна записати напруження по дузі та бокове відповідно:

$$\tau_{rz} = G\frac{\partial w}{\partial r} = G\left[\frac{bP_0}{\alpha r G_2} + G^*\frac{bP_0}{\alpha G_2}\frac{\partial G_0(r,c)}{\partial r} + \frac{2}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{P_k}{G_2\Delta_k}\left(-\frac{a^{\lambda_k}}{r^{\lambda_k+1}} - \frac{\lambda_k r^{\lambda_k-1}}{a^{\lambda_k}}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + G^*\frac{P_k}{\Delta_k}\left[\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_k} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_k}\right]\frac{\partial G_k(r,c)}{\partial r} cos\lambda_k\varphi\right.\right.$$

$$\tau_{\varphi z} = \frac{G}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi} = \frac{G}{r}\left[-\frac{2}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{P_k}{G_2\Delta_k}\left(\left(\frac{a}{r}\right)^{\lambda_k} - \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_k}\right) + G^*\frac{P_k}{G_2\Delta_k}\left[\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda_k} + \right.\right.\right.$$

$$+ \left(\frac{c}{a}\right)^{\lambda_k} G_k(r,c) sin\lambda_k\varphi$$

Для того, щоб побудувати графіки, нам потрібно підставити такі значення, як $P_0, P_k,\ G_0(r, c), G_k(r, c)$ враховуючи, що $G_0(r, c), G_k(r, c)$ будуть різними в залежності від випадка, коли $r > \rho$ та $r < \rho$. При цьому $\rho = c$.

Отже, запишемо потрібні значення коли $r < c$:

$$G_0(r, c) = -\frac{1}{c}$$

$$G_k(r,c) = -\frac{1}{2r\left[a + \left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]} * \left[\left(\frac{r}{c}\right)^{\lambda_k} + \left(\frac{rc}{b^2}\right)^{\lambda_k} + \left(\frac{a^2}{rc}\right)^{\lambda_k} + \left(\frac{a^2c}{b^2r}\right)^{\lambda_k}\right]$$

Та коли $r > c$:

$$G_0(r, c) = 0$$

$$G_k(r,c) = -\frac{1}{2r\left[a + \left(\frac{a}{b}\right)^{2\lambda_k}\right]} * \left[-\left(\frac{c}{r}\right)^{\lambda_k} + \left(\frac{rc}{b^2}\right)^{\lambda_k} + \left(\frac{a^2}{rc}\right)^{\lambda_k} - \left(\frac{a^2r}{b^2c}\right)^{\lambda_k}\right]$$

РОЗДІЛ 2

ГРАФІЧНА ДЕМОНСТРАЦІЯ

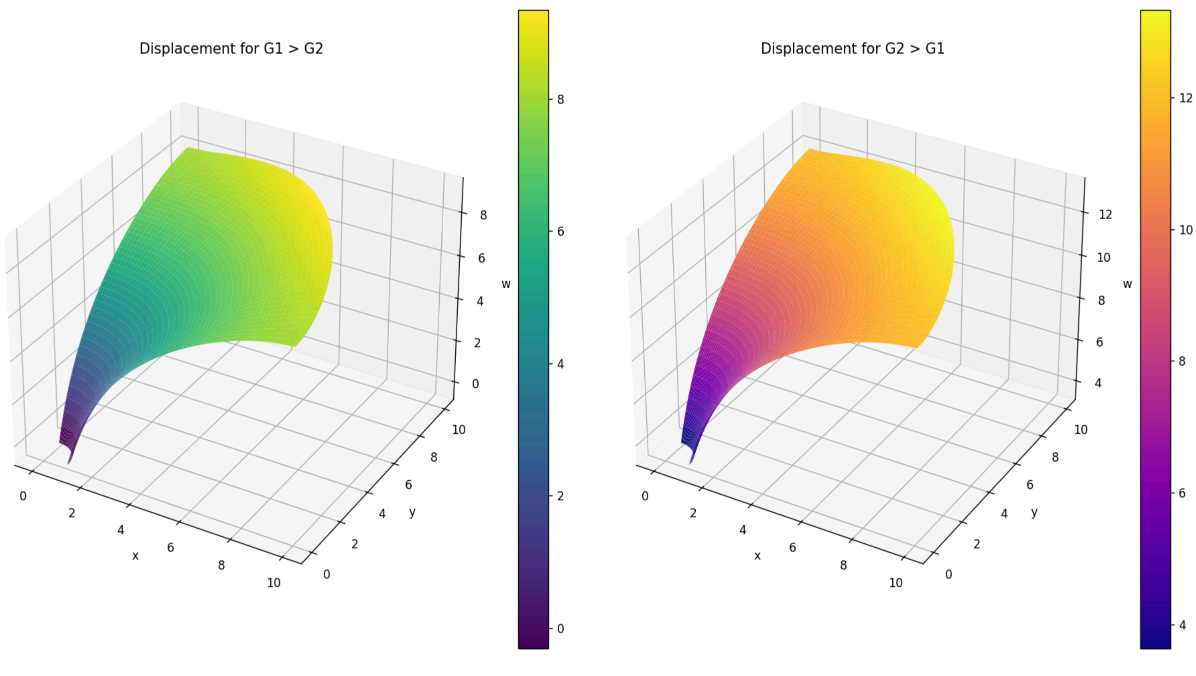
Задаємо параметри:

$a = 1,\ c = 5,\ b = 10$
$P_0, P_k,\ G_0(r, c), G_k(r, c)$ були наведені раніше.

2.1 Графіки переміщення

Кольори на графіку відображають відносну величину переміщення $w(r, \varphi)$, де більш темні відтінки - низькі значення, а більш світлі - високі.

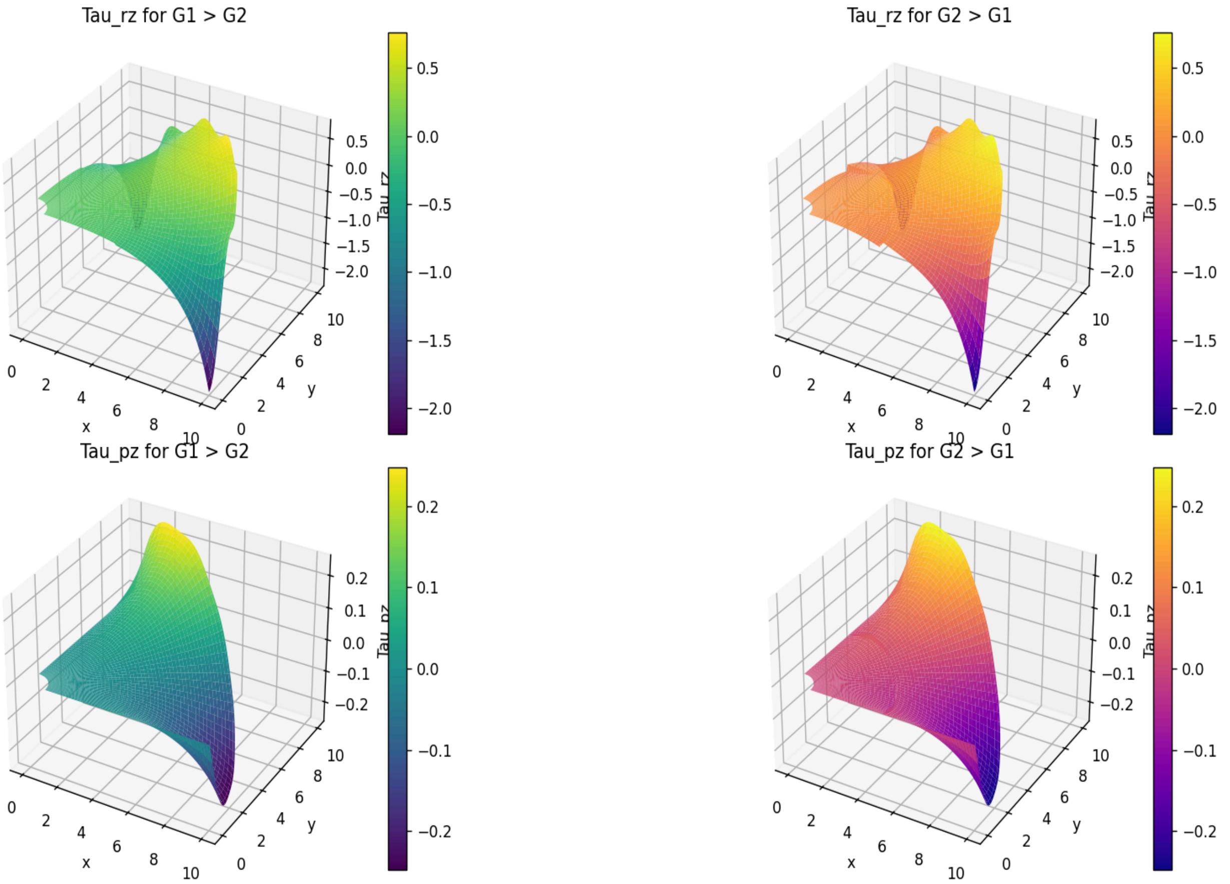
$G_1 = 5,\ G_2 = 1, G_1 = 1,\ G_2 = 5$



2.2 Графіки напружень

Розподіл напружень τ_{rz}, $\tau_{\varphi z}$

Кольори на графіках відображають величину напружень у різних точках клину. Яскравіші відтінки вказують на вищі значення напружень, а більш темні - відповідають нижчим значенням.



ВИСНОВКИ

У даній роботі була розглянута задача поздовжнього зсуву для складеного двічі усіченого клину. За допомогою детального аналізу та застосування різних функцій і методів було отримано загальний розв'язок задачі та визначено необхідні параметри для побудови графічних результатів. Зокрема, розраховано переміщення та розподіл напружень для різних співвідношень жорсткості матеріалів клину.

Отримані результати свідчать, що обраний метод дозволяє ефективно прогнозувати поведінку складеного клину при поздовжньому зсуві. Це підтверджено графічними даними, що демонструють зміну напружень в залежності від параметрів клину та властивостей матеріалу.

У майбутніх дослідженнях можна розглянути вплив різних факторів, таких як форма тріщини та властивості матеріалу, на поведінку системи при поздовжньому зсуві. Крім того, важливо розглянути можливість використання отриманих результатів для розробки нових методів аналізу напружено-деформованих станів для більш складних систем, зокрема з міжфазними тріщинами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Vaysfeld N., Zhuravlova Z. Mixed Boundary Problems in Solid Mechanics. UNITEXT (UNITEXT, volume 155). La Matematica per il 3+2 (UNITEXTMAT) 164 p. 2023
2. W. Nowacki. Teoria sprezystosci. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1970
3. Методичні вказівки до курсу «Математичне моделювання деяких задач механіки та техніки» для студентів 3 курсу спеціальности 6.04030101 «Прикладна математика» (укладачі Процеров Ю.С., Мойсеенок О.П.). Одеса, 2015, 61 с. (Розміщена на сайті Наукової бібліотеки Одеського національного університету ім. І.І. Мечнікова).
4. Попов Г.Я., Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. Навчальний посібник з курсу «Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень». Одеса: Астропринт, 2005, 184 с.
5. Божедарник В.В., Сулім Г.Т. Елементи теорії пружності. Львів: Світ, 1994, 560 с.
6. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості. К: Вища школа, 2002, 312 с.